

5. Übung

19. Rechnen mit komplexen Zahlen

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$ (2 Punkte)

(ii) $\frac{3+i}{4-i}$ (2 Punkte)

(iii) $\frac{(1+2i)^3 - (1+i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$ (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markieren Sie ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeigen Sie außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden. [Tipp: $z^3 - 1 = (z - 1) \cdot (z^2 + z + 1)$.] (5 Punkte)

20. Teilmengen der komplexen Zahlenebene

Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen von \mathbb{C} und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene, indem Sie die Mengen vorher geeignet umformen:

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (3 Punkte)

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < |z + 2|\}$ (4 Punkte)

(c) $C := \{z \in \mathbb{C} : \Im((1+i)z) \geq 1\}$ (4 Punkte)

21. Rechenregeln für komplexe Zahlen

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2). \quad (3 \text{ Punkte})$$

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Wenn $z := x + iy \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

erfüllt, dann erfüllt auch $\bar{z} = x - iy$ dieselbe Gleichung. (3 Punkte)

22. Summen und Beträge

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z_k, w_k \in \mathbb{C}$ für $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \sum_{k=1}^n |w_k|^2 - \left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 = \sum_{1 \leq k < j \leq n} |z_k \bar{w}_j - z_j \bar{w}_k|^2. \quad (6 \text{ Punkte})$$

Hinweis: Die Notation $\sum_{1 \leq k < j \leq n}$ bedeutet, dass über alle $k, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $1 \leq k < j \leq n$ summiert wird.

[Tipp: Es mag hilfreich sein, die Formel $\sum_{i,j=1}^n a_i b_j = (\sum_{i=1}^n a_i) \cdot (\sum_{i=1}^n b_i)$ für $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{C}$ zu verwenden. Warum gilt diese Formel?]

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 13. Oktober 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.