Offene u. abgeschlossene Mengen

Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d), wobei X eine beliebige Menge ist und d eine Metrik ist.

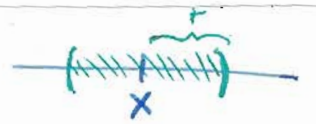
Außerdem benutzen wir $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $r > 0$, $x, x_0 \in X$ $A, A_1, \mathcal{O} \subseteq X$

Definitionen:

- $B(x, r) = \{ y \in X : \ d(x,y) < r \}$

  offener Ball um x mit Radius r in X

z.B. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$



$B(x, r)$

$= \{ y \in \mathbb{R} : |x-y| < r \}$

$B(1, \frac{1}{4})$

$= \{ x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \frac{1}{4} \}$

$= (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

ohne Rand

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < r \}$

ohne Rand

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2} < \frac{1}{4} \}$

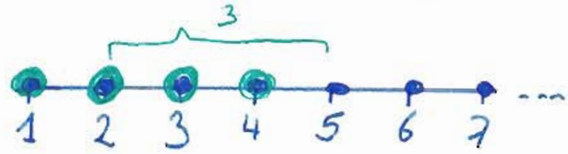
$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$

ohne Rand

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r \}$

Überlege:
Wie sieht $B(1, \frac{1}{4})$ in $\|\cdot\|_1$-Norm aus?

$(\mathbb{N}, |\cdot|)$



$B(2,3) = \{1, 2, 3, 4\}$

ist offener Ball in $\mathbb{N}$, aber nicht in $\mathbb{R}$, da die Punkte „dazwischen" fehlen.

1 ist kleinstes Element in $\mathbb{N}$. $0 \notin \mathbb{N}$, damit auch nicht im $B(2,3)$ auf $(\mathbb{N}, |\cdot|)$

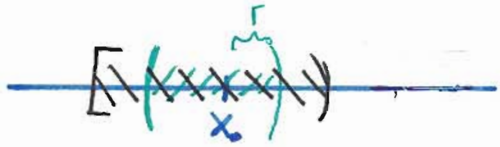
So ist $B(2,3)$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gleich $(-1, 5)$

- $\sigma \subseteq X$ Umgebung von $x_0 \in X$

$\Leftrightarrow \exists r > 0 : \underbrace{B(x_0, r)}_{\text{als Ball in } X} \subseteq \sigma$

Also: σ ist Umgebung von x_0, genau dann, wenn man in σ einen offenen Ball legen kann, sodass der offene Ball in der Umgebung liegt.

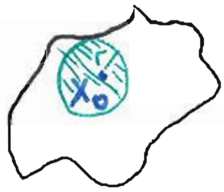
z.B.: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$



Umgebung von x_0

offener Ball, der in Umgebung von x_0 liegt mit Radius $r>0$

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$



Umgebung von x_0

mit offenem Ball $(r>0)$ in der Umgebung von x_0

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (2n, 2n+1] \right) \cap [1, \frac{5}{2})$

ist Umgebung von $x_0 = 2.25$

da $B(2.25, 0.2) = (2.05, 2.45)$

$\subseteq A = (2, 2.5)$

Tipp: • Man zeigt, dass $\sigma \subseteq X$ Umgebung von x_0, indem man zeigt, dass man einen offenen Ball in σ um x_0 finden kann, sodass $B(x, r) \subseteq \sigma$

• Man zeigt, dass $\sigma \subseteq X$ nicht Umgebung von x_0 ist, indem man zeigt, dass $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, r) \nsubseteq \sigma$, es also mindestens ein Element liegt, dass nicht in σ liegt (für jede Wahl von $\varepsilon > 0$)

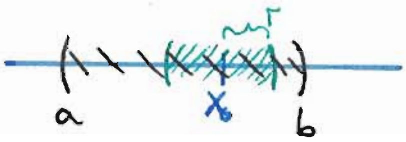
⇝ Beispiel: siehe Seite 2

$B(2,3)$ in $\mathbb{N}$ aber nicht in $\mathbb{R}$

- $\mathcal{O} \subseteq X$ offen
  $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{O} \ \exists r > 0 \ : \ B(x,r) \subseteq \mathcal{O}$

