

25. Ein Nachtrag über Untermannigfaltigkeiten.

Es seien X, Y Mannigfaltigkeiten und $f : X \rightarrow Y$ eine glatte Abbildung von konstantem Rang. Dann ist bekanntlich für jedes $y \in f[X]$ das Urbild $M := f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit von X . Zeige, dass für $x \in M$ gilt:

$$T_x M = \ker T_x(f) . \quad (8 \text{ Punkte})$$

[Tipp. Im Beweis von Korollar 1.45 kann man nachlesen wie's gemacht wird. – Alternative Beweismöglichkeit: Ist $v \in T_x M$, so gibt es nach Definition eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Dann ist $f \circ \gamma = \dots$ und deswegen]

26. Die Lieklammer im \mathbb{R}^n .

(a) Es seien $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Vektorfelder auf \mathbb{R}^n . Zeige, dass dann gilt:

$$[F, G](x) = G'(x) \cdot F(x) - F'(x) \cdot G(x) . \quad (8 \text{ Punkte})$$

(b) Wir betrachten nun drei glatte Vektorfelder auf \mathbb{R}^4 , deren Einschränkungen auf \mathbb{S}^3 schon in Aufgabe 19(c) eine Rolle spielten:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_2, x_1, x_4, -x_3) ,$$

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_3, -x_4, x_1, x_2)$$

$$\text{und } H(x_1, x_2, x_3, x_4) := (-x_4, x_3, -x_2, x_1) .$$

(i) Berechne $[F, G]$, $[G, H]$ und $[F, H]$. (6 Punkte)

(ii) Checke ab, dass in dieser Situation die folgende Gleichung, die sogenannte *Jacobi-Identität* (siehe auch Aufgabe 27(a)), erfüllt ist:

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0 . \quad (3 \text{ Punkte})$$

27. Rechenregeln für die Lieklammer.

Es sei X eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Zeige: Die Lieklammer auf $\text{Vec}^\infty(X)$ ist \mathbb{R} -bilinear, schief-symmetrisch (d.h. für $F, G \in \text{Vec}^\infty(X)$ gilt $[G, F] = -[F, G]$), und für $F, G, H \in \text{Vec}^\infty(X)$ gilt die *Jacobi-Identität*

$$[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0 . \quad (6 \text{ Punkte})$$

[Tipp. Will man für Vektorfelder $F_1, F_2 \in \text{Vec}^\infty(X)$ die Gleichung $F_1 = F_2$ beweisen, genügt es wegen Satz 1.39, $\theta_{F_1} = \theta_{F_2}$ zu zeigen.]

- (b) Es sei $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte von X auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$. Dann betrachten wir für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Vektorfelder $F_i \in \text{Vec}^\infty(U)$ mit

$$F_i(x) = T_x(\phi)^{-1}(e_i),$$

wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ den i -ten Standardeinheitsvektor des \mathbb{R}^n bezeichne.

Man zeige, dass für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $[F_i, F_j] = 0$. (7 Punkte)

Bemerkung. Diese Aussage ist der Grund, warum einem in der Differentialrechnung auf dem \mathbb{R}^n (Analysis II) keine Lieklammern begegnen. Wir versichern: In der Analysis auf Mannigfaltigkeiten spielen Lieklammern eine wesentliche Rolle.

28. Kommutativität von Flüssen.

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten und die Vektorfelder $F, G \in \text{Vec}^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$F(x_1, x_2, x_3) = (1, x_3, -x_2) \quad \text{und} \quad G(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c).$$

- (a) Bestimme die Flüsse ψ_F und ψ_G von F bzw. G , und bestimme, für welche Wahlen der Konstanten a, b, c die beiden Flüsse miteinander kommutieren, d.h. dass für alle $t, s \in \mathbb{R}$

$$\psi_F(t, \psi_G(s, x)) = \psi_G(s, \psi_F(t, x))$$

gilt. (8 Punkte)

- (b) Berechne $[F, G]$, und bestimme, für welche Wahlen der Konstanten a, b, c die Gleichung $[F, G] = 0$ gilt. (4 Punkte)

Bekanntmachung

Die **mündlichen Prüfungen** zur Analysis III werden

am **Donnerstag, den 17. Dezember 2015**
sowie am **Montag, den 21. Dezember 2015**

stattfinden. Ihren Prüfungstermin vereinbaren Sie bitte bei Frau Braak (A5, Raum B129; Telefon 0621/181-2540; E-Mail braak@uni-mannheim.de).