

### 13. Übung

**Hinweis:** Die Aufgaben dieser Übung dienen zur Vorbereitung der letzten Vorlesungsthemen für die Klausur. Sie werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Die Lösungen werden ab 12. Dezember wie üblich als youtube-Videos veröffentlicht.

#### 46. Extremwertsuche

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2}{1+x^4}.$$

- (a) Berechnen Sie  $f'(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  und finden Sie alle kritischen Punkte von  $f$ . [Hinweis: Es gibt genau drei kritische Punkte, welche im Folgenden mit  $x_1 < x_2 < x_3$  bezeichnet seien.]
- (b) Untersuchen Sie, ob  $f$  auf den Intervallen  $(-\infty, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$  und  $[x_3, \infty)$  jeweils monoton wachsend, monoton fallend oder keines von beidem ist.
- (c) Entscheiden Sie für die kritischen Punkte von  $f$  jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keines von beidem handelt. Berechnen Sie außerdem die zugehörigen Funktionswerte.
- (d) Bestimmen Sie die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (e) Skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .
- (f) Untersuchen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, ob die Funktion  $f$  ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt und bestimmen Sie gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden.

#### 47. Stammfunktionen

Berechnen Sie die folgenden (auf geeigneten Definitionsbereichen definierten) Stammfunktionen und machen Sie bei (a) bis (c) jeweils die Probe durch Differentiation.

- (a)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- (b)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- (c)  $\int x \arcsin(x) dx$
- (d)  $\int \frac{1}{x^3-1} dx$  [Tipp: Partialbruchzerlegung]

#### 48. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

- (a)  $\int_1^8 \frac{\exp(1/x)}{x^2} dx$
- (b)  $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

*Bitte wenden.*

#### 49. Ein Integral aus der Fourier-Analysis

Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}.$$

[Tipp: Für  $m \neq n$  wende man zweimal partielle Integration an, um zu zeigen, dass ein gewisses Vielfaches des gesuchten Integrals verschwindet. Für  $m = n$  wende man einmal partielle Integration und anschließend die Gleichung  $\sin^2 = 1 - \cos^2$  an.]

#### Informationen zur Klausur:

Die **Klausur** zur Analysis I findet am **Mittwoch, 21. Dezember 2016 von 8.30 bis 10.00 Uhr im Raum SO 108 (Ostflügel des Schlosses)** statt. Bitte erscheinen Sie spätestens 15 Minuten vor Beginn der Klausur. Für die Klausur brauchen Sie kein Schreibpapier mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird. Als *Hilfsmittel* dürfen Sie ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt mitbringen und während der Klausur verwenden. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten, Lupen) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes Handy ist während der Klausur abzuschalten.

Bitte bringen Sie zur Klausur Ihren Studentenausweis bzw. Ihre ecUM-Karte und Ihren Personalausweis (oder Reisepass) mit.