Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

27. Februar 2014

4. Übung

9. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Lösen Sie die folgenden linearen Anfangswertprobleme:

(a) $\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ mit $u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. *(7 Punkte)*

(b) $\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ mit $u(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(3 Punkte)*

(c) $\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(t)$ mit $u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(6 Punkte)*

[Tipp: Aufgabe 8b]

10. Lineare Systeme und Fundamentallösung

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, sowie die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) \tag{1}$$

gegeben. Weiter sei $F : I \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ die zugehörige Fundamentallösung, d.h. die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t) \cdot F(t), \quad F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Zeigen Sie:

$$F(t) = (y_1(t), y_2(t)), \quad t \in I,$$

wobei y_1 bzw. y_2 (mit $y_1, y_2 : I \to \mathbb{C}^2$) die als Spaltenvektoren geschriebenen (eindeutigen) Lösungen von (1) mit Anfangswerten $y_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $y_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind. *(2 Punkte)*

Bitte wenden.

11. Fundamentallösung von nicht-autonomen Systemen

Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch $A(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, sowie die (nicht-autonome) lineare Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) \tag{2}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Fundamentallösung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ von (2) zum Anfangszeitpunkt $t_0 := 0$, d.h. die Lösung von

$$\dot{F}(t) = A(t) \cdot F(t), \quad F(0) = \mathbb{1}.$$

[Tipp: Zur Bestimmung von $F(t)$ betrachte man das zweidimensionale DGL-System (2) als System von zwei eindimensionalen Differentialgleichungen und löse diese separat nach den bekannten Methoden. Man beachte weiter Aufgabe 10.] *(9 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie $\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$ und folgern Sie mit Teil a) $F(t) \neq \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$.
[Tipp: Aufgabe 8b]

(8 Punkte)

Bemerkung: Dies zeigt, dass $\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$ *keine* Fundamentallösung zum DGL-System (2) ist und daher insbesondere $\frac{d}{dt}\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right) \neq A(t) \cdot \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$ gilt.

Abgabe bis Freitag, den 7. März 2014, <u>8:30 Uhr</u>, im Briefkasten Nr. 46219 (Eingang C-Teil, A5-Gebäude).