

Aufgaben zum Wiederholungskurs zur Analysis II

Stand: 12. August 2014

1. Sei

$$v_1 := (-6, 2, 1, 7) \in \mathbb{R}^4$$

und $v_2 := -v_1$. Berechne den Abstand $d(v_1, v_2)$ im \mathbb{R}^4 bezüglich der 1-, 2- und ∞ -Norm. Finde einen Vektor $w \in \mathbb{R}^4$, so dass die Summe der Abstände

$$S := d(v_1, w) + d(v_2, w)$$

minimal wird.

2. Zeige durch explizite Rechnung, dass durch die 1-Norm

$$\|(x_1, x_2)\|_1 := |x_1| + |x_2|$$

und durch die euklidische Norm

$$\|(x_1, x_2)\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$$

Normen auf \mathbb{R}^2 gegeben sind (die Minkowski-Ungleichung darf vorausgesetzt werden), und weise explizit nach, dass diese Normen äquivalent zur Maximumnorm sind.

3. Sei $M_1 := \mathbb{R}^{[0,1]}$ die Menge aller reellwertigen Abbildungen auf dem Intervall $[0, 1]$ und $M_2 := C_{\mathbb{R}}^0([0, 1])$ die Menge der stetigen Abbildungen in M_1 . Ist

$$d_1(f, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

eine Metrik auf M_1 ? Ist $d_1|(M_2 \times M_2)$ eine Metrik auf M_2 ? Und ist

$$d_2(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

eine Metrik auf M_2 ?

4. Untersuche, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen oder keines von beidem sind.

(a) $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x^2 + y + z| < 2, |z| < 1\}$

(b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x^2\}$

(c) $M_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 \cdot e^y = \sin(z) - 1\}$

(d) $M_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0\}$.

5. Untersuche, in welchen Punkten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stetig ist.

6. Beweise oder widerlege, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ stetig ist. [2. Klausur 2011, Aufgabe 1.]

7. Untersuche, in welchen Punkten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stetig ist. [1. Klausur 2014, Aufgabe 1(a).]

8. Untersuche, in welchen Punkten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stetig ist.

9. In welchen Punkten ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

stetig?

10. Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x^2} \cdot y}{e^{-2/x^2} + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

in $(0, 0)$ stetig?

11. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $X := (C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ versehen mit der Maximumsnorm. Sei $k \in C^0([a, b] \times [a, b])$. Definiere

$$A : X \rightarrow X \quad (Au)(x) := \int_a^b k(x, y)u(y) dy \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Zeige, dass A eine stetige lineare Abbildung ist.

12. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Berechne die Richtungsableitung von f an der Stelle $(0, 0)$ in Richtung des Vektors $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq (0, 0)$.
 (b) Beweise oder widerlege: f ist an der Stelle $(0, 0)$ differenzierbar.

[1. Klausur 2011, Aufgabe 1.]

13. Untersuche, in welchen Punkten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

partiell differenzierbar ist. Wo ist sie differenzierbar?

14. Untersuche, in welchen Punkten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

partiell differenzierbar ist. Wo ist sie differenzierbar?

15. Untersuche, in welchen Punkten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

partiell differenzierbar ist. Wo ist sie differenzierbar? [1. Klausur 2014, Aufgabe 1(b),(c).]

16. Sei

$$GL(\mathbb{R}^n) := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid A \text{ invertierbar}\}$$

und definiere

$$f : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad f(A) := A^{-1}.$$

Ist f differenzierbar? Falls ja, bestimme Definitions- und Wertebereich der Ableitung und berechne f' .

17. Betrachte die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^4 - 2\frac{x^2}{y^2} + 3x \cos(y^2)$$

mit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = 0\}$. Bestimme die zweiten partiellen Ableitungen von f .

18. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2xy + y^2.$$

Bestimme die kritischen Punkte von f , und untersuche jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, oder keins von beidem handelt. [1. Klausur 2011, Aufgabe 2(a).]

19. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2x^2(y - 1) - y^2.$$

und untersuche jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum, oder keins von beidem handelt. [2. Klausur 2011, Aufgabe 2(a).]

20. (a) Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot (x^2 + 6y - 9) + 3y^2.$$

und untersuche jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum, oder keins von beidem handelt.

(b) Entscheide mit Begründung: Sind die gefundenen lokalen Maxima und Minima auch global? [1. Klausur 2014, Aufgabe 2.]

