Fourieranalysis

FS 15

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Fourierreihen

1.1 Die Gruppe $\mathbb{T}$ und die duale Gruppe $\mathbb{Z}$

Sei $\mathbb{T}$ die Menge $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dann ist $\mathbb{T}$ offenbar bezüglich der Multiplikation eine Gruppe. Aus der Analysis wissen wir, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{T}, x \mapsto e^{ix}$ surjektiv ist und $x + y$ auf $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ abbildet. Dies ist also ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf die multiplikative Gruppe $\mathbb{T}$. Der Kern dieses Gruppenhomomorphismuses ist die Untergruppe $2\pi\mathbb{Z}$

$$2\pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\pi n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann können wir die Gruppe $\mathbb{T}$ mit der Quotientengruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ identifizieren. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein Maximum m von $\{n \in \mathbb{Z} \mid 2\pi n \leq x + \pi\}$. Dann folgt $-\pi \leq x - 2\pi m < \pi$. Also können wir $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ mit der Menge $[-\pi, \pi)$ identifizieren. Dabei sollten wir aber beachten, dass jede Umgebung von $-\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ in $[-\pi, \pi)$ eine Menge von der Form $[-\pi, \varepsilon) \cup (\pi - \varepsilon, \pi)$ enthält. Eine Folge $\pi - \frac{1}{n}$ konvergiert also gegen $-\pi$. Deshalb können wir auch $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ mit $[-\pi, \pi]$ identifizieren, wobei wir $-\pi$ und π miteinander identifizieren. Als erstes wollen wir alle stetigen Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{T}$ bestimmen.

Satz 1.1. *Sei $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\chi(z) = z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = 1.$$

Beweis: Wegen der Stetigkeit von χ und exp gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$|\chi(e^{ix}) - \chi(e^0)| = |\chi(e^{ix}) - 1| < 1$$

gilt. Die Menge $\{z \in \mathbb{T} \mid |z-1| < 1\}$ wird durch $z \mapsto \frac{1}{i}\ln(z)$ bijektiv und stetig auf $y \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ abgebildet. Sei also $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), x \mapsto f(x)$ mit $\chi(e^{ix}) = e^{if(x)}$. Weil χ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt dann für $x, y \in (-\epsilon, \epsilon)$ mit $x+y \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\begin{aligned} f(x+y) - f(x) - f(y) \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{und} \\ |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq |f(x+y)| + |f(x)| + f(y)| < \pi \quad \text{also} \\ f(x+y) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $p_1, p_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\frac{q_1}{p_1} f\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = q_1 f\left(\frac{1}{q_1}\right) = q_1 q_2 f\left(\frac{1}{q_1 q_2}\right) = q_2 f\left(\frac{1}{q_2}\right) = \frac{q_2}{p_2} f\left(\frac{p_2}{q_2}\right).$$

Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\frac{q}{p} f\left(\frac{p}{q}\right) = c$ für alle $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dann folgt $f(x) = c \cdot x$ für alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ und weil f stetig ist, für alle $x \in (-\epsilon, \epsilon)$. Weil jedes Element von $\mathbb{R}$ eine endliche Summe von Zahlen in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ist, folgt auch $\chi(e^{ix}) = e^{icx}$. Wegen $1 = \chi(1) = \chi(e^{2\pi i}) = e^{2\pi i c}$ folgt $c \in \mathbb{Z}$. Also gilt $\chi(z) = z^n$. **q.e.d.**

Die Menge aller dieser stetigen Gruppenhomomorphismen bildet ihrerseits wieder eine Gruppe. Wenn wir nämlich zwei solche Elemente von $C(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ punktweise miteinander multiplizieren erhalten wir ein anderes solches Element

$$(z \mapsto z^n) \cdot (z \mapsto z^m) = z \mapsto z^n \cdot z^m = z^{n+m}.$$

Die Abbildung $z \mapsto 1$ ist dabei das neutrale Element und die Abbildung $z \mapsto z^{-n}$ das inverse von $z \mapsto z^n$. Deshalb ist die Gruppe offenbar isomorph zu der Gruppe $\mathbb{Z}$. Man nennt für eine abelsche Gruppe die Menge aller Gruppenhomomorphismen nach $\mathbb{T}$ die duale Gruppe. Wenn die Gruppe offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält, dann betrachtet man nur stetige Charaktere. Also ist von $\mathbb{T}$ die duale Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Diese duale Gruppe ist eine Teilmenge von der Algebra $C(\mathbb{T})$ der stetigen Abbildungen von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{C}$. Im folgenden werden wir viele verschiedene Funktionenräume betrachten. In der Regel betrachten wir dabei $\mathbb{C}$-wertige Funktionen und benennen nur die Menge, auf der diese Funktionen definiert sind. Den Vektorraum $C(\mathbb{T})$ versehen wir mit der Supremumsnorm $\| \; \|_\infty$, wodurch er zu einer Banachalgebra wird:

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{T}} |f(z)| \text{ für alle } f \in C(\mathbb{T}).$$

Indem wir $\mathbb{T}$ mit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ identifizieren, können wir $C(\mathbb{T})$ auch mit den Funktionen in $C(\mathbb{R})$ identifizieren, die bezüglich der Periode 2π periodisch sind. Diese Unteralgebra von $C(\mathbb{R})$ mit $\| \|_\infty$ bezeichnen wir mit $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Für ein $f \in C(\mathbb{R})$ gilt also

$$f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \Leftrightarrow f(x+2\pi) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| \text{ für } f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

Neben diesem Banachraum $C(\mathbb{T}) \simeq C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ werden auch noch folgende größere Banachräume eine wichtige Rolle spielen.

$$L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = \{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \mid f(x+2\pi) = f(x) \text{ fast überall in } x \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Räume haben die Norm:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Übungsaufgabe 1.2. *Zeige, dass für alle $1 \leq p \leq \infty$ die Räume $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ als Banachräume isomorph sind zu $L^p([-\pi,\pi]) \simeq L^p([-\pi,\pi)) \simeq L^p((-\pi,\pi]) \simeq L^p((-\pi,\pi))$.*

Die analogen Räume für die duale Gruppe sind definiert als $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, also die beschränkten Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| \text{ für } f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \qquad \text{und}$$
$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \mid \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^p < \infty\right\} \qquad \text{mit den Normen}$$
$$\|f\|_p = \left(\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für } 1 \leq p < \infty.$$

Daneben wird auch noch der Unterraum $c_0(\mathbb{Z})$ von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ eine Rolle spielen, der alle Abbildungen enthält, die im Grenzwert $|n| \to \infty$ gegen Null konvergieren.

Übungsaufgabe 1.3. *Zeige dass $c_0(\mathbb{Z})$ ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ ist.*

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die duale Gruppe von $\mathbb{Z}$ wieder $\mathbb{T}$ ist, also die biduale Gruppe von $\mathbb{T}$ gleich $\mathbb{T}$ ist. Wenn $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ ein Gruppenhomomorphismus ist, dann muss offenbar

$$\chi(n) = \chi(1)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

gelten. Und für jedes Element $z \in \mathbb{T}$ gibt es genau einen solchen Homomorphimus mit $\chi(n) = z^n$. Das Produkt

$$(n \mapsto z_1^n) \cdot (n \mapsto z_2^n) = n \mapsto z_1^n z_2^n = (z_1 z_2)^n$$

entspricht dabei dem Produkt von $\mathbb{T}$. Also können wir die duale Gruppe von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{T}$ identifizieren.

Definition 1.4. *Ein Gruppenhomomorphismus von einer Gruppe in die invertierbaren Elemente der linearen Abbildungen eines Vektorraumes heißt Darstellung einer Gruppe. Ist der Vektorraum ein Banachraum, dann werden typischerweise nur Homomorphismen in die invertierbaren Elemente der stetigen lineare Abbildungen des Banachraumes betrachtet. Ist der Vektorraum ein Hilbertraum, so heißt die Darstellung unitär, wenn es ein Homomorphismus in die unitären Operatoren des Hilbertraums ist. Eindimensionale Darstellungen sind Homomorphimen nach $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und heißen Charaktere. Insbesondere sind unitäre Charaktere Gruppenhomomorphismen nach $\mathbb{T}$. Wenn die Gruppe eine Topologie besitzt, dann betrachten wir typischerweise nur Darstellungen, die in einem bestimmten Sinne stetig sind.*

Satz 1.5. *Sei G eine Gruppe und V der Vektorraum aller Funktionen von G nach $\mathbb{K}$, also $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Dann wird durch*

$$(\chi(g)f)(h) = f(g^{-1}h) \text{ für alle } f \in V \text{ und } g, h \in G$$

eine Darstellung von G auf V definiert. Das gleiche gilt auch für

$$(\chi(g)f)(h) = f(hg) \text{ für alle } f \in V \text{ und } g, h \in G.$$

Beweis: Seien $g_1, g_2 \in G$ dann müssen wir $\chi(g_1g_2)f = \chi(g_1)(\chi(g_2)f)$ für alle $f \in V$ zeigen. Sei also $f \in V$ und $h \in G$ dann folgt:

$$(\chi(g_1g_2)f)(h) = f((g_1g_2)^{-1}h) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}h) = (\chi(g_2)f)(g_1^{-1}h) = (\chi(g_1)(\chi(g_2)f))(h)$$
$$\text{bzw.}\quad (\chi(g_1g_2)f)(h) = f(hg_1g_2) = (\chi(g_2)f)(hg_1) = (\chi(g_1)(\chi(g_2)f))(h). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Wenn f ein Charakter von G ist, dann folgt im ersten Fall

$$(\chi(g)f)(h) = f(g^{-1}h) = f(g^{-1})f(h)$$

also $\chi(g)f = f(g^{-1}) \cdot f$ und im zweiten Fall

$$(\chi(g)f)(h) = f(hg) = f(h)f(g)$$

also $\chi(g)f = f \cdot f(g) = f(g) \cdot f$.

Deshalb spannt jeder Charakter von G einen eindimensionalen invarianten Unterraum von V auf. Wir werden sehen, dass in unseren beiden Beispielen von $G = \mathbb{T}$ und $G = \mathbb{Z}$ diese Charaktere in gewisser Weise den Raum V aufspannen, wenn wir V mit einer Topologie versehen und zum Abschluss übergeben. Zunächst einmal beobachten wir, dass die Räume $C(\mathbb{T}) \simeq C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ für $1 \leq p \leq \infty$ Darstellungen von $\mathbb{T}$ bilden. Diese Darstellungen haben die Eigenschaften, dass jedes Element $z \in \mathbb{T}$ jeweils durch einen Operator dargestellt wird, der die Norm erhält.

Satz 1.6. *Für $G = \mathbb{T}$ werden alle Elemente von $\mathbb{T}$ auf $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ für $1 \leq p \leq \infty$ durch Isometrien dargestellt. Auf jedem $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R})$ mit $1 \leq p < \infty$ ist die Abbildung von $\mathbb{T}$ in den jeweiligen Banachraum, die z auf $\chi(z)f$ abgebildet, stetig.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $f \in C(\mathbb{T})$ dann gilt

$$\|\chi(e^{ix})f\|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(e^{-ix}e^{iy})| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(e^{i(y-x)})| = \|f\|_\infty \qquad \text{bzw.}$$
$$\|\chi(e^{ix})f\|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(e^{iy}e^{ix})| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(e^{i(y+x)})| = \|f\|_\infty.$$

Genauso gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$.

$$\|\chi(e^{ix})f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(y-x)|^p dy\right)^{1/p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} = \|f\|_p \qquad \text{bzw.}$$
$$\|\chi(e^{ix})f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(y+x)|^p dy\right)^{1/p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} = \|f\|_p.$$

Für $p = \infty$ und $f \in L^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gilt auch

$$\|\chi(e^{ix})f\|_\infty = \inf\{\lambda \mid \pi(e^{ix})f \leq \lambda \text{ a.e. auf } \mathbb{R}\} = \inf\{\lambda \mid f \leq \lambda \text{ a.e. auf } \mathbb{R}\} = \|f\|_\infty.$$

Jede stetige Funktion $f \in C(\mathbb{T})$ ist auch gleichmäßig stetig, weil $\mathbb{T}$ kompakt ist. Dann folgt auch, dass die Abbildung $\mathbb{T} \to C(\mathbb{T}), z \mapsto \chi(z)f$ stetig ist.

Im Fall $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ für $1 \leq p \leq \infty$ betrachten wir zuerst eine Treppenfunktion g. Ist g eine Linearkombination von N_g charakteristischen Funktionen, dann folgt $\|\chi(e^{ix})g - \chi(e^{iy})g\|_p \leq (2N_g\|g\|_\infty^p|x-y|)^{1/p} = \|g\|_\infty(2N_g|x-y|)^{1/p}$. Also ist die Abbildung $x \mapsto \chi(e^{ix})f$ stetig. Weil die Treppenfunktion dicht in $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ liegen, folgt auch, dass die Abbildung $x \mapsto \chi(e^{ix})f$ stetig ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich eine Treppenfunktion g mit $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann folgt für $|x-y| < \frac{1}{2N_g}\left(\frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty}\right)^p$

$$\begin{aligned}\|\chi(e^{ix})f - \chi(e^{iy})f\|_p &\leq \|\chi(e^{ix})f - \chi(e^{ix})g\|_p + \|\chi(e^{ix})g - \chi(e^{iy})g\| + \|\chi(e^{iy})f - \chi(e^{iy})g\|_p \\ &\leq \|\chi(e^{ix})(f-g)\|_p + \|g\|_\infty(2N_g|x-y|)^{1/p} + \|\chi(e^{iy})(f-g)\|_p \\ &= \|f-g\|_p + \|g\|_\infty(2N_g|x-y|)^{1/p} + \|f-g\|_p < \varepsilon. \qquad \textbf{q.e.d.}\end{aligned}$$

Insbesondere sind für $p = 2$ die Darstellungen auf $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ unitär. Wir werden sehen, dass die unitären Charaktere einen in allen $L^p(\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$ dicht liegenden Unterraum aufgespannen. Zuerst zeigen wir noch die analogen Aussagen für $\mathbb{Z}$.

Satz 1.7. *Für $G = \mathbb{Z}$ werden alle Elemente von $\mathbb{Z}$ auf $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ und $\ell^p(\mathbb{Z})$ für $1 \leq p < \infty$ durch Isometrien dargestellt.*

Beweis: Sei $f \in \ell^p(\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\|\chi(n)f\|_p = \left(\sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} |f(m-n)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|^p\right)^{1/p} = \|f\|_p \quad \text{bzw.}$$
$$\|\chi(n)f\|_p = \left(\sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} |f(m+n)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|^p\right)^{1/p} = \|f\|_p.$$

Für $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt auch

$$\|\chi(n)f\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{Z}} |f(m-n)| = \sup_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)| = \|f\|_\infty \quad \text{bzw.}$$
$$\|\chi(n)f\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{Z}} |f(m+n)| = \sup_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)| = \|f\|_\infty. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Also ist auch hier die Darstellung von $\mathbb{Z}$ auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ unitär. Außerdem läßt die Darstellung von $\mathbb{Z}$ auf $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ den abgeschlossenen Unterraum $c_0(\mathbb{Z})$ invariant.

Übungsaufgabe 1.8. *Allerdings liegen für die Gruppe $\mathbb{Z}$ die unitären Charaktere nur in dem Raum $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ und in keinem der Räume $\ell^p(\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$.*

1.2 Die Fourierreihe

Satz 1.9. *Für jedes Element $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ definiert*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) z^n \qquad \textit{bzw.} \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

ein Element von $C(\mathbb{T})$ bzw. $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Die Abbildung $\hat{f} \mapsto f$ von $\ell^1(\mathbb{Z})$ nach $C(\mathbb{T})$ bzw. $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist stetig und linear. Für jedes Element f im Bild dieser Abbildung gilt

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Die gleichen Formeln definieren auch eine unitären Abbildung von $\ell^2(\mathbb{Z})$ auf einen abgeschlossenen Unterraum von $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Insbesondere gilt also die Parsevalgleichung:

$$\|f\|_2 = \left\| \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-nx} \right\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad \textit{für alle } \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Beweis: Für jedes $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ gilt

$$\left\| \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} \right\|_\infty \leq \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \left| \hat{f}(n) \right| \|e^{inx}\|_\infty = \|\hat{f}\|_1.$$

Deshalb konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ gleichmäßig bezüglich der Norm $\|\ \|_\infty$. Weil $x \to e^{inx}$ auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ stetig sind, definiert der Grenzwert eine stetige Funktion und liegt in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Wegen obiger Ungleichung ist die Abbildung $\ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stetig. Offenbar gilt für alle $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m. \end{cases}$$

Also bildet $\frac{1}{2\pi}e^{inx}$ ein Orthonormalsystem von $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Daraus folgt sofort die obige Formel für $\hat{f}(n)$. Außerdem werden die endlichen Linearkombinationen von diesen Elementen auf $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ so abgebildet, dass die $\ell^2(\mathbb{Z})$-Norm auf die $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ Norm abgebildet werden. Weil die Elemente von $\ell^2(\mathbb{Z})$, für die nur endlich viele Funktionswerte ungleich Null sind, dicht in $\ell^2(\mathbb{Z})$ liegen, folgt auch die letzte Aussage. **q.e.d.**

Beispiel 1.10. *Sei $f(x) = x$ auf $x \in [-\pi, \pi]$. Dann berechnen sich die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$ für $n \neq 0$ zu*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx = \frac{(-1)^{n+1}}{in}.$$

Für $n = 0$ haben wir

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0.$$

Deshalb ist die Fourierreihe von f gegeben durch

$$f(x) \sim \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{inx} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Wir wissen aufgrund der Konvergenz der geometrischen Reihe, dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wir werden später sehen, dass sie für $x \in (-\pi, \pi)$ tatsächlich gegen f konvergiert.

Beispiel 1.11. *Sei $f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4}$ auf $x \in [0, 2\pi]$. Wir integrieren zweimal partiell*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2 e^{-inx}}{4}dx &= \frac{1}{8\pi}\left[\frac{(x-\pi)^2 e^{-inx}}{-in}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(x-\pi)e^{-inx}}{in}dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(x-\pi)e^{-inx}}{-(in)^2}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{-(in)^2}dx = \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} \quad \text{für } n \neq 0.\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(x-\pi)^2}{4}dx = \frac{1}{24\pi}\left[(x-\pi)^3\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12} \text{ also } f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

Beispiel 1.12. *Die Fourierreihe der Funktion*

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha} \text{ für } x \in [0, 2\pi]$$

ist für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi e^{i\pi\alpha - ix(n+\alpha)}}{\sin \pi\alpha} dx = \left[\frac{e^{i\pi\alpha - ix(n+\alpha)}}{-2i(n+\alpha)\sin \pi\alpha}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n+\alpha} \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n+\alpha}$$

Beispiel 1.13. *Das trigonometrische Polynom auf $x \in [-\pi, \pi]$*

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

heißt Dirichletkern. Die entprechenden Fourierkoeffizienten sind wegen Satz 1.9 gegeben durch

$$\hat{D}_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } |n| \leq N \\ 0 & \text{für } |n| > N. \end{cases}$$

Mithilfe der geometrische Reihe können wir umformen

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} e^{-inx} = \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} + \frac{e^{-ix} - e^{-i(N+1)x}}{1 - e^{-ix}} \\ &= \frac{1 - e^{i(N+1)x} - (1 - e^{-iNx})}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})x} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

Beispiel 1.14. *Die Funktion $P_r(x)$ heißt Poissonkern und ist für $x \in [-\pi, \pi]$ und $r \in [0, 1)$ die absolut gleichmäßig konvergente Reihe*

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}.$$

Weil die Reihe für $r \in [0, 1)$ auf $x \in [-\pi, \pi]$ gleichmäßig konvergiert, können wir die Summe und das Integral bei der Berechnung von $\hat{P}_r(n)$ vertauschen. Daraus folgt

$$\hat{P}_r(n) = r^{|n|}.$$

Mithilfe der geometrischen Reihe können wir wieder $P_r(x)$ explizit berechnen:

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (re^{ix})^n + re^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} (re^{ix})^n = \frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} \\ &= \frac{1 - re^{-ix} + re^{-ix} - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ untersuchen, in welchem Sinne die entsprechende Fourierreihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

konvergiert. Wir können nicht erwarten, dass die Fourierreihe für jedes $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ gegen f konvergiert, weil wir die Funktion f auf eine Nullmenge von $[-\pi, \pi]$ ändern können, ohne dass sich $\hat{f}(n)$ ändert. Deshalb ist es naheliegend sich auf stetige periodische Funktionen zu beschränken. Für lange Zeit war man tatsächlich der Überzeugung, das für solche stetigen und periodischen Funktionen die entsprechende Fourierreihe punktweise gegen die Funktion konvergiert, bis Du Bous-Reymond eine stetige periodische Funktion gefunden hat, deren Fourierreihe für ein x nicht konvergiert. 1966 konnte L. Carleson tatsächlich zeigen, dass für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die entsprechende Fourierreihe auf dem Komplement einer Nullmenge von $[-\pi, \pi]$ konvergiert.

Satz 1.15. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\hat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, an denen f stetig ist.*

Beweis: Wir verschieben den entsprechenden Punkt durch eine Translation nach $x = 0$. Weil jede komplexwertige Funktion eine Summe einer rellen und einer imaginären Funktion ist, können wir auch annehmen, dass f eine reelle Funktion ist. Sei also f auf $[-\pi, \pi]$ definiert und $f(0) > 0$. Die Funktion $p_k(x) = (\varepsilon + \cos x)^k$ sind Polynome in e^{ix} und e^{-ix}. Für jede Umgebung $U \subset [-\pi, \pi]$ von $x = 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $|\varepsilon + \cos x| < 1$ für alle $x \in [-\pi, \pi] \setminus U$. Also konvergiert $(p_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ auf $[-\pi, \pi] \setminus U$ gleichmäßig gegen Null. Andererseits ist für jedes $\varepsilon > 0$ auf eine Umgebung von $x = 0$ $\varepsilon + \cos x > 1$. Deshalb konvergiert $p_k(x)$ dort gleichmäßig gegen ∞. Also gibt es für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, das bei $x = 0$ stetig ist und $f(0) > 0$ ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_k(x)f(x)dx \to \infty.$$

Weil $p_k(x)$ Linearkombinationen von endlich vielen e^{ink} sind, folgt die Aussage des Satzes. **q.e.d.**

Korollar 1.16. *Sei $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\hat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann folgt $f = 0$.*

Korollar 1.17. *Sei $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Dann konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ gleichmäßig gegen f.*

Beweis: Wegen Satz 1.9 definiert $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ eine stetige Funktion mit der gleichen Fourierreihe. Die Differenz von f und dieser Funktion muss dann wegen Satz 1.15 gleich Null sein. **q.e.d.**

Wir suchen nach Bedingungen an $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, so dass $\hat{f}$ in $\ell^1(\mathbb{Z})$ liegt.

Lemma 1.18. *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dann gibt es ein $C > 0$, mit $|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{n^2}$. Insbesondere gilt $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$.*

Beweis:
$$\begin{aligned} 2\pi\hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \left[f(x)\frac{-e^{-inx}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{inx}dx \\ &= \frac{1}{in}\left[f'(x)\frac{-e^{-inx}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(in)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{-1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-inx}dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt $|\hat{f}(n)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2\pi n^2}$ **q.e.d.**

Wir werden später sehen, dass eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ schon dann $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ erfüllt, wenn folgendes Supremum für ein $\alpha > \frac{1}{2}$ endlich ist.

$$\sup_{x \neq y \in \mathbb{R}} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^\alpha}$$

Solche Funktionen heißen hölderstetig mit Hölderexponent α.

1.3 Konvolutionen

Wir haben in Satz 1.9 eine stetige lineare Abbildung von $\ell^1(\mathbb{Z})$ nach $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ konstruiert. Wir können sowohl Funktionen auf $\mathbb{Z}$, als auch Funktionen auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ jeweils punktweise miteinander multiplizieren. Wir werden jetzt sehen, dass durch den Zusammenhang zwischen f und $\hat{f}$ das punktweise Produkt der Funktion $\hat{f}$ auf $\mathbb{Z}$ ein neues Produkt von Funktionen auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ definiert. Dieses Produkt heißt Konvolution.

Definition 1.19. *Sei $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dann ist $f * g$ als Funktion auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ definiert durch*
$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy.$$

Durch die Substitution $z = x - y$ erhalten wir auch

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - z)g(z)dz.$$

Insbesondere gilt $f * g = g * f$. Wir zeigen zuerst einige Eigenschaften dieses Produktes.

Satz 1.20. *Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dann gilt* *(i)* $f * g \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

(ii) $(f, g) \mapsto f * g$ *ist bilinear von* $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *nach* $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(iii) $f * g = g * f$

(iv) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(v) $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$

(vi) *Für* $1 \leq p, q \leq \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und* $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), g \in L^q(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *gilt*

$$f * g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \text{ und } \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

(vii) *Für* $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *und* $g \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *mit* $1 \leq p \leq \infty$ *gilt*

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \text{ mit } \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Beweis(i): Für Funktionen $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gilt

$$\begin{aligned}(2\pi)^2\|f * g\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \right| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(x-y)|dydx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(x-y)|dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(z)|dzdy = (2\pi)^2\|f\|_1 \cdot \|g\|_1\end{aligned}$$

(ii) ist für Funktionen $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ klar. Weil diese Funktion dicht in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ liegen, folgt $f * g \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. (iii) haben wir schon gezeigt.

(iv):

$$(2\pi)^2((f * g) * h)(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(y)h(x-y)dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(g-z)h(x-y)dzdy$$

$$\begin{aligned}(2\pi)^2(f * (g * h))(x) &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g * h)(x-y)dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(z)h(x-y-z)dzdy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(\tilde{z}-y)h(x-\tilde{z})d\tilde{z}dy \quad \text{mit} \quad \tilde{z} = z+y, z = \tilde{z}-y\end{aligned}$$

(v):

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)e^{-inx}dydx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}g(x\cdot y)e^{-in(x-y)}dxdy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}g(x\cdot y)e^{-in(x-y)}dxdy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{iny}dy\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-inz}dz\right) = \hat{f}(n)\hat{g}(n).\end{aligned}$$

(vi): Wegen der Symmetrie können wir $1 \leq p < \infty$ annehmen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $y \mapsto f(x-y)$ in $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit der Norm $\|f\|_p$ unahbhänigig von x. Wegen der Hölderungleichung gilt

$$|(f*g)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)||g(y)|dy \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$|(f*g)(x)-(f*g)(y)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-z)-f(y-z)||g(z)|dz \leq$$
$$\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-z)-f(y-z)|dz\right)^{1/p}\|g\|_q \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(z)-f(z-(x-y))|^p dz\right)^{1/p}\|g\|_q.$$

Für jede Treppenfunktion f konvergiert $(\int_{-\pi}^{\pi}|f(z)-f(z-h)|^p dz)^{1/p}$ im Grenzwert $h \to 0$ nach Null. Weil die Treppenfunktionen dicht liegen in $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ folgt dies dann auch für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Also ist $f*g$ tatsächlich stetig.

(vii): Den Fall $p=1$ haben wir in (i) gezeigt und den Fall $p=\infty$ in (vi). Sei also $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Wir wenden die Hölderungleichung auf $y \to |f(x-y)|^{1/q} \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $y \to |f(x-y)|^{1/p}g(y)$ an. Die zweite Funktion gehört für fast alle $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ zu $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ wegen

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)||g(y)|^p dydx = \|g\|_p^p\|f\|_1 < \infty.$$

Dann folgt $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)||g(y)|dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)|^{1/q}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|dy$$
$$\leq \|f\|_1^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p}$$

bzw. $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)||(g(y)|dy\right)^p dx \leq$$
$$\leq \|f\|_1^{p/q}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)||g(y)|^p dy\right)dx = \|f\|_1^{1+\frac{p}{q}}\|g\|_p^p = \|f\|_1^p\|g\|_p^p < \infty.$$

Daraus folgt $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$. **q.e.d.**

1.4 Das Lemma von Riemann-Lebesgue

Satz 1.21. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt $\lim_{|t|\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixt}dx = 0$. Insbesondere gilt $\hat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$ für $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Beweis: Zunächst zeigen wir $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dx| \leq \|f\|_1$ für $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{itx}|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \|f\|_1.$$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gilt auch $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$:

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)e^{-inx}|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx = \|f\|_1.$$

Für die charakteristische Funktion $f = \chi_{[a,b]}$ von dem Intervall $[a,b]$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x)e^{itx}dx = \int_a^b e^{itx}dx = \frac{1}{it}(e^{itb} - e^{ita}).$$

Dann folgt offenbar $\lim_{|t|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x)e^{itx}dx = 0$. Außerdem gilt für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dx - \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{itx}dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|dx = \|f - g\|_1.$$

Weil die Treppenfunktionen dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegen, gibt es also für jedes $f \in L^1(\mathbb{R})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gibt es ein $C > 0$, so dass $|\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{itx}dx| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|t| > C$ gilt. Daraus folgt für die gleichen t

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dx\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))e^{itx}dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{itx}dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{|t|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dx = 0$ für $f \in L^1(\mathbb{R})$ bzw. $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \simeq L^1([-\pi,\pi])$.**q.e.d.**

Insbesondere gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|\hat{g}(n)| < \varepsilon$ für alle $g \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\|g - f\| < \delta$ und $|n| > N$ gilt. Also ist die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ eine stetige lineare Abbildung $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to c_0(\mathbb{Z})$.

Als nächstes untersuchen wir, an welchen $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ für eine gegebene Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die Reihe $(\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx})_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und an welchen $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sie gegen $f(x)$ konvergiert. Dazu beobachten wir zuerst folgendes:

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx} = (D_N * f)(x).$$

Deshalb ist also die Frage, wann die Folge $(D_N * f)_{N\in\mathbb{N}}$ für ein $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ konvergiert, und wann $\lim_{N\to\infty}(D_N * f)(x) = f(x)$ gilt.

Satz 1.22 (Dinis Test, 1880). *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, so dass*

$$\int_0^\varepsilon \left| \frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{y} \right| dy < \infty \quad \text{für ein } \varepsilon > 0 \text{ und ein } s \in \mathbb{C}.$$

Dann konvergiert $(D_N * f)(x)$ im Grenzwert $N \to \infty$ gegen s.

Beweis: Weil $D_N(x)$ eine gerade Funktion ist, gilt

$$\begin{aligned}
(D_N * f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 f(x-y)D_N(y)dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x-y)D_N(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+y)+f(x-y))D_N(y)dy \\
(D_N * f)(x) - s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+y)+f(x-y)-2s)D_N(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{y} \cdot \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)} \sin\big((N+\tfrac{1}{2})y\big)dy.
\end{aligned}$$

Weil $y \mapsto \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)}$ auf $[0,\pi]$ beschränkt ist folgt aus der Bedingung von Dini, dass

$$y \mapsto \frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{y} \cdot \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)}$$

in $L^1([0,\pi])$ liegt. Dann folgt der Satz aus dem Lemma von Riemann-Lebesgue. **q.e.d.**

Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ bei $x \in \mathbb{R}$ diffferenzierbar ist, dann sind insbesondere f und

$$y \mapsto \begin{cases} \frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y} = \frac{f(x+y)-f(x)}{y} - \frac{f(x-y)-f(x)}{-y} & \text{für } y \neq x \\ 0 & \text{für } y = x \end{cases}$$

bei x stetig, und damit beschränkt und deshalb das Kriterium von dem Test von Dini mit $s = f(x)$ erfüllt. Sogar wenn f bei x hölderstetig ist mit Exponent $\alpha > 0$, d.h.

$$\sup_{y \in (-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{|f(x+y)-f(x)|}{|y|^\alpha} \leq M \qquad \text{für ein } \varepsilon > 0 \text{ und ein } M > 0 \text{ gilt, folgt}$$

$$\left| \frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y} \right| \leq \frac{|f(x+y)-f(x)|}{|y|} + \frac{|f(x-y)-f(x)|}{|y|} \leq 2M|y|^{\alpha-1}.$$

Dann ist wieder mit $s = f(x)$ das Kriterium von Dini erfüllt. Es gilt sogar:

Satz 1.23. *Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $x \in \mathbb{R}$ gebe es ein $M > 0$, so dass*

$$|f(x+y) - f(x)| \leq M|\ln y|^{-\alpha} \quad \text{für alle } y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ mit einem } 0 < \varepsilon < 1 \text{ und } \alpha > 1$$

gilt. Dann konvergiert die Fourierreihe von f bei x gegen $f(x)$. Insbesondere gilt das **Lokalisierungsprinzip von Riemann**, *d.h. die Konvergenz der Fourierreihe einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ an einem $x \in \mathbb{R}$ hängt nur von dem Verhalten von f bei x ab: Ist die Differenz $f - g$ von zwei Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ bei x Null und erfüllt obige Bedingung, dann konvergiert die Differenz der Fourierreihen bei x gegen Null.*

Beweis: Aus der Bedingung in dem Satz folgt

$$\left|\frac{f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)}{y}\right| \leq \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|} + \frac{|f(x-y) - f(x)|}{|y|} \leq \frac{2M}{|y||\ln y|^{\alpha}}.$$

$\frac{2M}{(1-\alpha)|\ln y|^{\alpha-1}}$ ist eine Stammfunktion von $\frac{2M}{|y|\cdot|\ln y|^{\alpha}}$ und das Kriterium von Dini ist erfüllt. Aus der Anwendung auf $f - g$ folgt das Lokalisierungsprinzip von Riemann. **q.e.d.**

Definition 1.24. *Eine Funktion auf $[a, b]$ heißt von beschränkter Variation, wenn für jede Partition $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ die Summe*

$$V_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-i})|$$

durch $c > 0$ unabhängig von $\mathcal{P}$ beschränkt ist. Den Raum der Funktionen mit beschränkten Variationen bezeichnen wir mit $V([a, b])$.

