Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

15. Mai 2014

13. Übung

35. Die Wellengleichung für $n = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $u = u(\xi, \eta) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$$

ist, wenn u die Gestalt

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

hat, wobei $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind. *(4 Zusatzpunkte)*

(b) Zeigen Sie, dass unter der Parametertransformation $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ gilt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0.$$

(5 Zusatzpunkte)

(c) Man verwende (a) und (b), um erneut die d'Alembertsche Formel 6.1. für die Lösung des Anfangswertproblems zur Wellengleichung für $n = 1$ herzuleiten. *(8 Zusatzpunkte)*

36. Ebene Wellen.

Wir betrachten für $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgende modifizierte Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \, , \qquad (\star)$$

wobei $c_1, \ldots, c_n > 0$ Konstanten sind.

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\alpha\| = 1$, $\mu > 0$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $F''(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) := F(\alpha \cdot x - \mu \, t)$$

genau dann eine Lösung von $(\star)$ ist, wenn

$$\mu^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \, c_j^2$$

gilt. Lösungen von $(\star)$ von dieser Form heißen *ebene Wellen*. *(4 Zusatzpunkte)*

(b) Zeigen Sie, dass für die in (a) untersuchte ebene Welle für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$

$$u(x,t) = u(x - \mu \, t \, \alpha, 0)$$

gilt. Interpretieren Sie diese Gleichung, um die Ausbreitungsrichtung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der ebenen Welle zu bestimmen. *(3 Zusatzpunkte)*

Bitte wenden.

37. Elektromagnetische Wellen. In der Physik werden *elektrische* und *magnetische Felder* durch *zeitabhängige Vektorfelder*, das heißt durch glatte Abbildungen $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, beschrieben. Die Physiker haben gezeigt, dass das elektrische Feld $E = E(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und das magnetische Feld $B = B(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die sogenannten *Maxwell-Gleichungen* erfüllen, die (im Vakuum) wie folgt lauten:

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad\qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad\qquad \nabla \times B = \varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial E}{\partial t}\ .$$

Dabei bezieht sich der ∇-Operator auf die Raumkoordinaten x, und $\times$ bezeichnet das Kreuzprodukt von $\mathbb{R}^3$. ε_0 und μ_0 sind Konstanten, und zwar ist $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\, \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V \cdot m}}$ die *elektrische Feldkonstante*, $\mu_0 \approx 1{,}257 \cdot 10^{-6}\, \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}$ die *magnetische Feldkonstante*. (V=Volt, s=Sekunde, A=Ampere und m=Meter sind die entsprechenden physikalischen Einheiten.)

(a) Zeigen Sie, dass E **und** B Lösungen einer im Sinne von Aufgabe 36 modifizierten Wellengleichung (siehe ($\star$) in Aufg. 36) sind. Ohne Beweis darf dabei verwendet werden, dass für jedes glatte $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt: $\nabla \times (\nabla \times f) = \nabla(\nabla \cdot f) - \triangle f$, wobei der Laplace-Operator $\triangle$ angewandt auf ein Vektorfeld f so definiert ist, dass man $\triangle$ auf jede einzelne Komponente von f anwendet. *(6 Zusatzpunkte)*

(b) Berechnen Sie die Lichtgeschwindigkeit, d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer ebenen elektromagnetischen Welle (siehe Aufgabe 36). *(2 Zusatzpunkte)*

Abgabe bis Freitag, den 23. Mai 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219
Hinweise: Dies ist das letzte Übungsblatt. Alle auf diesem Blatt erreichbaren Punkte sind Zusatzpunkte.
Zur Klausur: Die Klausur findet am 11. Juni 2014 von 14.00 bis 15.30 Uhr im Raum SN169 (im Schloss) statt. Als Hilfsmittel ist ein doppelseitig beschriebenes DIN A4 Blatt zugelassen. Jegliche anderen Hilfsmittel sind nicht erlaubt.