Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

10. April 2014

10. Übung

26. Zur Abschätzung der partiellen Ableitungen harmonischer Funktionen in Kor. 4.17.

In dieser Aufgabe wollen wir den Beweis von Korollar 4.17 vervollständigen, indem wir die dortige in der Vorlesung noch nicht bewiesene Abschätzung zeigen.

(a) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$, jede Wahl der Indices $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{1}{|x|^n} = \frac{p_k(x)}{|x|^{n+2k}}$$

mit $p_1(x) = -n x_{i_1}$, $\quad p_{k+1}(x) = -(n+2k) x_{i_{k+1}} p_k(x) + |x|^2 \frac{\partial p_k(x)}{\partial x_{i_{k+1}}}$ gilt. Insbesondere ist p_k ein homogenes Polynom vom Grad k. Hier bezeichnet $|x|$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$. [Tipp: Vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}$] *(5 Punkte)*

(b) Für homogene Polynome p_k vom Grad k ist die Schreibweise mit Multiindices nützlich. Für einen *Multiindex* $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ gelten die Definitionen $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ein homogenes Polynom p_k vom Grad k lässt sich dann schreiben als $p_k(x) = \sum\limits_{|\alpha|=k} b_{\alpha,k} \cdot x^\alpha$ mit Koeffizienten $b_{\alpha,k} \in \mathbb{R}$. Summiert wird also über alle Multiindices α mit $|\alpha| = k$.
Zeigen Sie: Für die Polynome p_k aus Teil (a) gilt

$$|p_k(x)| \le C(n,k)|x|^k \quad \text{mit} \quad C(n,k) := \prod_{j=1}^{k} (jn + 2j - 2) = n \cdot (2n+2) \cdots (kn + 2k - 2).$$

[Tipp: Auch hier verfahre man induktiv. Leiten Sie zunächst eine Abschätzung für die Koeffizienten der homogenen Polynome her, indem Sie den Spezialfall $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ betrachten. Hierbei erweist es sich als nützlich, mit Multiindices zu operieren. Hieraus lässt sich dann induktiv die gewünschte Abschätzung herleiten.] *(7 Punkte)*

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) und (b) die im Beweis von Korollar 4.17 auftretende Abschätzung

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{1}{|x|^n} \right| \le \frac{C(n,k)}{|x|^{n+k}}.$$

(2 Punkte)

27. Ein Minimierungsproblem.

Bestimmen Sie auf dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$ mit $u(a) = \alpha$ und $u(b) = \beta$ (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) so, dass diese das Funktional $v \mapsto I(v)$, definiert durch

$$I(v) := \int_a^b (v'(x))^2 \, \mathrm{d}\, x$$

minimiert und berechnen Sie den minimalen Wert des Funktionals. Ist das Minimum eindeutig?

(7 Punkte)

Bitte wenden.

28. Ein Spiegelungsprinzip für harmonische Funktionen.

Wir bezeichnen mit $H^+ := \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0 \}$ den oberen Halbraum in $\mathbb{R}^n$ und mit $H^0 := \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0 \}$ die Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ mit $x_n = 0$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\overline{x} := (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ die Spiegelung von x an $H^0 = \partial H^+$. Ferner sei $B^+ := B(0,1) \cap H^+$ und $B^0 := B(0,1) \cap H^0$.

(a) Sei $u : \overline{B^+} \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit $u|_{\overline{B^0}} = 0$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $v : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}$, die für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{B(0,1)}$ durch

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x_n \geq 0 \\ -u(\overline{x}) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$$

gegeben ist, harmonisch ist. *(6 Punkte)*

[Tipp. Man nutze die *eindeutige* Lösbarkeit des Dirichlet-Problems aus.]

(b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion des oberen Halbraums H^+. *(5 Punkte)*

[Tipp. Man benutze die Spiegelung an $\partial H^+ = H^0$, um in ähnlicher Weise wie bei der Greenschen Funktion für $B(0,1)$ die Singularität aus H^+ "hinauszuspiegeln".]

Abgabe bis Freitag, den 2. Mai 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219

Frohe Ostern!