

Übung 6

Differenzierbarkeit und Gradient

22. März 2017

Aufgabe 1

Sei \mathcal{A} eine normierte Algebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Wir betrachten die Abbildungen

$$f_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^2,$$

$$f_3 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^3,$$

$$f_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Begründe, warum f_i für $i = 2, 3, n$ differenzierbar ist. Gebe zudem den Raum an, der $f'_i(A)$ als Element enthält.
- (b) Bestimme die Ableitung von f_i für $i = 2, 3, n$ an der Stelle A in Richtung B .

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine *Niveaulinie* von f , das heißt eine differenzierbare Abbildung, so dass die Funktion $f \circ c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konstant ist. Zeige, dass für $t \in (a, b)$ gilt:

$$\nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = 0$$

mit $c'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))$. *Interpretation.* Der Gradient $\nabla f(x)$ steht senkrecht auf der „Niveaufläche“ $f^{-1}[\{f(x)\}]$ von f . (Beachte, dass c eine Kurve in dieser Niveaufläche beschreibt.)