Im nächsten Abschnitt werden wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1.25 (Test von Dirichlet-Jordan)**.** *Für eine Funktion auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, die auf $[-\pi, \pi]$ in $V([-\pi, \pi])$ liegt, konvergiert $(D_N * f)_{N\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ gegen*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{h\searrow 0} f(x+h) + \lim_{h\searrow 0} f(x-h)\right).$$

Ist außerdem f auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig, so konvergiert $(D_N * f)_{N\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f.

Eine komplexe Funktion ist offenbar genau dann von beschränkter Variation, wenn der Realteil und der Imagininärteil von beschränkter Variation sind. Jordan hat 1881 gezeigt, dass für jedes $f \in V([a, b])$ monoton wachsende Funktion $f_1, f_2, f_3, f_4[a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$. Daraus folgt insbesondere dass für jedes $f \in V([a, b])$ die Grenzwerte $\lim_{h\searrow 0} f(x+h)$ für alle $x \in [a, b)$ und die Grenzwerte $\lim_{h\searrow 0} f(x-h)$ für alle $x \in (a, b]$ existieren. Deshalb ist der Grenzwert in dem Test von Dirichlet-Jordan für alle $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ wohl definiert.

1.5 Cesàro-Summierbarkeit

Definition 1.26. *Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_c}$ heißt Cesàro-summierbar, wenn folgende Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert*

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} c_k$$

Lemma 1.27. *Eine konvergente Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Cesàro-summierbar mit dem gleichen Grenzwert.*

Beweis: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n > M \text{ mit } c = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Für jedes $n > M$ folgt dann

$$\begin{aligned} |\sigma_n - c| &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(c_k - c) \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{M}(c_k - c)\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=M+1}^{n}|c_k - c| \\ &< \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{M}(c_k - c)\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ konvergiert der erste Summand nach Null. Damit folgt die Aussage. **q.e.d.**

Die Folge $2c, 0, 2c, 0, 2c, \ldots$ ist offenbar eine Folge, die nicht konvergiert, aber Cesaro-summierbar ist. Im folgenden wollen wir die Cesàro-Summierbarkeit auf die Fourierreihen anwenden. Dazu betrachten wir zuerst die Cesàro-Summierbarkeit von Reihen. Sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die entsprechende Reihe. Dann gilt für die entsprechende Reihe und Folge der entsprechenden Cesàro-Summen:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 & \sigma_0 &= a_0 \\ c_1 &= a_0 + a_1 & \sigma_1 &= \frac{2a_0 + a_1}{2} \\ c_2 &= a_0 + a_1 + a_2 & \sigma_2 &= \frac{3a_0 + 2a_1 + a_2}{3} \\ &\vdots & &\vdots \\ c_n &= a_0 + \ldots + a_n & \sigma_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)a_k. \end{aligned}$$

Sei also $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dann besteht die entsprechende Reihe $D_n * f$ und die entsprechende Cesàro-Summe aus

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f * D_k = f * \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k\right) = f * F_n.$$

Hierbei ist $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$ der sogenannte n-te Fejérkern. Wenn wir $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ einsetzen er halten wir

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx} = 1 - 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos kx$$

Diese Folge von Funktionen hat offenbar folgende Eigenschaft:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx = 1.$$

Wir können $F_n(x)$ auch noch geschlossen berechnen:

$$\begin{aligned}
D_k(x) &= \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} = \frac{2\sin((k+\frac{1}{2})x)\sin(\frac{1}{2}x)}{2\sin^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{\cos(kx) - \cos((k+1)x)}{2\sin^2(\frac{1}{2}x)} \\
F_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos((n+1)x)}{2\sin^2(\frac{1}{2}x)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere $F_n(x) \geq 0$. Wegen $\sin(\frac{1}{2}x) \geq \frac{x}{\pi}$ für $0 \leq x \leq \pi$ und weil $\sin(\frac{x}{2})$ konkav ist, folgt außerdem

$$F_n(x) \leq \frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{x^2} \qquad \text{für } 0 < x \leq \pi \text{ und } n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1}$$

Also folgt auch $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$ für $0 < |x| \leq \pi$. Und für alle $\delta > 0$ konvergiert $F_n(x)$ auf $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ im Grenzwert $n \to \infty$ gleichmäßig gegen Null. Deshalb ist die Folge F_n eine sogenannte Diracfolge.

Definition 1.28. *Eine Folge $k_n \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ heißt Diracfolge für $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, wenn sie folgende Eigenschaften hat:*

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(x)dx = 1.$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(x)|dx \leq M.$

(iii) Für jedes $0 < \delta < \pi$ konvergiert für $n \to \infty$ folgende Folge gegen Null:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(x)|dx + \int_{\delta}^{\pi} |k_n(x)|dx\right)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Wenn $k_n \geq 0$ gilt, dann folgt (ii) aus (i). Also ist $F_n(x)$ eine Diracfolge für $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Satz 1.29. *Sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Diracfolge für $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ bzw. $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \|f * k_n - f\|_{\infty \text{ bzw. } p} = 0$.*

Beweis: Sei zuerst $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dann ist f auf dem kompakten metrischen Raum $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ auch gleichmäßig stetig. Also gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $0 < \delta < \pi$ mit

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } |t| \leq \delta.$$

Daraus folgt $$|(f * k_n)(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(t)\big)k_n(t)dt\right| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |k_n(t)|dt + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |k_n(t)|dt \leq \frac{\varepsilon M}{2\pi} + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |k_n(t)|dt.$$

Wegen der Eigenschaft (iii) konvergiert der letzte Term im Grenzwert $n \to \infty$ gegen Null, und $f * k_n$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f.

Wegen $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ folgt die zweite Aussage für alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gibt es ein $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|f * k_n - f\|_p &\leq \|(f-g) * k_n\|_p + \|g * k_n - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq 2\|f - g\|_p + \|g * k_n - g\|_p.\end{aligned}$$

Also konvergiert $f * k_n$ auch für $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ bezüglich $\| \; \|_p$ gegen f. **q.e.d.**

Weil die Fejérkerne $(Fn)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Diracfolge bilden folgt sofort

Satz 1.30 (Fejér). *Die Fourierreihe einer Funktion $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist gleichmäßig Cesàro-summierbar mit dem Grenzwert f.* **q.e.d.**

Also konvergiert $\|\sigma_n - f\|_\infty$ im Grenzwert gegen Null mit $\sigma_n = f * F_n$.

Korollar 1.31. *Wenn zwei Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die gleichen Fourierreihen haben, dann stimmen sie fast überall überein.*

Beweis: Aufgrund der Voraussetzung gilt $f * F_n = g * F_n$. Wegen Satz 1.29 konvergiert diese Folge in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ sowohl gegen f als auch gegen g. Also gilt $g = f$. **q.e.d.**

Korollar 1.32. *Die Fourierreihe einer beliebigen Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist in $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ Cesàro-summierbar mit Grenzwert f.* **q.e.d.**

Korollar 1.33 (Weierstraßscher Approximationssatz für periodische Funktionen)**.** *Für jede Funktion $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein trigonometrisches Polynom p mit $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$* **q.e.d.**

Der ungarische Mathematiker Leopold Fejér (1880-1959) hat als erster die Cesàrokonvergenz auf Fourierreihen angewandt (Untersuchungen über Fourierreihen, Mathematische Annalen 58, Seite 51-69(1905)) Fejér hat auch folgenden Satz gezeigt

Satz 1.34. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stetig in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Fourierreihe von f in x Cesàro-summierbar mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis: Wie im Beweis von Satz 1.29 erhalten wir

$$\begin{aligned}
|(f * F_n)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| \cdot |F_n(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)| \cdot |F_n(y)| dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x-y) - f(x)| F_n(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)| \cdot |F_n(y)| dy + \frac{1}{\pi}\|f\|_1 \cdot \sup_{\delta \leq |y| \leq \pi} |F_n(y)|.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von f in x ist das erste Integral für hinreichend kleine δ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Das zweite Integral ist wegen Formel (1.1) kleiner als

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_1 \sup_{\delta \leq y \leq \pi} |F_n(y)| \leq \frac{\pi\|f\|_1}{(n+1)\delta^2}.$$

Für hinreichend große n ist auch das kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. **q.e.d.**

Aufbauend auf diesen Ergebnissen hat dann Henrie Lebesgue (Sur la convergence des séries de Fourier, Mathematische Annalen 61, Seite 271-277 (1905)) gezeigt.

Satz 1.35 (Fejér-Lebesgue)**.** *Die Fourierreihe einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist für fast alle $x \in \mathbb{R}$ Cesàro-summierbar mit Grenzwert $f(x)$.*

Der Beweis beruht auf einem weiteren Satz von Lebesgue. Für $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ definieren wir die Menge der Lebesguepunkte $\mathcal{L}(f)$ von f als

$$\mathcal{L}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)dt = f(x) \Leftrightarrow \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| dt = 0 \right\}.$$

Lebesgue hat gezeigt, dass $\mathbb{R} \setminus \mathcal{L}(f)$ eine Nullmenge ist. Diesen Satz wollen wir nicht beweisen. Ein Beweis findet sich z.B. in Theorem 1.3 in Kapitel 3 von E. Stein, R. Shakarchi: Real Analysis, Princeton University Press, Princeton (2005). Wir zeigen jetzt zeigen, wie aus dieser Aussage der obige Satz folgt. Dafür benötigen wir zuerst ein Lemma:

Lemma 1.36. *Für eine Funktion $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dx$ in allen Punkten $x \in \mathcal{L}(f)$ differenzierbar mit $F(x) = f(x)$.*

Beweis: Offenbar gilt:
$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} - f(x) = \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} \big(f(t) - f(x)\big)dt \quad \text{bzw.}$$
$$\frac{F(x) - F(x-\delta)}{\delta} - f(x) = \frac{1}{\delta}\int_{x-\delta}^{x} \big(f(t) - f(x)\big)dt.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite sind beschränkt durch

$$\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|dt.$$

Deshalb konvergieren beide Ausdrücke für $\delta \searrow 0$ gegen Null. **q.e.d.**

Beweis von Satz 1.35: Wir werden zeigen, dass $((f * F_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathcal{L}(f)$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir beginnen mit

$$(f * F_n)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\big)F_n(t)dt.$$

Jetzt teilen wir das Integrationsintervall bei $t = \frac{1}{n}$. Wegen

$$F_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos(kx)$$

gilt auch $F_n(x) \leq F_n(0) = 1 + 2n - n = n + 1$. Mit (1.1) folgt

$$|(f * F_n)(x) - f(x)| \leq \frac{n+1}{2\pi}\int_0^{1/n} |g(t)|dt + \frac{\pi}{2(n+1)}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t^2}dt \tag{1.2}$$

mit $g(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$. Sei jetzt G folgende stetige Funktion

$$G(u) = \int_0^u |g(t)|dt.$$

Für $x \in \mathcal{L}(f)$ konvergiert dann $\frac{G(u)}{u}$ für $u \searrow 0$ gegen Null:

$$\frac{G(u)}{2u} \leq \frac{1}{2u} \int_{-u}^{u} |f(x-t) - f(x)| dt$$

Wir integrieren in (1.2) den zweiten Summanden partiell und erhalten

$$|(f * F_n)(x) - f(x)| \leq \frac{n+1}{2\pi} G\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\pi}{2(n+1)} \left[\frac{G(t)}{t^2}\right]_{1/n}^{\pi} + \frac{\pi}{n+1} \int_{1/n}^{\pi} \frac{G(t)}{t^3} dt.$$

Wegen obiger Ungleichung konvergiert im Grenzwert $n \to 0$

$$0 \leq nG\left(\frac{1}{n}\right) \leq n \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)| dt \to 0.$$

Deshalb konvergieren im Grenzwert $n \to \infty$ die beiden ersten Summanden nach Null. Wenn $x \in \mathcal{L}(f)$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $0 \leq G(t) \leq t\varepsilon$ für alle $0 < t \leq \delta$ gilt. Für $n > \frac{1}{\delta}$ folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \int_{1/n}^{\pi} \frac{G(t)}{t^3} dt &\leq \frac{1}{n+1} \int_{1/n}^{\delta} \frac{\varepsilon t}{t^3} dt + \frac{1}{n+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{G(t)}{t^3} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{n+1} \left(n - \frac{1}{\delta}\right) + \frac{1}{n+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{G(t)}{t^3} dt \leq \varepsilon + \frac{1}{n+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{G(t)}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Für hinreichend große n ist das kleiner als ε. **q.e.d.**

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir den Test von Dirichlet-Jordan beweisen. Der Beweis beruht auf einem Taubersatz. Das sind Sätze, die für eine Reihe $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die Cesàro-summierbar mit Grenzwert s ist, und eine zusätzliche Bedingung erfüllt, zeigen, dass sie gegen s konvergiert. Der erste solche Satz wurde von Alfred Tauber (1866-1942) gezeigt.

Satz 1.37 (Hardy's Taubersatz (1909)). *Wenn eine Reihe $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Cesàro-summierbar ist mit Grenzwert s und die Folge (na_n) beschränkt ist, dann ist die Reihe $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und konvergiert gegen s.*

Beweis: Wir nehmen an, dass die Folge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

gegen s konvergiert und $|na_n| \leq A$ erfüllt. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|\sigma_n - s| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Für $n \geq N+1$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
(n+m)\sigma_{n+m-1} - n\sigma_{n-1} &= s_n + \ldots + s_{n+m-1}\\
(n+m)(\sigma_{n+m-1} - s) - n(\sigma_{n-1} - s) &= m(s_n - s) + R \quad \text{mit}\\
R &= (s_{n+1} - s_n) + (s_{n+2} - s_n) + \ldots + (s_{n+m-1} - s_n)\\
&= a_{n+1} + (a_{n+1} + a_{n+2}) + \ldots + (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m-1}).
\end{aligned}$$

Alle $|a_j|$ in dieser Summe sind nicht größer als $\frac{A}{j} \leq \frac{A}{n}$ und die Summe enthält $\frac{m(m+1)}{2}$ viele solcher a_j. Dann folgt
$$|R| \leq \frac{Am(m-1)}{2n}$$

$$\begin{aligned}
m|s_n - s| &\leq (n+m)|\sigma_{n+m-1} - s| + n|\sigma_{n-1} - s| + |R| \leq (2n+m)\varepsilon + \frac{Am(m-1)}{2n}\\
|s_n - s| &\leq \left(\frac{2n}{m} + 1\right)\varepsilon + \frac{A(m-1)}{2n} \quad \text{für } n \geq N+1 \text{ und } m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Wir wählen jetzt $m \in \mathbb{N}$ so, dass die rechte Seite möglichst klein ist. Die Funktion $\varphi(m) = \frac{\alpha}{m} + \beta m + \gamma$ mit $\alpha, \beta > 0$ hat ein Minimum in $\mathbb{R}^+$ bei $m = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Also wählen wir
$$2n\sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \leq m < 2n\sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} + 1.$$

Mit dieser Wahl wird die obige rechte Seite gleich
$$|s_n - s| \leq \left(\sqrt{\frac{A}{\varepsilon}} + 1\right)\varepsilon + A\sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} = \varepsilon + 2\sqrt{A\varepsilon} \text{ für } n \geq N+1.$$

Weil die rechte Seite im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ beliebig klein wird, konvergiert s_n im Grenzwert $n \to \infty$ gegen s. **q.e.d.**

Beweis von Satz 1.25: Um Hardy's Taubersatz anzuwenden zeigen wir zuerst, dass die Fourierreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ Cesàro-summierbar ist mit Grenzwert
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{h \searrow 0} f(x+h) + \lim_{h \searrow 0} f(x-h)\right).$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(x) - \frac{1}{2}\left(\lim_{h\searrow 0} f(x+h) + \lim_{h\searrow 0} f(x-h)\right) = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \big(f(x+y)+f(x-y)\big)F_n(y)dy - \frac{1}{2}\left(\lim_{h\searrow 0} f(x+h) + \lim_{h\searrow 0} f(x-h)\right) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \left(f(x+y) - \lim_{h\searrow 0} f(x+h) + f(x-y) - \lim_{h\searrow 0} f(x-h)\right) F_n(y)dy.
\end{aligned}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $0 < \delta < \pi$ mit

$$|f(x \pm y) - \lim_{h\searrow 0} f(x \pm h)| \leq \varepsilon \quad \text{für } 0 < y \leq \delta.$$

Weil außerdem jede Funktion von beschränkter Variation beschränkt ist erhalten wir

$$\sigma_n(x) - \frac{1}{2}\left(\lim_{n\searrow 0} f(x+h) + \lim_{n\searrow 0} f(x-h)\right) \leq \varepsilon + \frac{4\|f\|_\infty}{2\pi}\int_\delta^\pi F_n(y)dy.$$

Dann folgt die Behauptung aus den Eigenschaften von $F_n(x)$.

Um Hardy's Taubersatz anzuwenden, genügt es noch folgendes zu zeigen:

$$|n\hat{f}(n)| \leq \frac{V}{2} \qquad \text{mit} \qquad V = V_{[0,2\pi]}(f).$$

Für $n \neq 0$ sei $h = \frac{\pi}{|n|}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{f}(n) &= \int_0^h + \int_h^{2h} + \ldots + \int_{2\pi-h}^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \int_0^h \big(f(x)e^{-inx} + f(x+h)e^{-in(x+h)} + \ldots + f(x+(2|n|-1))he^{-in(x+(2|n|-1)h)}\big)dx \\
&= \int_0^h \big(f(x) - f(x+h) + f(x+2h) - \ldots - f(x+(2|n|-1)h)\big)e^{-inx}dx \\
2\pi|\hat{f}(n)| &\leq \int_0^h \left(\sum\nolimits_{j=0}^{|n|-1} |f(x+2jh) - f(x+(2j+1)h)|\right) dy \leq Vh.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt, weil der Integrand für $x \in [0,h]$ durch V beschränkt ist. Das zeigt also $|\hat{f}(n)| \leq \frac{V}{2|n|}$.

Um die zweite Aussage zu zeigen, sei also f auf $[a,b]$ stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Der Beweis von Satz 1.34 zeigt in diesem Fall sogar, dass die Fourierreihe auf $[a,b]$ gleichmäßig Cesàro-summierbar ist, und der Beweis von Hardy's Taubersatz, dass sie auf $[a,b]$ sogar gleichmäßig gegen f konvergiert. **q.e.d.**

1.6 Die Fouriertransformation als Abbildung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Abbildungen $\hat{f} \to f$ und $f \to \hat{f}$ aus dem Satz 1.9. Als Vorbereitung zeigen wir den Interpolationssatz von Riesz-Thorin. In diesem Satz werden zwei σ-endliche Maßräume (X, μ) und (Y, ν) betrachtet zusammen mit den entsprechenden Banachräumen $L^p(X, \mu)$ und $L^p(Y, \nu)$ für $1 \leq p \leq \infty$. Für zwei solche Exponenten p_0 und p_1 sei $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ bzw. $L^{p_0}(Y, \nu) + L^{p_1}(Y, \nu)$ der Raum aller messbaren Funktionen auf X bzw. Y, die sich als Summe zweier Elemente von $L^{p_0}(X, \mu)$ bzw. $L^{p_0}(Y, \nu)$ und $L^{p_1}(X, \mu)$ bzw. $L^{p_1}(Y, \nu)$ schreiben lassen.

Satz 1.38 (Riesz-Thorin). *Seien $0 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ und (X, μ) und (Y, ν) zwei σ-endliche Maßräume. Sei T eine lineare Abbildung von $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ nach $L^{q_0}(Y, \nu) + L^{q_1}(Y, \nu)$ die als Abbildung von $L^{p_0}(X, \mu)$ nach $L^{q_0}(Y, \nu)$ und als Abbildung von $L^{p_1}(X, \mu)$ nach $L^{q_1}(Y, \nu)$ beschränkt ist:*

$$\|T(f)\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \qquad \|T(f)\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Dann ist T mit $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q}$ für $t \in [0, 1]$ eine beschränkte Abbildung

$$T : L^p(X, \mu) \to L^q(Y, \nu) \qquad \text{mit} \qquad \|T(f)\|_q \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p.$$

Der Beweis benutzt das sogenannte Maximumprinzip von komplex-analytischen Funktionen. Er beruht auf folgendem Lemma:

Lemma 1.39 (Drei-Linien-Lemma von Hadamard). *Sei $z \to \phi(z)$ eine komplex-analytische Funktion auf den Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \frac{z+\bar{z}}{2} < 1\}$, die sich stetig und beschränkt auf den Abschluss von S fortsetzt. Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\phi(t + iy)| \leq M_0^{1-t} M_1^t \quad \text{mit} \quad M_0 = \sup_{y \in \mathbb{R}} |\phi(iy)| \quad \text{und} \quad M_1 = \sup_{y \in \mathbb{R}} |\phi(1 + iy)|.$$

Beweis: Sei für alle $\varepsilon > 0$ und $z \in S$

$$\widetilde{\phi} = \exp\big(\varepsilon(z^2 - 1) + (z - 1)\ln(M_0 + \varepsilon) - z\ln(M_1 + \varepsilon)\big)\phi(z).$$

Weil $\mathrm{Re}(z^2 - 1) = x^2 - y^2 - 1 \leq -y^2$ für $z = x + iy \in S$ gilt, ist die Funktion auf dem Abschluss $\bar{S}$ von S beschränkt und konvergiert für große $|y|$ gegen Null. Dann nimmt $|\phi|$ auf $\bar{S}$ ein Maximum an, das wegen dem Maximumprinzip in ∂S liegt. Also gilt $|\widetilde{\phi}(z)| \leq \max\left\{\frac{M_0}{M_0+\varepsilon}, \frac{M_1}{M_1+\varepsilon}\right\} \leq 1$ für alle $z \in S$. Im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ folgt

$$|\phi(z)| \leq M_0^{1-x} M_1^x \quad \text{mit} \quad z = x + iy \in S. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Beweis von Satz 1.38: Wir zeigen den Satz für einfache Funktionen f, d.h. endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von messbaren Mengen mit endlichem Volumen. Dazu zeigen wir für jede einfache Funktion g auf (Y,ν)

$$\left|\int_Y T(f)g d\nu\right| \leq M\|f\|_{L^p(X,\mu)}\|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)} \qquad \text{für} \qquad 1 \leq q, q' \leq \infty \text{ mit } \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{q'} = 1.$$

Weil die einfachen Funktionen dicht in $L^p(X,\mu)$ und $L^{q'}(Y,\nu)$ liegen folgt daraus, dass $T(f)$ ein Element von dem Dualraum von $L^{q'}(Y,\nu)$ definiert, dessen Norm beschränkt ist duch $M\|f\|_p$. Weil außerdem $T(f)$ eine messbare Funktion ist folgt dann

$$T(f) \in L^q(Y,\nu) \qquad \text{mit} \qquad \|T(f)\|_q \leq M \cdot \|f\|_p.$$

auch im Fall $q = 1$ (siehe Lemma 4.2 in Kapitel 2 von E. Stein, R. Shakarchi: Functional Analysis, Princeton University Press, 2011).

Sei also zunächst $p < \infty$ und $q > 1$ also $q' < \infty$. Dann definieren wir für einfache Funktionen f auf (X,μ) und g auf (Y,ν) mit $\|f\|_p = 1$ und $\|g\|_q = 1$

$$f_z = |f|^{\gamma(z)}\frac{f}{|f|} \text{ mit } \gamma(z) = p\left(\tfrac{1-z}{p_0} + \tfrac{z}{p_1}\right) \quad g_z = |g|^{\delta(z)}\frac{g}{|g|} \text{ mit } \delta(z) = q'\left(\tfrac{1-z}{q_0'} + \tfrac{z}{q_1'}\right)$$

Hierbei sind q', q_0' und q_1' die dualen Exponenten von q, q_0 bzw. q_1. Es folgt $f_t = f$ und

$$\|f_z\|_{L^{p_0}(X,\mu)} = 1 \text{ für } \mathrm{Re}(z) = 0 \qquad \|f_z\|_{L^{p_1}(X,\mu)} = 1 \text{ für } \mathrm{Re}(z) = 1.$$

Analog gilt auch $g_t = g$ und

$$\|g_z\|_{L^{q_0'}(Y,\nu)} = 1 \text{ für } \mathrm{Re}(z) = 0 \qquad \|g_z\|_{L^{q_1}(Y,\nu)} = 1 \text{ für } \mathrm{Re}(z) = 1.$$

Wir zeigen jetzt dass die Voraussetzung des Drei-Linien-Lemmas von der Funktion

$$\phi(z) = \int_Y T(f_z)g_z d\nu.$$

erfüllt werden. Für $f = \sum a_k X_{E_k}$ und $g = \sum b_j X_{F_j}$ erhalten wir

$$\phi(z) = \sum_{j,k} |a_k|^{\gamma(z)}|b_j|^{\delta(z)}\frac{a_k}{|a_k|}\frac{b_j}{|b_j|}\int_Y T(X_{E_k})X_{F_j}d\nu.$$

Aufgrund der Voraussetzungen an T folgern wir mit der Hölderungleichung

$$|\phi(z)| \leq M_0 \text{ für } \mathrm{Re}(z) = 0 \qquad \text{und} \qquad |\phi(z)| \leq M_1 \text{ für } \mathrm{Re}(z) = 1.$$

Aus dem Drei-Linien-Lemma folgt dann

$$\int_Y T(f) g d\nu = \phi(t) \leq M_0^{1-t} M_1^t.$$

Weil die einfachen Funktionen dicht in $L^p(X,\mu)$ und $L^q(Y,\nu)$ liegen, folgt die Aussage für $p < \infty$ und $q > 1$.

Wenn $p = \infty$ können wir $p_0 = p_1 = \infty$ annehmen. Aus der Voraussetzung folgt dann $\|T(f)\|_{L^{q_0}(Y,\nu)} \leq M_0 \|f\|_\infty$ und $\|T(f)\|_{L^{q_1}(Y,\nu)} \leq M_1 \|f\|_\infty$ und mit der Hölderungleichung auch

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_\infty.$$

Wenn zuletzt $p < \infty$ und $q = 1$ können wir auch $q_0 = q_1 = 1$ annehmen. Dann können wir $g_z = g$ für alle z wählen und ansonsten die gleiche Argumentation wie für $q > 1$ anwenden. **q.e.d.**

Damit können wir jetzt folgenden Satz zeigen:

Satz 1.40. *Für alle $1 \leq p \leq 2$ sind folgende Abbildungen stetig und linear. Für $p = 2$ sind sie sogar unitär und die Inversen von einander:*

$$\ell^p(\mathbb{Z}) \to L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \qquad \hat{f} \mapsto f \ \textit{mit} \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

$$L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \ell^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{Z}), \qquad f \mapsto \hat{f} \ \textit{mit} \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Für $p = 1$ geht die erste Abbildung sogar nach $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und die zweite Abbildung nach $c_0(\mathbb{Z})$. Die Normen aller Abbildungen sind gleich 1.

Beweis: In Satz 1.9 haben wir gezeigt, dass die erste Abbildung eine stetige lineare Abbildung von $\ell^1(\mathbb{Z})$ nach $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist mit $\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1$ und, dass sie eine Abbildung von $\ell^2(\mathbb{Z})$ auf eine abgeschlossenen Unterraum von $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist. Wegen Korollar 1.32 ist für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die entsprechende Fourierreihe $(\sum \hat{f}(n)e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ Cesàro-summierbar mit Grenzwert f. Weil in dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ das Fourierpolynom

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{-inx} \text{ mit } \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

die beste Approximation von f durch Linearkombinationen von $1, e^{\pm ix}, \ldots, e^{\pm iNx}$ ist, folgt

$$\left\| \sum\nolimits_{n=N}^{N} \hat{f}(n) e^{-inx} - f \right\|_2 \leq \|(F_n * f) - f\|_2.$$

Also konvergiert die Fourierreihe in $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegen f und der abgeschlossene Unterraum ist ganz $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Insbesondere ist die Abbildung

$$L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \qquad f \mapsto \hat{f} \qquad \text{mit} \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

unitär und die inverse Abbildung von der ersten Abbildung mit $p = 2$. Im Lemma von Riemann-Lebesgue Satz 1.21 haben wir gezeigt, dass die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ von $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ nach $c_0(\mathbb{Z})$ stetig und durch 1 beschränkt ist. Dann folgt die Aussage aus dem Interpolationssatz von Riesz-Thorin 1.38. **q.e.d.**

Wegen dem Satz 1.15 sind die zweiten Abbildungen injektiv, und weil $\ell^p(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ für $1 \leq p \leq 2$ sind auch die ersten Abbildungen injektiv. Allerdings sind nur die Abbildungen mit $p = 2$ auch surjektiv. Das Bild von $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ unter der zweiten Abbildung ist also eine Teilmenge von $c_0(\mathbb{Z})$. Diese Teilmenge wird wohl nicht durch ein Abfallverhalten von $\hat{f}$ charakterisiert. Im folgenden Satz geben wir für ein $c \in c_0(\mathbb{Z})$ eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung dafür an, dass c zu dem Bild gehört.

Satz 1.41. *Ein $c \in c_0(\mathbb{Z})$ mit den folgenden drei Eigenschaften ist $\hat{f}$ einer nicht negativen Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$:*

(i) $c(n) \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$

(ii) $c(-n) = c(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

(iii) $2c(n) \leq c(n-1) + c(n+1)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Die Bedingung (iii) ist äquivalent zu

$$c(n) - c(n+1) \leq c(n-1) - c(n).$$

Aus $\lim_{n\to\infty} c(n) = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \big(c(n) - c(n-1)\big) = 0$. Also ist $\big(c(n) - c(n-1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer Zahlen. Wir wählen für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $c(n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Für $m \geq 1$ folgt

$$\begin{aligned} c(N) - c(N+m) &= c(N) - c(N+1) + \ldots + c(N+m-1) - c(N+m) \\ &\geq m\big(c(N+m-1) - c(N+m)\big) \end{aligned}$$

und für $m \geq N$

$$(N+m-1)\big(c(N+m-1)-c(N+m)\big) \leq \frac{N+m-1}{m}(c(N)-c(N+m)) \leq \frac{2m-1}{m}c(N) \leq \varepsilon.$$

Damit gilt $k\big(c(k) - c(k+1)\big) \leq \varepsilon$ für $k \geq 2N - 1$ und $\lim_{n\to\infty} n\big(c(n) - c(n+1)\big) = 0$. Daraus folgt, dass auch folgende Teleskopsumme im Grenzwert $n \to \infty$ konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{n} k\big(c(k-1) + c(k+1) - 2c(k)\big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k\big(c(k-1) - c(k)\big) + c(k) - \Big((k+1)\big(c(k) - c(k+1)\big) + c(k+1)\Big)$$
$$= c(0) - c(n) - n\big(c(n) - c(n+1)\big).$$

Wir betrachten jetzt die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\big(c(n-1) + c(n+1) - 2c(n)\big)F_{n-1}(x)$$

mit dem Fejérkern $F_n(x)$. Jeder Summand ist eine nichtnegative Funktion auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Deshalb ist die Summe eine nichtnegative messbare Funktion, die auch ∞ sein kann. Wegen dem Satz der Monotonen Konvergenz und wegen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\big(c(n-1) + c(n+1) - 2c(n)\big)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{n-1}(x)dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\big(c(n-1) + c(n-1) - 2c(n)\big) = c(0)$$

ist f eine fast überall nicht negative Funktion in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Die Summen

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n\big(c(n-1) - c(n+1) - 2c(n)\big)F_{n-1}(x)$$

konvergieren für $N \to \infty$ wegen dem Satz der majorisierten Konvergenz von Lebesgue in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegen f. Der j-te Fourierkoeffizient von S_N ist

$$\hat{S}_N(j) = \sum_{k=1}^{N} k\big(c(k-1) + c(k+1) - 2c(k)\big)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{k-1}(x)e^{-jx}dx$$

Setzen wir die Fourierkoeffizienten von F_{k-1} ein so erhalten wir für $n \geq |j| + 1$

$$\hat{S}_N(j) = \sum_{k=|j|+1}^{N} k\big(c(k-1) + c(k+1) - 2c(k)\big)\left(1 - \frac{|j|}{k}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=|j|+1}^{N} k\big(c(k-1)+c(k+1)-2c(k)\big) - |j| \sum_{k=|j|+1}^{N} \big(c(k-1)-c(k)\big)-\big(c(k)-c(k+1)\big)\\
&= \sum_{k=|j|+1}^{N} k\big(c(k-1)-c(k)\big)+c(k)-\big((k+1)\big(c(k)-c(k+1)\big)+c(k+1)\big)\\
&\qquad - |j| \sum_{k=|j|+1}^{N} \big(\big(c(k-1)-c(k)\big)-\big(c(k)-c(k+1)\big)\big)\\
&= \big((|j|+1)\big(c(|j|)-c(|j|+1)\big)+c(|j|+1)\big)-\big((N+1)\big(c(N)-c(N+1)\big)+c(N+1)\big)\\
&\qquad - |j|\big(\big(c(|j|)-c(|j|+1)\big)-\big(c(N)-c(N+1)\big)\big)\\
&= c(|j|)+|j|\big(c(N)-c(N+1)\big)-N\big(c(N)-c(N+1)\big)-c(N).
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir die obige Formel für die Teleskopsumme bemüht. Im Grenzwert $N \to \infty$ konvergiert dieser Ausdruck gegen $c(|j|)$. Weil S_N in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegen f konvergiert, folgt $\hat{f}(j) = \lim_{N\to\infty} \hat{S}_N(j) = c(|j|) = c(j)$ für $j \in \mathbb{Z}$. **q.e.d.**

Beispiel 1.42. *Sei $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ eine monoton fallende konvexe Funktion, die im Grenzwert $x \to \infty$ gegen Null konvergiert. Dann erfüllt $c(n) = \varphi(n)$ die Voraussetzungen von dem Satz.*

a) $\varphi(x) = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$ *für* $\alpha > 0$

b) $\varphi(x) = \frac{1}{\ln(a+x)}$ *für* $a > 0$.

