

6. Übung

23. Grenzwertberechnungen.

- (a) Untersuchen Sie die im Folgenden definierten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ (2 Punkte)

(ii) $b_n := \frac{1+n^2}{2+3n+n^2}$ (2 Punkte)

(iii) $c_n := \frac{2^n+3^n}{5^n}$ (2 Punkte)

- (b) Man finde jeweils ein Beispiel für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ggf. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften, und zeige, dass das Beispiel tatsächlich die Eigenschaften besitzt.

(i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben unbeschränkt, aber es gilt nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. (3 Punkte)

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$,
wobei $c \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene Zahl ist. (3 Punkte)

(iii) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. (2 Punkte)

24. Ein Näherungsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$. Bereits vor 4000 Jahren war den Summern ein Iterationsprozess bekannt, der bei Eingabe einer Zahl $a > 0$ eine Näherung für \sqrt{a} liefert. Wir formulieren diesen hier speziell für $a = 2$ (also zur Näherung an $\sqrt{2}$): Dazu definieren wir eine Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv wie folgt:

$$x_0 := \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

- (a) Mithilfe eines (Taschen-)Rechners berechne man x_1, x_2, x_3 und x_4 . Sieht man daran schon, wie sich die x_n an $\sqrt{2}$ annähern? (2 Punkte)

Wir schreiben im Folgenden die x_n als Brüche, d.h. wir schreiben $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ und den Startwerten $p_0 := 3$ und $q_0 := 2$.

(b) Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$ und $q_{n+1} = 2p_nq_n$. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass $p_{n+1} - \sqrt{2}q_{n+1} = (p_n - \sqrt{2}q_n)^2$ und somit $p_{n+1} > \sqrt{2}q_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. [Warum kann in der letzten Ungleichung keine Gleichheit gelten?] (3 Punkte)

(d) Zeigen Sie mit Hilfe von (c), dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. (5 Punkte)

(e) Man zeige $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2$ und folgere hieraus durch vollständige Induktion, dass $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (4 Punkte)

- (f) Man folgere aus (c) und (e), dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{q_n^2} \quad (3 \text{ Punkte})$$

Bitte wenden.

(g) Zeigen Sie mit Hilfe von (d), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2 \left(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

gilt und folgern Sie mit (f), dass $c := \frac{1}{2\sqrt{2}}$ die kleinste (und somit bestmögliche) Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist, so dass

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| < c \cdot \frac{1}{q_n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(3 Punkte)

25. Über Häufungspunkte.

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent sind. Sei H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweisen Sie, dass $H = \{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}\}$ gilt.

(4 Punkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 20. Oktober 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.

Hinweis: Das Tutorium der Gruppe 3 (Dienstag, 12:00 Uhr bei Dimitris Thanos) findet ab 18. Oktober im Raum **A5, C012** statt (anstatt wie bisher in Raum C015).