

## 12. Übung

### 42. Ein Zwischenwertsatz für die Ableitung

Die Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar und  $f'$  sei nicht konstant. Zeigen Sie, dass es zu jedem  $\eta \in \mathbb{R}$  mit

$$\inf\{f'(x) : x \in (a, b)\} < \eta < \sup\{f'(x) : x \in (a, b)\}$$

ein  $\xi \in (a, b)$  gibt mit  $f'(\xi) = \eta$  (6 Zusatzpunkte)

[Tipp und Warnung: Betrachten Sie  $g(x) := f(x) - \eta x$  und bedenken Sie, dass  $f'$  nicht notwendigerweise stetig zu sein braucht.]

### 43. Differenzierbarkeit

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , sowie  $x^* \in (a, b)$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion.

- (a) Es sei  $f$  in  $x^*$  differenzierbar. Wir setzen weiter voraus, dass es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in (a, b) \setminus \{x^*\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  gibt, so dass  $f(x_n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Zeigen Sie:  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ . (3 Zusatzpunkte)

*Bemerkung:* Eine Nullstelle von  $f$ , die zugleich Nullstelle von  $f'$  ist, bezeichnet man auch als *Nullstelle höherer Ordnung*.

- (b) Nun sei  $f$  differenzierbar auf  $(a, b) \setminus \{x^*\}$  und es existiere ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow x^*-} f'(x) = c = \lim_{x \rightarrow x^*+} f'(x)$ . Zeigen Sie, dass  $f$  dann auch in  $x^*$  differenzierbar ist, und zwar mit  $f'(x^*) = c$ . (5 Zusatzpunkte)

[Tipp: Zu beweisen ist, dass die Funktion  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x) := \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$  für  $x \neq x^*$  und  $h(x^*) := c$  stetig ist. Dazu zeige man, dass  $h$  in  $x^*$  linksseitig stetig und rechtsseitig stetig ist, siehe Aufgabe 38. Denken Sie auch an den Mittelwertsatz.]

### 44. Die Produktregel für $n$ -te Ableitungen

Es seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $n$ -fach differenzierbare Funktionen und  $h := f \cdot g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Beweisen Sie:  $h$  ist  $n$ -fach differenzierbar und für die  $n$ -te Ableitung  $h^{(n)}$  gilt für alle  $x \in I$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

(mit der Konvention  $f^{(0)} := f$ ). Dabei bezeichnen  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$  die entsprechenden Binomialkoeffizienten. (7 Zusatzpunkte)

*Bitte wenden.*

#### 45. Grenzwertberechnung von Funktionswerten

- (a) Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{\tan(7x)}$ . (3 Zusatzpunkte)
- (b) Zeigen Sie:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ . (3+3 Zusatzpunkte)
- (c) Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . (3 Zusatzpunkte)
- (d) Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$  für  $\alpha, \beta > 0$ . (3 Zusatzpunkte)
- (e) Zeigen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$  und bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0+} (x \cdot \ln(x))$ . (3+3 Zusatzpunkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 1. Dezember 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.

**Hinweis:** Alle auf diesem Blatt erreichbaren Punkte sind Zusatzpunkte. Außerdem ist dies das letzte Blatt, auf das es Punkte gibt. Auf dem kommenden 13. (und nicht mehr abzugebenden) Übungsblatt wird es keine Punkte mehr geben. Es beinhaltet jedoch Aufgaben zu klausurrelevantem Stoff.