Wenn φ nun auf $\mathbb{R}^+$ definiert ist und auch die gleichen Eigenschaften hat, müssen wir nur $c(0) \geq 0$ so wählen, dass $c(0) + c(2) \geq 2c(1)$ gilt. Insbesondere ist $c(-n) = c(n) = \frac{1}{\ln(n+1)}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c(0) \geq \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln 3} = 1,97$ ein solches Beispiel. Deshalb ist $c(0) + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{\ln(n+1)}$ die Fourierreihe einer nichtnegativen Funktion in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Weil $\sum c^2(n)$ divergiert, liegt f nicht in $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Diese Reihe ist offenbar bei $x = 0$ divergent und als alternierende Reihe konvergent bei $x = \pi$. Wir werden später sehen, dass f auf $(0, 2\pi)$ stetig ist. Später werden wir auch sehen, dass die analoge Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ für alle x konvergiert und der Grenzwert auf $(0, 2\pi)$ stetig ist, aber nicht in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ liegt. Insbesondere gehört also

$$
c \in c_0(\mathbb{Z}) \qquad \textit{mit} \qquad c(n) = \begin{cases} 0 & \textit{für } n = 0 \\ \frac{\operatorname{sgn}(n)}{\ln(n+1)} & \textit{für } n \neq 0. \end{cases}
$$

nicht zum Bild von $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ unter der Abbildung $f \to \hat{f}$.

Wir wollen jetzt für monotone Folgen λ von positiven Zahlen, die gegen Null konvergieren, die Konvergenz der folgenden beiden Reihen untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)\cos(nx) \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)\sin(nx).$$

Satz 1.43. *Sei $(\lambda(n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen, die gegen Null konvergiert. Dann konvergieren die beiden Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)\cos(nx) \quad \textit{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)\sin(nx)$$

für alle $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Für jedes $0<\delta<\pi$ konvergieren sie auf $[\delta, 2\pi-\delta]$ gleichmäßig.

Beweis: Für $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ definieren wir

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{inx}-1}{1-e^{-ix}} \quad \text{mit} \\ |A_n(x)| &\le \frac{2}{|1-e^{-ix}|} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \text{ für } x\in[\delta, 2\pi-\delta]. \end{aligned}$$

Wir wenden jetzt eine Technik für Reihen an, die analog zur partiellen Integration ist:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+m}\lambda(k)e^{ikx} &= e^{inx}\left(\lambda(n+1)A_1(x)+\sum_{k=2}^{m}\lambda(n+k)\big(A_k(x)-A_{k-1}(x)\big)\right) \\ &= e^{inx}\left(\sum_{k=1}^{m-1}A_k(x)\big(\lambda(n+k)-\lambda(n+k+1)\big)+\lambda(n+m)A_m(x)\right) \end{aligned}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}\lambda(k)e^{ikx}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\big(\lambda(n+k)-\lambda(n+k+1)\big)+\lambda(n+m)\right) = \frac{\lambda(n+1)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{1.3}$$

für $x\in[\delta, 2\pi-\delta]$. Dabei haben wir $\lambda(n+m)\ge 0$ und $\lambda(n+k)-\lambda(n+k+1)\ge 0$ benutzt. Daraus folgt, dass die Reihe auf $x\in[\delta,2\pi-\delta]$ gleichmäßig konvergiert.**q.e.d.**

Insbesondere sind die Grenzwerte stetige Funktionen auf $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Der Realteil konvergiert bei $x\in 2\pi\mathbb{Z}$ genau dann, wenn $\lambda\in\ell^1$ gilt. Der Imaginärteil konvergiert aber trivialerweise, weil $\sin(nx)=0$ für $x\in 2\pi\mathbb{Z}$

Satz 1.44. *Sei wieder $\lambda(n)$ eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Wenn $(\lambda(n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^1 liegt, dann gehört folgende Funktion zu $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)e^{inx} \textit{ mit } \hat{f}(n)=\begin{cases}\lambda(n) & \textit{für } n>0\\ 0 & \textit{für } n\le 0.\end{cases} \textit{ und } \|f\|_1 \le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n}.$$

Beweis: Wegen $f(-x) = \overline{f(x)}$ genügt es $\int_0^\pi |f(x)|dx$ abzuschätzen. Mit $\Lambda(k) = \lambda(1) + \ldots + \lambda(k)$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^{k} \lambda(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n}.$$

Für $\frac{\pi}{k+1} \le x < \frac{\pi}{k}$ und $k = 1, \ldots$ gilt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{k} \lambda(n) e^{inx} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(n) e^{inx}.$$

In (1.3) können wir m nach ∞ laufen lassen und erhalten

$$|f(x)| \le \Lambda(k) + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \lambda(k+1).$$

Weil $\sin \frac{x}{2} \ge \frac{x}{\pi}$ für $x \in [0, \pi]$ gilt folgt aus $x \ge \frac{\pi}{k+1}$

$$|f(x)| \le \Lambda(k) + \frac{\pi}{x} \lambda(k+1) \le \Lambda(k) + (k+1)\lambda(k+1).$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |f(x)|dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} |f(x)|dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \big(\Lambda(k) + (k+1)\lambda(k+1)\big) \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k(k+1)} + \pi \sum_{k+1}^{\infty} \frac{\lambda(k+1)}{k} \le 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n}.\end{aligned}$$

Um $\hat{f}$ zu berechnen, genügt es zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) e^{inx}$ in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ konvergiert. Wir haben $\|f\|_1 \le 2 \sum \frac{\lambda(n)}{n}$ für $f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) e^{inx}$ gezeigt. Insbesondere sind die $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$-Normen von $(\sum_{n=1}^{N} \lambda(n) e^{inx})_{N \in \mathbb{N}}$ beschränkt und diese Folge konvergiert wegen Satz 1.43 fast überall auf $x \in \mathbb{R}$ gegen f. Wegen dem Satz der beschränkten Konvergenz konvergiert diese Folge in $L^1([-\pi, \pi])$ gegen f, also auch in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. **q.e.d.**

Satz 1.45. *Sei $(\lambda(n))_{n \in \mathbb{N}}$ wieder eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \sin(nx)$ genau dann gegen eine Funktion in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)/n < \infty$ gilt. In diesem Fall konvergiert die Fourierreihe in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.*

Beweis: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)/n$ konvergiert, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\sin(nx)$ der Imaginärteil der entsprechenden Funktion aus Satz 1.44. Also konvergiert dann diese Fourierreihe in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Wenn umgekehrt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\sin(nx)$ gegen eine Funktion in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ konvergiert, dann ist der Grenzwert wegen Satz 1.43 eine ungerade Funktion und die entsprechende Fourierreihe eine Reihe in $\big(\sin(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen jetzt, dass für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ die Reihe $\big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\sin(nx)\sin(mx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f(x)\sin(mx)$ konvergiert, wobei $f(x)$ der Grenzwert von $\big(\sum \lambda(n)\sin(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Wegen (1.3) und $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{x}{\pi}$ gilt nämlich für $x \in (0,\pi]$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+M} \lambda(k)\sin(kx)\sin(mx)\right| &\leq |\sin(mx)| \left| Im\left(\sum_{k=n+1}^{n+M} \lambda(k)e^{ikx}\right)\right| \\ &\leq mx\frac{\lambda(n+1)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leq m\pi\lambda(n+1).\end{aligned}$$

Dann folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz von Lebesgue

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \lambda(m).$$

Also hat f die Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{\lambda(n)}{2i} & \text{für } n > 0 \\ 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{-\lambda(-n)}{2i} & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

und die Fourierreihe $(\sum \lambda(n)\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$. Das Integral $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ist stetig und wegen $\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ periodisch. Insbesondere ist die Fourierreihe von der Form $\hat{F}(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\hat{F}(n)\cos(nx)$. Wegen dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}2\hat{F}(n) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{x} f(t)\cos(nx)dtdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_t^{\pi}\cos(nx)f(t)dxdt \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin(nt)}{n}dt = -\frac{\lambda(n)}{n}\end{aligned}$$

für $n > 0$. Wegen Satz 1.34 ist die Fourierreihe von F Cesàro-summierbar mit Grenzwert $F(x)$ und an der Stelle $x = 0$ mit Grenzwert 0. Außerdem ist $|\hat{F}(n)|n = \lambda(n)$ beschränkt. Dann folgt aus Hardys Taubersatz Satz 1.37

$$0 = \hat{F}(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\hat{F}(n) = \hat{F}(0) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda(n)}{n}.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(n)/n$ konvergent. **q.e.d.**

Beispiel 1.46.

$$\lambda(n) = \frac{1}{\ln(n+1)} \quad n \geq 1$$

Die Funktion $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\ln(n+1)}$ *ist also stetig auf* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. *Aber der Imaginärteil von* f *liegt wegen Satz 1.45 nicht in* $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *weil*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \geq \int_1^{\infty} \frac{dt}{(t+1)\ln(t+1)}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \ln\big(\ln(1+t)\big)\big]_1^T = -\ln\big(\ln(2)\big) + \lim_{t\to\infty} \ln\big(\ln(1+t)\big) = \infty.$$

Der Realteil von f *liegt aber wegen Beispiel 1.42 in* $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Beispiel 1.47.

$$\lambda(n) = \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha > 0$$

Die Funktion $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ *ist also stetig auf* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *und gehört zu* $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, *weil die Reihe* $\left(\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert. Die Reihe ist aber nicht absolut konvergent für* $0 < \alpha \leq 1$.

Beispiel 1.48.

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad \text{für } 0 < x < 2\pi$$

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Um das einzusehen benutzen wir die Taylorreihe des Logarithmus bei 1:

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1, \qquad -\ln(1 - re^{in\vartheta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{in\vartheta}}{n}.$$

Die Reihe konvergiert für $r < 1$ *gleichmäßig. Insbesondere gilt*

$$-\frac{1}{2}\ln(1 + r^2 - 2r\cos\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\cos(n\vartheta), \qquad -\mathrm{Arg}(1 - re^{i\vartheta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\sin(n\vartheta).$$

Hierbei ist Arg *der Zweig, der Werte in* $(-\pi, \pi)$ *annimmt. Der Grenzwert* $r \nearrow 1$ *ergibt für* $0 < \vartheta < 2\pi$

$$-\frac{1}{2}\ln(1 + r^2 - 2r\cos\vartheta) \to -\ln\left(2\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \qquad -\mathrm{Arg}(1 - re^{i\vartheta}) \to \frac{1}{2}(\pi - \vartheta).$$

Wegen dem Satz der majorisierten Konvergenz von Lebesgue konvergieren diese Grenzwerte punktweise für $0 < \vartheta < 2\pi$ und in $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Daraus folgen die obigen Fourierreihen.

1.7 Absolut konvergente Fourierreihen

Offenbar ist die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ genau dann für ein $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent, wenn $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ gilt. Wegen Satz 1.9 definiert diese Fourierreihe dann eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und die Fourierreihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig und absolut. Wir definieren $\mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ als das Bild der Abbildung

$$\ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \qquad \hat{f} \to f \qquad \text{mit} \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}.$$

$\mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ enthält also alle trigonometrischen Polynome, ist aber kleiner als $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Wir wollen jetzt zeigen, dass $\mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ eine Unteralgebra von $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist.

Die punktweise Multiplikation der Elemente von $\mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ entspricht in $\ell^1(\mathbb{Z})$ wieder die Konvolution. Für $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ definieren wir

$$(a * b)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(n-k)b(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(k)b(n-k).$$

Diese beiden Reihen konvergieren und definieren ein Element von $\ell^1(\mathbb{Z})$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(n-k)b(k)| \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b(k)| = \|a\|_\infty \|b\|_1$$

$$\begin{aligned} \|a*b\|_1 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(a*b)(n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(n-k)b(k)| \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |b(k)||a(n-k)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b(k)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)| = \|b\|_1 \cdot \|a\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Dadurch wird also $\ell^1(\mathbb{Z})$ zu einer kommutativen Banachalgebra.

Satz 1.49. *Für $f, g \in \mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gilt auch $fg \in \mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$.*

Beweis:
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\hat{f} * \hat{g})(n)e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n-k)\hat{g}(k)e^{inx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n-k)\hat{g}(k)e^{i(n-k)x}e^{ikx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k)e^{ikx} = f(x)g(x).$$ **q.e.d.**

Wir werden sehen, dass es Funktionen $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gibt, für die die Fourierreihe in einem $x \in \mathbb{R}$ nicht konvergiert, die also nicht in $\mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ liegt.

Wir betrachten jetzt folgende Abbildung

$$\begin{gathered} L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \qquad f \mapsto I(f) \text{ mit} \\ I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^s f(t)dtds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\pi}\int_0^s f(t)dtds. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Die beiden Konstanten sind so gewählt, dass $\int_{-\pi}^{\pi} I(f)(x)dx = 0$ gilt. Die Funktion $I(f)$ ist offenbar stetig. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen der Periodizität von f

$$I(f)(x+2\pi) - I(f)(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Also ist auch $I(f)$ periodisch und liegt in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Für $x \in [-\pi, \pi]$ gilt

$$|I(f)(x)| \leq 2\pi\|f\|_1 + \pi\|f\|_1 + \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_1 ds = 5\pi\|f\|_1.$$

Daraus folgt $\|I(f)\|_\infty \leq 5\pi\|f\|_1$ und die Abbildung 1.4 ist stetig. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} I(e^{inx}) &= \frac{e^{inx}-1}{in} - \frac{x}{2\pi}\left[\frac{e^{int}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{ins}-1}{in}ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\pi} \frac{e^{ins}-1}{in}ds \\ &= \frac{e^{inx}-1}{in} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ins}}{(in)^2}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ins}}{(in)^2}\right]_0^{-\pi} + \frac{1}{2in} + \frac{1}{2in} = \frac{e^{inx}}{in} \\ I(1) &= x - x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} sds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\pi} sds = -\left[\frac{s^2}{4\pi}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{s^2}{4\pi}\right]_0^{-\pi} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\widehat{I(f)}(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{\hat{f}(n)}{in} & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Damit können wir jetzt folgendes Lemma zeigen:

Lemma 1.50. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $F \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, so dass $F(x) - \int_0^x f(t)dt$ konstant ist. Dann gilt $\hat{f}(n) = in\hat{F}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis: Weil F und $x \mapsto F(x) - \int_0^x f(t)dt$ periodisch sind mit Periode 2π ist auch $\int_0^x f(t)dt$ periodisch. Daraus folgt

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2\pi\hat{f}(0).$$

Daraus folgt, dass $F - I(f)$ konstant ist. Also gilt $\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in}$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\hat{f}(n) = in\hat{F}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. **q.e.d.**

Korollar 1.51. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ für ein $1 < p \leq \infty$ und $F \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, so dass $F(x) - \int_0^x f(t)dt$ konstant ist. Dann gilt $F \in \mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.*

Beweis: Wegen der Hölderungleichung gilt für $1 \leq q \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ auch $f \in L^q(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $\|f\|_q \leq \|1\|_r \|f\|_p = \|f\|_p$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Deshalb können wir $1 < p \leq 2$ annehmen. Dann folgt $\|\hat{f}\|_{\frac{p}{p-1}} \leq \|f\|_p$ aus Satz 1.40. Aus dem vorausgehenden Lemma und der Hölderungleichung folgt $\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in}$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\quad \hat{F} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ mit $\|\hat{F}\|_1 \leq |\hat{F}(0)| + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{F}(n)| \leq |\hat{F}(0)| + \|\hat{f}\|_{\frac{p}{p-1}} \|a\|_p$ mit

$$a(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{in} & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \|a\|_p^p = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty.$$ **q.e.d.**

Die Funktionen F, die die Bedingungen von dem Korollar erfüllen, gehören zu dem sogenannten Sobolevraum $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ an. Darin enthalten sind insbesondere alle stetig differenzierbaren Funktionen. Es gibt noch eine andere Erweiterung von $C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, die in $\mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ enthalten ist.

Satz 1.52 (Bernstein)**.** *Sei $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und für ein $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$*

$$\sup_{x \neq y \in \mathbb{R}} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Dann liegt f in $\mathbb{A}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Beweis: Wir definieren $g_h(x) = f(x + h) - f(x - h)$ für alle $h > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \widehat{g_h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+h) - f(x-h)\big)e^{-ixn}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\big(e^{-i(x-h)n} - e^{-i(x+h)n}\big)dx \\ &= \frac{2\sin(hn)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = 2\sin(hn)\hat{f}(n). \end{aligned}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(hn)|^2 |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_h(x)|^2 dx \leq \left(\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}\right)^2 (2h)^{2\alpha} \leq K^2 h^{2\alpha}.$$

Dann folgt für $m \in \mathbb{N}$, $2^{m-1} < |n| \leq 2^m$ und $h = \frac{\pi}{2^{m+1}}$ erst $\frac{1}{2} < \sin^2(nh) \leq 1$ aus $\frac{\pi}{4} < |nh| \leq \frac{\pi}{2}$ und schließlich

$$\sum_{2^{m-1} < |n| \leq 2^m} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{K^2 h^{2\alpha}}{2} = \frac{K^2 \pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(m+1)+1}}.$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt dann

$$\sum_{2^{m-1}<|n|\leq 2^m} |\hat{f}(n)| \leq \sqrt{\frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(m+1)+1}}} \cdot \sqrt{2^m} = \frac{K\pi^\alpha}{2^{\alpha(m+1)+\frac{1}{2}-\frac{m}{2}}} = \frac{K\pi^\alpha}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}2^{(\alpha-\frac{1}{2})m}}.$$

Für $\alpha > \frac{1}{2}$ ist $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{-\alpha-\frac{1}{2}}K\pi^\alpha}{2^{(\alpha-\frac{1}{2})m}} = \frac{2^{-\alpha-\frac{1}{2}}K\pi^\alpha}{1-2^{(\frac{1}{2}-\alpha)}} < \infty$. Daraus folgt $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. **q.e.d.**

Satz 1.53. *Eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ liegt genau dann in $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, wenn es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $C(m)$ gibt, so dass $|\hat{f}(n)| \leq \frac{C(m)}{(1+|n|)^m}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.*

Beweis: Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ liegen alle Ableitungen $F^{(m)} \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Wegen dem Lemma folgt dann $\hat{f}(n)n^m \in C_0(\mathbb{Z})$. Daraus folgt die Bedingung an $\hat{f}$ in dem Satz. Wenn umgekehrt $\hat{f}$ diese Bedingung erfüllt, dann folgt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $n \mapsto (in)^m\hat{f}(n)$ in $\ell^1(\mathbb{Z})$ liegt. Daraus folgt $f^{(m)} \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ für alle $m \in \mathbb{N}$. **q.e.d.**

Die glatten Funktionen enthalten als eine Teilmenge auch noch die analytischen Funktionen. Offenbar ist eine Funktion in $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ genau dann analytisch auf $\mathbb{R}$, wenn sie analytisch auf $[0, 2\pi]$ ist. Weil $[0, 2\pi]$ kompakt ist, gibt es für jede auf $\mathbb{R}$ analytische Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ein $\varepsilon > 0$, so dass sich f analytisch auf $\{(x+iy) \in \mathbb{C} \mid |y| < \varepsilon\}$ fortsetzt. Weil die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \to e^{iz}$ analytisch ist, setzt sich eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ genau dann analytisch auf $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid y \in (-\alpha, \beta)\}$ mit $\alpha, \beta > 0$ fort, wenn es auf $\{z \in \mathbb{C} \mid e^{-\beta} < |z| < e^\alpha\}$ komplexe analytische Funktion g gibt, so dass $f(x+iy) = g(e^{ix-y})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (-\alpha, \beta)$ gilt. Dann können wir g als die Summe von zwei komplexen Potenzreihen schreiben:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(-n)z^{-n} \quad \text{mit} \quad z = e^{ix-y}.$$

Wegen dem vorangehenden Satz konvergieren beide Potenzreihen für alle $z \in \mathbb{T}$. Insbesondere haben beide Potenzreihen einen Konvergenzradius nicht kleiner als Eins. Dann konvergiert die erste Potenzreihe in z für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq 1$ und die zweite Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$. Die erste Potenzreihe hat dann sogar einen Konvergenzradius nicht kleiner als e^α und die zweite einen Konvergenzradius nicht kleiner als e^β. Aus dem Wurzelkriterium für Potenzreihen folgt dann:

Satz 1.54. *Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ setzt sich genau dann analytisch auf $x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (-\alpha, \beta)$ für $\alpha, \beta > 0$ fort, wenn folgendes gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} |\hat{f}(n)|^{1/n} \leq e^{-\alpha} \quad \textit{und} \quad \limsup_{n\to\infty} |\hat{f}(-n)|^{1/n} \leq e^{-\beta}$$ **q.e.d.**

1.8 Abelsummierbarkeit und der Poissonkern

Wir haben in Abschnitt 1.5 die sogenannte Cesàro-Summierbarkeit kennengelernt. In diesem Abschnitt führen wir eine noch allgemeinere Konvergenz ein.

Definition 1.55. *Eine Reihe* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *heißt abelsummierbar, wenn folgendes gilt:*

(i) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *ist nicht kleiner als Eins.*

(ii) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konvergiert im Grenzwert* $x \nearrow 1$ *gegen* s*.*

In diesem Fall heißt s *die Abelsumme von* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*.*

Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist das Inverse von $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Also ist (i) äquivalent zu $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$. Wenn der Konvergenzradius größer als 1 ist, dann konvergiert die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sogar absolut. Deshalb ist der Fall mit Konvergenzradius 1 eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Konvergenz von Reihen. Wir zeigen jetzt, dass die Abelsummierbarkeit eine Verallgemeinerung der Cesàro-Summierbarkeit ist.

Satz 1.56. *Sei* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *Cesàrosummierbar. Dann ist* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *auch abelsummierbar.*

Beweis: Indem wir komplexe Reihen in Realteil und Imaginärteil zerlegen, können wir uns auf reelle Reihen beschränken. Sei also $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Cesàrosummierbar, d.h. $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $(n+1)\sigma_n = \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)a_k$. Weil $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert sind $|\sigma_n|$ durch K beschränkt. Dann folgt

$$|s_n| = |(n+1)\sigma_n - n\ \sigma_{n-1}| \leq (2n+1)K, \qquad |a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq 4nK.$$

Deshalb ist der Konvergenzradius von $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht kleiner als 1. Wir zeigen jetzt für $x \in (-1,1)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_n x^n$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= s_0 + (s_1 - s_0)x + (s_2 - s_1)x^2 + \ldots + (s_N - s_{N-1})x^N \\ &= (1-x)\{s_0 + s_1 x + \ldots + s_{N-1}x^{N-1}\} + s_n x^N.\end{aligned}$$

Für $x \in (-1,1)$ konvergiert $|s_N x^N| \leq (2N-1)K|x|^N$ im Grenzwert $N \to \infty$ gegen Null also folgt

$$f(n) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} s_n x^n &= \sigma_0 + (2\sigma_1 - \sigma_0)x + (3\sigma_2 - 2\sigma_1)x^2 + \ldots + \big((N+1)\sigma_N - N\sigma_{N-1}\big)x^N \\ &= (1-x)\{\sigma_0 + 2\sigma_1 x + 3\sigma_2 x^2 + \ldots + N\sigma_{N-1}x^{N-1}\} + (N+1)\sigma_N x^N.\end{aligned}$$

Daraus folgt dann auch $f(x) = (1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_n x^n$. Für $|x| < 1$ gilt jetzt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\sigma_n - s| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$. Für $0 \leq x < 1$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_n x^n &\geq \sum_{n=0}^{N}(n+1)\sigma_n x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty}(n+1)(s-\varepsilon)x^n \\ &= \frac{s-\varepsilon}{(1-x)^2} + \sum_{n=0}^{N}(N+1)\sigma_n x^n - (s-\varepsilon)\sum_{n=0}^{N}(n+1)x^n \\ f(x) &\geq s - \varepsilon + (1-x^2)\sum_{n=0}^{N}(n+1)x^n\big(\sigma_n - (s-\varepsilon)\big).\end{aligned}$$

Der zweite Summand konvergiert für $x \nearrow 1$ gegen Null. Also gibt es ein $0 < r_1 < 1$ mit $f(x) > s - \varepsilon$ für $x \in (r_1, 1)$. Genauso gibt es ein $0 < r_2 < 1$ mit $f(x) < s + \varepsilon$ für $x \in (r_2, 1)$. **q.e.d.**

Genauso wie die Faltung mit dem Fejérkern die Cesàrosumme σ_n beschreibt, ergibt die Faltung mit dem Poissonkern $P_r(x)$ die Funktion

$$(f * P_r)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{-in(y-x)}\right)dy = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy\right)e^{inx}.$$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ konvergiert die Summe gleichmäßig und wir dürfen die Integration mit der Summe vertauschen. Wir zeigen wieder, dass $P_r(x)$ eine Diracfolge ist für $r \nearrow 1$.

Lemma 1.57. *Im Grenzwert $r \nearrow 1$ ist der Poissonkern eine Diracfolge für $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Beweis: Wir wissen bereits $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = 1$ mit $P_r(x) \geq 0$. Aus $1 - 2r\cos x + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos x) \geq c_\delta$ für $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ und $\delta \leq |x| \leq \pi$ folgt $|P_r(x)| \leq \frac{1-r^2}{c_\delta}$ für $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ und $\delta \leq |x| \leq \pi$. Dann folgt die Eigenschaft (iii). **q.e.d.**

Aus Satz 1.29 folgt der erste Teil von folgendem Satz

Satz 1.58. *Für $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ bzw. $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$ gehört $P_r * f$ für alle $r \in (0,1)$ zu dem gleichen Banachraum und konvergiert in diesem Banachraum im Grenzwert $r \nearrow 1$ gegen f. Für $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ konvergiert $(P_r * f)(x)$ im Grenzwert $r \nearrow 1$ für alle Lebesguepunkte $x \in \mathcal{L}(f)$ gegen $f(x)$.*

Beweis: Wir übertragen den Beweis von Satz 1.35. Wie in (1.2) schätzen wir $P_r(x) \leq P_r(0) = \frac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \frac{1+r}{1-r}$ auf $x \in [0, 1-r]$ ab. Auf $[1-r, \pi]$ ersetzen wir (1.1) durch

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos x)} \leq \frac{1-r^2}{4r}\frac{\pi^2}{x^2} \text{ für } 0 < |x| < \pi :$$

$$\begin{aligned} |(f * P_r)(x) - f(x)| &\leq \frac{1+r}{2\pi(1-r)}\int_0^{1-r} |g(t)|dt + \frac{\pi(1-r^2)}{8r}\int_{1-r}^{\pi} \frac{|g(t)|}{t^2}dt \\ &\leq \frac{1+r}{2\pi}\frac{G(1-r)}{1-r} + \frac{\pi(1-r^2)}{8r}\left[\frac{G(t)}{t^2}\right]_{1-r}^{\pi} + \frac{\pi(1-r^2)}{8r}\int_{1-r}^{\pi}\frac{G(t)}{t^3}dt. \end{aligned}$$

Wegen $G(t) \leq \mathbf{o}(t)$ folgt dann wie im Beweis von Satz 1.35 die Aussage. **q.e.d.**

Der Poissonkern $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r+\cos x + r^2}$ ist für alle $(r,x) \in [0,1) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ definiert. Benutzen wir (r,x) als Polarkoordinaten von dem Ball $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, so ist die Funktion $(r,x) \mapsto P_r(\lambda)$ auf dem Ball $B(0,1)$ harmonische. In diesen Polarkoordinaten hat der Laplaceoperator nämlich die Gestalt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Deshalb können wir mit dem Poissonkern das sogenannte Dirichletproblem lösen:

Dirichletproblem: Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2\big(B(0,1)\big)$ die harmonisch ist und die sich in den Polarkoordinaten (r,x) im Grenzwert $r \nearrow 1$ einer Funktion f auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ annähert.

Damit haben wir also das Dirichletproblem nicht nur für die Funktionen $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, sondern auch für die Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$ gelöst. Kehren wir zu der Konvergenz der Fourierreihen zurück, so folgt aus Satz 1.58:

Korollar 1.59. *Sei $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ bzw. $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Fourierreihe von f in dem gleichen Banachraum abelsummierbar. Für $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ an allen Lebesguepunkten $x \in \mathcal{L}(f)$ abelsummierbar, also insbesondere an allen Punkten, an denen f stetig ist.* **q.e.d.**

Wir wollen jetzt Funktionen in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ finden, für die die Fourierreihe nicht bei allen $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ konvergiert. Ausgangspunkt ist dabei die Funktion $f(x) = i(\pi - x)$ auf $x \in [0, 2\pi]$, die dem Beispiel 1.10 ähnelt:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i(\pi - x)e^{-inx}dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \left[\frac{xe^{-inx}}{2\pi n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n} & \text{für } n \neq 0. \end{cases} \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{inx}}{n}.$$

Im Beweis von Satz 1.35 haben wir gezeigt, dass die Fourierreihe einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ an allen Lebesguepunkten $x \in \mathcal{L}(f)$ von f gegen den Funktionswert

$$f(x) = \lim_{\delta\searrow 0} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x + y)dy$$

konvergiert. Unsere oben gegebene Funktion ist an allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ stetig. Solche Punkte sind natürlich Lebesguepunkte. Bei $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist die Funktion links- und rechtsseitig stetig mit $\lim_{h\searrow 0} f(2\pi n + h) = i\pi$ und $\lim_{h\searrow 0} f(2\pi n - h) = -i\pi$. Sei also

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{h\searrow 0} f(2\pi n + h) + \lim_{h\searrow 0} f(2\pi n - h)\right) = 0 \quad \text{für} \quad x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Dann sind alle Punkte von f Lebesguepunkte. Deshalb ist die Fourierreihe von f auf ganz $\mathbb{R}$ Cesàro-summierbar mit dem Grenzwert f. Dann erfüllt die Fourierreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ die Bedingung von Hardy's Taubersatz und konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$. Wir wollen diese Schlussfolgerung jetzt noch etwas verschärfen. Wir wollen zeigen, dass die Fourierreihe als Folge gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und $N \in \mathbb{N}_0$ beschränkt ist:

$$\left|\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}\right| \leq M \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } N \in \mathbb{N}_0 \tag{1.5}$$

Wir modifizieren den Beweis von Hardy's Taubersatz um folgendes Lemma zu zeigen:

Lemma 1.60. *Die Abelsumme $A_r = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ einer Reihe $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei für $r \in [0, 1)$ beschränkt. Wenn außerdem $(n|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann sind auch die Summen $|\sum_{n=0}^{N} c_n|$ in $N \in \mathbb{N}_0$ gleichmäßig beschränkt.*

Beweis: Sei $r = 1 - \frac{1}{N}$ und $n|c_n| \leq M$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |S_N - A_r| &= \left|\sum_{n=0}^{N}(c_n - r^n c_n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n c_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |c_n|(1 - r^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n |c_n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} |c_n|(1 - r)\sum_{k=0}^{n-1} r^k + \frac{M}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n \leq MN(1 - r) + \frac{M}{N}\frac{1}{1 - r} = 2M. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Summenformel für die geometrische Reihe benutzt. Wenn also sowohl $|A_r| \leq M$ für $r \in (0,1)$ und $|nc_n| \leq M$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dann folgt $|S_N| \leq 3M$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. **q.e.d.**

Wir wenden dieses Lemma jetzt auf die Folgen

$$c_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{e^{inx}}{n} + \frac{e^{-inx}}{n} & \text{für } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

an. Weil die entsprechende Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen die periodische und beschränkte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} i(\pi - x + 2\pi n) & \text{für } x \in \big(2\pi n, 2\pi(n+1)\big) \\ 0 & \text{für } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

konvergiert, und weil $P_r(x)$ im Grenzwert $r \nearrow 1$ eine Diracfolge von $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist, folgt

$$|A_r(x)| = |(P_r * f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y)|f(y)|dy \leq \|f\|_\infty.$$

Dann folgt aus dem Lemma, dass für ein $M > 0$

$$|f_N(x)| \leq M \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } N \in \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad f_N(x) = \sum_{n=-N}^{-1} \frac{e^{inx}}{n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{inx}}{n}$$

gilt. Wir betrachten jetzt die verwandten Summen

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{n=-N}^{-1} \frac{e^{inx}}{n}.$$

Dann gilt bei $x = 0$

$$|\tilde{f}_N(0)| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N. \tag{1.6}$$

Wir wählen jetzt eine Folge von positiven Zahlen $a_n > 0$ mit $\sum a_n < \infty$ und eine Folge von natürlichen Zahlen N_n, so dass $N_{n+1} > 3N_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n \ln N_n = \infty$ gilt. Die Folgen $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $N_n = 3^{2^n}$ erfüllen diese Bedingungen. Dann definiert

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2iN_n x} f_{N_n}(x)$$

eine stetige Funktion in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, deren Fourierreihe bei $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ nicht konvergiert. Wegen (1.5) konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{2iN_n x} f_{N_n}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n |f_{N_n}(x)|$

in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegen eine Funktion $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Betrachten wir allerdings die entsprechenden Fourierreihen $\sum_{k=-2N_n}^{2N_n} \hat{g}(k)e^{inkx}$ an der Stelle $x = 0$, so gilt wegen (1.6)

$$\left|\sum_{k=-2N_n}^{2N_n} \hat{g}(k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N_n-1} \hat{g}(k) + \sum_{k=N_n}^{2N_n} \hat{g}(k)\right| = \left|\sum_{k=N_n}^{2N_n} \hat{g}(k)\right| \geq a_n \ln N_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass in dieser Summe die Fourierkoeffizienten von

$$a_m e^{2iN_m x} f_{N_m}(x) = a_m e^{2iN_m x} \sum_{k=-N_m, k\neq 0}^{N_m} \frac{e^{ikx}}{k} = a_m \sum_{k=N_m, k\neq 2N_m}^{3N_m} \frac{e^{-ikx}}{k-2N_m}$$

für $m < n$ sich wegheben und für $m = n$ nur die Fourierkoeffizienten von $e^{2iN_n}\tilde{f}_{N_n}$ auftauchen.

