Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

8. Mai 2014

12. Übung

32. Über den Wärmeleitungskern von S^1. Mit $\Phi(x,t)$ bezeichnen wir die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung aus Def. 5.1.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $t>0$ die Funktion $\Phi(\,\cdot\,,t):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine Schwartzfunktion ist. [Tipp: Man darf ohne Beweis als richtig voraussetzen, dass $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left\{|x|^n e^{-x^2}\right\}<\infty$ für beliebiges $n\in\mathbb{N}$ gilt.]

(3 Punkte)

(b) Berechnen Sie für $t>0$ die Fouriertransformierte der Funktion $\Phi(\,\cdot\,,t):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

(7 Punkte)

[Tipp: Um das benötigte Integral auszurechnen, schreibe man die Fouriertransformierte von $\Phi(\,\cdot\,,t)$ an der Stelle $k\in\mathbb{R}^n$ in der Form $a\cdot\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(by+ck)^2}\,dy$ mit (von k und t abhängigen) Konstanten $a,b,c\in\mathbb{R}$; dafür führe man im Exponenten eine "quadratische Ergänzung" durch. Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ gilt.]

(c) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Schwartzfunktion. Zeigen Sie, dass dann die Reihe

$$\widetilde{f}(x):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)$$

auf $\mathbb{R}$ konvergiert und eine periodische Funktion $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit Periode 1 definiert wird.

(3 Punkte)

(d) Sei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die periodisch mit der Periode 1 ist und $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^0\to\mathbb{R}$ die Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung mit $u(\,\cdot\,,0)=h$. Zeigen Sie, dass $u(\,\cdot\,,t)$ für jedes $t>0$ periodisch mit Periode 1 ist und darstellbar ist als

$$u(x,t)=\int_0^1 H_{S^1}(x,y,t)h(y)\,dy \qquad \text{mit } H_{S^1}(x,y,t):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Phi(x-y+n,t).$$

[Tipp: Satz 5.3] *(5 Punkte)*

33. Der Zusammenhang zwischen der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung und der Laplace-Gleichung.

Es sei $\Phi_W:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Mit

$$G(x,\lambda):=\int_0^\infty\Phi_W(x,t)\cdot e^{-\lambda t}\,dt \qquad (\lambda>0)$$

bezeichnen wir die sog. Laplace-Transformation von Φ bezüglich t.

Zeigen Sie, dass $G(x,\lambda)$ für $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\lambda>0$ und $n\geq 3$ wohldefiniert ist, indem Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals nachweisen. Zeigen Sie weiter, dass $G(x,\lambda)$ im Grenzwert $\lambda\to 0$ eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, d.h dass für alle $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ gilt:
$\Delta_x G(x,\lambda)\to 0$ für $\lambda\to 0$. *(3+5 Punkte)*

Bitte wenden.

34. Eine alternative Beschreibung von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Wir setzen voraus, dass es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass

$$|(\triangle^k f)(x)| \leq M^k \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } k \geq 0$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\triangle^k f$ die k-fache Anwendung des Laplace-Operators auf f; wir setzen $\triangle^0 f := f$.

Zeigen Sie, dass dann durch

$$u(x,t) := (e^{t\,\triangle})f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}(\triangle^k f)(x)\, t^k$$

eine wohldefinierte Funktion $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wird, indem Sie die Konvergenz der Reihe auf $\Omega \times \mathbb{R}$ zeigen. Zeigen Sie weiter, dass u eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0, \quad u(x,0) = f(x)$$

ist. *(2+4 Punkte)*

Abgabe bis Freitag, den 16. Mai 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219