

11. Übung

38. Links- und rechtsseitige Stetigkeit

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f in $x_0 \in X$ *linksseitig stetig* (bzw. *rechtsseitig stetig*) ist, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $f_- : X \cap (-\infty, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. eine in x_0 stetige Funktion $f_+ : X \cap [x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$) gibt, die auf $X \cap (-\infty, x_0]$ (bzw. auf $X \cap [x_0, \infty)$) mit f übereinstimmt.

Beweisen Sie: f ist genau dann in $x_0 \in X$ stetig, wenn f in x_0 sowohl linksseitig stetig als auch rechtsseitig stetig ist mit $f(x_0) = f_-(x_0) = f_+(x_0)$. (6 Punkte)

39. Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Nach Definition 5.20 heißt f *gleichmäßig stetig*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X : (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$$

Welche der folgenden Aussagen sind *äquivalent* zur gleichmäßigen Stetigkeit von f ? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder Gegenbeispiel.

(a) $\exists \delta > 0 \forall \epsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in X : (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ (4 Punkte)

(b) $\forall x_0 \in X \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in B(x_0, \delta) : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ (4 Punkte)
(mit $B(x_0, \delta)$ ist hierbei der Ball in X um x_0 mit Radius δ gemeint, vgl. Definition 5.1)

(c) $\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X : (|x_1 - x_2| < c\delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ (3 Punkte)

(d) $\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X : (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < c\epsilon)$ (3 Punkte)

40. Über punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Wir definieren die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 2n^2x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x & \text{falls } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist. (3 Punkte)
[Tipp: Aufgabe 38.]

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. (3 Punkte)

(d) Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist. (3 Punkte)

Bitte wenden.

41. Hinreichende Kriterien für Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer mit $0 \in X$ sowie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\alpha, C > 0$.

- (a) Es gelte $|f(x)| \leq C \cdot |x|^\alpha$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 := 0$ stetig ist mit $f(0) = 0$. (3 Punkte)
- (b) Nun sei X sogar eine Umgebung von 0 und es gelte $|f(x)| \leq C \cdot |x|^{1+\alpha}$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit $f(0) = f'(0) = 0$. (3 Punkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 24. November 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.

Hinweis: Die Zeit und der Ort der Klausur sind nun bekannt: Die Klausur findet am **21.12.2016** um **8:30 Uhr im Raum SO 108** (Ostflügel des Schlosses) statt.