

### 3. Übung

#### 10. Maximum und Minimum

Zeigen Sie: Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \quad \text{und} \quad \min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Dabei sind  $\max\{a, b\}$  und  $\min\{a, b\}$  definiert durch

$$\max\{a, b\} := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \min\{a, b\} := \begin{cases} b & \text{falls } a \geq b \\ a & \text{sonst} \end{cases}. \quad (6 \text{ Punkte})$$

#### 11. Infimum und Supremum

Es seien  $M, N \subseteq \mathbb{R}$  nicht-leere Teilmengen mit  $M \cup N = \mathbb{R}$ , so dass  $x < y$  für alle  $x \in M$  und alle  $y \in N$  gilt. Zeigen Sie, dass  $M$  nach oben und  $N$  nach unten beschränkt ist und dass

$$\sup(M) = \inf(N)$$

gilt.

(6 Punkte)

[Tipp: Zeigen Sie zunächst  $\sup(M) \leq \inf(N)$ . Dann führe man die Annahme  $\sup(M) < \inf(N)$  zu einem Widerspruch, und folgere so  $\sup(M) = \inf(N)$ .]

#### 12. Eine bijektive Funktion.

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-2, 3) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{t+2} & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{t}{3-t} & \text{für } t > 0 \end{cases}. \quad (9 \text{ Punkte})$$

[Tipp: Man zeige, dass  $f$  das Intervall  $(-2, 0]$  bijektiv auf das Intervall  $(-\infty, 0]$ , sowie das Intervall  $(0, 3)$  bijektiv auf das Intervall  $(0, \infty)$  abbildet. Warum folgt daraus die Bijektivität von  $f$  ?]

#### 13. Vollständige Induktion.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

- (a) Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ . (5 Punkte)
- (b) Die Potenzmenge einer  $n$ -elementigen Menge ( $n \in \mathbb{N}$ ) besitzt  $2^n$  Elemente. (5 Punkte)
- (c) Jede endliche, nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Maximum und ein Minimum. (Es genügt, die Aussage für das Maximum zu zeigen. Der Beweis für das Minimum geht analog.) (5 Punkte)

Die Lösungen sind bis spätestens **Donnerstag, den 29. September 2016, 13:00 Uhr** in den entsprechenden Briefkasten (Eingang A5-Gebäude, Teil C) einzuwerfen.