Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

14. Februar 2014

2. Übung

4. Exponentielles und logistisches Wachstum.

(a) Eine Bakterienkolonie wächst proportional zur Anzahl ihrer Einwohnerinnen und verdoppelt ihre Größe alle 2 Stunden. Zu Beginn der Betrachtungen gebe es genau 1 Bakterium.

(i) Wie viele Bakterien gibt es nach diesem Modell nach 4 Stunden, nach 24 Stunden, nach zwei Wochen? *(2 Punkte)*

(ii) Nach welchem Zeitraum hat sich die Bakterienzahl verdreifacht? *(2 Punkte)*

(b) Das einfache Modell des Populationswachstums aus (a) (*exponentielles Wachstum*) ist für längere Zeiträume nicht realistisch, da es nicht berücksichtigt, dass die Ressourcen des Lebensraums der Population beschränkt sind.

Um diesen Aspekt in unser Modell mit einzubeziehen, gehen wir davon aus, dass die Population eine gewisse Maximalgröße K — die *Trägerkapazität* des Lebensraums — nicht überschreiten kann. Ihr Wachstum wird also wohl proportional sowohl zur gerade vorhandenen Populationsgröße $P(t)$ als auch zum noch verbleibenden "'Spielraum"' $K - P(t)$ sein, d.h. P wird einer Differentialgleichung der Form

$$\dot{P} = \lambda\, P\, (K - P) \qquad (\star)$$

mit Konstanten $\lambda, K > 0$ genügen. Gehorcht ein Wachstumsprozeß dieser Differentialgleichung, so spricht man von *logistischem Wachstum.*

(i) Sei $0 < P_0 < K$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$P(t) := \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right)\, e^{-\lambda K t}} \qquad (\dagger)$$

die Differentialgleichung $(\star)$ löst und zur Zeit $t_0 = 0$ den Wert P_0 besitzt. (Später werden wir sehen, dass keine andere Funktion dasselbe leistet. Wir können deshalb in unseren folgenden Betrachtungen für $P(t)$ die Gleichung $(\dagger)$ zugrunde legen.)
(4 Punkte)

(ii) Zeigen Sie, dass $0 < P(t) < K$ gilt, dass P streng monoton wachsend ist, und dass $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$ gilt. Demnach nähert sich die Populationsgröße immer mehr der Trägerkapazität an, ohne sie je zu erreichen. *(4 Punkte)*

(iii) Zeigen Sie: Ist $P(t) < \frac{K}{2}$ (bzw. $P(t) > \frac{K}{2}$), so ist $\dot{P}$ bei t streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Dies zeigt: Ist $P_0 < \frac{K}{2}$ (*sehr kleine Anfangspopulation*), so nimmt die Zuwachsrate $\dot{P}$ zunächst ständig zu, bis die Population die Größe $\frac{K}{2}$, die Hälfte ihres möglichen Maximalbestandes K, erreicht hat. Beim Überschreiten dieser Populationsgröße erleidet die Population einen "'Vitalitätsknick"': zwar wächst sie noch, tut es aber zunehmend lustloser: ihre Wachstums*geschwindigkeit* wird ständig kleiner.

[Tipp. Aus $(\star)$ leite man eine Differentialgleichung für $\ddot{P}$ her und untersuche diese.]
(4 Punkte)

Bitte wenden.

5. Banachscher Fixpunktsatz.

(a) Geben Sie eine Abbildung $F : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall) an, deren Fixpunkt Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = u(t) + t, \quad u(0) = 0 \tag{$\star$}$$

ist und bestimmen Sie das Intervall $I \subset \mathbb{R}$ so, dass die Abbildung $F : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt hat. [Tipp: Beweis von Satz 1.14] *(4 Punkte)*

(b) Geben Sie explizit eine Folge an, die auf dem Intervall I gegen den Fixpunkt von F konvergiert. [Tipp: Satz 1.11. Man wähle einen geeigneten Startwert.] *(4 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge aus Aufgabenteil (b) und untersuchen Sie, für welche Teilmenge von $\mathbb{R}$ die Folge konvergiert. Löst der Grenzwert dieser Folge tatsächlich das Anfangswertproblem ($\star$)? *(5 Punkte)*

6. Lineare Differentialgleichungen.

Gemäß dem Newtonschen Kühlungsgesetz kühlt eine Substanz in bewegter Luft mit einer Rate ab, welche proportional zum Temperaturunterschied zwischen Substanz und Luft ist. Ist C die (als konstant angenommene) Lufttemperatur, $T_0 > C$ die Temperatur der Substanz zum Zeitpunkt $t = 0$ und $T(t)$ die Temperatur der Substanz zum Zeitpunkt t, so gehorcht die Funktion $T(t)$ deshalb der Differentialgleichung

$$\dot{T} = -\kappa \cdot (T - C), \quad T(0) = T_0,$$

mit einer Proportionalitätskonstanten $\kappa > 0$.

(a) Finden Sie die Lösung dieser Differentialgleichung. *(4 Punkte)*

(b) Eine Substanz kühlt in 15 Minuten von 100 ^{o}C auf 70 ^{o}C ab, wobei die Lufttemperatur 30^{o}C beträgt. Nach welcher Zeit ist die Temperatur der Substanz auf 40 ^{o}C abgesunken? *(4 Punkte)*

Abgabe bis Freitag, den 21. Februar 2014, 11:00 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219 (Eingang C-Teil, A5-Gebäude).