Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

27. März 2014

8. Übung

21. Lineare partielle Differentialgleichungen.

(a) Es seien $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Weiter sei $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}(s) = b(x(s))$$

und $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen, linearen partiellen Differentialgleichung

$$b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)\, u(x) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dann die Funktion $z(s) := u(x(s))$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{z}(s) = -c(x(s))\, z(s)$$

löst. *(5 Punkte)*

(b) Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (a), dass sich für eine partielle Differentialgleichung $F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$ die in der Methode der Charakteristik auftretenden Kurven $x(s)$ und $z(s) = u(x(s))$ schon dann durch gewöhnliche Differentialgleichungen ohne Verwendung von $p(s) = (\nabla u)(x(s))$ beschreiben lassen, wenn die Funktion $F(p, z, x)$ linear von p abhängt, das heißt, wenn F von der Form

$$F(p, z, x) = b(z, x) \cdot p + c(z, x)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist. *(5 Punkte)*

(c) Verwenden Sie (b), um erneut die Lösung der inhomogenen Transportgleichung herzuleiten. *(6 Punkte)*

22. Partielle Differentialgleichungen lösen.

Benutzen Sie Aufgabe 21, um die folgenden Randwertprobleme mit Hilfe der Methode der Charakteristik zu lösen. Hierbei ist g jeweils eine stetig differenzierbare Funktion mit passendem Definitionsbereich.

(a) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2u\,, \quad u(x_1, 1) = g(x_1)\,, \quad$ für $x_1 \in \mathbb{R},\, x_2 > 0\,.$ *(6 Punkte)*

(b) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} = u\,, \quad u(x_1, 0) = g(x_1)\,, \quad$ für $x_1 > 0, x_2 \geq 0\,.$ *(7 Punkte)*

(c) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = 3u\,, \quad u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)\,, \quad$ für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\,.$ *(7 Punkte)*
[Tipp: Es ist nicht erforderlich, eine Koordinatentransformation durchzuführen.]

Abgabe bis Freitag, den 4. April 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219