21. Finde alle lokalen Extrema der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = -2x^3 + y^3 + 6x - 3y.$$

22. Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 3x(1 - y^2) - x^3.$$

23. Berechne das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 \sin(x) \cos(y)$$

um den Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

24. Berechne das Taylorpolynom bis zur Ordnung 2 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \cos\left(\frac{xy}{\pi} + x + y\right)$$

im Punkt $(\pi, -\pi)$.

25. Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot e^z.$$

Bestimme die Tangentialebene $T_1(x)$ an den Graphen von f in $(0, 0, 0)$, und bestimme $r > 0$ so, dass

$$|f(x, y, z) - T_1(x, y, z)| \leq \frac{9}{100} \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \|(x, y, z)\|_\infty < r$$

gilt.

26. Zeige, dass die Gleichung

$$\cos(x^2) + \cos(y^2) + (2x + 1)(y - 2) = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ nach $y = \varphi(x)$ aufgelöst werden kann. Bestimme die Ableitung $\varphi'(0)$.

27. Bestimme alle Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, in denen nach dem Satz über implizite Funktionen *nicht* geschlossen werden kann, dass sich die Gleichung

$$xy^2 + 4x^2z + z^2y^2 = 0$$

lokal nach z auflösen lässt zur expliziten Form $z = \varphi(x, y)$.

Was ist der Gradient $\nabla\varphi(x, y)$ in einem Punkt, der nicht zu dieser Ausnahme gehört?

28. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot \exp(y) - y \cdot \exp(x) + x.$$

(a) Zeige, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Nähe des Punkts $(0, 0)$ lokal in der Form $y = g(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion g auflösbar ist.

(b) Berechne $g'(0)$.

[1. Klausur 2011, Aufgabe 3.]

29. Gegeben sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -2x^3 + 12xy - 4y^2 + 54$$

sowie die Niveaumengen

$$M_c := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c \} \quad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestimme die Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, für welche der Satz über die implizite Funktion besagt, dass es eine stetig differenzierbare Funktion g auf einem Intervall $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $g(x_0) = y_0$ gibt, so dass für alle $x \in I$ die Gleichung $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$ gilt.
- (b) Bestimme die Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, für welche der Satz über die implizite Funktion besagt, dass es eine stetig differenzierbare Funktion h auf einem Intervall $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ mit $h(y_0) = x_0$ gibt, so dass für alle $y \in J$ die Gleichung $f(h(y), y) = f(x_0, y_0)$ gilt.
- (c) Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$ so, dass M_c eine Singularität besitzt.

[1. Klausur 2014, Aufgabe 3.]

30. Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2.$$

Bestimme diejenigen $c \in \mathbb{R}$, für die die Niveaumenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = c\}$ eine glatte Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist, und bestimme die Lage aller Singularitäten der anderen Niveaumengen von g . [2. Klausur 2011, Aufgabe 3. Die Kurve, die einer Niveaumenge von g entspricht, heißt übrigens *Lemniskate von Bernoulli*.]

31. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x - y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

32. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$$

auf der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 3$.

33. Begründe, dass die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 \cdot y$$

auf der Kreislinie $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ Maximum und Minimum annimmt, und *bestimme* den maximalen sowie den minimalen Wert von $h|_S$. [1. Klausur 2011, Aufgabe 2(b).]

34. Untersuche, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^4$$

auf der Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 8y^2 \leq 8\}$$

ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt, und *bestimme* gegebenenfalls ihre Funktionswerte. [2. Klausur 2011, Aufgabe 2(b).]

35. Sei $Q = [1, 2] \times [0, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$. Berechne

$$\int_Q \frac{e^z}{x+y} d\mu(x, y, z).$$

36. Sei das Quadrat $Q \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $Q := [-\pi, 0] \times [0, \pi]$. Es wird durch die Diagonale $y = -x$ in zwei Dreiecke A und B zerteilt. Berechne

$$\int_A x \sin(y) d\mu(x, y) \quad \text{und} \quad \int_B x \sin(y) d\mu(x, y).$$

37. Sei

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Zeige, dass f Lebesgue-integrierbar ist. Verwende dazu $\frac{d}{dx} \arcsin(2x-1) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

38. Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := f \cdot \chi_{[0, n]}$; hierbei bezeichnet $\chi_{[0, n]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, n]$.

(a) Begründe kurz, dass f_n Lebesgue-integrierbar ist, und berechne $\int f_n d\mu$.

(b) Zeige mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi, dass f Lebesgue-integrierbar ist, und berechne $\int f d\mu$.

[1. Klausur 2011, Aufgabe 4.]

39. Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Zeige:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{[0, r]} f d\mu = 0.$$

[Tipp. Es genügt zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $r_n > 0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, r_n]} f d\mu = 0$. Hierfür wende man Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz an.]

[2. Klausur 2011, Aufgabe 6.]

40. Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{\ell=0}^n x^\ell \cdot \chi_{[0, 1]}.$$

Hierbei bezeichnet $\chi_{[0, 1]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, 1]$.

(a) Zeige, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion f auf \mathbb{R} konvergiert, und bestimme f .

(b) Begründe, dass $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Entscheide, ob $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R})$ (also bezüglich $\|\cdot\|_1$) konvergiert, und begründe dies.

[1. Klausur 2014, Aufgabe 5.]

41. Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf $\overline{B_1(0)}$ integrierbar? Falls ja, berechne das Integral.

42. Sei $\delta > 0$ und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \delta^2\}$. Berechne

$$\int_B e^{-x^2-y^2} d\mu(x, y).$$

Hinweis: Benutze Polarkoordinaten!

43. Wir betrachten in \mathbb{R}^2 die Integrationsgebiete

$$O := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } 4 < x^2 + 4y^2 < 16\}, \\ U := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < r < 2 \text{ und } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$$

sowie die Transformationsabbildung

$$\Phi : U \rightarrow O, (r, \varphi) \mapsto (x, y) \text{ mit } x = 2r \cos(\varphi) \text{ und } y = r \sin(\varphi).$$

Berechne durch Anwendung der Jacobischen Transformationsformel für die Transformation Φ das Lebesgue-Integral

$$\int_O \frac{y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} d\mu.$$

Hinweis. Bei der Lösung soll *ohne Beweis* verwendet werden, dass die Abbildung Φ den Quader U bijektiv auf O abbildet. [1. Klausur 2011, Aufgabe 5.]

44. Wir betrachten die Parametertransformation

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (t, s) \mapsto (x, y) \text{ mit } x = \frac{1}{3}(t + s) \text{ und } y = \frac{1}{3}(2t - s)$$

sowie das Integrationsgebiet

$$O := \{\Phi(t, s) \mid 0 < t < 1 \text{ und } 0 < s < 1\}.$$

Berechne durch Anwendung der Jacobischen Transformationsformel für die Transformation Φ das Integral

$$\int_O (x+y)^{2011} \cdot \exp(2x-y) \, d\mu.$$

Dabei soll auch überprüft werden, dass alle Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel erfüllt sind. [2. Klausur 2011, Aufgabe 5.]

45. Wir betrachten die Parametertransformation

$$\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, (x, y) \mapsto (u, v) \quad \text{mit} \quad u = \sqrt{x}y \quad \text{und} \quad v = \frac{\sqrt{x}}{y}.$$

(a) Zeige, dass die Gleichungen $u = \sqrt{x}y$ und $v = \frac{\sqrt{x}}{y}$ für $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ genau eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ besitzen.

(b) Wir bezeichnen mit Φ die Umkehrabbildung von Ψ , welche jedem $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ die eindeutige Lösung $(x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ aus Aufgabenteil (a) zuordnet. Betrachte nun das Integrationsgebiet $O := \Phi[U]$ mit

$$U := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 1 < u < 2 \text{ und } \frac{\pi}{2} < v < \pi \right\}.$$

Berechne das Integral

$$\int_O 3xy \sin\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right) \, d\mu.$$

Dabei soll auch überprüft werden, dass alle Voraussetzungen der Sätze, die angewandt werden, erfüllt sind.

[1. Klausur 2014, Aufgabe 4.]

46. Sei $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \infty\}$ und definiere

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Zeige, dass f in X einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt. Wie kann man diesen (theoretisch) bestimmen?

47. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $k \in C^0([a, b] \times [a, b])$ und $u \in C^0([a, b])$ stetige Funktionen. Zeige, dass die Integralgleichung

$$x(t) = \mu \int_a^b k(t, s)x(s) \, ds + u(t)$$

für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ mit $|\mu| < \frac{1}{\max_{(t,s)} |k(t,s)| \cdot (b-a)}$ eine eindeutige Lösung $x \in C^0([a, b])$ besitzt.

48. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) := \frac{(x-1) \cdot \exp(x)}{2 \exp(1)}$$

auf dem Intervall $X := [-1, 1]$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, und deshalb genau einen Fixpunkt auf X besitzt. [2. Klausur 2011, Aufgabe 4.]