Also: Eine Menge ist offen, genau dann, wenn man für jedes Element in $\mathcal{O}$ einen Ball mit Radius $r>0$ legen kann, sodass der Ball in $\mathcal{O}$ liegt.

z.B.: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$



offen (a,b)

Bew.: Sei $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $a<b$,
nun kann man um jedes $x_0 \in (a,b)$ einen Ball mit Radius $r>0$ legen.
Explizit lässt sich $r = \frac{1}{2} \operatorname{Min}\{|x_0-a|, |x_0-b|\}$ wählen. Dann ist $B(x_0, r) \subseteq (a,b)$

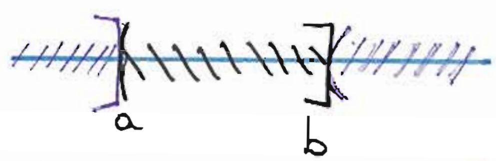
- A abgeschlossen
  $\Leftrightarrow A^c$ offen

Also: Um zu prüfen, ob eine Menge abgeschlossen ist, müssen wir immer das Komplement anschauen

Tipp: Man zeigt, dass eine Menge nicht offen ist, indem man zeigt, dass es ein Element in der Menge gibt, um das man keinen ε-Ball ($\varepsilon>0$) legen kann, der in der Menge liegt.
(andere Beweise sind hier natürlich auch möglich)

Achtung: Wenn eine Menge nicht offen ist, folgt daraus i. A. nicht, dass sie abgeschlossen ist!

z. B. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$



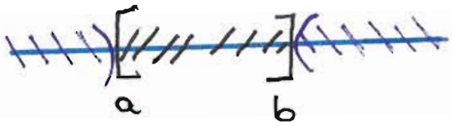
nicht abgeschlossen $(a,b]$

Wieder wird das Komplement betrachtet

$(a,b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$

Nun gilt, dass $(-\infty, a]$ nicht offen ist, da man um a keinen Ball legen kann, der in $(-\infty, a]$ enthalten ist. Also auch die Vereinigung der beiden Mengen nicht offen.
Daraus folgt, dass $(a,b]$ nicht abgeschlossen ist.

Tipp: Man zeigt, dass eine Menge nicht abgeschlossen ist, indem man zeigt, dass das Komplement nicht offen ist.

z.B.: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 

abgeschlossen $[a,b]$

Man betrachtet dazu das Komplement von $[a,b]$. Das ist:

$[a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

Nun gilt, dass $(-\infty, a)$ und (b, ∞) jeweils offen sind (analog zum vorherigen Bsp. Also ist auch deren (endl.) Vereinigung offen.

Aus der Offenheit des Komplements folgt, dass $[a,b]$ abgeschlossen

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 

nicht offen $[a,b)$

Nun wählt man $a \in [a,b)$ aus.

Es gilt jetzt für jedes $\varepsilon > 0$, dass $y := a - \frac{\varepsilon}{2}$ im Ball um a mit Radius ε liegt. Es gibt also keinen Ball mit Radius $\varepsilon > 0$, sodass

$B(a, \varepsilon) \subseteq [a,b)$,

weil $y \in B(a,\varepsilon)$ und $y \notin [a,b)$

Also $[a,b)$ nicht offen

- Abschluss von A:

$$\overline{A} := \bigcap \{ A' : A' \text{ abgeschlossen und } A' \supseteq A \}$$

Also ist der Abschluss von A der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

Folgende Definition des Abschlusses ist äquivalent zur obigen:

$$C := \{ x \in X : \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \}$$

Dies zeigen wir jetzt:

Beh.: $C = \overline{A}$

Bew.: „$\overline{A} \subseteq C$": Sei $x \in \overline{A}$.

