

8. Übung

31. Rechnen mit Reihen

Beweisen Sie, dass die folgende Reihe in  $\mathbb{R}$  konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+3)} . \quad (6 \text{ Punkte})$$

[Tipp: Man schreibe  $\frac{1}{(2k-1)(2k+3)} = \frac{\alpha}{2k-1} + \frac{\beta}{2k+3}$  mit zu bestimmenden Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .]

32. Reihen, deren Glieder Quadrate sind. Es sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge.

- (a) Beweisen Sie: Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut in  $\mathbb{R}$  konvergiert, so konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  absolut in  $\mathbb{R}$ . (4 Punkte)
- (b) Belegen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass die Umkehrung von (a) falsch ist. (2 Punkte)
- (c) Man belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Aussage von (a) falsch wird, wenn man „absolute Konvergenz“ jeweils durch „Konvergenz“ ersetzt. (2 Punkte)

33. Über das Konvergenzverhalten der Summandenfolge konvergenter Reihen.

- (a) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende, reelle Zahlenfolge mit  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert. Zeigen Sie, dass dann  $(n \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist. (6 Punkte)  
  
[Tipp: Man verwende entweder das Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 4.3) oder Cauchy's Verdichtungssatz (Satz 4.12).]
- (b) Bleibt die Aussage von (a) richtig, wenn man auf die Voraussetzung, dass  $(a_n)_n$  monoton fallend sein soll, verzichtet? Man gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. (4 Zusatzpunkte)

*Bitte wenden.*

### 34. Über den Konvergenzradius von Potenzreihen.

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Wir untersuchen die hierdurch bestimmte Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

- (a) Beweisen Sie: Falls  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt und die Folge  $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  einen Grenzwert  $\alpha$  besitzt, so ist  $R := \frac{1}{\alpha}$  der Konvergenzradius obiger Potenzreihe. (5 Punkte)
- (b) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegeben durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^{n-2}}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie  $\alpha_1 := \underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ,  $\alpha_2 := \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ , sowie den Konvergenzradius  $R$  der zugehörigen Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und folgern Sie, dass  $R \neq \frac{1}{\alpha_1}$  und  $R \neq \frac{1}{\alpha_2}$  gilt.

*Bemerkung:* Dies zeigt, dass im Allgemeinen die Folge  $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  zur Bestimmung des Konvergenzradius nicht geeignet ist. (6 Punkte)

- (c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

- (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$  (2 Punkte)
- (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$  (2 Punkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 3. November 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.

**Hinweis:** Der Termin der Nachklausur wurde unverlegt auf den **4.2.2017**.

#### Informationen zur Zwischenklausur:

Die **Zwischenklausur** zur Analysis I findet am **Freitag, 11. November 2016 von 12.00 bis 13.30 Uhr im Raum B6, A001 (=Zeit und Ort der Großübung)** statt. Eine separate Anmeldung zur Zwischenklausur ist nicht erforderlich. Die Zwischenklausur wird als 9. Übungsblatt gewertet (mit etwas mehr Punkten als auf den regulären Übungsblättern). Das bedeutet, dass die in der Zwischenklausur gesammelte Punktzahl zu den Punkten der regulären Übungsblätter addiert wird und in die Berechnung der bekannten 50%-Grenze für die Zulassung zur Abschlussklausur mit eingeht. Dafür wird kommenden Montag (31. Oktober) kein neues Übungsblatt online gestellt. Insbesondere ist am 10. November auch kein Übungsblatt abzugeben. Das nächste reguläre 10. Übungsblatt wird am 7. November online gestellt (mit regulärem Abgabetermin 17. November). Der Stoff der Zwischenklausur ist der Stoff der Vorlesung bis einschließlich zum 4.11.2016.

Für die Zwischenklausur brauchen Sie kein Schreibpapier mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird.

Als *Hilfsmittel* dürfen Sie ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt mitbringen und während der Klausur verwenden. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten, Lupen) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes Handy ist während der Zwischenklausur abzuschalten.