Zum Abschluss wollen wir auch noch ein einfacheres aber nicht konstruktives Argument für die Existenz von Funktionen $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ angeben, deren Fourierreihen für ein $x \in \mathbb{R}$ nicht konvergieren. Dazu erinnern wir zunächst daran, dass für jede Funktion $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die Abbildung

$$C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}, \qquad\qquad f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

linear und stetig ist und die Norm $\|g\|_1$ hat. Als nächstes berechnen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Norm $\|D_n\|_1$ von dem Dirichletkern aus Beispiel 1.13

$$\begin{aligned}\|D_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(n+x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{x}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt > \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k\pi}.\end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere $\lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty$.

Satz 1.61. *Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert ein $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dessen Fourierreihe $(D_N * f)(x_0)$ im Grenzwert $N \to \infty$ unbeschränkt ist. Insbesondere konvergiert die Fourierreihe bei x_0 nicht.*

Beweis: Wenn es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die Folge

$$N \mapsto \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - x)D_N(x)dx$$

beschränkt ist, dann ist für alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ auch $(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_N(x)dx)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt, weil für jedes $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ auch die Funktion $x \mapsto f(x_0 - x)$ zu $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gehört. Weil die Norm $\|D_N\|_1$ dieser Funktionale auf $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ unbeschränkt sind, widerspricht das dem Satz von Banach-Steinhausen. **q.e.d.**

Satz 1.62 (Banach-Steinhausen)**.** *Sei E ein Banachraum und L_n eine Folge in dem Dualraum, die punktweise beschränkt ist, d.h. für alle $x \in E$ ist $(|L_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann ist auch $\|L_n\|$ beschränkt.*

Beweis: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei

$$F_m = \{x \in E \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |L_n(x)| \leq m\}$$

Jede dieser Mengen ist als Schnittmenge von abgeschlossenen Teilmengen von E auch abgeschlossen. Diese Folge ist außerdem monoton wachsend, d.h. $F_m \subset F_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Laut Voraussetzung ist $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m = E$. Dann gibt es gemäß einer Beweisstrategie von Baire ein $m \in \mathbb{N}$, so dass das Innere von F_m nicht leer ist. Wenn nämlich alle $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ keine inneren Punkte enthält, dann gibt es induktiv eine Folge $B(x_1, \rho_1) \supset \overline{B(x_2, \rho_2)} \supset B(x_2, \rho_2) \supset \ldots$ von Bällen, die jeweils disjunkt von F_m sind:

$$B(x_m, \rho_m) \cap F_m = \emptyset \quad \text{ und } \quad \rho_{m+1} \leq \frac{\rho_m}{2}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllen. Weil nämlich jeweils F_{m+1} nicht $B(x_m, \frac{\rho_m}{2})$ enthalten kann, gibt es ein $x_{m+1} \in B(x_m, \frac{\rho_m}{2}) \setminus F_{m+1}$ und weil F_{m+1} abgeschlossen ist einen Ball $B(x_{m+1}, \rho_{m+1})$ dessen Abschluss in $B(x_m, \rho_m)$ enthalten ist mit $B(x_{m+1}, \rho_{m+1}) \cap F_{m+1} = \emptyset$ und $\rho_{m+1} \leq \frac{\rho_m}{2}$. Dann ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, deren Grenzwert nicht zu $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m$ gehört, im Widerspruch zu den Annahmen.

Also existiert ein Ball $B(x_0, \rho_0)$ in einem F_m. Dann folgt für jedes $x \in E$ mit $\|x\| < 1$ und $x \pm \rho_0 x \in B(x_0, \rho_0)$, dass $|L_n(x_0 + \rho_0 x)|$ beschränkt ist. Insbesondere ist

$$|2\rho_0 L_n(x)| = |L_n(x_0 + \rho_0 x) - L_n(x_0 - \rho_0 x)|$$

beschränkt, und damit auch $\|L_n\|$. **q.e.d.**

Zum Abschluss bemerken wir noch, dass die untere Schranke für $\|D_N\|_1$, die wir benutzt haben um $\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_1 = \infty$ zu zeigen, auch die Funktion $D_N(x)$ durch die Fourierreihe $f_N(x)$ approximiert, die wir im konstruktiven Beweis benutzt haben.

1.9 Fourierkoeffizienten von Maßen auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Wir bezeichnen mit $\mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die Menge der positiven endlichen Maße auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, d.h. die σ-additiven Abbildungen von den Borelmengen von $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{R}_0^+$. Für jedes

$\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definieren wir die Fourierkoeffizienten als

$$\hat{\mu}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} d\mu \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Offenbar sind die Fourierkoeffizienten beschränkt durch

$$|\hat{\mu}(n)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} d\mu = \mu(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) < \infty.$$

Also liegt $\hat{\mu}$ für alle $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ in $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

Beispiel 1.63. *Die Punktmaße ε_x von $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ haben die Fourierkoeffizienten $\hat{\varepsilon}_x(n) = e^{-inx}$.*

Beispiel 1.64. *Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, die fast überall nichtnegativ ist, hat das Maß $\frac{1}{2\pi} f dx$ die Fourierkoeffizienten*

$$\frac{1}{2\pi}\widehat{f dx}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx = \hat{f}(n) \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Lemma 1.65. *Zwei Maße $\mu, \nu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ deren Fourierkoeffizienten gleich sind, stimmen überein.*

Beweis: Wenn $\hat{\mu}(n) = \hat{\nu}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, dann stimmen die Integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\nu$$

für alle trigonometrische Polynome überein. Wegen dem Weierstraßchen Approximationssatz (Korollar 1.33) stimmen auch die stetigen linearen Abbildungen auf $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

$$f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\mu \quad \text{und} \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\nu$$

überein. Indem wir die charakteristischen Funktionen von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ als die Grenzwerte von monoton fallenden stetigen Funktionen realisieren, folgt dass die Maße auf alle abgeschlossenen Intervalle übereinstimmen. Weil solche Intervalle die Borelmengen erzeugen, folgt $\mu = \nu$ (vergleiche den Darstellungssatz von Riesz). **q.e.d.**

Die Abbildung $+\colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$ ist offenbar stetig, und bildet deshalb messbare Mengen auf messbare Mengen ab. Dann definieren wir für $\mu, \nu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die Konvolution $\mu * \nu$ als das Bildmaß von dem Produktmaß $\mu \otimes \nu$ unter dieser Abbildung. Aus dieser Definition folgt sofort $(\mu * \nu)(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = \mu(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\nu(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $\nu * \mu = \mu * \nu$. Außerdem gilt $\varepsilon_0 * \mu = \mu * \varepsilon_0 = \mu$ für alle $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

Lemma 1.66. *Für $\mu,\nu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)d(\mu * \nu) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)d\mu(x)d\nu(y).$$

Beweis: Die Aussage gilt aufgrund der Definition von $\mu * \nu$ für alle charakteristischen Funktionen. Dann gilt sie auch für alle Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen und wegen dem monotonen Grenzwertsatz auch für alle Borelfunktionen. Insbesondere also für alle bezüglich $\mu * \nu$ integrablen Funktionen in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. **q.e.d.**

Satz 1.67. *Für alle $\mu,\nu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$(\widehat{\mu * \nu})(n) = \hat{\mu}(n)\hat{\nu}(n).$$

Beweis:
$$\begin{aligned}\widehat{\mu * \nu}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} d(\mu*\nu) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(x+y)}d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}d\mu(x)\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny}d\nu(y)\right) = \hat{\mu}(n)\hat{\nu}(n).\end{aligned}$$
q.e.d.

Für zwei nichtnegative Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und die entsprechenden Maße $d\mu = \frac{1}{2\pi} f dx$ und $d\nu = \frac{1}{2\pi} g dx$ gilt dann für alle $\varphi \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi d(\mu*\nu) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+y)f(x)dxg(y)dy = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)f(z-y)dzg(y)dy\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)f(z-y)g(y)dydz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)(f*g)(z)dz.\end{aligned}$$

Also gilt dann $\mu*\nu = \frac{1}{2\pi} f*g dx$. Deshalb stimmt die Konvolution für solche Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit der vorher definierten Konvolution überein. Als nächstes wollen wir alle Maße $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ charakterisieren.

Satz 1.68 (G. Herglotz, F. Riesz 1911)**.** *Die Formel*

$$f(z) = i\beta + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} d\mu(x)$$

definiert eine bijektive Abbildung von komplexen Potenzreihen $f(z)$ mit Konvergenzradius≥ 1, deren Realteile nicht negativ sind und Paaren $(\beta,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

In dem Beweis werden wir die schwache Topologie auf $\mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ benutzen. Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ heißt schwach konvergent mit Grenzwert μ, wenn für alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die Folge $(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)d\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)d\mu$ konvergiert. Der Rieszsche

Darstellungssatz besagt, dass die Elemente $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ durch die Abbildung, die jedem μ das Funktional $f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x)d\mu$ auf $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zuordnet, bijektiv auf die Funktionale abgebildet werden, die auf alle nicht negativen Funktionen nicht negativ sind (Riesz 1909). Also können wir $\mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit dieser Teilmenge des Dualraums von $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ identifizieren. Wegen dem Satz von Alaoglu sind die abgeschlossenen Bälle in den Dualraum von $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ schwach kompakt. Daraus folgt folgender Satz:

Satz 1.69 (Helly's Theorem)**.** *Für jedes $\alpha > 0$ ist die Menge*

$$\{\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \mid \mu(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \leq \alpha\}$$

schwach kompakt. D.h. jede Folge $\mu_n \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ für die $\mu_n(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ beschränkt ist, besitzt eine in $\mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ schwach konvergente Teilfolge. **q.e.d.**

Beweis von Satz 1.68: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius≥ 1, deren Realteil $g(z)$ bei allen $z \in B(0,1)$ nicht negativ ist und $a_0 = \alpha + i\beta$. Für $z = re^{ix}$ mit $r \in [0,1)$ gilt dann

$$g(re^{ix}) = \alpha + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n e^{inx} + \bar{a}_n r^n e^{-inx}).$$

Für $r \in [0,1)$ ist das die Fourierreihe einer glatten Funktion:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{ix})dx, \qquad \frac{1}{2}a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{ix})e^{-inx}dx \text{ für } n \geq 1.$$

Dann folgt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $0 < r < 1$

$$\begin{aligned} f(rz) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{ix})dx + i\beta + 2\sum_{n+1}^{\infty}\frac{z^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{ix})e^{-inx}dx \\ &= i\beta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}g(re^{ix})dx. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-inx}z^n = 1 + \frac{2e^{-ix}z}{1-e^{-ix}z} = \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}$$

benutzt und die Summe mit dem Integral vertauscht, weil diese Reihe gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $(x,z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times B(0,1)$ konvergiert. Wir haben vorausgesetzt, das g nicht negativ ist, so dass $\sigma_r = \frac{1}{2\pi}g(re^{ix})dx$ eine Familie von Maßen in $\mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist, deren totalen Maße alle gleich

$$\alpha = \operatorname{Re}(f(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{ix})dx = \sigma_r(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

sind. Wegen Helly's Theorem gibt es ein $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, so dass für die Folge $r_n \nearrow 1$ die Maße σ_{r_n} schwach gegen μ konvergieren. Dann folgt $\mu(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = \alpha$ und

$$f(z) = i\beta + \int \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} d\mu(x) \quad \text{für } z \in B(0,1) \subset \mathbb{C}.$$

Umgekehrt müssen wir zeigen, dass für jedes $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die entsprechende Funktion f die gewünschten Eigenschaften hat. Offenbar gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\right) &= \frac{1-|z|}{|e^{ix}-z|^2} \qquad \text{und} \\
\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}+re^{iy}}{e^{ix}+re^{iy}}\right) &= \frac{1-r^2}{|e^{ix}-re^{iy}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{iy-x}|^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(y-x)} \\
&= P_r(y-x) \geq 0.
\end{aligned}$$

Dann folgt, dass die Realteile aller dieser Funktionen nicht negativ sind. Also genügt es zu zeigen, dass für jedes $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und den Realteil $g(re^{ix})$ der entsprechenden Funktion f das Maß $\frac{1}{2\pi}g(re^{ix})dx$ im Grenzwert $r \nearrow 1$ schwach gegen μ konvergiert. Sei also $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)g(re^{ix})dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)P_r(x-y)d\mu(y)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y)h(x)dxd\mu.
\end{aligned}$$

Im Grenzwert $r \nearrow 1$ konvergiert $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y-x)h(x)dx$ wegen Satz 1.58 gegen h. Damit ist die Aussage gezeigt. **q.e.d.**

In der Funktionentheorie wird gezeigt, dass Realteil und Imaginärteil einer konvergenten komplexen Potenzreihe harmonische Funktionen sind. Der Satz von Riesz-Herglotz ist dann zu folgendem Satz äquivalent:

Satz 1.70. *Die Formel*

$$g(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2} d\mu(x)$$

definiert eine bijektive Abbildung zwischen $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ und reellen harmonischen nicht negativen Funktionen auf $z \in B(0,1) \subset \mathbb{C}$ **q.e.d.**

Satz 1.71 (Herglotz 1911)**.** *Für eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent.*

(i) Es existiert ein $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ mit $c(n) = \hat{\mu}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) *Für jedes $n \geq 0$ sind die Matrizen $T_n = (c(j-k))_{0\leq j,k\leq n}$ positive semidefinit, d.h.*

$$\sum_{j,k=0}^{n} c(j-k)\alpha_j\bar{\alpha}_k \geq 0 \text{ für alle } \alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii) folgt aus folgender Abschätzung

$$\sum_{j,k=0}^{n} c(j-k)\alpha_j\bar{\alpha}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k,j=0}^{n} e^{i(k-j)x}\alpha_j\bar{\alpha}_k d\mu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=0}^{n} e^{-ijx}\alpha_j\right|^2 d\mu(x) \geq 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Eine allgemeine positive semidefinite Matrix $(a_{jk})_{0\leq j,k\leq n}$ erfüllt

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\alpha_j\bar{\alpha}_k \geq 0 \text{ für alle } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Setzen wir für α den i-ten Einheitsvektor e_i in $\mathbb{C}^n$ bzw. $\alpha = e_j + te_k$ für $j < k$ ein, so folgt

$$a_{ii} \geq 0 \text{ bzw. } a_{jj} + |t|^2 a_{kk} + \bar{t}a_{jk} + ta_{kj} \geq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{C}.$$

Für $t = 1$ und $t = i$ erhalten wir

$$a_{jj} + a_{kk} + a_{jk} + a_{kj} \geq 0 \text{ und } a_{jj} + a_{kk} + i(-a_{jk} + a_{kj}) \geq 0.$$

Wegen $a_{jj} \geq 0$ und $a_{kk} \geq 0$ folgt dann $a_{jk} + a_{kj} \in \mathbb{R}$ und

$$i(-a_{jk} + a_{kj}) \in \mathbb{R}, \text{ also } a_{jk} = \bar{a}_{kj} = e^{i\vartheta}|a_{kj}|.$$

Für $t = xe^{i\vartheta}$ mit $x \in \mathbb{R}$ folgt dann

$$x^2 a_{kk} + 2x|a_{jk}| + a_{jj} \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Deshalb ist die Diskriminante dieses Polynoms 2-ten Grades nicht positiv, also $|a_{jk}|^2 \leq a_{jj}a_{kk}$. Das ergibt für $c(j-k)$:

$$c(0) \geq 0, \qquad c(-n) = \overline{c(n)}, \qquad |c(n)| \leq c(0).$$

Sei jetzt $F(z) = c(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} c(n)z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ definiert. Wegen der letzten Bedingung ist der Konvergenzradius dieser Potenzeihe nicht kleiner als 1. Also definiert F eine auf $z \in B(0,1)$ konvergente komplexe Potenzreihe. Wegen den beiden ersten Bedingungen gilt

$$\mathrm{Re}(F(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c(-n)(\bar{z})^n \text{ für } z \in B(0,1).$$

Multiplizieren wir das mit der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-|z|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (\bar{z})^n \text{ für } z \in B(0,1)$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Re}(F(z))}{1-|z|^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} c(n) z^n \sum_{k=0}^{\infty} z^k (\bar{z})^k + \sum_{n=1}^{\infty} c(-n)(\bar{z})^n \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\bar{z})^j \\ &= \sum_{j \geq k \geq 0} c(j-k) z^j (\bar{z})^k + \sum_{j \geq 0, j+1 \leq k} c(j-k) z^j (\bar{z})^k = \sum_{j,k \geq 0} c(j-k) z^j (\bar{z})^k.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die obigen Summen nur nach den Potenzen von z und $\bar{z}$ geordnet. Weil alle endlichen Summen $0 \leq j, k \leq n$ der letzten Summanden nicht negativ sind, konvergiert die letzte Reihe gegen eine nicht negative Zahl. Dann folgt aus dem Satz von Herglotz-Riesz, dass es ein $\mu \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gibt mit

$$\begin{aligned}F(z) &= i\beta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} d\mu(x). \\ c(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{ix}) dx \qquad c(n) r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(re^{ix}) e^{-inx} dx\end{aligned}$$

wobei $g(z) = \mathrm{Re}\big(F(z)\big)$ ist. Weil im Grenzwert $r \nearrow 1$ das Maß $\frac{1}{2\pi} g(re^{ix})dx$ schwach gegen μ konvergiert folgt

$$c(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} d\mu(x). \quad c(-n) = \overline{c(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} d\mu(x)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. **q.e.d.**

Matrizen, T_n, deren Einträge nur von der Differenz der Spalten- und Zeilenindizes abhängen, heißen Töplitzmatrizen nach dem Mathematiker Otto Töplitz (1881-1940). Eine Folge $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt positiv definite, wenn sie eine der äquivalenten Bedingungen aus dem Satz 1.71 erfüllt. Es gibt Folgen in $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, die nicht als Linearkombination von positiv definiten Folgen geschrieben werden können. Entsprechend gibt es auch Elemente von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, deren Fourierreihe keine Linearkombination von Maßen in $\mathbb{M}_+(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist, also keine komplexe Linearkombination von signierten Maßen auf $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

1.10 Zwei Anwendungen von Fourierreihen

Als erstes wollen wir die zweidimensionalen isometrischen Ungleichungen zeigen. Dabei betrachten wir einfach zusammenhängende offene Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, derren Rand einmal stetig differenzierbar ist. Für solche Gebiete können wir einerseits das Volumen $A = |\Omega|$ und andererseits die Länge $\ell = |\partial\Omega|$ des Randes betrachten. Die isometrische Ungleichung stellt dann folgende Ungleichung zwischen ℓ und A her:

Satz 1.72. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes beschränktes einfach zusammen hängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2$, dessen Rand stetig differenzierebar ist. Dann gilt für die Fläche A von Ω und die Länge ℓ von $\partial\Omega$*

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

Gleichheit gilt nur für die euklischen Kreisscheiben.

Beweis: Der Rand $\partial\Omega$ eines solchen Gebietes ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die in einer Umgebung aller ihrer Punkte die Nullstellenmenge einer stetig differenzierbaren Funktion ist, deren Gradient nicht verschwindet. Wegen dem Satz der impliziten Funktion, ist der Rand also in der Umgebung aller seiner Punkte das Bild einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \varphi(0)$. Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt auch, dass $|\varphi'(0)| \neq 0$ gilt. Dann ist für kleines $\varepsilon > 0 |\varphi(t)|$ und $|\varphi'(t)|$ auf $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ beschränkt. Indem wir $ds = |\varphi'(t)|dt$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ integrieren, erhalten wir einen C^1-Diffeomorphismus von $(-\varepsilon, \varepsilon)$ auf ein offenes Intervall, der t auf $s = \int_0^t |\varphi'(t)|dt$ abbildet. Indem wir den Weg durch s parametrisieren erhalten wir

$$\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| = |\varphi'(t)| \frac{dt}{|\varphi'(t)|dt} = 1.$$

Also erfüllt die umparametrisierte Kurve $|\varphi'| = 1$. Diese Kurven können wir zusammensetzen und erhalten dann C^1-Kurven von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$. Weil $\partial\Omega$ kompakt ist muss diese Kurve periodisch sein, und die Periode entspricht genau der Länge des entsprechenden Randstückes. Weil Ω einfach zusammenkompakt ist, ist der Rand zusammenhängend, und wir haben nur ein solches Randstück. Wir verschieben jetzt Ω so, dass der Punkt $(0, 0)$ in Ω liegt. Außerdem verändern wir die Längenskala durch eine Abbildung $(x, y) \mapsto \lambda(x, y)$ so, dass der Rand die Länge 2π hat. Dann haben wir die stetig differenzierbaren Funktionen $x, y \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Seien also $\hat{x}, \hat{y}$ die entsprechenden Fourierkoeffizienten. Weil x und y reelle Funktionen sind gilt

$$\hat{x}(-n) = \overline{\hat{x}(n)} \qquad \text{und} \qquad \hat{y}(-n) = \overline{\hat{y}(n)}.$$

Außerdem gilt $\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wenn t das Wegstück von $\big(x(t), y(t)\big)$ nach $(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) = (x(t) + \Delta x, y(t) + \Delta y)$ zurücklegt, dann überstreicht der Vektor $(x(t), y(t))$ das Flächenstück $dA(t) = \frac{1}{2}(x(t)\Delta y - y(t)\Delta x)$.

Also gilt

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\big(x(t), y'(t) - y(t)x'(t)\big)dt\right| = \pi\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\big(\hat{x}(n)\hat{y}(-n) - \hat{y}(n)\hat{x}(-n)\big)\right| = \\
&= \pi\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\big(\hat{x}(n)\hat{y}(n) - \hat{y}(n)\overline{\hat{x}(n)}\big)\right| \leq 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|\hat{x}(n)||\hat{y}(n)| \leq \\
&\leq \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\big(|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2\big) \leq \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\big(|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2\big) = \\
&= \frac{\pi}{2\pi}\int\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)dt = \pi
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt nur, wenn $\hat{x}(n) = 0 = \hat{y}(n)$ für alle $|n| > 1$ gilt. Dann folgt $\hat{x}(1)\overline{\hat{y}(1)} - \hat{y}(1)\hat{x}(1) = \frac{1}{2}$ und $|\hat{x}(1)|^2 + |\hat{y}(1)|^2 = \frac{1}{2}$. Also stehen die komplexen Zahlen $\hat{x}(1)$ und $\hat{y}(1)$ aufeinander senkrecht und haben beide Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dann gilt da auch für $\hat{x}(1)e^{it}$ und $\hat{y}(1)e^{it}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann umlaufen die Funktionen $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ tatsächlich den Einheitskreis und $\big(x(0), y(0)\big)$. Daraus folgt die Aussage. **q.e.d.**

Die zweite Anwendung ist die Konstruktion einer stetigen Funktion $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, die nirgends differenzierbar ist.

Satz 1.73. *Für $0 < \alpha < 1$ definiert die Fourierreihe*

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}$$

eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, die nirgends differenzierbar ist.

Der Beweis benutzt sogenannte lakunären Fourierreihen. Wir haben schon neben der gewöhnlichen Konvergenz der Fourierreihen $D_N * f$ auch die Cesaro-Summierbarkeit kennengelernt, die die Konvergenz von $F_n * f$ entspricht. Daneben gibt es auch noch eine dritte Konvergenz. Für die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ entspricht gewöhnliche Konvergenz der Konvergenz von $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Die Cesaro-Summierbarkeit entspricht die Konvergenz von $\sigma_N = \sum_{n=0}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)a_n$. Die dritte Konvergenz entspricht der Konvergenz von

$$\begin{aligned}
\Delta_N = 2\sigma_{2N+1} - \sigma_N &= \sum_{n=0}^{2N+1}\left(2 - \frac{2n}{2(N+1)}\right)a_n - \sum_{n=0}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)a_n \\
&= \sum_{n=0}^{N+1} a_n + \sum_{n=N+2}^{2N+1}\left(2 - \frac{n}{N+1}\right)a_n.
\end{aligned}$$

Weil $\hat{f}_\alpha(n)$ nur dann nicht verschwindet, wenn n eine 2-er Potenz ist, folgt für die Fourierreihe von f_α

$$a_n = \widehat{f_\alpha}(n)e^{inx} + \widehat{f_\alpha}(-n)e^{-inx} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, \quad \Delta_{2^k-1} = S_N \text{ für } 2^k \leq N < 2^{k+1}.$$

Der Satz 1.73 folgt dann aus dem folgenden Lemma:

Lemma 1.74. *Sei $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ bei $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt für die Ableitung $\Delta_N(f)'$ der entsprechenden Funktion $\Delta_N(f) = (2F_{2N+1} - F_N) * f$ bei x_0*

$$|\Delta_N(f)'(x_0)| = \mathrm{O}(\ln N).$$

Beweis: Wir berechnen zuerst

$$(F_n * g)'(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n'(x_0 - t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(t)g(x_0 - t)dt.$$

Weil F_N in $C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ liegt folgt $\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(t)dt = 0$, also auch

$$(F_N * g)'(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(t)\big(g(x_0 - t) - g(x_0)\big)dt.$$

Wenn g bei x_0 differenzierbar ist, folgt also

$$|(F_N * g)'(x_0)| \leq C\int_{-\pi}^{\pi} |F_N'(t)||t|dt.$$

Weil F_N ein trigonometrisches Polynom vom Grad N ist, dessen Koeffizienten alle durch 1 beschränkt sind, ist F_N ein trigonometrisches Polynom, dessen Koeffizienten alle durch N beschränkt sind. Daraus folgt

$$|F_N'(t)| \leq AN^2 \qquad \text{für alle } N \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t \in \mathbb{R}$$

mit A unabhängig von N. Andererseits folgt aus der expliziten Formel für F_N

$$\begin{aligned} F_N'(t) &= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}(N+1)t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)}\right)' \\ &= \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)t\right)\cos\left(\frac{1}{2}(N+1)t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{N+1}\frac{\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\sin^2\left(\frac{1}{2}(N+1)t\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{2}t\right)}. \end{aligned}$$

Indem wir $|\sin\left(\frac{1}{2}(N+1)t\right)| \leq \min\{C(N+1)|t|, 1\}$ abschätzen und $|\sin\left(\frac{1}{2}t\right)| \geq c|t|$ auf $t \in [-\pi, \pi]$ erhalten wir

$$|F_N'(t)| \leq \frac{B}{|t|^2} \text{ für } N \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$$

mit B unabhängig von N. Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} |(F_N * g)'(x_0)| &\leq C \int_{0\leq |t|\leq \frac{1}{N}} |F'(t)||t|dt + \int_{\frac{1}{N}\leq |t|\leq \pi} |F'(t)||t|dt \\ &\leq CAN \int_{0\leq |t|\leq \frac{1}{N}} dt + CB \int_{\frac{1}{N}\leq |t|\leq \pi} \frac{dt}{|t|} = \mathrm{O}(\ln N). \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Beweis von Satz 1.73: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt für f_α und $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\Delta_{2^k-1}(f_\alpha) - \Delta_{2^{k-1}-1}(f_\alpha) = 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$
$$|\Delta_{2^k-1}(f_\alpha)'(x_0) - \Delta_{2^{k-1}-1}(f_\alpha)'(x_0)| = 2^{k(1-\alpha)} \geq N^{1-\alpha} \text{ mit } N = 2^k - 1.$$

Wegen dem vorangehenden Lemma ist dann f_α bei x_0 nicht differenzierbar. **q.e.d.**

Kapitel 2

Fourierintegrale

2.1 Die L^1-Fouriertransformation

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformierte $\hat{f}$ definiert als

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx.$$

Sei nach allgemeinem $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller endlichen komplexwertiger Maße auf $\mathbb{R}^n$ mit der Norm

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n).$$

Dabei sei $|\mu|$ die totale Variation des Maßes μ. Sie ist definiert als das Maß

$$|\mu|(E) = \sum_i |\mu(E_i)|$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen von E

$$E = \bigcup_i E_i \text{ mit } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

gebildet wird. Das definiert wieder ein Maß (siehe Theorem 6.2 in W. Rudin: "Real and complex Analysis"). Dabei gilt wegen Theorem 6.13 im obigen Buch auch

$$|f dx| = |f| dx \text{ für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Deshalb ist $L^1(\mathbb{R}^n)$ ein Unterraum von $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x).$$

Beispiel 2.1. *Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und δ_a das Diracmaß bei a, also $\delta_a(E) = 1$, wenn $a \in E$ und $\delta_a(E) = 0$ für alle $a \notin E$. Dann gilt $\widehat{\delta_a}(\xi) = e^{-2\pi i a\cdot\xi}$.*

Lemma 2.2. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $x \mapsto f(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Dann gilt*

$$\hat{f}(x) = e^{-\pi|\xi|^2}. \tag{2.1}$$

Beweis: Es gibt einen einfachen Beweis aus der Funktionentheorie. Wir zeigen die Aussage aber ohne Funktionentheorie zu benutzen. Wir müssen folgende Integrale berechnen:

$$e^{\pi|\xi|^2}\int e^{-2\pi i x\cdot\xi}e^{-\pi x^2}dx = \int e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = 1.$$

Diese Integrale sind wegen der Eigenschaften der Exponentialfunktion und dem Satz von Fubini die Produkte der entsprechenden eindimensionalen Integrale. Dann genügt es den Fall $n = 1$ zu zeigen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = 1 \iff \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi}e^{-\pi x^2}dx = e^{-\pi\xi^2}.$$

Dafür berechnen wir zuerst für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Integrale

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\pi x^2}dx.$$

Für $k = 0$ kann man I_k^2 durch Polarkoordinaten ausrechnen:

$$I_0^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi|x|^2}dx = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-\pi r^2}dr = 2\pi\left[\frac{-e^{-\pi r^2}}{2\pi}\right]_0^{\infty} = 1.$$

Also gilt $I_0 = 1$. I_1 können wir direkt ausrechnen

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\pi x^2}dx = \left.\frac{-e^{-\pi x^2}}{2\pi}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\pi x^2}dx = \left.\frac{x^{k+1}e^{-\pi x^2}}{k+1}\right]_{-\infty}^{\infty} + 2\pi\int \frac{x^{k+2}}{k+1}e^{-\pi x^2}dx = \frac{\pi}{k+1}I_{k+2}.$$

Daraus folgt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{2\pi}I_{2(k-1)} = \frac{(2k)!}{k!(4\pi)^k}I_0 = \frac{(2k)!}{k!(4\pi)^k} \\ I_{2k+1} &= \frac{2k}{2\pi}I_{2k-1} = \frac{k!}{\pi^k}I_1 = 0. \end{aligned}$$

Sei jetzt $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von positiven Zahlen, die gegen ∞ konvergiert, so dass

$$\left| e^{-2\pi i x\xi} - \sum_{l=0}^{k} \frac{(-2\pi i x\xi)^l}{l!} \right| < \frac{1}{k} \text{ auf } x \in (-r_k, r_k)$$

gilt. Dann konvergiert im Grenzwert $k \to \infty$

$$\int_{-r_k}^{r_k} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-2\pi i x\xi)^l}{l!} e^{-\pi x^2} dx \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} e^{-\pi x^2} dx$$

Daraus folgt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} e^{-\pi x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{n!} I_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4\pi^2\xi^2)^k}{(2k)!} \frac{(2k)!}{k!(4\pi)^k} = e^{-\pi\xi^2}. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Im folgenden zeigen wir zwei grundlegende Abschätzungen der L^1-Fouriertransformierten. Das obige Beispiel zeigt, dass wir im Allgemeinen keine stärkeren Aussagen erwarten können.

