Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

3. April 2014

9. Übung

23. Über den Laplaceoperator.

Sei $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\triangle u$ in den Zylinderkoordinaten $x = r\,\cos(\theta)\,,\ y = r\,\sin(\theta)\,,\ z = z$ die Darstellung

$$\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

besitzt. *(6 Punkte)*

24. Zu Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip für harmonische Funktionen.

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, offenes, zusammenhängendes Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sowie $g_1, g_2 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Weiter seien $u_1, u_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetige, auf Ω zweimal stetig differenzierbare Lösungen des *Dirichlet-Problems*

$$-\triangle u_k|_\Omega = f\,, \qquad u_k|_{\partial\Omega} = g_k$$

für $k \in \{1,2\}$.

Zeigen Sie: Gilt $g_1 \le g_2$ auf $\partial\Omega$, so auch $u_1 \le u_2$ auf $\overline{\Omega}$. *(4 Punkte)*

(b) Zeigen Sie das folgende Detail aus dem Beweis der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $x_0 \in \mathbb{R}^n\,, \partial B(x_0, r) := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x - x_0\| = r \,\}$ für $r > 0$. Dann betrachte man die Funktion

$$\Phi(r) := \frac{1}{\sigma(\partial B(x_0, r))} \int_{\partial B(x_0,r)} f(x)\, d\sigma(x),$$

wobei $\sigma(\partial B(x_0, r))$ wie üblich das Oberflächenmaß von $\partial B(x_0, r)$ bezeichnet.

Zeigen Sie: $\lim_{r\to 0} \Phi(r) = f(x_0)$.

[Tipp: Man untersuche zunächst das Verhalten von $\max f(x)$ und $\min f(x)$ über $x \in \overline{B(x_0, r)}$ im Grenzwert $r \to 0$.] *(6 Punkte)*

25. Über harmonische Funktionen.

(a) Seien $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonische Funktionen. Zeigen Sie: Die Funktion $w(x) := u(x)\cdot v(x)$ ist genau dann harmonisch, wenn $\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. *(4 Punkte)*

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. A ist invertierbar und es gilt $A^t \cdot A = A \cdot A^t = \mathbb{1}$. Wir definieren eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$T(x) := A \cdot x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie: Ist $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch, so auch $u \circ T$. *(7 Punkte)*

Abgabe bis Freitag, den 11. April 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219