Ann.: $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq A^c$

$\Rightarrow \exists B \supseteq A$ abgeschlossen: $\underbrace{B \setminus B(x, \varepsilon)}_{=: B'}$

mit $B' \supseteq A$ abgeschlossen

$\Rightarrow x \notin \overline{A}$ ↯ zu $x \in \overline{A}$

„$C \subseteq \overline{A}$": Sei $x \in C$, $B \subseteq X$ abgeschlossen, $A \subseteq B$

Ann.: $x \notin B$

$\Rightarrow B^c$ offen und $x \in B^c$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq B^c$

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset$

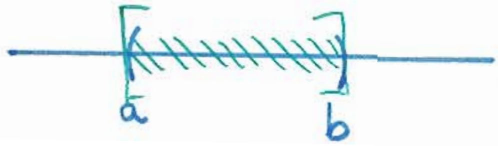
$\overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ ↯ zu $x \in C$

$\Rightarrow \overline{A} \subseteq C \subseteq \overline{A}$

$\Rightarrow \overline{A} = C$

Überlege dir, wie man die folgenden Beispiele zeigt.

z.B.: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$



Abschluss von (a,b): $\overline{(a,b)} = [a, b]$

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_3)$ $\quad A_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_3 < 1, \ x_1 = 0\}$

$\overline{A_2} = \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ $\quad A = \mathbb{Q}$

$\overline{A} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrationale Zahlen) dicht in $\mathbb{R}$ liegen.

- inneres Punkt $x_0 \in A \subseteq X$ von A

  $\Leftrightarrow \exists$ Umgebung $U \subseteq X$ von x, sodass $x_0 \in U \subseteq A$

Hinweis: x_0 innerer Punkt von A

$\Leftrightarrow \exists r > 0 : \ B(x_0, r) \subseteq A$

z.B.: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad x_0 = 1$ innerer Punkt von $(0, 2)$

Überlege dir den Beweis.

Es gilt:

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c} \overset{!}{=} \overline{A} \setminus A^\circ$$

<u>Beweis:</u> $\overline{A} \setminus A^\circ \overset{\text{Def.}}{=} \overline{A} \cap (A^\circ)^c$

Also müssen wir zeigen, dass

$$\overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap (A^\circ)^c$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{A^c} = (A^\circ)^c.$$

„$\overline{A^c} \subseteq (A^\circ)^c$": Sei $x \in \overline{A^c}$. Dann gibt es $\forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Also schneidet jeder Ball um x A^c.

$\Rightarrow$ $\nexists$ Ball um x, der ganz in A enthalten ist

$\Rightarrow x \notin A^\circ$

$\Rightarrow x \in (A^\circ)^c$

„$(A^\circ)^c \subseteq \overline{A^c}$": Sei $x \in (A^\circ)^c$. Dann $x \notin A^\circ$

$\Rightarrow \nexists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \overline{A^c}$

Also: Der Rand ist gleich der Menge ohne ihr Inneres.

- Inneres von A

$$A^\circ := \{ x_0 \in A \mid x_0 \text{ innerer Punkt} \}$$

Also: Menge der inneren Punkte bildet das Innere

Überlege dir, wie man die folgenden Beispiele zeigt.

z.B.: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad A = (-1, 1]$

$A^\circ = (-1, 1)$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad A = \mathbb{N}$

$A^\circ = \emptyset$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad A = [-2, 1) \cup (1, 5) \cup [3, 7]$

$A^\circ = (-2, 1) \cup (1, 5) \cup (3, 7)$

- Rand von A:

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

Also: Der Rand von einer Menge ist der Abschluss der Menge geschnitten mit dem Abschluss des Komplements.

Tipp: Für jedes Element auf dem Rand gilt, dass man für jeden ε-Ball, den man um das Element legt, ein Element findet, dass in der Menge liegt und zugleich ein Element findet, das im Komplement der Menge liegt, denn $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

Überlege dir für folgende Beispiele eine Begründung.

z.B. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad A = (-1, 1]$ $\quad \bar{A} = [-1, 1]$

$\partial A = \{-1, 1\}$ $\quad A^\circ = (-1, 1)$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad A = \mathbb{Q}$ $\quad \bar{A} = \mathbb{R}$

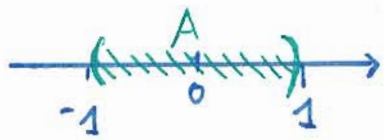
$\partial A = \mathbb{R}$ $\quad A^\circ = \emptyset$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\quad A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$

$\partial A = \{-1, 1\}$

$A^\circ = A$

$\bar{A} = [-1, 1]$



Vergleiche!

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ $\quad A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < 1 \text{ und } x_1 = 0\}$

$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1 \text{ und } x_1 = 0\}$

$A^\circ = \emptyset$

$\bar{A} = \partial A$