

#### 4. Übung

##### 14. Infimum und Supremum

Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  beschränkt sind und bestimmen Sie (mit Begründung!) ihr Infimum und ihr Supremum. Untersuchen Sie auch, ob Infimum und Supremum jeweils Elemente der Menge (und damit ihr Minimum bzw. Maximum) sind.

(a)  $A := \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$  (5 Punkte)

(b)  $B := (0, 1) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  (5 Punkte)

##### 15. Teilmengen in angeordneten Körpern

Sei  $\mathbf{K}$  ein angeordneter Körper.

(a) Zeigen Sie, dass in  $\mathbf{K}$  die Identität

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \left[ \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] = (0, 1)$$

genau dann gilt, wenn  $\mathbf{K}$  archimedisch ist. (5 Punkte)

*Erinnerung:* Die Formulierung "genau dann wenn" bedeutet, dass eine Äquivalenz zu zeigen ist, d.h. beide Richtungen " $\Rightarrow$ " und " $\Leftarrow$ ".

(b) Zeigen Sie, dass  $\{x \in \mathbf{K} \mid |x^2 - 1| < 3\} = (-2, 2)$  gilt. (2 Punkte)

##### 16. Nochmal Infimum und Supremum

Es seien  $X$  und  $Y$  nichtleere beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

(a)  $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$  (4 Punkte)

(b) Ist  $\inf X > 0$ , so besteht für das Supremum der Menge  $Z := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{x} \in X\}$  der Zusammenhang:  $\sup(Z) = (\inf X)^{-1}$ . (4 Punkte)

##### 17. Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung

(a) Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k,$$

sofern  $x_k \geq 0$  für alle  $k \geq 1$  oder falls  $-1 \leq x_k < 0$  für alle  $k \geq 1$  gilt. (6 Punkte)

(b) Belegen Sie durch je ein Gegenbeispiel,

(i) dass die Ungleichung nicht für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  gilt, wenn  $x_k < -1$  für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt und (2 Punkte)

(ii) dass es nicht genügt, lediglich  $x_k \geq -1$  für alle  $k$  zu fordern. (2 Punkte)

*Bitte wenden.*

**18. Vom „Größenverhältnis“ zwischen einer Menge und ihrer Potenzmenge.** Sei  $M$  eine beliebige Menge.

(a) Finden Sie eine injektive Abbildung  $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ . (2 Punkte)

(b) Sei  $g : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$  eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie: Ist

$$N_g := \{p \in M \mid p \notin g(p)\} \in \mathcal{P}(M),$$

so gilt

$$\text{für jedes } p \in M: \quad g(p) \neq N_g.$$

Insbesondere gibt es keine surjektive Abbildung  $g : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ . (4 Punkte)

[Tipp: Angenommen, es gäbe ein  $p_0 \in M$  mit  $g(p_0) = N_g$ . Dann führe man die beiden Möglichkeiten  $p_0 \in N_g$  und  $p_0 \notin N_g$  jeweils auf einen Widerspruch.]

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 6. Oktober 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.

**Hinweis:** Die Klausurtermine stehen nun fest:

- Zwischenklausur: 11.11.2016 von 12:00 bis 13:30 in B6, A001 (=Zeit und Ort der Großübung)
- Klausur: 21.12.2016 (Zeit und Ort werden noch bekannt gegeben)
- Nachklausur: 10.2.2017 (Zeit und Ort werden noch bekannt gegeben)