Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

6. März 2014

5. Übung

12. Floquettheorie

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t), \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A(t)$ ist periodisch mit Periode 2π. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine invertierbare Transformation $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ der Differentialgleichung zu bestimmen, so dass die resultierende Differentialgleichung $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ autonom ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$F(t) = \begin{pmatrix} \exp(\sin(t)) & t\exp(\sin(t)) \\ 0 & \exp(\sin(t)) \end{pmatrix}$$

die Fundamentallösung von $\dot{F}(t) = A(t)F(t)$ mit $F(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist. *(4 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie die Monodromie M von $F(t)$ und ein $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\exp(B) = M$. *(3 Punkte)*

(c) Die Matrix $\tilde{A}$ wird definiert durch $B/2\pi$. Bestimmen Sie die zu $\tilde{A}$ gehörige Fundamentallösung $\tilde{F}(t)$ und die Monodromie $\tilde{M}$. *(3 Punkte)*

(d) Berechnen Sie nun die Transformation $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad t \mapsto G(t)$, die das gegebene nicht-autonome System $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ gemäß Satz 1.28 in das autonome System $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ transformiert. Geben Sie eine Formel an, mit der sich $\tilde{A}$ mit Hilfe von $A(t)$ und $G(t)$ berechnen lässt. *(5 Punkte)*

13. Unitäre Fundamentalsysteme.

(a) Es sei $A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ eine differenzierbare Abbildungen von $\mathbb{R}$ in den Raum der invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}.$$

[Tipp: Man differenziere den Ausdruck $\mathbb{1} = A \cdot A^{-1}$.] *(3 Punkte)*

(b) Sei C eine komplexe Matrix, dann definieren wir $C^H := \bar{C}^T$ als die dazu hermitsche Matrix. Eine komplexe Matrix C heißt unitär, wenn sie die Gleichung $CC^H = \mathbb{1}$ erfüllt. Wir betrachten eine Fundamentallösung $F(t)$ für ein lineares System $\dot{F}(t) = B(t)F(t)$, $F(0) = \mathbb{1}$, wobei $t \mapsto B(t)$ stetig in einem Intervall I (mit $0 \in I$) sei und $B^H(t) = -B(t)$ für alle $t \in I$ erfülle.
Zeigen Sie: $F(t)$ ist für alle $t \in I$ unitär.
[Tipp: Betrachten Sie mit Hilfe von (a) eine Differentialgleichung für $(F^H)^{-1}$.] *(5 Punkte)*

Bitte wenden.

14. Ein Anfangswertproblem ohne eindeutige Lösung. Aus Beispiel 1.6(i) ist bereits bekannt, dass die Lösung eines Anfangswertproblems nicht in allen Fällen eindeutig bestimmt ist. Wir betrachten

$$\dot{u} = 2\sqrt{|u|} \quad \text{mit} \quad u(0) = 0. \tag{$\star$}$$

(a) An welchen Stellen erfüllt die Differentialgleichung $(\star)$ nicht die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes? *(2 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass $u : I \to \mathbb{R}$ **genau dann** eine *maximale* Lösung (im Sinne der Sätze 1.34 bzw. 1.38) des Anfangswertproblems $(\star)$ ist, wenn $I = \mathbb{R}$ und es a, b mit $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq +\infty$ gibt, so dass

$$u(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & \text{für } t < a \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq b \\ (t-b)^2 & \text{für } t > b \end{cases}$$

gilt. *(11 Punkte)*

[Tipp: Ist $u : I \to \mathbb{R}$ eine maximale Lösung von $(\star)$, so setze man $b := \sup\{\, t \in I \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \,|\, u|_{[0,t]} = 0 \,\}$. Im Falle $b < \infty$ fixiere man $t_0 > b$ und vergleiche u mit der maximalen Lösung des Anfangswertproblems $\dot{v} = 2\sqrt{|v|}$ mit $v(t_0) = u(t_0)$, das man für $(t, v) \in O = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ betrachtet, wobei auf dem Gebiet O die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllt werden.]

Abgabe bis Freitag, den 14. März 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219 (Eingang C-Teil, A5-Gebäude).