

## 7. Übung

### 26. Häufungspunkte

- (a) Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen  $(a_{kn})_{n \in \mathbb{N}}, (a_{kn+1})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (a_{kn+(k-1)})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent sind. Sei  $H$  die Menge der Häufungspunkte von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Zeigen Sie:  $H = \{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn+1}, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn+(k-1)}\}$ . [Tipp: Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 25. Der Beweis von Aufgabe 25 mag daher hilfreich sein.] (5 Punkte)
- (b) Formulieren Sie eine Verallgemeinerung von (a) für *beliebige* Teilfolgen (einen Beweis müssen Sie nicht angeben). (2 Zusatzpunkte)

### 27. Folgenkonvergenz

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge und  $a \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder Gegenbeispiel.

- (a)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{1}{\varepsilon}$ . (3 Punkte)
- (b)  $\exists c > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < c\varepsilon$ . (3 Punkte)
- (c)  $\forall \varepsilon > 0 \exists c > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < c\varepsilon$ . (3 Punkte)
- (d)  $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ . (3 Punkte)

### 28. Über den Limes superior. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkte reelle Zahlenfolgen, deren Menge reeller Häufungspunkte jeweils nicht leer sei.

- (a) Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Allgemeinen keinen reellen Häufungspunkt haben muss. (3 Punkte)
- (b) Beweisen Sie:  $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$ . (5 Punkte)
- (c) Belegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass  $\overline{\lim}(a_n + b_n) = \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$  im Allgemeinen *nicht* gilt. (3 Punkte)

### 29. Ein „Grenzwertsatz“ für die Quadratwurzel

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge, die gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Es gelte  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass dann auch die Folge  $(\sqrt{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

[Tipp: Man unterscheide die Fälle  $a = 0$  und  $a > 0$ . Im Fall  $a > 0$  denke man für die Abschätzung von  $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}|$  an Aufgabe 6c aus der Großübung.] (5 Punkte)

*Bitte wenden.*

### 30. Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz in  $\mathbb{R}$ . (Die Grenzwerte brauchen nicht berechnet zu werden.) (2+3+3 Punkte)

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \quad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}, \quad (c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k}$$

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 27. Oktober 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.

**Hinweis:** Ab 18. Oktober 2016 finden die **individualisierten Tutorien** statt. Genauere Informationen dazu entnehmen Sie bitte der Homepage zur Analysis I unter "Aktuelles".

**Erinnerung:** Im Zeitraum vom 12.10. bis 26.10.2016 müssen Sie sich für die Klausur im Studierendenportal anmelden (genauere Infos gibt es auf den Seiten des Studienbüros <http://www.uni-mannheim.de/studienbueros/pruefungen>).