Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

13. März 2014

6. Übung

15. Lemma von Gronwall.

(a) Formulieren Sie das Gronwallsche Lemma 1.25 für den Spezialfall, dass die dort definierten Funktionen $a(t) := a$ und $b(t) := b$ *Konstanten* sind mit $a, b \geq 0$. *(2 Punkte)*

(b) Die Funktion $(t, y) \mapsto f(t, y)$ im Anfangswertproblem (mit Anfangszeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$)

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0$$

sei auf $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ stetig und *linear beschränkt*, d.h. es gelte für alle $(t, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$

$$\|f(t, y)\| \leq A(t)\|y\| + B(t)$$

mit auf $\mathbb{R}$ stetigen, nicht-negativen Funktionen $t \mapsto A(t)$ und $t \mapsto B(t)$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass dann das Anfangswertproblem eine globale, d.h. eine auf ganz $[t_0, \infty)$ definierte Lösung besitzt. [Tipp: Satz 1.38] *(7 Punkte)*

16. Diverse Differentialgleichungen.

Finden Sie die (allgemeinen bzw. ggf. eindeutigen) Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

(a) $y'(x) = (x + y(x))^2$ *(5 Punkte)*

(b) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{x^2}{y(x)^2}$ mit $y(1) = 1$ *(5 Punkte)*

17. Exakte Differentialgleichungen.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $e^{3x} \cdot y' + 3e^{3x}\, y - 2x = 0$ exakt ist und bestimmen Sie ihre allgemeine Lösung. *(5 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(x^2\, e^y + 1) \cdot y' + 2x\, e^y - 1 = 0$ exakt ist und finden Sie eine Stammfunktion. Die Lösungsfunktion $y(x)$ mit $y(1) = 0$ ist nicht explizit angebbar. Bestimmen Sie jedoch ihre Umkehrfunktion $x(y)$. *(5 Punkte)*

18. Eulersche Multiplikatoren.

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) \cdot h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0\,, \qquad (*)$$

wobei $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen in t und u sein mögen. Zeigen Sie: Hängt $\beta := (\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial t})/g$ allein von u ab, so ist $M(u) := \exp(-\int_{u_0}^{u} \beta(s)ds)$ (mit $u_0 \in \mathbb{R}$) ein Eulerscher Multiplikator für $(*)$. *(3 Punkte)*

(b) Finden Sie für die Differentialgleichung $(3t^2 - u^2) \cdot \dot{u} - 2t\, u = 0, \quad u(0) = 1$ einen Eulerschen Multiplikator, sowie eine Funktion F, die die Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung durch $F(t, u(t)) \equiv \mathit{const.}$ charakterisiert. *(5 Punkte)*

Abgabe bis Freitag, den 21. März 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219