Differentialgleichungen
1. Übung

Martin Schmidt
Tobias Simon

7. Februar 2014

1. **Lösungen von Differentialgleichungen.**

   (a) Sei $f(t, u, u') := 2t - 3 + 3u' - 2u$. Zeigen Sie, dass $u(t) = A\,e^t + B\,e^{2t} + t$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $u'' = f(t, u, u')$ ist. Bestimmen Sie A und B so, dass $u(0) = u(1) = 0$ gilt. *(5 Punkte)*

   (b) Finden Sie eine Differentialgleichung, für die die Funktion $y(t) = A\,e^{2t} + B\,e^t + C$ für alle $A, B, C \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist. *(7 Punkte)*
   [Tipp. Man überlege zunächst, welche Ordnung die Differentialgleichung haben sollte. Dann berechne man $y', y'', \ldots$ und überlege, wie man die Parameter A, B, C los wird.]

2. **Systeme von Differentialgleichungen.**

   (a) Schreiben Sie das folgende System von Differentialgleichungen dritter Ordnung in die Form $x'(t) = A\,x(t)$ eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung:

   $$\begin{aligned} y''' + 2y' + y - 3z' + z &= 0 \\ 2z''' + z'' - 4y'' + 2z + 6y &= 0\,. \end{aligned}$$

   (5 Punkte)

   (b) Bringen Sie die skalare inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

   $$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t) \quad \text{mit } a_k, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

   in die Form $u'(t) = A(t)\,u(t) + b(t)$ eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung.
   (5 Punkte)

3. **Lineare Unabhängigkeit von Funktionen.**

   (a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{C}^n$ Funktionen. Geben Sie eine Definition für die lineare Unabhängigkeit dieser Funktionen. Zeigen Sie: Existiert ein $t_0 \in I$ derart, dass die Vektoren $y_1(t_0), \ldots, y_m(t_0) \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig sind, so sind auch die Funktionen $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig. *(5 Punkte)*

   (b) Gilt in Teil a) auch die Umkehrung? (Beweis bzw. Gegenbeispiel!) *(3 Punkte)*

   (c) Entscheiden Sie im Folgenden jeweils, ob die angegebenen Funktionen auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

   (i) $y_1(t) = (\sin(t), \cos(t)), \quad y_2(t) = (e^t, t)$ *(2 Punkte)*

   (ii) $f_1(t) = (\sin(t), \cos(t)), \quad f_2(t) = (e^t, t), \quad f_3(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *(4 Punkte)*
   [Tipp: Es mag hilfreich sein, verschiedene Werte für t einzusetzen.]

Hinweise: Die Lösungen sind bis spätestens **Montag, den 17. Februar 2014, 15:30h, im Briefkasten Nr. 46219** (Eingang C-Teil, A5-Gebäude) abzugeben. Wir möchten Sie bitten, Ihre Lösungen partnerweise (d.h. **zwei Namen pro Blatt**) abzugeben. Abgaben mit drei oder mehr Namen pro Blatt sind jedoch nicht zulässig. Die neuen Übungsblätter werden künftig voraussichtlich immer freitags auf der Homepage des Lehrstuhls Mathe III (`http://analysis.math.uni-mannheim.de` → Lehre → Differentialgleichungen) zur Verfügung gestellt. Die Abgabefrist für die *zukünftigen* Blätter wird dann auch immer freitags sein. Hinreichend für die Zulassung zur Prüfung ist das Erreichen von mind. 50 % der Punkte in den Übungsblättern.
Für weitere Fragen zu den Übungen können Sie sich an Tobias Simon, Raum C105, wenden (Tel.: (0621) 181-2537, E-Mail: tsimon@mail.uni-mannheim.de).