

10. Übung

35. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist gleichmächtig zu \mathbb{R} .

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig zur Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ist.

- (a) Zeigen Sie: \mathbb{R} ist gleichmächtig zum Intervall $(0, 1)$. [Tipp: Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{2+2|x|} + \frac{1}{2}$ eine Bijektion zwischen den betrachteten Mengen ist.] (5 Punkte)
- (b) Sei U eine beliebige unendliche Menge und A eine beliebige höchstens abzählbare Menge mit $U \cap A = \emptyset$. Zeigen Sie, dass U gleichmächtig zu $U \cup A$ ist. [Tipp: Satz 2.40(ii) mag hilfreich sein.] (5 Punkte)
- (c) Sei N die Menge aller konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Zeigen Sie, dass N abzählbar ist. (3 Punkte)
- (d) Folgern Sie mit Hilfe von (a),(b),(c), dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig zu \mathbb{R} ist. [Tipp: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kann mit den Folgen identifiziert werden, die Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, vgl. die Bemerkung nach Satz 2.52 (warum darf man das?). Denken Sie auch an Abschnitt 4.2.] (5 Punkte)

36. Über den Sinus hyperbolicus und den Cosinus hyperbolicus. Für $x \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

- (a) Schreiben Sie $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ jeweils als Potenzreihe in $x \in \mathbb{K}$. (4 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{K}$ die folgenden Identitäten gelten:
 - (i) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. (2 Punkte)
 - (ii) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$. (2 Punkte)
 - (iii) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y)$. (2 Punkte)

37. Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.

- (a) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. (4 Punkte)

- (b) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist. (3 Punkte)

Bitte wenden.

(c) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x},$$

von der wir bereits aus Aufgabe 29 wissen, dass sie stetig ist.

(i) Zeigen Sie, dass $f|_{[1, \infty)}$, d.h. die Einschränkung von f auf das Intervall $[1, \infty)$, Lipschitz-stetig ist. (2 Punkte)

(ii) Zeigen Sie, dass f auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$ ist. [Tipp: Satz 5.22] (6 Punkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 17. November 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.