Satz 2.3. *Für $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{\mu}$ eine beschränkte Funktion mit*

$$\|\hat{\mu}\|_\infty \le \|\mu\|_{\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.2}$$

Beweis: Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\hat{\mu}(\xi)| = \left| \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\mu(x) \right| \le \int |e^{-2\pi i x\cdot\xi}| d|\mu|(x) = \|\mu\|. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Satz 2.4. *Für $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{\mu}$ eine stetige Funktion.*

Beweis: Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\hat{\mu}(\xi + h) = \int e^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)} d\mu(x)$$

als Funktion von h. Weil $e^{-2\pi i x\cdot\xi}$ auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig ist, konvergiert $e^{-2\pi i x(\xi+h)}$ auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ im Grenzwert $h \to 0$ gleichmäßig gegen $e^{-2\pi i x\cdot\xi}$. Weil $|\mu|(\mathbb{R}^n \setminus B(x,r))$ im Grenzwert $r \to \infty$ nach Null konvergiert, folgt die Aussage. **q.e.d.**

Wir fassen jetzt einige grundlegende Formeln der Fouriertransformierten zusammen. Es handelt sich dabei grob gesprochen um alle Formeln, die keine Ableitungen beinhalten. Sie können alle auf $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ und geeignete Koordinatentransformationen zurück geführt werden. Sei also $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\tau \in \mathbb{R}^n$ und T eine lineare invertierte Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^h$.

1. Sei $f_\tau(x) = f(x - \tau)$. Dann gilt
$$\widehat{f_\tau}(\xi) = e^{-2\pi i \tau \cdot \xi} \hat{f}(\xi). \tag{2.3}$$

2. Sei $e_\tau(x) = e^{2\pi i x \tau}$. Dann gilt
$$\widehat{e_\tau f}(\xi) = \hat{f}(\xi - \tau). \tag{2.4}$$

3. Sei $T^{-t} = (T^t)^{-1} = (T^{-1})^t$. Dann gilt
$$\widehat{f \circ T} = |\det(T)|^{-1} \hat{f} \circ T^{-t}. \tag{2.5}$$

4. Sei $\tilde{f}(x) = \bar{f}(-x)$. Dann gilt
$$\hat{\tilde{f}} = \bar{\hat{f}}. \tag{2.6}$$

Wenn T eine orthogonale lineare Abbildung ist, also $T \cdot T = \mathbb{1}$ gilt, dann folgt $\det^2(T) = 1$ also $\widehat{f \circ T} = \hat{f} T$. Daraus folgt insbesondere, dass $f \circ T = f$ auch $\hat{f} \circ T = \hat{f}$ impliziert. Weil eine Funktion f genau dann von der Länge $|x|$ abhängt, wenn für alle orthogonalen linearen Abbildungen T gilt $f \cdot T = f$, folgt auch, dass dann $\hat{f}$ nur von $|\xi|$ abhängt. Für die Dilatationen $T(x) = rx$ folgt, dass die Fouriertransformierte von $x \mapsto f(rx)$ gleich $\xi \mapsto r^{-n} \hat{f}(r^{-1}\xi)$ ist. Analag ist die Fouriertransformierte von $x \mapsto r^{-n} f(r^{-1}x)$ gleich $\xi \mapsto \hat{f}(r\xi)$.

Es gibt ein generelles Prinzip, das die Regularität der Fouriertransformierten vom Abfallverhalten der Funktion abhängt, und umgekehrt das Abfallverhalten der Fouriertransformierten von der Regularität der Funktion abhängt. Wir werden jetzt einige einfache Aspekte dieses Zusammenhanges diskutieren.

Satz 2.5. *Habe $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ kompakten Träger. Dann ist $\hat{\mu}$ eine glatte Funktion. Für jeden Multiindex α gilt dann*
$$\partial^\alpha \hat{\mu} = \big((-2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \mu\big)\hat{}. \tag{2.7}$$
Wenn außerdem der Träger von μ in $B(0, R)$ enthalten ist, dann gilt
$$\|\partial^\alpha \hat{\mu}\|_\infty \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \|\mu\|. \tag{2.8}$$

Wir benutzen hier Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ um sowohl partielle Ableitungen als auch Monomo auf $\mathbb{R}^n$ zu bezeichnen:
$$\partial\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \qquad\qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Die Länge der Multiindices α ist dabei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
Beweis: Weil auf$B(0,R)$ alle Komponenten von x durch R beschränkt sind folgt (2.8) aus (2.7). Außerdem ist für jeden Multiindex $\alpha (2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \mu$ wieder ein endliches Maß mit kompaktem Träger. Deshalb genügt es zu zeigen, dass für $|\alpha| = 1 \quad \hat{\mu}$ differenzierbar ist und (2.7) gilt, und die Aussage folgt induktiv für alle Multiindices α.

Sei also $j \in \{1, \ldots, n\}$ und e_j der entsprechende Vektor der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Für ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\Delta(h) = \frac{\hat{\mu}(\xi + he_j) - \hat{\mu}(\zeta)}{h}. \tag{2.9}$$

Er ist gleich folgendem Ausdruck

$$\Delta(h) = \int \frac{e^{-2\pi i h x_j} - 1}{h} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x). \tag{2.10}$$

Im Grenzwert $h \mapsto 0$ konvergiert

$$\frac{e^{-2\pi i h x_j} - 1}{h} \to -2\pi i x_j.$$

Außerdem ist $\left| \frac{e^{-2\pi i h x_j} - 1}{h} \right|$ für alle h beschränkt durch $2\pi |x_j|$. Deshalb ist der Integrand von (2.10) beschränkt durch $2\pi |x_j|$, was auf den kompakten Träger von μ seinerseits beschränkt ist. Dann folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz von Lebesgue

$$\lim_{h \to 0} \Delta(h) = \int \lim_{h \to 0} \frac{e^{2\pi i h x_j} - 1}{h} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x) = \int -2\pi i x_j e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x).$$

Das zeigt (2.7) für $|\alpha| = 1$. Wegen Satz 2.4 liegt $\hat{\mu}$ in C^1. **q.e.d.**

Die Abschätzung (2.8) folgte aus der Beschränktheit des Trägers von μ. Allerdings sind die Aussage $\hat{\mu} \in C^\infty$ und die Formel (2.7) auch wichtig, wenn μ genügend schnell abfällt, so dass wir die Differentiation mit dem Integral vertauschen können. Wenn z.B. alle Momente von μ endlich sind, also $\int |x|^N d\mu(x) < \infty$ für alle N gilt, dann folgt auch $\hat{\mu} \in C^\infty$ mit der Formel (2.7). Die Abschätzung (2.2) stellt auch einen Aspekt dar von dem Zusammenhang zwischen dem Abfallverhalten von μ und der Regularität von $\hat{\mu}$. Wir betrachten jetzt umgekehrt die Schlussfolgerung auf das Abfallverhalten von $\hat{\mu}$ aus der Regularität von μ.

Satz 2.6. *Sei $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $0 \leq |\alpha| \leq N$. Dann folgt*

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \text{ für } |\alpha| \leq N \qquad \text{und} \qquad |\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N}. \tag{2.11}$$

Der Beweis beruht auf einer partiellen Integration, die am einfachsten zu rechtfertigen ist, wenn f kompakte Träger hat. Wir zeigen zuerst das folgende Lemma.

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit den folgenden Eigenschaften (die 4. Eigenschaft benötigen wir hier noch nicht):

1. $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$.

2. $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$.

3. $0 \leq \varphi \leq 1$.

4. φ hängt nur von $|x|$ ab.

Dann definieren wir $\varphi_k(x) = \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$. Also ist φ_k ähnlich zu φ nur auf der Skala k anstatt 1. Für jeden Multiindex α gibt es eine konstante C_α, so dass $|\partial^\alpha \varphi_k| \leq \frac{C_\alpha}{k^{|x|}}$ für alle k gilt. Außerdem ist für $\alpha \neq 0$ der Träger von $\partial^\alpha \varphi_k$ in dem Gebiet $k \leq |x| \leq 2$ enthalten.

Lemma 2.7. *Sei $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle Multiindices α mit $|\alpha| \leq N$. Dann konvergiert für alle Multiindices α mit $|\alpha| \leq N$ $f_k = \varphi_k f$ im Grenzwert $k \to \infty$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f.*

Beweis: Offensichtlich konvergiert $\varphi_k \partial^\alpha f$ im Grenzwert $k \to \infty$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen $\partial^\alpha f$. Deshalb genügt es folgendes zu zeigen:

$$\lim_{k\to\infty} \|\partial^\alpha(\varphi_k f) - \varphi_k \partial^\alpha f\|_1 = 0. \tag{2.12}$$

Wegen der Produktregel gilt

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(\varphi_k f) - \varphi_k \partial^\alpha f &= \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta \varphi_k \\
\|\partial^\alpha(\varphi_k f) - \varphi_k \partial^\alpha f\|_1) &\leq C \sum_{0<\beta\leq\alpha} \|\partial^\beta \varphi_k\|_\infty \|\partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^1(\{x| \ |x|\geq k\})} \\
&\leq \frac{C}{k} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \|\partial^{\alpha-\beta} f\|_{L^1(\{x| \ |x|\geq k\})}
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck konvergiert im Grenzwert $k \to \infty$ aus zwei Gründen gegen Null, von denen jeder genügen würde um die Aussage zu zeigen: Zum Einen der Faktor k^{-1} und zum anderen die L^1-Normen auf dem gebiet $\{x \mid |x| \geq k\}$. **q.e.d.**

Beweis von Satz 2.6: Wenn $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ kompakte Träger hat, dann folgt mit partieller Integration

$$\int \partial_j f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi_j \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) dx.$$

Also gilt die erste Formel in (2.11) für alle Multiindices α mit $|\alpha| \leq N$ für $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger. Um die Voraussetzungen an den Träger zu erfüllen ersetzen wir f durch f_k aus dem vorangehenden Lemma. Dann gilt die erste Formel von (2.11) für f_k. Im Grenzwert $k \to \infty$ konvergiert $\widehat{\partial^\alpha f_k}$ wegen dem Lemma und Satz 2.3 gegen $\widehat{\partial^\alpha f}$. Andererseits konvergiert $\hat{f}_k$ gleichmäßig gegen $\hat{f}$ und $(2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}_k$ punktweise gegen $(2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha f$. Das zeigt die erste Formel in (2.11).

Um die zweite Abschätzung von (2.11) zu beweisen, bemerken wir dass $\xi^\alpha \hat{f} \in L^\infty$ aus der ersten Formel von (2.11) und Satz 2.3 folgt. Dann folgt (2.11) aus

$$C_N^{-1}(1+|\xi|^N) \leq \sum_{|\alpha|\leq N} |\xi^\alpha| \leq C_N(1+|\xi|)^N. \qquad \textbf{q.e.d.} \quad (2.13)$$

Zum Abschluss erwähnen wir auch noch folgende nützliche Abschätzung

$$1 + |x| \leq (1 + |y|)(1 + |x - y|) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

2.2 Schwartzfunktionen

Definition 2.8. *Für Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sei*

$$\|f\|_{\alpha\beta} = \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty.$$

Der Raum der Schwartzfunktionen $\mathcal{S}$ enthält dann alle glatten Funktonen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ für die $\|f\|_{\alpha\beta} < \infty$ gilt. Er wird durch die abzählbar vielen Halbnormen $\|\cdot\|_{\alpha\beta}$ zu einem Frechetraum, also einem vollständigen metrischen Vektorraum, auf dem die Addition und Skalarmultiplikation stetig sind.

Eine Folge $\{f_k\}$ in $\mathcal{S}$ konvergiert also genau dann gegen $f \in \mathcal{S}$, wenn für alle Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Folgen $\|f_k - f\|_{\alpha\beta}$ gegen Null konvergieren.

Beispiel 2.9. *(i) Alle glatten Funktionen mit kompakten Trägern sind Schwartzfunktionen: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$.*

(ii) $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ist eine Schwartzfunktion, weil alle Ableitungen von $\partial^\alpha f$ das Produkt eines Polynoms mit f ist und f schneller als jedes Polynom abfällt.

(iii) $f_N(x) = (1 + x^2)^{-N}$ ist keine Schwartzfunktion, weil sie nicht schneller als jede Potenz abfällt.

(iv) $f(x) = e^{-\pi x^2}\sin(e^{\pi x^2})$ ist keine Schwartzfunktion, weil ihre Ableitungen nicht abfallen.

Übungsaufgabe 2.10. *Zeige dass* $f(x) = e^{-x^2}(e^{-x^2} + \sin^2 x)$ *eine positive Schwartzfunktion ist, deren Wurzel keine Schwartzfunktion ist.*

Lemma 2.11. $\mathcal{S}$ *ist abgeschlossen unter Differentation und Multiplikation mit Polynomen. Diese Operationen sind auch stetig auf* $\mathcal{S}$*. Außerdem ist für* $f, g \in \mathcal{S}$ *auch* fg *in* $\mathcal{S}$*.*

Beweis: Für $f \in \mathcal{S}$ und Multiindices $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$x^\alpha \partial^\beta (\partial^\gamma f) = x^\alpha \partial^{\beta+\gamma} f.$$

Deshalb ist $\partial^\gamma f$ eine Schwartzfunktion. Wegen der Leibnizregel ist $x^\alpha \partial^\beta (x^\gamma f)$ eine endliche Summe von Ausdrücken der Form $x^\alpha (\partial^\delta x^\gamma) \partial^{\beta-\delta} f$. Deshalb ist $x^\gamma f$ eine Schwartzfunktion. Diese Argumente zeigen auch die Stetigkeit dieser Operationen. Die letzte Aussage folgt wieder aus der Leibnizregel. **q.e.d.**

Offenbar lassen sich Schwartzfunktionen auch folgendermaßen charakterisieren

$$f \in \mathcal{S} \iff \|(1 + |x|)^N \partial^\beta f\|_\infty < \infty \text{ für alle } N \in \mathbb{N} \text{ und } \beta \in \mathbb{N}_0^n \tag{2.15}$$

$$f \in \mathcal{S} \iff \lim_{|x| \to \infty} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0 \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \tag{2.16}$$

Die erste Charakterisierung folgt aus (2.13) und die zweite indem wir in der Definition größere Multiindices α benutzen als in (2.16).

Satz 2.12. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *liegt dicht in* $\mathcal{S}$*, d.h. es gibt für jedes* $f \in \mathcal{S}$ *eine Folge* $\{f_k\}$ *in* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, die in* $\mathcal{S}$ *gegen* f *konvergiert.*

Beweis: Wir benutzen ähnliche Argumente wie in Lemma (2.7). Sei also φ_k wie in diesem Lemma und $f_k = \varphi_k f$, das in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt. Also genügt es zu zeigen, dass für alle Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Folge $x^\alpha \partial^\beta (\varphi_k f)$ gleichmäßig gegen $x^\alpha \partial^\beta f$ konvergiert. Dazu schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\|x^\alpha \partial^\beta (\varphi_k f) - x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty \leq \|\varphi_k x^\alpha \partial^\beta f - x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty + \|x^\alpha (\partial^\beta (\varphi_k f) - \varphi_k \partial^\beta f\|_\infty.$$

Der erste Ausdruck ist beschränkt durch $\|f\|_{\alpha\beta}$ und konvergiert dafür im Grenzraum $k \to \infty$ gegen Null. Der zweite Ausdruck ist wegen der Leibnizregel beschränkt durch

$$C \sum_{\gamma < \beta} \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty \|\partial^{\beta-\gamma} \varphi_k\|_\infty. \tag{2.17}$$

Wegen $f \in \mathcal{S}$ und $\|\partial^{\beta-\gamma} \varphi_k\| \leq \frac{C}{k}$ konvergiert dieser Ausdruck im Grenzwert $k \to \infty$ gegen Null. **q.e.d.**

Wir können sogar noch eine etwas stärkere Aussage zeigen. Eine glatte Tensorfunktion ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ von der Form

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j), \text{ mit } \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Satz 2.13. *Die Linearkombination von Tensorfunktionen liegen dicht in $\mathcal{S}$.*

Beweis: Wegen Satz 2.12 genügt es zu zeigen, dass jede Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch Linearkombinationen von Tensorfunktionen approximiert werden kann. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(-R, R)^n$ verschwindet. Indem wir die Approximationen mit einer Tensorfunktion multiplizieren, die auf $[-R, R]^n$ gleich Eins ist und außerhalb von $(-2R, 2R)^n$ verschwindet, genügt es zu zeigen, das jede Funktion auf $[-2R, 2R]^n$ durch eine Linearkombination von Tensorfunktionen gleichmäßig approximiert werden kann. Das folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß. **q.e.d.**

Satz 2.14. *Die Fouriertransformation ist eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ auf sich selber.*

Beweis: Wenn f in $\mathcal{S}$ liegt, dann auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Also ist $\hat{f}$ beschränkt. Insbesondere ist $\widehat{\partial^\alpha x^\beta f}$ für alle Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ beschränkt, weil auch $\partial^\alpha x^\beta f$ eine Schwartzfunktion ist. Wegen der Sätze 2.5 und 2.6 gilt

$$\widehat{\partial^\alpha x^\beta f}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|}(2\pi i)^{|\beta|}\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi).$$

Also ist $\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}$ wider beschränkt und $\hat{f}$ eine Schwartzfunktion. Diese Argumente zeigen auch die Stetigkeit von $f \to \hat{f}$. **q.e.d.**

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir noch, dass in der Definition von Schwartzfunktionen die Supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$ durch die L^1-Norm $\|\cdot\|_1$ ersetzt werden kann. Das wird aus dem sogenannten Poincaréungleichungen folgen.

Lemma 2.15. *Für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$|f(x) - \frac{1}{\omega}\int_{B(x,1)} f(y)dy| \leq C \int_{B(x,1)} \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Dabei ist ω das Volumen von $B(0, 1)$ und C eine Konstante die nur von n abhängt.

Beweis: Wir werden den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf die Funktion $t \to f\big(x + t(y - x)\big)$ an:

$$|f(y) - f(x)| \leq |x - y| \int_0^1 |\nabla f\big(x + t(y - x)\big)| dt.$$

Wir integrieren y über $B(x,1)$ und teilen durch ω:

$$\begin{aligned}|f(x) - \frac{1}{\omega}\int_{B(x,1)} f(y)dy| &\leq \frac{1}{\omega}\int_{B(x,1)} |f(x)-f(y)|dy \\ &\leq \frac{1}{\omega}\int_{B(x,1)} |x-y| \int_0^1 |\nabla f(x+t(y-x)|dtdy \\ &\leq \frac{1}{\omega}\int_0^1 \int_{B(x,1)} |x-y||\nabla f\big(x+t(y-x)\big)|dydt\end{aligned}$$

Wir substituieren $z = x + t(y-x)$ mit $|y-x| = \frac{|z-x|}{t}$ und $dy = \frac{dz}{t^n}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}&|f(x) - \frac{1}{\omega}\int_{B(x,1)} f(y)dy| \leq \frac{1}{\omega}\int_{t=0}^1 \int_{B(x,t)} \frac{|z-x|}{t}|\nabla f(z)|dz\frac{dt}{t^n} \\ &= \frac{1}{\omega}\int_{B(x,1)} |z-x||\nabla f(z)| \int_{t=|z-x|}^1 \frac{dt}{t^{n+1}}dz = \frac{1}{n\omega}\int_{B(x,1)} (|x-z|^{-(n-1)} - |x-z|)|\nabla f(z)|dz \\ &\leq \frac{1}{n\omega}\int_{B(x,1)} |x-z|^{-(n-1)}|\nabla f(z)|dz,\end{aligned}$$

wegen $\{(z,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,1] \mid |z-x|\leq t\} = \{(z,t)\in B(x,1)\times\mathbb{R} \mid |z-x|\leq t\}$ **q.e.d.**

Im folgenden benutzen wir für eine Funktion $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$

$$\Delta_k^f(x) = \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Lemma 2.16. *Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|f(x)| \lesssim \sum_{0\leq j<k} \|\Delta_j^f\|_{L^1\left(B(x,1)\right)} + \begin{cases} \int_{B(x,1)} |x-y|^{-(n-k)}\Delta_k^f(y)dy & \textit{für } 1\leq k\leq n-1 \\ \int_{B(x,1)} \log\frac{1}{|x-y|}\Delta_n^f(y)dy & \textit{für } k=n \\ \|\Delta_{n+1}^f\|_{L^1\left(B(x,1)\right)} & \textit{für } k=n+1 \end{cases}$$

Dabei bedeutet $X \lesssim Y$, dass $X \leq CY$ gilt mit einer Konstanten C, die nur von der Dimension abhängt.

Beweis: Wir werden sogar zeigen, dass diese Ungleichung für Funktionen von der Form $f = \sum_{j=1}^N |f_j|$ gilt mit $f_j \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Der Fall $k=1$ wurde im vorangehenden Lemma gezeigt. Den allgemeinen Fall zeigen mit vollständiger Induktion und dann folgenden Ungleichungen:

$$\int_{B(x,R)} |x-y|^{-(n-a)}|z-y|^{-(n-b)}dy \leq \begin{cases} C(R)|x-z|^{-(n-a-b)} & \text{für } a+b<n \\ \log\frac{C(R)}{|z-x|} & \text{für } a+b=n \\ C(R) & \text{für } a+b>n \end{cases}$$

$$\int |x-y|^{-(n-1)} \log \frac{1}{|z-y|} dy \leq C(R).$$

Hierbei ist $C(R)$ unabhängig von x und z. Für die erste Ungleichung teilen wir das Integrationsgebiet in drei Gebiete mit $|y-x| \leq \frac{1}{2}|z-x|$, $|y-z| \leq \frac{1}{2}|z-x|$ und den Rest. Im ersten Gebiet gilt $|z-y| \geq |z-x| - |x-y| \geq \frac{1}{2}|z-x|$ und deshalb

$$\int_{|y-x|\leq\frac{1}{2}|z-x|} |y-x|^{-(n-a)}|z-x|^{-(n-b)} dy \lesssim |z-x|^{-(n-a-b)}.$$

Im zweiten Gebiet vertauschen wir x mit z. Im dritten Gebiet haben wir $|x-y| \leq |z-y| + |x-z| \leq 3|z-y|$ und deshalb ist das Integral beschränkt durch

$$3\int_{\frac{1}{2}|z-x|\leq|x-y|\leq R} |y-x|^{-(2n-a-b)} dy.$$

Die zweite Ungleichung folgt mit der gleichen Unterteilung. Jetzt führen wir die Induktion durch. Der Fall $k=1$ ist schon gezeigt. Wenn die Aussage für $2 \leq k \leq n-1$ gilt, dann folgt

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\lesssim \sum_{j\leq k-2} \|\Delta_j^f\|_{L^1\left(B(x,1)\right)} + \int_{B(x,1)} |x-y|^{-(n-k+1)} \Delta_{k-1}^f(y) dy \\
&\lesssim \sum_{j\leq k-2} \|\Delta_j^f\|_{L^1\left(B(x,1)\right)} + \int_{B(x,1)} |x-y|^{-(n-k+1)} \int \Delta_{k-1}^f(z) dz dy \\
&\qquad + \int_{B(x,1)} |x-y|^{-(n-k+1)} \int_{B(x,1)} |y-z|^{-(n-1)} \Delta_k^f(z) dz dy \\
&\lesssim \sum_{j\leq k-1} \|\Delta_j^f\|_{L^1\left(B(x,1)\right)} + \int_{B(x,2)} |x-z|^{-(n-k)} \Delta_k^f(z) dz.
\end{aligned}$$

In den ersten beiden Ungleichungen haben wir die Behauptung mit $k-1$ bzw. 1 anstatt k benutzt und in der letzten die obigen Ungleichungen. Durch Reskalieren könen wir $B(x,2)$ durch $B(x,1)$ ersetzen. Das zeigt die erste Ungleichung. Um von $k=n-1$ auf $k=n$ bzw. von $k=n$ auf $k=n+1$ zu schließen, müssen wir die anderen Fälle der obigen Ungleichung benutzen. **q.e.d.**

Ein Spezialfall dieses Lemmas ergibt

Lemma 2.17. *Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|f(x)| \lesssim \sum_{0\leq j\leq n+1} \|\Delta_j^f\|_{L^1\left(B(x,1)\right)}$$ **q.e.d.**

Damit können wir jetzt folgenden Satz zeigen:

Satz 2.18. *Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann eine Schwartzfunktion, wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Normen $\|x^\alpha \partial^\beta f\|_1$ endlich sind.Außerdem konvergiert eine Folge $\{f_k\}$ in $\mathcal{S}$ genau dann gegen $f \in \mathcal{S}$, wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Normen $\|x^\alpha \partial^\beta (f_k - f)\|_1$ gegen Null konvergieren.*

Beweis: Für $f \in \mathcal{S}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ sei $N = |\alpha| + n + 1$. Dann ist $(1+|x|)^N \partial^\beta f$ beschränkt. Insbesondere gilt

$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_1 \leq \|(1+|x|)^N \partial^\beta f\|_\infty \|x^\alpha (1+|x|)^{-N}\|_1 < \infty.$$

Umgekehrt gilt wegen dem Lemma

$$\begin{aligned}
|\partial^\beta f(x)| &\lesssim \sum_{|\gamma| \leq |\beta|+n+1} \int_{B(x,1)} |\partial^\gamma f(y)| dy \\
|(1+|x|)^N \partial^\beta f(x)| &\lesssim (1+|x|)^N \sum_{|\gamma| \leq |\beta|+n+1} \int_{B(x,1)} |\partial^\gamma f(y)| dy \\
&\lesssim \sum_{|\gamma| \leq |\beta|+n+1} \int_{B(x,1)} (1+|y|)^N |\partial^\gamma f(y)| dy.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir $1 + |x| \leq 2 \min_{y \in B(x,1)} 1 + |y|$ benutzt. Daraus folgt

$$\|(1+|x|)^N \partial^\beta f\|_\infty \lesssim \sum_{|\gamma| \leq |\beta|+n+1} \|(1+|x|)^N \partial^\gamma f\|_1.$$

Dann folgt der Satz aus (2.13). **q.e.d.**

2.3 Der Satz von Plancherel

Die Konvolution von zwei Funktionen φ und f auf dem $\mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\varphi * f(x) = \int \varphi(y) f(x-y) dy. \tag{2.18}$$

Durch die Substitution $y \mapsto x - y$ erhalten wir die Kommutativität $\varphi * f = f * \varphi$. Der Träger von $\varphi * f$ ist enthalten in der Summe der Trräger von φ und f:

$$\operatorname{supp}(\varphi * f) C \operatorname{supp} \varphi + \operatorname{supp} f.$$

Hierbei besteht die Summe zweier Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ aus der Menge der Summen aller Paare aus dem kartesischen Produkt der Teilmengen. Das Integral in der Konvolution existiert in den folgenden Fällen:

1. Für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ ist das Integral absolut konvergent und es gilt
$$\|\varphi * f\|_p \leq \|\varphi\|_1 \cdot \|f\|_p. \tag{2.19}$$
In den Fällen $p = \infty$ und $p = 1$ folgt das mit den gleichen Argumenten wie auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Für allgemeines $1 < p < \infty$ folgt das entweder mit der Hölderungleichung oder dem Satz von Riesz-Thorin 1.38.

2. Wenn φ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist und $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ dann konvergiert dass Integral in $\varphi * f$ absolut für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Außerdem ist $\varphi * f$ stetig. Das sieht man, wenn die Formel
$$\varphi * f(x) = \int \varphi(x-y)f(y)dy$$
benutzt, weil φ sogar gleichmäßig stetig ist.

3. Wenn $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann ist $\varphi * f$ stetig und erfüllt.
$$\|\varphi * f\|_\infty \leq \|\varphi\|_p \|f\|_q. \tag{2.20}$$
Diese Abschätzung folgt aus der Hölderungleichung und die Stetigkeit indem wir φ oder f durch eine Folge von stetigen Funktionen mit kompakten Trägern approximieren. Wegen (2.20) konvergiert die Folge von stetigen Funktionen dann gleichmäßig und der Grenzwert ist auch stetig.

Lemma 2.19. *Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist $\varphi * f$ eine glatte Funktion und es gilt*
$$\partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f \qquad \textit{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{2.21}$$

Beweis:
$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(\varphi(x+he_j) - \varphi(x)\big) &= \frac{1}{h}\int \big(\varphi(x+he_j-y) - \varphi(x-y)\big)f(y)dy\\ &= \int \frac{1}{h}\big(\varphi(x+he_j-y) - \varphi(x-h)\big)f(y)dy.\end{aligned}$$

Im Grenzwert $h \searrow 0$ konvergiert $\frac{1}{n}\big(\varphi(x+he_j-y) - \varphi(x-y)\big)$ gleichmäßig gegen $\partial_j\varphi(x-y)$. Daraus folgt
$$\partial_j(\varphi * f) = (\partial_j\varphi) * f \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

Nach mehrmaligem Anwenden folgt das Lemma. **q.e.d.**

Korollar 2.20. *Für $f, g \in \mathcal{S}$ gilt $f * g \in \mathcal{S}$.*

Beweis: Wegen dem Lemma genügt es zu zeigen, dass wenn $(1 + |x|)^N f(x)$ und $(1 + |x|)^N g(x)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ beschränkt sind, auch $(1+|x|)^N f * g(x)$ beschränkt sind. Das folgt aus (2.14). **q.e.d.**

Die Fouriertransformation und die Konvolution erfüllen zusammen folgende Gleichungen:

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad \text{für } f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \tag{2.22}$$

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g} \quad \text{für } f, g \in \mathcal{S}. \tag{2.23}$$

Die erste Formel folgt wie auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aus dem Satz von Fubini. Die zweite Formel folgt dann aus der inversen Fouriertransformation, die wir gleich zeigen werden.

Sei jetzt $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $\int \varphi = 1$. Dann definieren wir $\varphi^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$. Die Familie von Funktionen $\{\varphi^\varepsilon\}$ ist dann eine Diracfolge für $\mathbb{R}^n$. Offenbar gilt $\int \varphi^\varepsilon(x)dx = 1$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann folgt wieder wie Satz 1.29

Lemma 2.21. *Sei $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $\int \varphi(x)dx = 1$. Dann gilt*

(i) Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, die für $|x| \to \infty$ gegen Null konvergiert, konvergiert die Famile $\varphi^\varepsilon * f$ im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ gleichmäßig gegen f.

(ii) Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$ konvergiert die Famile $\varphi^\varepsilon * f$ im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegen f. **q.e.d.**

Lemma 2.22. *Für jedes $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge $\{f_k\}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die falls f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt mit $1 \leq p < \infty$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegen f konvergiert und falls f stetig ist und für $|x| \to \infty$ gegen Null konvergiert gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \psi(x)dx = 1$ und $\psi \geq 0$ und sei φ wie im Lemma 2.7. Für jede Nullfolge ε_k sei

$$f_k(x) = \varphi\left(\frac{x}{k}\right) \cdot (\psi^{\varepsilon_k} * f).$$

Wenn f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt, dann ist für großes k die Norm $\|\psi^{\varepsilon_k} * f\|_{L^p(|x|\geq k)}$ beschränkt durch $\|f\|_{L^p(|x|>k-1)}$, weil der Träger von ψ^{ε_k} in $B(0,1)$ enthalten ist. Also konvergiert $\|f_k - \psi^{\varepsilon_k} * f\|_p$ im Grenzwert $k \to \infty$ gegen Null. Wegen Lemma 2.21 konvergiert $\|\psi^{\varepsilon_k} * f - f\|_p$ gegen Null, also auch $\|f_k - f\|_p$. Wenn f stetig ist und für $|x| \to \infty$ gegen Null konvergiert zeigen die gleichen Argumente, das $\|f_k - f\|_\infty$ gegen Null konvergiert. Die Glattheit von f_k wurde im Lemma 2.19 gezeigt. **q.e.d.**

Satz 2.23 (Inverse Fouriertransformation)**.** *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wenn $\hat{f}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt, dann gilt fast überall in $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi. \tag{2.24}$$

Oder äquivalent dazu

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x). \tag{2.25}$$

Der Beweis basiert im wesentlichen auf zwei Aussagen.

A. Die Fouriertransformiert von $\Gamma(x) = e^{-\pi x^2}$ ist wegen (2.1) gleich Γ. Deshalb erfüllt Γ die Relation (2.25). Dann gilt das wegen (2.5) auch für

$$\Gamma_\varepsilon(x) = e^{-\pi\varepsilon^2 x^2} \qquad \text{mit} \qquad \hat{\Gamma}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} e^{-\pi\frac{\xi^2}{\varepsilon^2}}. \tag{2.26}$$

Wenn wir das nochmals mit ε ersetzt durch ε^{-1} anwenden erfüllt auch Γ_ε (2.25).

