

Prof. Dr. Martin Schmidt
Eva Lübcke

Übungsblatt 5

Analysis II
15. März 2017

1. Ableitungen im Mehrdimensionalen.

- (a) Man *untersuche* für die folgenden Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils, an welchen Stellen f partiell differenzierbar ist, und *berechne* dort $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 5$ (3 Punkte)

(ii) $f(x, y) = \ln \left| -\frac{1}{3}x^3 + x - y^3 \right|$ (3 Punkte)

(iii) $f(x, y) = \sin(x + y) \cdot \sin(x - y)$ (3 Punkte)

- (b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y^2 \exp(x), \cos(2x - y)).$$

Begründe ausführlich, warum f differenzierbar ist, und *berechne* $f'(0, \frac{3}{2}\pi)$. (4 Punkte)

- (c) Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - y, x^3 + y^3 + z^2) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy).$$

Berechne $(g \circ f)'$. (4 Punkte)

- (d) *Berechne* den Gradienten von f für $(x, y) \neq (0, 0)$ sowie die Richtungsableitungen von

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - y^3 x}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

an $(x, y) = (0, 0)$ in Richtung $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ und an $(x, y) = (1, 1)$ in Richtung $(v, w) = (3, 4)$. (6 Punkte)

2. Über die Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume, $U \subset X$ eine offene und konvexe Teilmenge und $f : U \rightarrow Y$ eine differenzierbare Funktion, so dass $\|f'\|$ auf U beschränkt ist.

- (a) *Zeige*, dass f Lipschitz-stetig ist. (4 Punkte)

- (b) *Beweise oder widerlege* die Aussage aus (a), wenn U nicht als konvex vorausgesetzt wird. (20 Zusatzpunkte)

Hinweis: Eine Menge $U \subset X$ heißt *konvex*, wenn für alle $a, b \in U$ gilt, dass die Menge $\{a(1 - t) + bt \mid t \in [0, 1]\}$ ganz in U enthalten ist.

3. Ableitung affiner Abbildungen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume und $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung.

- (a) *Beweise:* Ist $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ für jedes $x \in X$, so ist f konstant. (4 Punkte)
[Tipp: Schrankensatz.]
- (b) *Beweise:* Ist f' konstant, d.h. gibt es ein $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $f'(x) = A$ für jedes $x \in X$, so gibt es ein $c \in Y$ mit $f(x) = A(x) + c$ für jedes $x \in X$. (4 Punkte)
[Tipp: $x \mapsto f(x) - A(x)$.]

4. Der Funktionenraum $C_b([-1, 1], \mathbb{R})$.

Mit $C_b([-1, 1], \mathbb{R})$ bezeichnen wir den Banachraum der stetigen und beschränkten Funktionen $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Für $f \in C_b([-1, 1], \mathbb{R})$ definieren wir eine Funktion $F(f) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(f)(x) := f\left(\frac{x}{3}\right) \quad \text{für } x \in [-1, 1]. \quad (\star)$$

- (a) *Zeige,* dass $F \in \mathcal{L}(C_b([-1, 1], \mathbb{R})) = \mathcal{L}(C_b([-1, 1], \mathbb{R}), C_b([-1, 1], \mathbb{R}))$. (6 Punkte)
- (b) *Zeige:* F ist Lipschitz-stetig. Als Lipschitz-Konstante kann $L = 1$ gewählt werden. (4 Punkte)
- (c) *Beweise oder widerlege:* F ist eine Isometrie, d.h. es gilt

$$\|F(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$$

für alle $f \in C_b([-1, 1], \mathbb{R})$.

(5 Punkte)



Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 22. März 2017, um 8.30 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.