Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

20. März 2014

7. Übung

18. Eine nicht-lineare Differentialgleichung.
Finden Sie die allgemeine Lösung $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichung:

$$y'(x) - y(x) = x \cdot (y(x))^5$$

(7 Punkte)

19. Stammfunktionen. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass auf nicht-konvexen Gebieten $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ zu einer Abbildung $(g, h) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $(x, y) \mapsto (g(x, y), h(x, y))$ mit zwei stetig-differenzierbaren Funktionen g und h, die $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$ auf Ω erfüllen, nicht immer eine Stammfunktion $F : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert. Dafür betrachten wir $(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mit $x(r, \varphi) := r\cos(\varphi)$ und $y(r, \varphi) := r\sin(\varphi)$.

(a) Man berechne stetig differenzierbare Funktionen g und h auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, deren Einschränkung auf jede konvexe offene Teilmenge M von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion F von (g, h) auf M besitzt, die folgender Differentialgleichung genüge:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x(r,\varphi), y(r,\varphi))}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial F(x(r,\varphi), y(r,\varphi))}{\partial \varphi} &= 1. \end{aligned} \qquad (\star)$$

[Tipp: Indem man die erste Gleichung in $(\star)$ mit r multipliziert, kann man die Polarkoordinaten (r, φ) durch karthesische Koordinaten (x, y) ersetzen. Dadurch erhält man zwei lineare Gleichungen für $g(x, y)$ und $h(x, y)$, deren Koeffizienten nur von x und y abhängen.]

(6 Punkte)

(b) Man weise nach, dass g und h aus Aufgabenteil (a) zwar die Bedingung $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$ erfüllen, jedoch für *kein* $r > 0$ auf $B(0, r) \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion von (g, h) existiert. Hierbei bezeichnet $B(0, r)$ die Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt 0.

(6 Punkte)

Falls Sie g und h aus Teil (a) nicht bestimmen konnten, dürfen Sie für Teil (b) mit den Funktionen $g(x, y) := \frac{-y}{x^2+y^2}$, $\quad h(x, y) := \frac{x}{x^2+y^2}$ weiterrechnen.

Bitte wenden.

20. Der Satz von Gauß

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes das Integral

$$\int_{S^2} (\frac{1}{2}x^3 + y + z) d\sigma.$$

Hierbei ist $S^2 := \partial B(0,1)$, wobei $B(0,1)$ die Vollkugel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 bezeichnet. D.h. S^2 bezeichnet die Kugeloberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.

(5 Punkte)

[Tipp: Es mag hilfreich sein, Kugelkoordinaten $x := r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$, $y := r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$, $z := r \cdot \cos\theta$ mit $r > 0$ und $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, zu verwenden.]

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right)$$

mit $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Es sei $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.
Zeigen Sie (ohne Hilfe des Gauß'schen Satzes) die Gültigkeit der Gleichung

$$\int_\Omega \nabla \cdot f \, d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma,$$

indem Sie die beiden Integrale explizit berechnen. N bezeichnet hier die äußere Normale.

(8 Punkte)

Abgabe bis Freitag, den 28. März 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219

Hinweise: Dies ist das letzte zur Prüfungszulassung relevante Übungsblatt für diejenigen Studenten (z.B. Lehramtsstudenten), die sich die Veranstaltung "Differentialgleichungen" nur zur Hälfte anrechnen lassen wollen. Der Stoff der mündlichen Prüfungen umfasst die Kapitel 1 bis einschließlich 3 der Vorlesung (also bis einschließlich zur "Methode der Charakteristik"). Die Termine der mündlichen Prüfung sind Mi, 30.4.2014 und Fr, 9.5.2014. Ab kommendem Montag können sich die betreffenden Studenten bei Frau Braak (Raum B129) zwecks genauer Termine in eine entsprechende Liste eintragen.