B. Folgende Dualität der Fouriertransformation.

Lemma 2.24. *Für $\mu, \nu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int \hat{\mu} d\nu = \int \hat{\nu} d\mu. \tag{2.27}$$

Insbesondere gilt für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int \hat{g}(x) f(x) dx = \int \hat{f}(x) g(x) dx.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus dem Satz von Fubini:

$$\int \hat{\mu} d\nu = \int\int e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x) d\nu(\xi) = \int\int e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\nu(\xi) d\mu(x) = \int \hat{\nu} d\mu \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Beweis von Satz 2.23: Wir fügen in das Integral in (2.24) eine abfallende Funktion ein:

$$I_\varepsilon(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{-\pi\varepsilon^2\xi^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi \tag{2.28}$$

und berechnen den Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ auf zwei verschiedene Arten. Im ersten Fall konvergiert im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ $I_\varepsilon(x)$ wegen Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz gegen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

Im zweiten Fall fixieren wir x und ε und definieren $g(\xi) = e^{-\pi\varepsilon^2\xi^2}e^{2\pi i\xi\cdot x}$. Dann ergibt Lemma 2.24

$$I_\varepsilon(x) = \int \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int f(y)\hat{g}(y)dy$$

$\hat{g}$ können wir berecnen indem wir $g(\xi) = e_x(\xi)\Gamma_\varepsilon(\xi)$ und (2.4) und (2.26) benutzen:

$$\hat{g}(y) = \widehat{\Gamma}_\varepsilon(y-x) = \Gamma^\varepsilon(x-y)$$

mit $\Gamma^\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n}\Gamma\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$. Diese Familie von Funktionen ist offenbar eine Diracfolge für $\mathbb{R}^n$. Also gilt

$$I_\varepsilon = f * \Gamma^\varepsilon$$

und wegen Lemma 2.21 konvergiert im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ I_ε in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f. Also konvergiert im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$. Die Funktion in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen$f$ und punktweise gegen $\int \hat{\xi}e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi$. Daraus folgt (2.24). **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis sogar folgendes bewiesen:

Korollar 2.25. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $I_\varepsilon(x)$ definiert durch* (2.28). *Dann konvergiert I_ε in $L^1(\mathbb{R}^n)$ im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ gegen f. Wenn außerdem f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt mit $1 < p < \infty$, dann konvergiert I_ε in $L^p(\mathbb{R}^n)$ im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ gegen f. Wenn f außerdem statt in $L^p(\mathbb{R}^n)$ in $C(\mathbb{R}^n)$ liegt, dann konvergiert I_ε im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ gleichmäßig gegen f.* **q.e.d.**

Korollar 2.26. *Aus $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} = 0$ folgt $f = 0$.*

Beweis: folgt aus Satz 2.23. **q.e.d.**

Satz 2.27. *Die Fouriertransformation ist eine bijektive Abbildung von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$.*

Beweis: Wegen Satz 2.18 und Satz 2.23 ist die inverse der Fouriertransformation als Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, die Fouriertransformation verkettet mit der Abbildung $f \mapsto F$ mit $F(x) = f(-x)$. **q.e.d.**

Jetzt können wir auch die Formel (2.23) zeigen: Für $f, g \in \mathcal{S}$ gilt

$$\widehat{\hat{f} * \hat{g}}(-x) = \hat{\hat{f}}(-x)\hat{\hat{g}}(-x) = f(x)g(x).$$

Hierbei haben wir Satz 2.23 und (2.22) benutzt. Aus Satz 2.23 folgt dann $\hat{f} * \hat{g} = \widehat{fg}$.

Satz 2.28 (Erste Version des Satzes von Plancherel)**.** *Für $u, v \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\int \hat{u}\overline{\hat{v}} = \int u\overline{v}. \tag{2.29}$$

Beweis: Mithilfe von Satz 2.23 berechnen wir

$$\int u(x)\overline{v}(x)dx = \int \hat{\hat{u}}(-x)\overline{v}(x)dx = \int \hat{\hat{u}}(x)\overline{v(-x)}dx.$$

Wenn wir die Dualität auf die rechte Seite anwenden erhalten wir

$$\int u\overline{v} = \int \hat{u}\hat{\overline{v}}.$$

Dann folgt (2.29) aus (2.6). **q.e.d.**

Satz 2.28 besagt, dass die Fouriertransformation eine lineare Abbildung von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$ ist, die das Skalarprodukt von $L^2(\mathbb{R}^n)$ erhält. Weil $\mathcal{S}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt folgt daraus

Satz 2.29 (Zweite Version des Satzes von Plancherel)**.** *Die Fouriertransformation setzt sich von $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ zu einer unitären Abbildung von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ fort.*

Beweis: Die Schwartzfunktionen liegen sowohl in $L^1(\mathbb{R}^n)$ als auch in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht. Wegen dem vorangehenden Satz gilt $\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$ für alle $u \in \mathcal{S}$. Dann setzt sich die Fouriertransformation $u \mapsto \hat{u}$ als Abbildung von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$ zu einer Isometrie von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ fort. Das gleiche gilt für die Umkehrabbildung (2.24). Auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ stimmt die Fortsetzung mit der Abbildung aus Satz 2.3 überein. **q.e.d.**

Wir benutzen im folgenden die Bezeichnung $\hat{f}$ für die Fouriertransformierte von Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$.

Korollar 2.30. *Für alle $\psi \in \mathcal{S}$ und $\nu = \mu + f dx$ mit $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int \hat{\nu}(x)\psi(x)dx = \int \hat{\psi}d\nu.$$

Beweis: Für $f = 0$ haben wir das schon gezeigt. Deshalb genügt es den Fall $\mu = 0$ zu betrachten. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ haben wir das auch schon gezeigt. Dann folgt die Aussage aus der Stetigkeit der linken und rechten Seite, und weil $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt. **q.e.d.**

Satz 2.31. *Für $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt $\mu = -f dx$ aus $\hat{f} + \hat{\mu} = 0$. Für $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\mu} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist μ insbesondere absolut stetig bezüglich des Lebesguesmaßes mit einer Dichtefunktion in $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Wegen dem Rieszschen Darstellungssatz ist das Maß $\mu + f dx$ identisch Null, wenn für alle $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ folgendes gilt

$$\int \varphi d\mu + \int \varphi f dx = 0.$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt das aus dem Korollar 2.30. Weil $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $C_0(\mathbb{R}^n)$ liegt gilt dies auch für alle $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt auch die letzte Aussage, weil es wegen Satz 2.29 für jedes $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ein $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $g = \hat{f}$. **q.e.d.**

Alle grundlegenden Formeln für die L^1-Fouriertransformation gelten dann auch auf $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Das haben wir gerade für die Dualität gezeigt. Insbesondere gelten auch die Formeln aus dem ersten Abschnitt für Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Zum Beispiel gilt mit (2.5) auch

$$\widehat{f \circ T} = |\det T|^{-t} \hat{f} \circ T^{-1} \text{ für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.30}$$

Das folgt wieder aus der Stetigkeit von linker und rechter Seite und weil $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt. Man kann den Definitionsbereich der Fouriertransformation noch weiter ausdehnen. Eine natürliche Fortsetzung wäre die temperierte Distribution. Wir wollen diesen Raum aber nicht einführen. Eine temperierte Funktion ist eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ die zusätzlich

$$\int (1 + |x|)^{-N} |f(x)| dx < \infty$$

für ein $N \in \mathbb{N}$ erfüllt. Also hat f grobgesprochen höchstens polynomiales Wachstum. Offenbar ist für alle temperierten Funktionen f und alle $\varphi \in \mathcal{S}$ das Integral $\int |\varphi f|$ endlich und die Abbildung $\varphi \mapsto \int \varphi f$ ist stetig auf $\mathcal{S}$. Dann ist auch $\varphi * f$ wohldefiniert und es läßt sich leicht zeigen, dass $\varphi * f$ wieder temperiert ist. Wir sagen jetzt, dass von zwei temperierten Funktionen f und g die zweite Fouriertransformierte der ersten im Sinne von Distributionen ist, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ folgendes gilt:

$$\int g\varphi = \int f\hat{\varphi}. \tag{2.31}$$

Dann ist g wieder eindeutig durch f bestimmt. Wir bezeichnen dann g als $\hat{f}$. Für Elemente $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ stimmt das wegen Korollar 2.30 mit der schon definierten Fouriertransformation überein. **q.e.d.**

Alle grundlegenden Formeln, insbesondere (2.3),(2.4), (2.5) und (2.6) gelten dann für temperierte Funktionen auch im Sinne von Distributionen Sinne. Wenn z.B. f eine temperierte Funktion ist und $\psi \in \mathcal{S}$ und f im Sinne von Distributionen eine Fouriertransformierte besitzt, dann auch $\psi * f$ und es gilt

$$\widehat{\psi * f} = \hat{\psi}\hat{f}. \tag{2.32}$$

Um das einzusehen sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann folgt

$$\int \hat{\psi}(x)\hat{f}(x)\varphi(x)dx = \int \hat{f}(x)\hat{\psi}(x)\varphi(x)dx = \int f(x)\widehat{\hat{\psi}\varphi}(x)dx = \int f(x)(\hat{\hat{\psi}} * \hat{\varphi})(x)dx$$
$$= \int f(x) \int \psi(-(x-y))\hat{\varphi}(y)dydx = \int (\psi * f)(y)\hat{\varphi}(y)dy.$$

Auch die inverse Fouriertransformation läßt sich auf temperierte Funktionen übertragen. Wenn die temperierte Funktion f die Fouriertransformation $\hat{f}$ hat, dann hat $\hat{f}$ die Fouriertransformtion $f(-x)$. Das folgt für $\varphi \in \mathcal{S}$ aus folgender Rechnung:

$$\int f(-x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(-x)dx = \int f(x)\hat{\hat{\varphi}}(x)dx = \int \hat{f}(x)\hat{\varphi}(x)dx.$$

2.4 Fouriertransformation auf L^p für $1 < p < 2$

Wir berechnen zuerst einige Fouriertransformierte.

Satz 2.32. *Sei $h_a(x) = \frac{\Gamma(a/2)}{\pi^{a/2}}|x|^{-a}$. Dann ist $\widehat{h_a} = h_{n-a}$ als die $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ Fouriertransformierte für $\frac{n}{2} < \mathrm{Re}(a) < n$ und als die Fouriertransformierte im Sinne von Distributionen für $0 < \mathrm{Re}(a) < n$.*

Hierbei ist Γ die Gammafunktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$$

Beweis: Sei a reell in dem Intervall $\left(\frac{n}{2}, n\right)$. Dann gehört h_a zu $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Die Funktionen von der Form $f(x) = c|x|^{-a}$ mit einer Konstanten c werden durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1. f ist radialsymmetrisch, d.h. für jede orthogonale lineare Abb. O gilt $f \circ O = f$.

2. f ist homogen vom Grad $-a$, d.h.
$$f(\varepsilon x) = \varepsilon^{-a}f(x) \text{ für alle } \varepsilon > 0. \tag{2.33}$$

Wir benutzen die Notation $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ und $f^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}f(\frac{x}{\varepsilon})$. Sei $f(x) = |x|^{-a}$ mit $a \in \left(\frac{n}{2}, n\right)$. Dann folgt aus den beiden Eigenschaften 1. und 2. (siehe Abschnitt 2.1 insbesondere (2.5)), dass $\hat{f}$ ebenfalls radialsymmetrisch ist und $\hat{f^\varepsilon} = \varepsilon^{-a}\hat{f}$ gilt. Die zweite Bedingung ist äquivalent zu $\hat{f}_\varepsilon = \varepsilon^{-(n-a)}\hat{f}$ und deshalb zu $\hat{f}(x) = c|x|^{-(n-a)}$.

Also müssen wir nur noch die Konstante c bestimmen. Dafür benutzen wir die Dualität. Sei Ψ die Gaußfunktion $\Psi(x) = e^{-\pi x^2}$. Dann folgt

$$\int |x|^{-a} e^{-\pi x^2} dx = c \int |x|^{-(n-a)} e^{-\pi x^2} dx. \tag{2.34}$$

Um die rechte Seite zu berechnen benutzen wir Polarkoordinaten und substituieren $t = \pi r^2$. Sei σ das Volumen der Einheitsspähren. Dann gilt:

$$\int |x|^{-a} e^{-\pi x^2} dx = \sigma \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{n-a} \frac{dr}{r} = \sigma \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{n-a}{2}} \frac{dt}{2t} = \frac{\sigma}{2} \pi^{-\frac{n-a}{2}} \Gamma\left(\frac{n-a}{2}\right).$$

Die rechte Seite ist entsprechend gleich $c \frac{\sigma}{2} \pi^{-\frac{a}{2}} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)$. Daraus folgt

$$c = \frac{\pi^{\frac{a}{2}} \Gamma\left(\frac{n-a}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-a}{2}} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Das zeigt den Satz für $\frac{n}{2} < a < n$.

Für den allgemeinen Fall betrachten wir für $\varphi \in \mathcal{S}$ die folgenden Integrale

$$A(z) = \int h_z \hat{\varphi} \qquad B(z) = \int h_{n-z} \varphi.$$

Sowohl A als auch B sind für die betrachtete z komplexe analytische Funktionen, weil Γ eine komplexe analytische Funktion ist und folgende Funktion komplex analytisch ist:

$$\int |x|^{-z} \varphi(x) dx$$

Wir haben schon $A(z) = B(z)$ für $z \in (\frac{n}{2}, n)$ gezeigt. Also stimmen sie auf dem Gebiet überein, auf dem sie komplex analytisch sind, das zusammenhängend ist und $\left(\frac{n}{2}, n\right)$ enthält. Für $\mathrm{Re}(a) > \frac{n}{2}$ liegt h_a in $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, und die Fouriertransformation stimmt mit der Fouriertransformation im Sinne von Distributionen überein. **q.e.d.**

Sei jetzt T eine invertierbare symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Seien k_+ und k_- die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte von T (mit Vielfachheit gezählt). Dann heißt $k_+ - k_-$ Signatur von T. Wir definieren

$$G_T(x) = e^{-\pi i \langle Tx, x \rangle}.$$

Diese Funktion hat den Absolutbetrag Eins und ist eine temperierte Funktion.

Satz 2.33. *Sei T eine invertierbare symmetrische reelle $n \times n$-Matrix mit Signatur σ. Dann ist die Fouriertransformierte von G_T im Sinne von Distributionen gegeben durch*

$$\widehat{G_T} = e^{-\pi i \frac{\sigma}{4}} |\det T|^{-\frac{1}{2}} G_{-T^{-1}}.$$

Bemerkung 2.34. *Dieser Satz kann leicht auch komplex symmetrische Matrizen T verallgemeinert werden, deren Imaginärteil nicht positiv ist. Diese Bedingung ist notwendig, damit G_T temperiert ist. Im Fall $n = 1$ werden wir diesen Fall auch beweisen.*

Beweis: Wir müssen für $\varphi \in \mathcal{S}$ und eine invertierbare symmetrische reelle $n \times n$-Matrix folgendes zeigen:

$$\int e^{-\pi i \langle Tx,x\rangle} \hat{\varphi}(x) dx = e^{\frac{-\pi i}{4}\sigma} |\det T|^{-\frac{1}{2}} \int e^{\pi i \langle T^{-1}x,x\rangle} \varphi(x) dx. \tag{2.35}$$

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Sei $\sqrt{z}$ der Zweig der Quadratwurzel, der auf dem Komplement von den nichtpositiven Zahlen in $\mathbb{C}$ definiert ist und auf $\mathbb{R}^+$ positiv ist. Dann gilt $\sqrt{\pm i} = e^{\pm \frac{\pi i}{2}}$. Also ist (2.35) äquivalent zu

$$\int e^{-\pi z x^2} \hat{\varphi}(x) dx = (\sqrt{z})^{-1} \int e^{-\pi \frac{x^2}{z}} \varphi(x) dx \tag{2.36}$$

für $\varphi \in \mathcal{S}$ und rein imaginäres $z \neq 0$. Wir beweisen diese Formel durch analytische Fortsetzung von reellem z.

Für $z = 1$ folgt (2.36) aus Lemma 2.2. Für reelle positive z folgt die Formel (2.36) durch Skalierung, d.h. daraus, dass die Fouriertransformierte von f_ε gleich $\hat{f}^\varepsilon$ ist (vergleiche (2.5)). Beide Seiten von (2.36) sind offensichtlich komplex analytische Funktionen in z, solange $\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt und stetig für $\mathrm{Re}(z) \geq 0, z \neq 0$. Das zeigt (2.36).

Jetzt betrachten wir den Fall $n \geq 2$. Wenn (2.35) auch für ein gegebenes T und alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt, dann gilt (2.35) auch für UTU^{-1} mit $U \in SO(n)$. Dies folgt aus $\widehat{f \circ U} = \hat{f} \circ U$. Das haben wir allerdings noch nicht für die Fouriertransformierte im Sinne von Distributionen gezeigt, was wir jetzt nachholen. Seien also f und $\hat{f}$ temerierte Funktionen und $\hat{f}$ im Sinne von Distributionen die Fouriertransformierte von f. Dann gilt für eine orthogonale Matrix U und all $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\int f \circ U \cdot \hat{\varphi} dx = \int f \cdot \hat{\varphi} \circ U^{-1} dx = \int f \cdot \widehat{\varphi \circ U^{-1}} dx = \int \hat{f} \cdot \varphi \circ U^{-1} dx = \int \hat{f} \circ U \cdot \varphi dx.$$

Also gilt auch $\widehat{f \circ U} = \hat{f} \circ U$. Also genügt es (2.35) für diagonale T zu zeigen. Wenn T diagonal und φ eine Tensorfunktion ist, dann zerfällt das Integral in (2.35) zu einem Produkt von eindimensionalen Integralen und (2.35) folgt aus (2.36). Der allgemeine

Fall folgt aus Satz 2.13 und daraus, dass die Integration über temperierte Funktionen eine stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$ definiert. **q.e.d.**

Als nächstes betrachte wir die Fouriertransformation auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 < p < 2$. Dazu benutzen wir wieder den Satz von Riesz-Thorin 1.38. Zunächst zeigen wir

Satz 2.35 (Hausdorff-Young). *Für $1 \leq p \leq 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt*

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p \tag{2.37}$$

Beweis: Die beiden Grenzfälle $p = 1$ und $p = 2$ haben wir schon gezeigt. Dann folgt die Aussage wieder aus dem Satz von Riesz-Thorin 1.38. **q.e.d.**

Wir zeigen jetzt auch folgende Ungleichung von Young und benutzen dafür auch den Satz von Riesz-Thorin. Allerdings kann man die Youngsche Ungleichung auch aus der Hölderungleichung ableiten.

Satz 2.36. *Sei $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p, r \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \geq 1$. Sei $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Dann ist das Integral $\varphi * \psi$ absolut konvergent für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und es gilt*

$$\|\varphi * \psi\|_q \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_r.$$

Beweis: Für gegebenes φ sei

$$T\psi = \varphi * \psi.$$

Die Ungleichungen (2.19) und (2.20) zweigen, dass T eine lineare Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^n) + L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ nach $L^p(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist. (Hierbei ist p' der duale Exponent zu p mit $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$) mit

$$\|T\psi\|_p \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_1 \qquad \|T\psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_{p'}.$$

Für $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'}$ gibt es ein $\vartheta \in [0, 1]$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \vartheta}{1} + \frac{\vartheta}{p'} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1 - \vartheta}{p} + \frac{\vartheta}{\infty.}$$

Dann folgt die Aussage aus dem Satz von Riesz-Thorin 1.38. **q.e.d.**

Außer für $p = 1$ und $p = 2$ ist die Konstante 1 in der Hausdorff-Young-Ungleichung nicht die kleinst mögliche Konstante. Die beste Konstante erhält indem man die Gauß-funktion einsetzt. Das ist ein sehr tiefes Resultat von Babenko für gerade ganze Zahlen p' und im allgemeinen Fall von Becher. Von Becher gibt es auch ähnliche Betrachtungen zur Youngschen Ungleichung.

Bis auf für $p = 2$ ist die Ungleichung (2.37) nicht umkehrbar, d.h. es gibt keine Konstante C so dass $\|f\|_p \leq C\|\hat{f}\|_{p'}$ für alle $f \in \mathcal{S}$ gilt. Das ist natürlich äquivalent dazu, dass die Ungleichung (2.37) nicht für $p > 2$ gilt. Das ist nicht schwer zu zeigen und wir werden dafür mehrere Argumente anführen. Zuerst wollen wir das einfachste Argument als eine Übungsaufgabe stellen.

Übungsaufgabe 2.37. *Konstruiere mithilfe von Translationen und Multiplikationen mit Charakteren eine Folge von Schwartzfunktionen $\{\varphi_n\}$, so dass*

(i) Jedes φ_n hat die gleiche $L^p(\mathbb{R}^n)$-Norm.

(ii) Jedes $\hat{\varphi}_n$ hat die gleiche $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$-Norm.

(iii) Die Träger von $\hat{\varphi}_n$ sind paarweise disjunkt.

(iv) Die Träger von φ_n sind im Wesentlichen disjunkt, d.h.

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \varphi_n\right\|_p^p \approx \sum_{n=1}^{N} \|\varphi_n\|_p^p \approx N \text{ gleichmäßig in } N.$$

Und benutze dies um zu zeigen, dass die umgekehrte Hausdorff-Young-Ungleichung nicht gilt.

Als nächstes wollen wir ein zweites Argument darstellen, warum die umgekehrte Haudorff-Young-Ungleichung nicht gilt. Es baut auf Satz 2.33 auf. Mit diesem Argument kann man auch zeigen, dass er für jedes $p > 2$ Funktionen f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gibt, deren Fouriertransformierte keine temperierte Funktionen sind.

Sei $n = 1$ und $f_\lambda(x) = \varphi(x)e^{-\pi i\lambda x^2}$, mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dabei ist λ eine große positive Zahl. Dann hängt $\|f_\lambda\|_p$ nicht von λ ab. Wegen dem Satz von Plancherel hängt auch $\|\widehat{f_\lambda}\|_2$ nicht von λ ab. Andererseits ist $\widehat{f_\lambda}$ die Konvolution von $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\sqrt{i\lambda}^{-1} e^{\pi i\lambda^{-1}x^2}$, das die $\| \ \|_\infty$-Norm $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ hat. Dann folgt für $p < 2$ also $p' \geq 2$

$$\begin{aligned}\|\widehat{f_\lambda}\|_{p'} &= (\|\widehat{f_\lambda}\|_{p'}^{p'})^{1/p} \leq (\|\widehat{f_\lambda}\|_2^2 \cdot \|\widehat{f_\lambda}\|_\infty^{p'-2})^{1/p'} = \|\widehat{f_\lambda}\|_2^{\frac{2}{p'}} \|\widehat{f_\lambda}\|_\infty^{1-\frac{2}{p'}} \\ &\leq C \cdot \lambda^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'})}\end{aligned}$$

mit einer Konstanten unabhängig von λ. Weil $\|f_\lambda\|_p$ unabhängig von λ ist, gibt es also keine Konstante $C \geq 0$, so dass

$$\|f\|_p \leq C\|\hat{f}\|_{p'} \text{ für alle } f \in \mathcal{S}$$

gilt. Als drittes wollen wir ein Argument aus der Wahrscheinlichkeitstheorie angeben. Seien $\{\omega_n\}_{n=1}^N$ unabhängige Zufallsvariable, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ die Werte ± 1 annehmen können. Der Erwartungswert auf den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum wird mit $\mathbb{E}$ bezeichnet. Seien $\{a_n\}_{n=1}^N$ komplexe Zahlen. Dann gilt

Satz 2.38 (Khinchins Ungleichung)**.**

$$A(p)\left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq \mathbb{E}\left(\left|\sum_{n=1}^N a_n\omega_n\right|^p\right) \leq B(p)\left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2\right)^{\frac{p}{2}} \quad \textit{für alle } 0 < p < \infty. \qquad (2.38)$$

Beweis: Wir beweisen diese Ungleichungen nur für $1 < p < \infty$. Der entsprechende Wahrscheinlichkeitsraum hat 2^N Elemente. Deshalb ist jede Funktion auf dem Wahrscheinlichkeitsraum ein Element von $\mathbb{C}^{(2^N)}$. Im Fall $p = 2$ gilt

$$\left|\sum_{n=1}^N a_n\omega_n\right|^2 = \left(\sum_{n=1}^N a_n\omega_n\right)\left(\sum_{n=1}^N \overline{a}_n\omega_n\right).$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen mitteln sich im Erwartungswert die gemischten Terme weg und wir erhalten

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{n=1}^N a_n\omega_n\right|^2\right) = \sum_{n=1}^N |a_n|^2.$$

Als nächstes zeigen wir die obere Schranke des Erwartungswertes. Dieser Erwartungswert ist gleich 2^{-N}mal der $\|\ \|_p$-Norm der entsprechenden Elemente von $\mathbb{C}^{(2^N)}$. Wegen der Minkowskiungleichung der $\|\ \|_p$-Norm genügt es nur reelle $\{a_n\}_{n=1}^N$ zu betrachten. Wir werden diese Ungleichung aus einer allgemeinen Ungleichung herleiten. Dafür bezeichne μ das entsprechende Wahrscheinlichkeitsmaß. Seien also $\{a_n\}$ reell und $t > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left(e^{t\sum_n a_n\omega_n}\right) = \prod_n \mathbb{E}\left(e^{ta_n\omega_n}\right) = \prod_n \frac{1}{2}\left(e^{ta_n} + e^{-ta_n}\right).$$

Wegen $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ (Übungsaufgabe) folgt dann $\mathbb{E}\left(e^{t\sum_n a_n\omega_n}\right) \leq e^{\frac{t^2}{2}\sum_n a_n^2}$.

Wegen $e^{t\lambda}\mu\left(\sum a_n\omega_n \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{t\sum a_n\omega_n}\right)$ folgt daraus

$$\mu\left(\sum_n a_n\omega_n \geq \lambda\right) \leq e^{-t\lambda+\frac{t^2}{2}\sum a_n^2}.$$

Für alle $t > 0$ und $\lambda > 0$. Setze $t = \frac{\lambda}{\sum a_n^2}$ ein.

$$\mu\left(\sum_n a_n\omega_n \geq \lambda\right) \leq e^{\frac{-\lambda^2}{2\sum a_n^2}}.$$

Daraus folgt dann

$$\mu\left(\left|\sum_n a_n\omega_n\right| \geq \lambda\right) \leq 2e^{\frac{-\lambda^2}{2\sum a_n^2}}.$$

Wegen $d\lambda^p = p\lambda^{p-1}d\lambda$ können wir die L^p-Norm durch eine Integral über diese sogenannte Verteilungsfunktion berechnen:

$$\mathbb{E}(|f|^p) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(|f| \geq \lambda)d\lambda.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum a_n\omega_n\right|^p\right) \leq 2p\int \lambda^{p-1}e^{\frac{-\lambda^2}{2\sum a_n^2}}d\lambda = 2^{\frac{p}{2}}p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\left(\sum a_n^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Das zeigt die obere Schranke. Die untere Schranke folgt jetzt aus dem Fall $p = 2$ und der oberen Schranke:

$$\begin{aligned}\sum_n |a_n|^2 &= \mathbb{E}\left(\left|\sum a_n\omega_n\right|^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\left|\sum a_n\omega_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}\left(\left|\sum a_n\omega_n\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq B(p)\left(\sum |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left(\left|\sum a_n\omega_n\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Höldersche Ungleichung auf $\mathbb{C}^{(2^N)}$ angewendet. Daraus folgt die untere Schranke mit

$$A(p') = \frac{1}{B(p)}.$$

q.e.d.

Um das auf die umgekehrte Hausdorff-Young-Ungleichung anzuwenden sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\{k_j\}^N$ so gewählt, dass $\varphi_j(x) = \varphi(x - k_j)$ paarweise disjunkte Träger haben. Also gilt $\hat{\varphi}_j(\xi) = e^{2\pi i\xi k_j}\hat{\varphi}(\xi)$. Die L^p-Norm von $\sum \omega_n\varphi_n$ ist unabhängig von den Zufallsvariablen, weil die φ_j paarweise disjunkte Träger haben.

$$\left\|\sum \omega_n\varphi_n\right\|_p = CN^{\frac{1}{p}}.$$

Jetzt berechnen wir die Erwartungswerte der entsprechenden Fouriertransformierten $\sum \omega_n \hat{\varphi}_n$. Wegen dem Satz von Fubini gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left\|\sum \omega_n \hat{\varphi}_n\right\|_{p'}^{p'}\right) &= \mathbb{E}\left(\left\|\sum \omega_n e^{2\pi i \xi k_n} \hat{\varphi}(\xi)\right\|_{p'}^{p'}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi)|^{p'}\, \mathbb{E}\left(\left|\sum \omega_n e^{2\pi i \xi k_n}\right|^{p'}\right) d\xi \approx N^{\frac{p'}{2}}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Ungleichung von Khinchine benutzt. Daraus folgt, dass es Werte der Zufallsvariablen ω gibt, so dass $\|\sum \omega_n \hat{\varphi}_n\|_{p'} \leq C N^{\frac{1}{2}}$ gilt mit einer Konstanten C, die unahängig ist von N. Für $p < 2$ und große N ist das kleiner als die Norm $\|\sum \omega_n \varphi_n\|_p \approx N^{\frac{1}{p}}$.

2.5 Die Unschärferelation

Die Unschärferelation ist ein heuristisches Prinzip, das besagt, dass eine Funktion nicht zusammen mit ihrer Fouriertransformierten lokalisiert werden kann. Wenn wir also f lokalisieren, dann kann nicht auch $\hat{f}$ lokalisiert sein und umgekehrt. Die einfachste rigerose Formulierung ist folgender Satz:

Satz 2.39 (L^2-Bernsteinungleichung)**.** *Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}$ habe Träger in $D(0, R)$. Dann ist f glatt mit*

$$\|\partial^\alpha f\|_2 \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \|f\|_2$$

Beweis: Das ist eine Folgerung aus dem Satz von Plancherel. Wegen der Annahme an den Träger liegt $\hat{f}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Wegen

$$f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

ist die rechte Seite die Fouriertransformierte einer Funktion in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Wegen Satz 2.29 ist f dann eine glatte Funktion und es gilt

$$\|\partial^\alpha f\|_2 = \|\widehat{\partial^\alpha f}\|_2 = \|(2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}\|_2 \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \|\hat{f}\| = (2\pi R)^{|\alpha|} \|f\|_2. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Es gelten auch ähnliche Aussagen für die L^p-Normen, aber um diese zu beweisen müssen wir die Hausdorff-Youngsche-Ungleichung benutzen.

Lemma 2.40. *Es gibt eine Schwartzfunktion φ, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ deren Träger von $\hat{f}$ in $D(0, R)$ liegt, folgendes gilt:*

$$f = \varphi^{R^{-1}} * f.$$

Beweis: Wähle $\varphi \in S$, so dass $\hat{\varphi}$ auf $B(0,1)$ gleich 1 ist. Dann ist $\widehat{\varphi^{R-1}}(\xi) = \hat{\varphi}(R^{-1}\xi)$ auf $B(0,R)$ gleich 1 und $\varphi^{R^{-1}} * f$ gleich f. **q.e.d.**

Satz 2.41 (Bernsteins Ungleichung für die Kreisscheibe)**.** *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Träger von $\hat{f}$ in $B(0,R)$. Dann gilt*

(i) Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $1 \leq p \leq \infty$

$$\|\partial^\alpha f\|_p \leq (CR)^{|\alpha|}\|f\|_p.$$

(ii) Für jedes $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|f\|_q \leq CR^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_p.$$

Beweis: Die Funktion $\varphi^{R^{-1}}$ erfüllt

$$\|\varphi^{R^{-1}}\|_r = \|\varphi\|_r \cdot R^{\frac{n}{r'}} = CR^{\frac{n}{r'}}$$

mit einer Konstanten C unabhängig von R und $1 \leq r \leq \infty$. Außerdem gilt

$$\|\nabla\varphi^{R^{-1}}\|_1 = R\|\nabla\varphi\|_1.$$

Aus $f = \varphi^{R^{-1}} * f$ folgt dann (i) für alle ersten Ableitungen. Dann folgt der allgemeine Fall von (i) durch Induktion.

Um (ii) zu zeigen definiert r durch $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'}$. Dann folgt aus Youngs Ungleichung

$$\|f\|_q = \|\varphi^{R^{-1}} * f\|_q \leq \|\varphi^{R^{-1}}\|_r\|f\|_p \leq CR^{\frac{n}{r'}}\|f\|_p = C \cdot R^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\| \qquad \mathbf{q.e.d.}$$

Wir werden jetzt die Ungleichungen von Bällen auf Ellipsen verallgemeinern. Eine Ellipse ist eine Menge von der Form

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n \left| \sum_j \frac{|(x-a)e_j|}{r_j^2} \leq 1 \right.\right\}. \tag{2.39}$$

Hierbei ist $a \in \mathbb{R}^n$ das Zentrum, $e_1, \ldots, e_n$ ist eine orthonormal Basis (die Achsen) und die positiven Zahlen r, die Achslängen. Für eine gegebene Ellise E ist eine duale Ellipse E^* eine Ellipse mit den gleichen Achsen aber den inversen Achslängen, also eine Ellipse der Form

$$E^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n \left| \sum_j r_j^2|(x-b)e_j|^2 \leq 1 \right.\right\}.$$

Dabei ist das Zentrum beliebig.

