

## 2. Übung

### 6. Bilder von Abbildungen

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen den Mengen  $X$  und  $Y$  und seien  $A$  und  $B$  Teilmengen von  $X$ .

- (a) Beweisen Sie:  $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ . (4 Punkte)
- (b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass die Aussage  $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$  im Allgemeinen *nicht* gilt. (3 Punkte)
- (c) Nun sei  $f$  zusätzlich als injektiv auf  $X$  vorausgesetzt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Aussage aus (b) gilt, d.h.  $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ . (5 Punkte)

### 7. Schnittmengen und Urbilder

Gegeben seien die Mengen  $X, Y$  und  $A \subseteq X$ . Ferner sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Wir definieren die Abbildung  $g : A \rightarrow Y$  durch  $g := f|_A$ , d.h.  $g(x) := f(x)$  für alle  $x \in A$ .

Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge  $B$  von  $Y$

$$g^{-1}[B] = A \cap f^{-1}[B]$$

gilt. (4 Punkte)

### 8. Rechenregeln für reelle Zahlen

Es seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Beweisen Sie die folgenden Regeln:

- (a)  $(a < b \text{ und } c < d) \implies a + c < b + d$ . (2 Punkte)
- (b)  $(0 < a < b \text{ und } 0 < c < d) \implies ac < bd$ . (2 Punkte)
- (c)  $ab > 0 \iff (a > 0, b > 0 \text{ oder } a < 0, b < 0)$ . (5 Punkte)
- (d)  $ab < 0 \iff (a > 0, b < 0 \text{ oder } a < 0, b > 0)$ . (5 Punkte)

### 9. Beträge

- (a) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie die sog. *Parallelogrammungleichung*:  $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$ .  
[Tipp: Man zeige zuerst  $|a + b| + |a - b| \geq 2|a|$ .] (3 Punkte)
- (b) Zeigen Sie: Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b \neq 0$  gilt

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2.$$

[Tipp: Man überlege sich, dass es ausreicht,  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  für  $x > 0$  zu beweisen. Hierfür zeige man zunächst  $(x - 1) \cdot (\frac{1}{x} - 1) \leq 0$ .] (4 Punkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 22. September 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.