Satz 2.42 (Bernsteins Ellipsenungleichung)**.** *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Träger von $\hat{f}$ in E. Dann gilt für $1 \le p \le q \le \infty$*

$$\|f\|_q \le C|E|^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|f\|_p.$$

Man kann auch die Aussage (i) aus Satz 2.41 verallgemeinern. Dann hängt die Abschätzung aber auch von den auftauchenden partiellen Ableitungen ab.

Beweis: Sei k das Zentrum von E. Sei T die lineare Abbildung, die $B(0,1)$ auf $E-k$ abbildet. Sei $S = T^{-t}$, also $T = S^{-1}$. Sei $f_1(x) = e^{-2\pi i k\cdot x}f(x)$ und $g = f_1 \circ S$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= |\det S|^{-1}\hat{f}_1\big(S^{-t}(\xi)\big) = |\det S|^{-1}\hat{f}\big(S^{-t}(\xi+k)\big)\\ &= |\det T|\hat{f}\big(T(\xi)+k\big)\end{aligned}$$

Also ist der Träger von $\hat{g}$ in $B(0,1)$ enthalten. Dann folgt aus dem Satz 2.41

$$\|g\|_q \le C\|g\|_p.$$

Andererseits gilt

$$\|g\|_q = |\det S|^{-\frac{1}{q}}\|f\|_q = |\det T|^{\frac{1}{q}}\|f\|_q = |E|^{\frac{1}{q}}\|f\|_q$$

und die analoge Formel mit Exponent p anstatt q. Daraus folgt

$$|E|^{\frac{1}{q}}\|f|_q \le C|E|^{\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

q.e.d.

Manchmal werden auch punktweise Abschätzungen benötigt. D.h. man will zeigen, dass wenn der Träger von $\hat{f}$ in E enthalten ist für jede duale Ellipse die Werte auf E^* durch den Mittelwert auf E^* kontrolliert werden.

Um das zu präzisieren sei N eine große Zahl und $\varphi(x) = (1+|x|^2)^{-N}$. Für ein Ellipsoid E^* sei $\varphi_{E^*}(x) = \varphi\big(T(x-k)\big)$, wobei k das Zentrum von E^* ist und T die lineare Abbildung, die E^*-k auf $B(0,1)$ abbildet. Wenn T_1 und T_2 zwei solide Abbildungen sind, dann ist $T_1 \circ T_2^{-1}$ eine orthogonale Transformation, so dass φ_{E^*} wohl definiert ist. Grob gesprochen ist φ_{E^*} auf E^* gleich 1 und fällt außerhalb von E^* schnell ab. Wir können auch schreiben

$$\varphi_{E^*}(x) = \left(1 + \sum_j \frac{|(x-k)e_j|^2}{r_j^2}\right)^{-N}.$$

Satz 2.43. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Träger von $\hat{f}$ in einer Ellipse E. Dann gilt für jedes z in einer dualen Ellipse E^**

$$|f(z)| \le C_N \frac{1}{|E^*|}\int |f(x)|\varphi_{E^*}dx.$$

Beweis: Sei zuerst sei E ein Einheitsball und E^* auch ein Einheitsball. Dann ist f die Konvolution mit einer Schwartzfunktion ψ. Also gilt

$$\begin{aligned}|f(z)| &\le \int |f(x)||\psi(z-x)|dx \le C_N \int |f(x)|(1+|z-x|^2)^{-N} \\ &\le C_N \int |f(x)|(1+|x|^2)^{-N}.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Schwartzfunktion ψ abgeschätzt und $1+|z-x|^2 \ge C\ 1+|x|^2$ für $|z| \le 1$ benutzt. Das zeigt den Satz wenn $E = E^*$ der Einheitsball ist.

Als nächstes sei E eine Ellipse mit Zentrum 0 und E^* eine beliebige duale Ellipse. Seien k und T wie zuvor. Dann hat $g(x) = f(T^{-1}x + k)$ einen Träger der Fouriertransformierten in $T^{-1}E$. Weil $T\ E^*$ auf dem Einheitsball abbildet, bildet $T^{-1}\ E$ auf dem Einheitsball ab. Also gilt

$$|g(y)| \le \int \varphi(x)|g(x)|dx \text{ für } y \in B(0,1).$$

Dann folgt

$$|f(T^{-1}z + k)| \le \int \varphi(x)|f(T^{-1}x + k)|dx = |\det T| \int \varphi_{E^*}(x)|f(x)|dx$$

nach einer Variablentransformation. Wegen $|\det T| = \frac{1}{|E^*|}$ folgt der Satz für Ellipsen E mit Zentrum 0. Im allgemeinen erstzen wir f durch $e^{-2\pi i k\cdot x}f(x)$, wobei k das Zentrum von E ist. **q.e.d.**

Man kann im Satz 2.43 das Integral auf der rechten Seite nicht auf beschränkte Gebiete wie z.B. die doppelte duale Ellipse beschränken. Betrachte z.B. im eindimensionalen Fall eine Schwartzfunktion g mit $g(0) \ne 0$, der Fouriertransformierte Träger in $[-1, 1]$ hat. Dann ist die Fouriertransformierte von

$$f_N(x) = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^N g(x)$$

eine Linearkombination von $\hat{g}$ und seinen Ableitungen und hat den gleichen Träger wie $\hat{g}$. Diese Folge konvergiert auf $[-2, 2]$ beschränkt gegen Null bis auf bei $x = 0$. Deshalb kann es keine punktweise Abschätzung von f_N geben, die nur von den Werten auf $[-2, 2]$ abhängt.

Alle Abschätzungen von Bernstein sind scharf bis auf die angeführten Konstanten. Wenn z.B. E ein Ellipsoid ist und E^* ein duales Ellipsoid, $N < \infty$, dann existiert eine Funktion f deren Träger von $\hat{f}$ in E^* enthalten ist mit

$$\|f_1\| \ge |E| \qquad\qquad |f(x)| \le C\varphi_E(x),$$

wobei $\varphi_E = \varphi_E^{(N)}$ oben definiert wurde. Im Fall von $E = E^* = B(0,1)$ ist das offensichtlich: Sei f irgendwie Schwartzfunktion mit Träger von $\hat{f}$ in $B(0,1)$ und mit entsprechender $L^1(\mathbb{R}^n)$-Norm. Der allgemeine Fall folgt dann nach einer entsprechenden Variablentransformation. In diesem Beispiel ist für alle $p \|f\|_p \approx |E|^{\frac{1}{p}}$, so dass die Abschätzung von Satz 2.43 scharf ist.

Kapitel 3

Lokalkompakte abelsche Gruppen

3.1 Duale Gruppe und Fouriertransformation

Die Fouriertransformation auf $\mathbb{T}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}^n$ sind Spezialfälle einer allgemeinen Konstruktion auf lokalkompakten abelschen Gruppen, die wir jetzt vorstellen. Sei also G eine abelsche Gruppe, die ein lokalkompakter Hausdorffraum ist, d.h. je zwei verschiedene Punkte besitzen auch disjunkte Umgebungen. Dabei sollen die Abbildungen

$$\begin{array}{lcc} + : & G \times G \to G, & (x, y) \mapsto x + y \\ - : & G \to G, & x \mapsto -x \end{array}$$

stetig sein. Jede solcher Gruppe besitzt ein nichtverschwindendes nicht negatives Borelmaß, das translationsinvariant ist: $\mu(E + x) = \mu(E)$ für jede Borelmenge E und $x \in G$. Dieses Borelmaß ist eindeutig bis auf Multiplikationen mit einer positiven Zahl. Wir wählen ein solches Borelmaß und definieren die entsprechenden Banachräume $L^p(G)$ für $1 \leq p \leq \infty$. Wenn G kompakt ist normieren wir das Maß μ so, dass $\mu(G) = 1$ gilt. Das Maß wird dann Haarsches Maß genannt. Daneben betrachten wir auch die Algebra der stetigen komplexwertigen Funktionen $C(G)$. In dieser Algebra sind enthalten die Unteralgebra der Funktionen mit kompaktem Träger $C_c(G)$ und die Banachräume der stetigen beschränkten Funktionen $C_b(G)$ und der abfallenden Funktionen $f : \forall \varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subset G$, so dass f außerhalb von K einen Absolutbetrag $|f(x)| < \varepsilon$ hat. Der Raum $C_0(G)$ solcher abfallender Funktionen ist ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(G)$ und deshalb ein Banachraum. Dabei versehen wir $C_b(G)$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)|$. Für alle $1 \leq p < \infty$ liegt der Raum $C_c(G)$ dicht in $L^p(G)$ und damit auch $C_0(G) \cap L^p(G)$.

Wir definieren wie auf $\mathbb{R}^n$ die Konvolution:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(x - y) d\mu(y).$$

Dann ist wieder wegen dem Satz von Fubini für alle $f, g \in L^1(G)$ diese Konvolution für fast alle $x \in G$ definiert und $x \mapsto f * g(x)$ ist wieder ein Element in $L^1(G)$ mit

$$\|f * g\|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Damit wird also $L^1(G)$ zu einer kommutativen Banachalgebra. Wenn G diskret ist und das Maß μ

$$\mu(\{x\}) = 1 \qquad \text{für alle } x \in G$$

erfüllt, dann besitzt diese Banachalgebra eine Eins, nämlich das Punktmaß δ_0 bei $0 \in G$. Im Allgemeinen ist aber δ_0 nicht in $L^1(G)$ enthalten und $L^1(G)$ besitzt keine Eins. Wir fassen jetzt einige Eigenschaften des Haarschen Maßes im folgenden Lemma zusammen.

Lemma 3.1. *(i) Für $1 \leq p < \infty$ definieren die Translationen Isometrien von $L^p(G)$, $C_b(G)$ und $C_0(G)$.*

(ii) Für $f, g \in C_c(G)$ liegt auch $f * g$ in $C_c(G)$.

(iii) Für jedes $f \in L^1(G)$ definiert die Abbildung $g \mapsto f * g$ eine stetige lineare Abbildung von $L^p(G)$ auf sich selber mit $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$ mit $1 \leq p \leq \infty$. Für $g \in L^\infty(G)$ ist $f * g$ sogar gleichmäßig stetig.

(iv) Es gilt die Youngsche Ungleichung. D.h. für alle $1 \leq p, q, r \leq \infty$ mit $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und $f \in L^1(G), g \in L^q(G)$ gilt

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

(v) Für $1 < p < \infty$ und $f \in L^p(G)$ und $g \in L^p(G)$ liegt $f * g$ in $C_0(G)$.

(vi) Für $f \in L^1(G)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung U von $0 \in G$, so dass für jedes nicht negative $u \in L^1(G)$, dessen Träger in U enthalten ist und das $\int u d\mu = 1$ erfüllt, folgendes gilt:

$$\|f - u * f\| < \varepsilon.$$

Der Beweis ist analog zu den Beweisen der entsprechenden Aussagen auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.2. *Für eine lokalkompakte abelsche Gruppe G sei Γ die Menge der stetigen unitären Charaktere mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G. Die punktweise Multiplikation macht Γ zu einer abelschen Gruppe, wobei die $1 \in \Gamma$ aus dem trivialen Charakter besteht, der alle Elemente von G auf $1 \in S'$ abbildet. Die Umgebungen von $1 \in \Gamma$ bestehen dann aus den Mengen*

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) \in U \text{ für alle } x \in K\}$$

wobei U eine Umgebung von $1 \in S^1$ ist und $K \subset G$ eine kompakte Teilmenge von G.

Die Umgebungen von beliebigen Elementen $\gamma \in \Gamma$ erhält man indem man obige Umgebungen punktweise mit γ multipliziert. Wir werden später sehen, dass Γ wieder eine lokalkompakte abelsche Gruppe ist. Zwischen den Elementen von G und Γ definieren wir folgende Paarung:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : G \times \Gamma \to \mathbb{C}, (x, \gamma) \mapsto \langle x, \gamma \rangle = \gamma(x).$$

Dann können wir jetzt die Fouriertransformation von lokalkompakten abelschen Gruppen definieren:

Definition 3.3. *Für jedes $f \in L^1(G)$ sei $\hat{f}$ definiert als*

$$\hat{f} : \Gamma \to \mathbb{C}, \qquad \gamma \mapsto \int_G \langle -x, \gamma \rangle f(x) d\mu(x).$$

Offenbar ist $\hat{f}$ für $f \in L^1(G)$ eine stetige Funktion auf Γ und

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |\hat{f}(\gamma)| \leq \|f\|_1.$$

Das Bild von $L^1(G)$ unter der Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{A}(\Gamma) \subset C_b(\Gamma)$.

Satz 3.4. *(i) Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe. Dann ist $\mathbb{A}(\Gamma)$ eine Unteralgebra von $C_b(\Gamma)$ und es gilt*

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \text{ für alle } f, g \in L^1(G).$$

(ii) $\mathbb{A}(\Gamma)$ ist invariant und den Translationen von Γ und der Multiplikation mit Elementen.

$$x : \Gamma \to \mathbb{C}, \qquad \gamma \mapsto \langle x, y \rangle \qquad \text{für} \qquad x \in G.$$

Dabei ist für $f \in L^1(G)$ das Produkt der Funktion $-x$ mit $\hat{f}$ die Fouriertransformierte $\hat{g}$ der um x translatierten Funktion $g : G \mapsto \mathbb{C}, y \mapsto f(y - x)$.

(iii) Für $f \in L^1(G)$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt $f * \gamma(x) = \langle x, \gamma \rangle \hat{f}(\gamma)$.

Beweis (i): Für $f, g \in L^1(G)$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\gamma) &= \int_G \langle -x, \gamma \rangle \int_G f(y) g(x - y) d\mu(y) d\mu(x) \\
&= \int_G \int_G \langle y - x, \gamma \rangle g(x - y) d\mu(x) \langle -y, \gamma \rangle f(y) d\mu(y) \\
&= \int_G \langle -x, \gamma \rangle g(x) d\mu(x) \hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma) \hat{f}(\gamma).
\end{aligned}$$

(ii): Für $f \in L^1(G)$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt $\gamma \cdot f \in L^1(G)$ mit

$$\widehat{\gamma \cdot f}(\eta) = \int_G \langle -x, \eta \rangle \langle x, \gamma \rangle f(x) d\mu(x) = \int_G \langle -x, \eta - \gamma \rangle f(x) d\mu(x) = \hat{f}(\eta - \gamma).$$

Für $f \in L^1(G)$ und $x \in G$ definiert

$$g : G \mapsto \mathbb{C}, \qquad y \mapsto f(y - x)$$

eine Funktion in $L^1(G)$ und es gilt für alle $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \hat{g}(\gamma) &= \int \langle -y, \gamma \rangle f(y - x) d\mu(x) = \int_G \langle -x - z, \gamma \rangle f(z) d\mu(z) \\ &= \langle -x, \gamma \rangle \int_G \langle -z, \gamma \rangle f(z) d\mu(z) = \langle -x, \gamma \rangle \hat{f}(\gamma). \end{aligned}$$

(iii): Für $f \in L^1(G)$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$f * \gamma(x) = \int_G f(y) \langle x - y, \gamma \rangle d\mu(y) = \langle x, \gamma \rangle \int_G \langle -y, \gamma \rangle f(y) d\mu(y) = \langle x, \gamma \rangle \hat{f}(\gamma). \quad \textbf{q.e.d.}$$

Die Beispiele $G = \mathbb{T}$ und $G = \mathbb{Z}$ und $G = \mathbb{R}^n$ haben wir schon kennengelernt. Die Gruppe $G = \mathbb{Z}_2$ ist selbstdual mit $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, weil $\mathbb{Z}_2$ neben dem trivialen Charakter nur den Charakter $x \mapsto (-1)^x$ besitzt. Die kompakte Gruppe $\mathbb{T}^\infty$ ist die Menge aller Folgen in $\mathbb{T}$ mit den Umgebungen der $1 = (1, 1, ...)$

$$\{z_n \in \mathbb{T}^\infty \mid z_i \in U \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ durchläuft und U die Umgebungen von $1 \in \mathbb{T}$. Sei Γ_0 die Untergruppe von $\mathbb{Z}^\infty$ aller Folgen in $\mathbb{Z}$, die gegen Null konvergieren. Die Elemente von Γ_0 definieren unitäre Charaktere von $\mathbb{T}^\infty$

$$\mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}, \qquad (z_n) \mapsto \prod_{n \in \mathbb{N}} e^{2\pi i z_n \cdot n_n} \qquad \text{für} \qquad n_n \in \Gamma_0$$

Satz 3.5. *Sei G eine kompakte abelsche Gruppe, dann gilt für zwei unterschiedliche unitäre Charaktere:*

$$\int_G \gamma \bar{\eta} d\mu = 0.$$

Insbesondere ist Γ diskret, d.h. für alle $\gamma \in \Gamma$ ist $\{\gamma\}$ offen.

Beweis: Seien γ und η zwei unterschiedliche unitäre Charaktere. Dann gibt es ein $x_0 \in G$ mit

$$\gamma(x_0)\bar{\eta}(x_0) = \gamma(x_0)\eta^{-1}(x_0) \neq 1.$$

Dann folgt

$$\int_G \gamma(x)\bar{\eta}(x)d\mu(x) = \int_G \gamma(x+x_0)\bar{\eta}(x+x_0)d\mu(x) = \gamma(x_0)\bar{\eta}(x_0)\int_G \gamma(x)\bar{\eta}(x)d\mu(x) = 0.$$

Daraus folgt, dass die Fouriertransformierte der Funktion $1 \in C(G) \subset L^1(G)$ auf dem trivialen Charakter gleich 1 ist und auf allen anderen Charakteren gleich Null. Weil diese Fouriertransformierte stetig ist, folgt dass Γ diskret ist. **q.e.d.**

Jetzt können wir zeigen, dass die duale Gruppe von $\mathbb{T}^\infty$ gleich Γ_0 ist. Wegen dem Satz von Stone-Weierstraß liegen die von den durch Γ_0 parametrisierten Charakteren dicht in $C(\mathbb{T}^\infty)$. Dann liegen diese Charaktere aber auch dicht in der dualen Gruppe von $\mathbb{T}^\infty$. Weil die duale Gruppe diskret ist, sind das alle unitären Charaktere und Γ_0 ist die duale Gruppe von $\mathbb{T}^\infty$.

Um die inverse Fouriertransformation zu bestimmen, müssen wir zunächst sicherstellen, dass überhaupt nichttriviale unitäre Charaktere existieren. Insbesondere sollten wir möglichst allgemein zeigen, dass die unitären Charaktere Punkte trennen, wie das ja für die schon betrachteten Gruppen $\mathbb{T}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}^n$ der Fall ist. Daraus würde auf kompakten Gruppen wegen dem Satz von Stone-Weierstraß folgen, dass die trigonometrischen Polynome, also die Polynome in den Charakteren, in $C(G)$ dicht liegen. Um das zu zeigen benötigen wir allerdings einige funktionalanalytische Hilfsmittel. Wir werden zeigen, dass der Vektorraum, der von den unitären Charakteren aufgespannt wird, in dem Dualraum von $L^1(G)$ dicht liegt. Daraus folgt wegen dem Satz von Stone-Weierstraß, dass die unitären Charaktere Punkte trennen. Außerdem werden wir die inverse Fouriertransformation bestimmen können.

Satz 3.6. *Sei $\Phi : L^1(G) \to \mathbb{C}$ eine lineares stetiges Funktional das folgendes erfüllt:*

$$\Phi(f * g) = \Phi(f)\Phi(g) \qquad \text{für alle} \qquad f, g \in L^1(G).$$

Dann gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\Phi(f) = \hat{f}(\gamma)$.

Beweis: Weil Φ stetig und linear ist gibt es eine Funktion $\varphi \in L^\infty(G)$ mit $\Phi(f) = \int_G \varphi(x)f(x)d\mu(x)$. Dann gilt für alle $f, g \in L^1(G)$

$$\Phi(f * g) = \int_{G\times G} f(x)g(y)\varphi(x+y)d\mu(x)d\mu(y) = \int_G f(x)\varphi(x)d\mu(x)\int_G g(y)\varphi(y)d\mu(y).$$

Weil die Linearkombinationen von Funktionen der Form $f \cdot g$ in $L^1(G \times G)$ dicht liegen, folgt $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ für fast alle $x, y \in G$. Dann gilt auch

$$\Phi(fy) = \varphi(y)\Phi(f) \text{ mit } fy(x) = f(x-y).$$

Deshalb ist φ sogar stetig. Also ist φ ein Charakter. Wir werden später zeigen, dass ein solches Funktional $\|\Phi\| = 1$ erfüllt. Dann gilt auch $\|\varphi\|_\infty = 1$. Weil φ ein Charakter ist, kann dann $|\varphi(x)| = |\varphi^{-1}(-x)|$ nicht größer oder kleiner als Eins sein. Also ist φ sogar ein unitärer Charakter. **q.e.d.**

3.2 Kommutative Banachalgebren

Um für die inverse Fouriertransformation die Existenz von genügend vielen Charakteren zu zeigen, werden wir die kommutative Banachalgebra $L^1(G)$ mit dem Produkt der Involution untersuchen. Dazu führen wir kurz in die Theorie der kommutativen Banachalgebren ein. Auch wenn z.B. $L^1(\mathbb{T})$ keine Eins hat, betrachten wir im folgenden nur kommutative Banachalgebren mit einer Eins. Für jede kommutative Banachalgebra B ohne Eins ist $\tilde{B} = B \times \mathbb{C}$ mit dem Produkt $(a,u)\cdot(b,v) = (ab+ub+av, uv)$ und der Norm $\|(a,u)\|_{\tilde{B}} = \|a\|_B + |u|$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins $(0,1)$.

Im Folgenden sei B eine kommutative Banachalgebra über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit Eins, bezeichnet durch $\mathbb{1}$. Auf einem Banachraum V sei $\mathcal{L}(V)$ die Banachalgebra der linearen stetigen Abbildungen von V nach V mit der Eins $\mathbb{1}_V$.

Satz 3.7. *Sei B eine Banachalgebra über $\mathbb{C}$ und*

$$\pi : B \to \mathcal{L}(B), \qquad a \mapsto \pi(a) \qquad \textit{mit} \qquad \pi(a) : B \to B, \qquad b \mapsto ab = ba.$$

Dann ist π ein Banachalgebrahomomorphismus, der auch eine Isometrie ist. Dieser Homomorphismus π heisst reguläre Darstellung. Also ist jede kommutative Banachalgebra isomorph zu einer Unteralgebra einer Algebra von linearen stetigen Abbildungen eines Banachraumes auf sich selber.

Beweis: Für alle $a, b \in B$ gilt

$$\|\pi(a)b\| = \|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

Also gilt auch

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\|.$$

Andererseits gilt

$$0 < \|\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}^2\| \leq \|\mathbb{1}\|^2$$

Daraus folgt $\|\mathbb{1}\| = 1$ und wegen $\|\pi(a)\mathbb{1}\| = \|a\|$ auch

$$\|\pi(a)\| \geq \|a\|.$$

Dann ist $\|\pi(a)\| = \|a\|$ für alle $a \in B$ und π eine Isometrie. Für alle $a, b, c \in B$ gilt auch $\pi(ab)c = abc = \pi(a)\pi(b)c$. Dann folgt

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(ab) = \pi(ba) = \pi(b)\pi(a).$$

Also ist das Bild von π eine kommutative Banachalgebra, die wegen dem Satz des inversen Operators isomorph ist zu B. **q.e.d.**

Wir definieren für $a \in B$ das Spektrum als $\sigma(a) = \sigma(\pi(a))$ und für $A \in \mathcal{L}(V)$ als

$$\sigma(A) = \{\xi \in \mathbb{C} \mid A - \xi\mathbb{1}_V \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{L}(V)\},$$

Satz 3.8. *Sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann ist die Resolvente eine analytische Funktion von der Resolventenmenge $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ nach $\mathcal{L}(V)$. Das Spektrum ist eine kompakte Teilmenge von $\{\xi \in \mathbb{K} \mid |\xi| \leq \|A\|\}$, die für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nicht leer ist.*

Beweis: Für $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist der Operator $-\xi\mathbb{1}_V$ invertierbar mit

$$\|(-\xi\mathbb{1}_V)^{-1}\| = \| - \xi^{-1}\mathbb{1}_V\| = |\xi|^{-1}.$$

Wenn also $\|A\| < |\xi|$, dann gehört wegen der Neumannschen Reihe ξ zur Resolventenmenge. Also ist das Spektrum enthalten in

$$\{\xi \in \mathbb{K} \mid |\xi| \leq \|A\|\}$$

und abgeschlossen. Wegen Heine-Borel ist das Spektrum dann auch kompakt. Wegen der Neummanschen Reihe ist die Resolvente für $|\xi| > 2\|A\|$ sogar beschränkt durch

$$(A - \xi\mathbb{1}_V)^{-1}\| = \left\|\left(-\xi\mathbb{1}_V\left(\mathbb{1} - \frac{A}{\xi}\right)\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\xi|}\left\|\left(\mathbb{1} - \frac{A}{\xi}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\xi|}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{|\xi|}.$$

Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und das Spektrum leer ist, dann ist für alle $v \in V$ und alle $B \in V'$ die Funktion $\xi \mapsto B(A - \xi\mathbb{1}_V)^{-1}v$ eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$, die für $|\xi| > 2\|A\|$ beschränkt ist durch $\frac{2}{|\xi|}$. Weil jede stetige Funktion auf der kompakten Menge $\{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| \leq 2\|A\|\}$ beschränkt ist, ist diese Funktion also auf $\mathbb{C}$ beschränkt und konvergiert für $|\xi| \to \infty$ gegen Null. Wegen dem Satz von Liouville verschwindet diese Funktion. Aus dem Satz von Hahn–Banach folgt, dass auch die Resolvente

$$\xi \mapsto (A - \xi\mathbb{1}_V)^{-1}$$

gleich Null ist. Weil aber $0 \in \mathcal{L}(V)$ nicht invertierbar ist, ist dies nicht möglich. **q.e.d.**

Es gibt reelle Matrizen, die keine reellen Eigenwerte haben, deren reelles Spektrum also leer ist. Also ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bei dem letzten Teil der Aussage auch notwendig.

Lemma 3.9. *Das Spektrum eines Elementes $a \in B$ einer kommutativen Banachalgebra besteht aus allen $\xi \in \mathbb{C}$, so dass $a - \xi\mathbb{1}$ in B nicht invertierbar ist.*

Beweis: Sei $a - \xi\mathbb{1}$ in B invertierbar, dann ist offenbar $\pi((a - \xi\mathbb{1})^{-1})$ das Inverse von $\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B$. Ist umgekehrt $\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B$ invertierbar, dann ist $(\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B)^{-1})(\mathbb{1})$ das Inverse von $a - \xi\mathbb{1}$ in B, weil gilt

$$(a - \xi\mathbb{1})\left((\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B)^{-1}(\mathbb{1})\right) = (\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B)(\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B)^{-1}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}.$$

Dann folgt wegen der Kommutativität die Aussage. **q.e.d.**

Satz 3.10. *(Gelfand–Mazur) Ist die kommutative $\mathbb{C}$-Banachalgebra B ein Körper, d.h. jedes Element in $B \setminus \{0\}$ ist invertierbar, dann ist B isomorph zu der Banach-Unteralgebra $\mathbb{C}\mathbb{1}$.*

Beweis Sei $a \in B$. Dann ist wegen Satz 3.8 das Spektrum von a nicht leer. Sei also λ im Spektrum von a. Dann ist aber $a - \lambda\mathbb{1}$ nicht invertierbar, also gleich Null. Es folgt $a = \lambda\mathbb{1}$. Also ist B isomorph zu $\mathbb{C}\mathbb{1}$. **q.e.d.**

Definition 3.11. *Ein Ideal ist ein Untervektorraum $\mathfrak{a} \subset B$, so dass für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in B$ folgt $ab \in \mathfrak{a}$ und $ba \in \mathfrak{a}$. Wir fordern zusätzlich $\mathbb{1} \notin \mathfrak{a}$ um $\mathfrak{a} = B$ auszuschließen.*

Lemma 3.12. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal der Banachalgebra B. Dann ist der Abschluss von $\mathfrak{a}$ ebenfalls ein Ideal.*

Beweis Offenbar ist der Abschluss von $\mathfrak{a}$ ein Banachraum. Er besteht aus allen Grenzwerten von konvergenten Folgen in $\mathfrak{a}$. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathfrak{a}$. Dann konvergieren für jedes $b \in B$ die Folgen $(a_nb)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(ba_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) b$ bzw. $b \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Die invertierbaren Elemente von B sind eine offene Umgebung von $\mathbb{1}$ in B. Also folgt aus $\mathbb{1} \notin \mathfrak{a}$ auch $\mathbb{1} \notin \bar{\mathfrak{a}}$. **q.e.d.**

Definition 3.13. *Ein Ideal heisst maximal, wenn es in keinem Ideal echt enthalten ist.*

Korollar 3.14. *Jedes maximale Ideal ist abgeschlossen.* **q.e.d.**

Die Menge der Ideale einer kommutativen Algebra besitzt eine natürliche Ordnungsrelation. Offenbar ist die Vereinigung über eine total geordnete Menge von Idealen einer kommutativen Algebra wieder ein Ideal. Also ist wegen dem Zornschen Lemma jedes Ideal in einem maximalen Ideal enthalten.

Lemma 3.15. *Sei B eine kommutative Banachalgebra und $\mathfrak{a}$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist $B/\mathfrak{a}$ eine kommutative Banachalgebra.*

Beweis Weil $\mathfrak{a}$ abgeschlosssen ist, ist $B/\mathfrak{a}$ ein Banachraum. Seien $a, b \in$ und $c, d \in \mathfrak{a}$. Dann folgt $(a+c)(b+d) = ab+ad+cb+cd$. Aus $c, d \in \mathfrak{a}$ folgt, dass auch ad, cb, cd und $ad+cb+cd$ im Ideal liegen. Also definiert die Multiplikation von B eine Multiplikation auf $B/\mathfrak{a}$, die dann auch kommutativ, assoziativ und distributiv ist. Zuletzt müssen wir noch

$$\|[a]\cdot[b]\| \leq \|[a]\|\cdot\|[b]\| \qquad \text{für alle} \qquad a, b \in B$$

zeigen mit

$$\begin{aligned} \|[a]\| &= \inf\{\|a+c\| \mid c \in \mathfrak{a}\}. \\ \|[a]\cdot[b]\| &= \|[a\cdot b]\| = \inf\{\|ab+c\| \mid c \in \mathfrak{a}\} \leq \inf\{\|(a+c)(b+d)\| \mid c, d \in \mathfrak{a}\} \\ &\leq \inf\{\|a+c\| \mid c \in \mathfrak{a}\}\inf\{\|b+d\| \mid d \in \mathfrak{a}\} = \|[a]\|\cdot\|[b]\|. \end{aligned}$$

$\mathbb{1}$ ist in $B/\mathfrak{a}$ offenbar eine Eins. **q.e.d.**

Sei B eine kommutative Banachalgebra mit $\mathbb{1}$ und $a \in B$ ein Element, das nicht invertierbar ist, dann ist $\mathfrak{a}_a = \{ab \mid b \in B\}$ ein Ideal, das $\mathbb{1}$ nicht enthält, weil a nicht invertierbar ist. Das Urbild eines Ideals $\mathfrak{a}$ unter einem Algebrahomomorphismus π ist offenbar ein Vektorraum und sogar ein Ideal, weil aus $\pi(a) \in \mathfrak{a}$ folgt $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \in \mathfrak{a}$ und $\pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \notin \mathfrak{a}$. Also kann für ein maximales Ideal $\mathfrak{a}$ einer kommutativen Algebra mit Eins, die Algebra $B/\mathfrak{a}$ kein nichttriviales Ideal enthalten, weil sonst das Urbild unter $B \to B/\mathfrak{a}$ ein Ideal enthalten würde, das $\mathfrak{a}$ echt enthält. Dann folgt aber, dass $B/\mathfrak{a}$ ein Körper ist. Umgekehrt enthält ein Körper nur das triviale Ideal $\{0\}$.

Lemma 3.16. *Die maximalen Ideale einer kommutativen Banachalgebra B sind in Eins-zu-Eins Beziehung zu den Algebrahomomorphismen $\chi : B \to \mathbb{C}$ mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$.*

Beweis Sei χ ein Algebrahomomorphismus von B nach $\mathbb{C}$ mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$. Dann ist der Kern von χ ein Ideal, das maximal sein muss, weil $\mathbb{C}$ ein Körper ist. Umgekehrt ist für jedes maximale Ideal die Algebra $B/\mathfrak{a}$ ein Körper, also wegen dem Satz von Gelfand–Mazur isomorph zu $\mathbb{C}$. Also definiert $\mathfrak{a}$ einen Algebrahomomorphismus $\chi : B \to B/\mathfrak{a} \simeq \mathbb{C}$. **q.e.d.**

Für jeden Algebrahomomorphismus $\chi : B \to \mathbb{C}$ mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$ ist $a - \chi(a)\mathbb{1}$ nicht invertierbar, weil gilt $\chi(a - \chi(a)\mathbb{1}) = 0$. Also gehört $\chi(a)$ zum Spektrum von a und es folgt aus Satz 3.8 $|\chi(a)| \leq \|a\|$. Also gilt $\|\chi\| \leq 1$. Aus $\chi(\mathbb{1}) = 1$ folgt dann $\|\chi\| = 1$. Deshalb können wir die maximalen Ideale mit einer Teilmenge von der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B(0,1)} \subset B'$ identifizieren.

Definition 3.17. *Sei V ein normierter Raum. Dann heisst die gröbste Topologie von V', so dass alle linearen Abbildungen von V' nach $\mathbb{K}$, die im Bild von $i : V \to V''$*

liegen, stetig sind, schwache∗Topologie. Sie wird ezeugt von allen Mengen der Form

$$\{A \in V' \mid A(v) \in U\} \textit{ mit } v \in V \textit{ und } U \subset \mathbb{K} \textit{ offen }.$$

Die schwach∗ Umgebungen eines Elementes $A_0 \in V'$ bestehen aus den Teilmengen von V', für die es ein $\epsilon > 0$ gibt und $v_1, \dots, v_n \in V$ gibt, so dass die Umgebung die Menge

$$\{A \in V' \mid |A(v_i) - A_0(v_i)| < \epsilon \textit{ für } i = 1, \dots, n\}$$

enthält.

Wir benutzen diese schwache∗Topologie, um den Raum der maximalen Ideale mit einer Topologie zu versehen. Diese Topologie macht den abgeschlossenen Einheitsball von dem Dualraum eines normierten Vektorraumes kompakt.

Satz 3.18. *(Satz von Alaoglu) Sei V ein normierter Vektorraum und $\overline{B_{V'}(0,1)}$ die abgeschlossene Einheitskugel von V'. Dann ist $\overline{B_{V'}(0,1)}$ schwach∗kompakt.*

Wir werden diesen Satz nicht beweisen. Der Beweis benutzt vor allem den Satz von Tychonov, der besagt, dass ein beliebiges kartesisches Produkt von kompakten topologischen Räumen wieder kompakt ist. Unendliche kartesische Produkte einer Menge werden dabei aufgefasst als die Menge aller Abbildungen von der Indexmenge in die Menge. Indem $\overline{B_{V'}(0,1)}$ als Teilmenge von dem Raum aller Abbildungen von $S_V = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ nach $\overline{B_{\mathbb{K}}(0,1)} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq 1\}$ aufgefasst wird, muss dann nur noch gezeigt werden, dass B als Teilmenge dieses kartesischen Produktes abgeschlossen ist. Das folgt daraus, dass eine Abbildung $\Phi : S_V \to \overline{B_{\mathbb{K}}(0,1)}$ genau dann dem Element $A \in \overline{B_{V'}(0,1)}$ mit $A(v) = \|v\|\Phi(\frac{v}{\|v\|})$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ entspricht, wenn

(i) $$\Phi\left(\frac{v + \lambda w}{\|v + \lambda w\|}\right) = \frac{\Phi(v) + \lambda\Phi(w)}{\|v + \lambda w\|} \text{ für alle } v, w \in S_V \text{ und } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } v + \lambda w \neq 0$$

(ii) $\Phi(\lambda v) = \lambda\Phi(v)$ für alle $v \in S_V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$.

Die Teilmengen solcher Abbildungen sind aber abgeschlossen in der Menge aller Abbildungen bezüglich der Topologie des kartesischen Produktes.

Definition 3.19. *Sei B eine kommutative Banachalgebra. Dann sei* $\mathrm{Spec}(B)$ *die Teilmenge von B' aller Algebrahomomorphismen von B nach $\mathbb{C}$, die $\mathbb{1}$ auf 1 abbilden, zusammen mit der schwach∗Topologie, als topologischer Unterraum von B'.*

Satz 3.20. *Für jede kommutative Banachalgebra ist* $\mathrm{Spec}(B)$ *ein kompakter Hausdorff Raum, d.h. für zwei verschiedene Punkte von* $\mathrm{Spec}(B)$ *gibt es disjunkte offene Umgebungen der beiden Punkte. Insbesondere ist die Menge aller stetigen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf* $\mathrm{Spec}(B)$ *eine Banachunteralgebra von $B(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$, die wir wieder mit $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$ bezeichnen.*

Beweis Offenbar ist für alle $a, b \in B$ die Menge

$$\{\chi \in B' \mid \chi(ab) = \chi(a) \cdot \chi(b)\}$$

eine schwach$*$abgeschlossene Teilmenge von B'. Genauso ist die Menge

$$\{\chi \in B' \mid \chi(\mathbb{1}) = 1\}$$

schwach$*$abgeschlossen. Also ist $\mathrm{Spec}(B)$ eine schwach$*$abgeschlossene Teilmenge von der abgeschlossenen Einheitskugel in B'. Damit ist $\mathrm{Spec}(B)$ schwach$*$kompakt. Wenn χ und χ' zwei verschiedene Elemente von B' sind, dann gibt es ein $a \in B$ mit $\chi(a) \neq \chi'(a)$. Also gibt es zwei disjunkte offene Umgebungen U und U' von $\chi(a)$ und $\chi'(a)$ in $\mathbb{C}$. Dann sind die schwachen$*$Umgebungen

$$\{\chi'' \in B' \mid \chi''(a) \in U\} \qquad \text{und} \qquad \{\chi'' \in B' \mid \chi''(a) \in U'\}$$

von χ und χ' in B' disjunkt. Also ist B' bezüglich der schwachen$*$Topologie ein Hausdorffraum. Stetige Funktionen auf der kompakten Menge $\mathrm{Spec}(B)$ sind beschränkt. Also ist $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$ ein Banachunteralgebra von $B(\mathrm{spec}(B), \mathbb{C})$. **q.e.d.**

Satz 3.21. *Sei B eine kommutative Algebra. Dann gibt es einen kanonischen Algebrahomomorphismus*

$$\rho : B \to C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C}), \quad b \mapsto \rho(b) \quad \textit{mit} \quad \rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}, \quad \chi \mapsto \chi(b).$$

Dieser Algebrahomomorphismus ist stetig und $\|\rho\| = 1$. Für jedes $b \in B$ ist das Spektrum von b gleich dem Bild der Abbildung $\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}$ mit Spektralradius

$$r(b) = \sup\{|z| \mid z \in \textit{Spektrum von } b\} = \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{1/n} = \|\rho(b)\|_\infty.$$

Beweis: Sei $b \in B$. Dann enthalten die schwach$*$offenen Mengen $\{\chi \in B' \mid \chi(b) \in U\}$ für jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$, nur Elemente, die b auf die offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ abbilden. Also ist für jedes $b \in B$, die Abbildung

$$\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}, \qquad \chi \mapsto \chi(b)$$

stetig. Für jedes $\chi \in \mathrm{Spec}(B)$ folgt aus $\|\chi\| = 1$

$$|\chi(b)| \leq \|\chi\| \cdot \|b\| = \|b\|.$$

Also ist $\|\rho(b)\|_\infty$ beschränkt durch $\|b\|$. Damit gilt insbesondere $\|\rho\| \leq 1$. Offenbar ist $\rho(\mathbb{1})$ auf $\mathrm{Spec}(B)$ konstant gleich 1. Daraus folgt $\|\rho\| = 1$. Aufgrund der Definition des Spektralradiuses gilt

$$\|\rho(b)\|_\infty = \sup\{|\chi(b)| \mid \chi \in \mathrm{Spec}(B)\}.$$

Wenn ξ im Spektrum von b liegt, dann ist $(b - \xi\mathbb{1})$ nicht invertierbar. Also ist $\{(b - \xi\mathbb{1}) \cdot a \mid a \in B\}$ ein Ideal und wegen dem Zornschen Lemma in einem maximalen Ideal enthalten. Das entsprechende Element $\chi \in \mathrm{Spec}(B)$ erfüllt

$$\rho(b)(\chi) = \chi(b) = \chi(b) - \xi + \xi = \chi(b - \xi\mathbb{1}) + \xi = \xi.$$

Also ist ξ im Bild von $\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}$ enthalten. Umgekehrt ist für jedes Element ξ im Bild von $\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}$ die Funktion $\rho(b) - \xi$ nicht invertierbar. Weil ρ angewandt auf einem inversen Element von $b - \xi\mathbb{1}$ ein Inverses von $\rho(b) - \xi$ wäre, ist also auch $b - \xi\mathbb{1}$ nicht invertierbar, und damit ξ im Spektrum enthalten. Also stimmt das Spektrum von b mit dem Bild $\rho[\mathrm{Spec}(B)]$ überein und es gilt $r(b) = \|\rho(b)\|_\infty$.

Wir müssen noch zeigen

$$r(b) = \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{1/n} = \|\rho(b)\|_\infty.$$

Die Resolvente ist holomorph (d.h. sie besitzt in einer Umgebung jedes regulären Elementes eine konvergente komplexe Taylorreihe) auf dem Gebiet $\{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| > r(b)\}$ und hat dort die Reihenentwicklung

$$(b - \xi\mathbb{1})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{\xi^{n+1}}.$$

Für alle $\chi \in B'$ ist also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(b^n)}{\xi^{n+1}}$ konvergent für alle ξ mit $|\xi| > r(b)$. Dann ist auch $\sup|\frac{\chi(b^n)}{\xi^{n+1}}| < \infty$ für alle ξ mit $|\xi| > r(b)$. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, dass auch

$$\frac{\|b^n\|}{\xi^{n+1}} \leq M_\xi$$

gilt für alle ξ mit $|\xi| > r(b)$. Also gilt $\limsup \|b^n\|^{1/n} \leq |\xi|$ für alle ξ mit $|\xi| > r(b)$

$$\limsup \|b^n\|^{1/n} \leq r(b).$$

Wenn ξ zum Spektrum von b gehört, dann ist $\pi(b) - \xi\mathbb{1}_B$ wegen dem Satz des inversen Operators und Lemma 3.9 entweder nicht surjektiv oder nicht injektiv. Aus

$$\begin{aligned}\pi(b^n) - \xi^n\mathbb{1}_B &= (\pi(b) - \xi\mathbb{1}_B)\,\pi(b^{n-1} + \xi b^{n-2} + \ldots + \xi^{n-1}\mathbb{1}) \\ &= \pi(b^{n-1} + \xi b^{n-2} + \ldots + \xi^{n-1}\mathbb{1})\,(\pi(b) - \xi\mathbb{1}_B)\end{aligned}$$

folgt, dass $\pi(b^n) - \xi^n\mathbb{1}_B$ entweder nicht surjektiv oder nicht injektiv ist. Wegen Lemma 3.9 ist ξ^n im Spektrum von b^n enthalten. Aus Satz 3.8 folgt

$$|\xi|^n \leq \|\pi(b)^n\| = \|b^n\| \Leftrightarrow |\xi| \leq \|b^n\|^{1/n}.$$

Daraus folgt $\quad r(b) \leq \|b^n\|^{1/n} \quad$ und damit auch $\quad r(b) \leq \liminf \|b^n\|^{1/n}$. **q.e.d.**

Wir werden jetzt durch eine zusätzliche Struktur erreichen, dass der Algebrahomomorphismus ρ ein Isomorphismus von Banachalgebren wird.

Definition 3.22. *Sei B eine kommutative Banachalgebra. Ein antilinearer Algebrahomomorphismus $\star : B \to B$ heisst $\star$–Involution, falls folgendes gilt:*

(i) $(\lambda \mathbb{1})^* = \bar{\lambda}\mathbb{1}$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$

(ii) $b^{**} = b$ *für alle* $b \in B$

(iii) $\|b^*b\| = \|b\|^2, \|b\| = \|b^*\|, \|b^2\| = \|b\|^2$ *für alle* $b \in B$.

Eine kommutative Banachalgebra mit $\star$–Involution heisst kommutative C^*–Algebra.

Bemerkung 3.23. *Die Bedingungen $\|b\| = \|b^*\|$ und $\|b^2\| = \|b\|^2$ folgen aus den übrigen Bedingungen: Aus*

$$\|b\|^2 = \|b^*b\| \leq \|b^*\|\|b\|$$

folgt

$$\|b\| \leq \|b^*\|$$

Mit $b^{**} = b$ erhalten wir dann

$$\|b^*\| \leq \|b^{**}\| = \|b\|.$$

Also folgt

$$\|b\| = \|b^*\|.$$

Ausserdem gilt

$$\|b\|^4 = \|b^*b\|^2 = \|b^*b(b^*b)^*\| = \|b^2(b^*)^2\| = \|b^2\|^2.$$

Daraus folgt

$$\|b^2\| = \|b\|^2.$$

Beispiel 3.24. *Sei X ein kompakter topologischer Raum und $C(X, \mathbb{C})$ die kommutative Banachalgebra der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$. Dann ist*

$$* : C(X, \mathbb{C}) \to C(X, \mathbb{C}), f \to f^* = \bar{f}$$

eine $\star$–Involution. Dadurch wird $C(X, \mathbb{C})$ zu einer kommutativen C^*–Algebra.

Satz 3.25. *(Satz von Gelfand–Neumark) Sei B eine kommutative C^*–Algebra und ρ der kanonische Homomorphismus $\rho : B \to C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$. Dann gilt für alle $b \in B$*

$$\overline{\rho(b)} = \rho(b^*).$$

Und ρ ist ein C^*–Algebraisomorphismus von B nach $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$.

Beweis Wenn n eine Potenz von 2 ist, dann gilt

$$\|b\|^n = \|b^n\|.$$

Also ist

$$r(b) = \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{1/n} = \|b\|.$$

Dann ist wegen Satz 3.21 ρ eine Isometrie und deshalb injektiv. Sei $\chi \in \mathrm{Spec}(B)$ und $\chi(b) = \alpha + \beta\imath$ und $\chi(b^*) = \gamma + \delta\imath$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Wenn $\beta + \delta \neq 0$, dann sei

$$c = \frac{b + b^* - (\alpha + \gamma)\mathbb{1}}{\beta + \delta}.$$

Offenbar gilt $c^* = c$ und $\chi(c) = \imath$. Dann gilt für jede reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi(c + \imath\lambda\mathbb{1}) = \imath(1 + \lambda).$$

Daraus folgt $\quad |1 + \lambda| \leq \|c + \imath\lambda\mathbb{1}\| \quad$ und

$$(1 + \lambda)^2 \leq \|c + \imath\lambda\mathbb{1}\|^2 = \|(c + \imath\lambda\mathbb{1})(c + \imath\lambda\mathbb{1})^*\| \leq \|c^2 + \lambda^2\mathbb{1}\| \leq \|c^2\| + \lambda^2.$$

Damit haben wir $1 + 2\lambda \leq \|c^2\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, was nicht möglich ist. Also gilt $\beta + \delta = 0$ Wenden wir das gleiche Argument auf $\imath b$ mit $(\imath b)^* = -\imath b^*$ an so erhalten wir $\alpha - \gamma = 0$ und damit $\quad \rho(b^*) = \overline{\rho(b)}.$

Weil ρ eine Isometrie ist, ist das Bild von ρ in $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$ eine C^*-Unteralgebra von $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$. Für alle $\chi_1 \neq \chi_2$ in $\mathrm{Spec}(B)$ gibt es offenbar ein $b \in B$ mit $\chi_1(b) \neq \chi_2(b)$. Wenn die Realteile von $\chi_1(b)$ und $\chi_2(b)$ verschieden sind, dann stimmen χ_1 und χ_2 auch auf $b + b^*$ nicht überein, und wenn die beiden Imaginärteile von $\chi_1(b)$ und $\chi_2(b)$ nicht übereinstimmen, dann stimmen χ_1 und χ_2 auch auf $\imath b - \imath b^*$ nicht überein. Also erfüllt die $\mathbb{R}$-Unteralgebra $\{\rho(b) | b \in B \text{ mit } b^* = b\}$ die Voraussetzungen des Satzes von Stone Weierstraß. Wir bemerken, dass der Beweis des Satzes von Stone–Weierstraß sich auf alle kompakten topologischen Räume überträgt, indem die offenen Kugeln von X durch beliebige offene Mengen ersetzt werden. Die Bedingung, dass die stetigen Funktionen die Punkte des kompakten topologischen Raumes trennt, hat zur Folge, dass der topologische Raum ein Hausdorffraum ist. Also enthält das Bild alle reellen stetigen Funktionen auf $\mathrm{Spec}(B)$. Weil $\rho(b^*) = \bar{\rho}(b)$ gilt, und jede komplexe stetige Funktion die Summe einer reellen stetigen Funktion und $\imath$ mal einer reellen stetigen Funktion ist, folgt, dass ρ surjektiv ist. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 3.26. *Sei X ein kompakter topologischer Raum und $C(X,\mathbb{C})$ die Banachalgebra aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$.*

(i) *Zeige, dass für alle $x \in X$, das Ideal $\mathfrak{a}_x = \{f \in C(X,\mathbb{C}) | f(x) = 0\}$ maximal ist.*

(ii) *Zeige, dass für alle $x \in X$ gilt $C(X,\mathbb{C})/\mathfrak{a}_x \simeq \mathbb{C}$.*

(iii) *Zeige, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$, das nicht in $\mathfrak{a}_x$ enthalten ist mit $x \in X$, ein Element $g \in C(X,\mathbb{C})$ enthält, so dass $g(x) \neq 0$ gilt.*

(iv) *Zeige, dass jedes Ideal in einem der Ideale $(\mathfrak{a}_x)_{x\in X}$ enthalten ist.*

(v) *Zeige, dass alle maximalen Ideale von $C(X,\mathbb{C})$ von der Form $\mathfrak{a}_x$ mit $x \in X$ sind.*

3.3 Inverse Fouriertransformation

Wir wenden jetzt die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt auf die kommutative Banachalgebra $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Gamma) \simeq L^1(G)$ mit der Konvolution als Produkt an. Wir haben schon gesehen, dass die Banachalgebra $L^1(G)$ mit dem Produkt der Konvolution für nicht diskrete Gruppen G keine Eins enthält. In diesen Fällen hat also $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Gamma)$ keine Eins, und wir gehen zu der Banachalgebra mit Eins $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \times \mathbb{C}$ über, wie wir das am Anfang des letzten Abschnittes beschrieben haben. Wenn $\mathbb{A}$ schon eine Eins enthält, dann sei $\tilde{\mathbb{A}}$ gleich $\mathbb{A}$.

Wegen Satz 3.4 (i) definiert jedes Element $\gamma \in \Gamma$ einen (stetigen) Algebrahomomorphismus von $\mathbb{A}$ nach $\mathbb{C}$ und umgekehrt entspricht wegen Satz 3.6 jedem Algebrahomomorphismus von $\mathbb{A}$ nach $\mathbb{C}$ mit Norm 1 ein Element $\gamma \in \Gamma$. Offenbar ist die Einschränkung eines Algebrahomomorphismuses von $\tilde{\mathbb{A}}$ nach $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{A}$ auch ein Algebrahomomorphismus. Allerdings gibt es genau einen Algebrahomomorphismus von $\tilde{\mathbb{A}}$ nach $\mathbb{C}$, dessen Einschränkung auf $\mathbb{A}$ verschwindet. Wenn also $\mathbb{A}$ eine Eins enthält, dann kann Γ als Menge mit $\mathrm{Spec}(\tilde{\mathbb{A}})$ identifiziert werden. Andernfalls kann Γ mit der Teilmenge $\mathrm{Spec}(\tilde{\mathbb{A}}) \setminus \{0\}$ identifiziert werden, wobei $\{0\}$ der eindeutige Algebrahomomorphismus von $\tilde{\mathbb{A}}$ nach $\mathbb{C}$ ist, dessen Einschränkung auf $\mathbb{A}$ verschwindet. Sei also $\Delta \subset \tilde{\mathbb{A}}^*$ die Teilmenge aller Homomorphismen von $\tilde{\mathbb{A}}$ nach $\mathbb{C}$, deren Einschränkung auf $\mathbb{A}$ nicht verschwindet zusammen mit der schwach$*$Topologie. Wegen dem Satz von Alaoglu ist Δ bzw. $\Delta \cup \{0\} \subset \tilde{\mathbb{A}}^*$ schwach$*$ kompakt. Damit kann dann folgendes gezeigt werden:

Übungsaufgabe 3.27. *(i) Zeige, dass Δ in $\tilde{\mathbb{A}}^*$ ein lokal kompakter topologischer Hausdorffraum ist.*

(ii) Zeige, dass als topologischer Raum Γ homöomorph ist zu $\Delta \subset \tilde{\mathbb{A}}^*$, so dass Γ eine lokal kompakte Gruppe ist.

(iii) Zeige, dass $\mathbb{A}(G)$ dicht in $C_0(\Gamma)$ liegt.

Der Schlüssel zur inversen Fouriertransformation liegt in den positiv definiten Funktionen.

Definition 3.28. *Eine Funktion $\psi : G \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, wenn für alle $z \in \mathbb{C}^n$ und $x \in G^n$ folgendes gilt:*

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z}_k \psi(x_i - x_k) \geq 0.$$

Es gibt zwei kanonische Beispiele:

(i) Für $f \in L^2(G)$ sei $\psi = f * \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Dann gilt

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z}_k \psi(x_j - x_k) = \int_G \left| \sum_{j=1}^{n} z_j f(x - x_j) \right|^2 d\mu(x) \geq 0.$$

Hier liegt ψ in $C(G)$.

(ii) Für ein positives Maß $\mu \in \mathbb{M}_+(\Gamma)$ ist $\psi(x) = \int_\Gamma \gamma(x) d\mu(\gamma)$ positiv definit:

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z}_k \psi(x_j - x_k) = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma z_j \gamma(x_j) d\mu(y)(\gamma) \right|^2.$$

Hierbei liegt ψ wieder in $C(G)$.

Wir zeigen jetzt die Verallgemeinerung von dem Satz von Herglotz auf allgemeine lokalkompakte abelsche Gruppen.

Satz 3.29. *Sei $\psi \in C(G)$ positiv definit. Dann gilt für ein ein positives Maß $\nu \in \mathbb{M}_+(\Gamma)$*

$$\psi(x) = \int_\Gamma \gamma(x) d\nu(\gamma) \qquad \text{für alle} \qquad x \in G.$$

Das ensprechende Maß ist eindeutig.

Beweis: Aus der Defintion von positiv definiten Funktionen folgt für $n = 2$

$$\overline{\psi(x)} = \psi(-x) \text{ für alle } x \in G \qquad \text{und} \qquad |\psi(x)| \leq \psi(0).$$

Wir normieren ψ so, dass $\psi(0) = 1$ gilt. Dann gilt $\|\psi\|_\infty = 1$. Wir betrachten folgendes Funktional auf $L^1(G)$ ebenfalls mit Norm 1:

$$T_\psi(f) = \int_G f(x)\psi(x) d\mu(x).$$

Indem wir f und g durch Funktionen in $C_c(G)$ approximieren erhalten wir

$$T_\psi(f * \tilde{g}) = \int_{G\times G} f(x)\overline{g(y)}\psi(x-y)d\mu(x)\otimes d\mu(y) =: [f,g].$$

Weil ψ positiv definite ist folgt $[f,f] \geq 0$. Also erfüllt $[f,g]$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|[f,g]|^2 \leq [f,f]\cdot[g,g] \qquad \text{für alle} \qquad f,g \in L^1(G).$$

Wir behaupten, dass für alle $f \in L^1(G)$ folgendes gilt:

$$|T_\psi(f)|^2 \leq [f,f]. \tag{3.1}$$

Wähle ein $f \in L^1(G)$ und u_ε eine Familie von nichtnegativen Funktionen in $L^1(G)$ mit $\int u_\varepsilon d\mu = 1$ deren Träger für $\varepsilon \searrow 0$ in beliebig kleinen Umgebungen von $0 \in G$ enthalten ist, also eine Diracfolge auf G. Dann gilt

$$|T_\psi(f * \tilde{u}_\varepsilon)|^2 \leq [u_\varepsilon, u_\varepsilon][f,f] = T_\psi(u_\varepsilon * \tilde{u}_\varepsilon)[f,f].$$

Im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ folgt wegen $\psi(0) = 1$ die Behauptung. Sei $h = f * \tilde{f}$ und $h_n = h_{n-1} * h$ für $n \geq 2$. Indem wir (3.1) iterieren erhalten wir für alle $n \geq 1$:

$$|T_\psi(f)|^2 \leq T_\psi(h) \leq \big(T_\psi(h_{2^n})\big)^2 \leq \|h_{2^n}\|_1^{2^{-n}}.$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ erhalten wir aus Satz 3.21

$$|T_\psi(f)| \leq \|\hat{f}\|_\infty \quad \text{für alle } f \in L^1(G). \tag{3.2}$$

Das heißt insbesondere, dass G genügend viele Charaktere besitzt, um die Funktionen auf G zu bestimmen. Also definiert T_ψ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathbb{A}(\Gamma) \subset C_0(\Gamma)$. Dieses Funktional ist wohldefiniert, weil für $f \in L^1(G)$ aus $\hat{f} = 0$ auch $T_\psi(f) = 0$ folgt. Allerdings können wir bisher noch nicht aus $\hat{f} = 0$ auch $f = 0$ schließen. Setze T_ψ zu einem Funktional auf $C_0(\Gamma)$ mit der gleichen Norm fort. Dann folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz, dass ein komplexes Maß $\mu \in \mathbb{M}(\Gamma)$ existiert mit $\|\mu\| \leq 1$ und

$$T_\psi(f) = \int_\Gamma \hat{f}(-\gamma)d\mu(\gamma) = \int_G f(x)\int_\Gamma \gamma(x)d\mu(\gamma)d\mu(x) \text{ für alle } f \in L^1(G).$$

Also gilt die Darstellung im Satz für fast alle $x \in G$. Wegen der Stetigkeit gilt sie dann für fast alle $x \in G$. Insbesondere gilt für $x = 0$

$$1 = \psi(0) = \int_\Gamma d\mu(\gamma) = \mu(\Gamma) \leq \|\mu\| \leq 1.$$

Dann muss μ eine positives Maß sein. Für die Eindeutigkeit sei $f \in L^1(G)$. Dann gilt

$$\int_G \psi(x) f(-x) d\mu(x) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma) d\mu(\gamma).$$

Weil $\mathbb{A}(\Gamma)$ dicht in $C_0(\Gamma)$ liegt, folgt die Eindeutigkeit. **q.e.d.**

Um den Zusammenhang mit der inversen Fouriertransformation zu erklären, betrachten wir ein Element $f \in L^2(G)$. Dann folgt aus dem Satz

$$(f * \tilde{f})(x) = \int_\Gamma \gamma(x) d\mu(\gamma).$$

Wenn G kompakt ist, dann ist Γ diskret. Multiplizieren wir obige Formel mit $\eta(-x)$ und integrieren über G so folgt

$$|\hat{f}(\eta)|^2 = \mu(\{\eta\}) \text{ für alle } \eta \in \Gamma.$$

Damit haben wir eine inverse Fouriertransformierte berechnet:

$$(f * \tilde{f})(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(x) |\hat{f}(\gamma)|^2.$$

Im allgemeinen Fall führen wir den Raum $B(G)$ der Funktionen ein, die von folgender Form sind:

$$f(x) = \int_\Gamma \gamma(x) d\mu(\gamma) \text{ mit } \mu \in \mathbb{M}(\Gamma).$$

Indem wir μ in Realteil und Imaginärteil und daran jeweils im positiven Anteil und negativen Anteil zerlegen, sehen wir, dass $B(G)$ genau aus den endlichen Linearkombinationen von positiv definiten Funktionen besteht. Sei $B^1(G) = L^1(G) \cap B(G)$. Dann haben wir

Satz 3.30. *Für alle $f \in B^1(G)$ gilt $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$ mit*

$$f(x) = \int_\Gamma \gamma(x) \hat{f}(\gamma) d\mu(\gamma) :$$

Hierbei ist $d\mu$ das Haarsche Maß auf Γ, dessen Normierung durch die Normierung des Maßes auf G bestimmt ist.

Beweis: Für jedes $f \in B^1(G)$ sei μ_f das enstsprechende Maß im vorangehenden Satz. Wir zeigen jetzt

$$\hat{f} \mu_g = \hat{g} \mu_f \text{ für alle } f, g \in B^1(G). \tag{3.3}$$

Für alle $h \in L^1(G)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\big((f * g) * h\big)(0) &= \int_{G\times G} f(x)g(y)h(-x-y)d\mu(x) \otimes d\mu(y) \\ &= \int_{G\times G}\int_\Gamma \gamma(x-y)d\mu_f(\gamma)g(y)h(-x)d\mu \otimes d\mu(y) = \int_\Gamma \hat{h}(\gamma)\hat{g}(\gamma)d\mu_f(\gamma).\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie in f und g ist das gleich zu

$$\int_\Gamma \hat{h}(\gamma)\hat{f}(\gamma)d\mu_g(\gamma).$$

Weil $\mathbb{A}(\Gamma)$ dicht in $C_0(\Gamma)$ liegt folgt die Behauptung. Als nächstes definieren wir ein lineares Funktional auf $C_c(\Gamma)$. Für jedes $\gamma_0 \in \Gamma$ sei $f \in L^2(G)$ mit $\hat{f}(\gamma_0) \neq 0$. Dann ist $F = f * \tilde{f}$ positiv definit und $\hat{F}(\gamma) > 0$. Endliche Linearkombinationen von solchen Funktionen ergeben ein $g \in B^1(G)$, das positiv definit ist mit $\hat{g} > 0$ auf dem Träger K von $\psi \in C_c(\Gamma)$. Sei

$$T(\psi) = \int_\Gamma \frac{\psi(\gamma)}{\hat{g}(\gamma)} d\mu_g(\gamma). \tag{3.4}$$

Wegen (3.3) hängt das nicht von der Wahl von g ab. Also ist T wohldefiniert mit $T(\psi) \geq 0$ für $\psi \geq 0$, weil μ_g ein positives Maß ist. Außerdem verschwindet T nicht identisch. Für ein ψ und μ_f mit $\int_\Gamma \psi\mu_f \neq 0$ ist auch $T(\psi\hat{f}) = \int_\Gamma \psi\mu_f \neq 0$. Außerdem ist T translationsinvariant, was für $f(x) = \gamma(x_0)g(x)$ aus (3.4) folgt. Also gibt es ein Haarsches Maß v auf Γ mit

$$T(\psi) = \int_\Gamma \psi(\gamma)dv(\gamma).$$

Für $f \in B^1(G)$ und $\psi \in C_c(\Gamma)$ folgt dann

$$\int_\Gamma \psi\mu_f = T(\psi\hat{f}) = \int_\Gamma \psi\hat{f}dv(\gamma)$$

also $\mu_f = \hat{f}v$. Weil μ_f in $\mathbb{M}(\Gamma)$ liegt folgt $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$ und die Behauptung. **q.e.d.**

Eine einfache Schlussfolgerung ist, dass die trigonometrischen Polynome dicht in $C(G)$ liegen, wenn G kompakt ist. Insbesondere folgt für $\hat{f} \in L^1(G)$ auf $\hat{f} = 0$ auch $f = 0$. Aus diesen Aussagen folgen auch die Sätze von Plancherel und Parseval.

Satz 3.31. *Für jedes $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ gilt $\|f\|_{L^2(G)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\Gamma)}$. Die Fouriertransformierten solcher Funktionen liegen dicht in $L^2(\Gamma)$ und die Fouriertransformation setzt sich eindeutig zu einer unitären linearen Abbildung von $L^2(G)$ auf $L^2(\Gamma)$ fort. Insbesondere gilt $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$ für alle $f, g \in L^2(G)$.*

Beweis: Für $f \in L^2(G)$ sei $h = f * \tilde{f}$. Dann folgt $h \in B^1(G)$ und wegen dem vorangehenden Satz für $f \in L^2(G) \cap L^1(G)$

$$\int_G |f(x)|^2 d\mu(x) = \int_G f(x)\tilde{f}(-x) d\mu(x) = h(0) = \int_\Gamma \hat{h}(\gamma) d\mu(\gamma) = \int_\Gamma |\hat{f}(\gamma)|^2 d\mu(\gamma).$$

Um zu zeigen, das die Fouriertransformierte von $f \in L^2(G) \cap L^1(G)$ dicht in $L^2(\Gamma)$ liegen, sei χ im orthogonalen Komplement vom Bild der Fouriertransformation von $L^2(G) \cap L^1(G)$. Wegen $\hat{f}\chi \in L^1(\Gamma)$ und wegen der Translationsinvarianz von $L^2(G) \cap L^1(G)$ gilt für alle $x \in G$

$$\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\chi(\gamma)\gamma(-x) d\mu(\gamma) = 0 \quad \text{für alle } f \in L^1(G) \cap L^2(G).$$

Nach Multiplikation mit einem $g \in L^1(G)$ ergibt die Integration

$$\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\chi(\gamma)\hat{g}(\gamma) d\mu(\gamma) = 0.$$

Weil $\mathbb{A}(\Gamma)$ dicht in $C_0(\Gamma)$ liegt, folgt daraus $f\chi = 0$ auf Γ. Wegen der Translationsinvarianz unter Γ von dem Bild und wegen der Stetigkeit von $\hat{f}$ folgt auch $\chi = 0$. Also liegt das Bild dicht im $L^2(\Gamma)$ und der Satz folgt. **q.e.d.**

Der Dualitätssatz von Pontrjagin besagt, dass für jede lokalkompakte abelsche Gruppe die biduale Gruppe wieder gleich der ursprünglichen Gruppe ist.