Martin Schmidt
Tobias Simon

# Differentialgleichungen

30. April 2014

## 11. Übung

**29. Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung.**

Sei $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung, d.h. es gelte $\dot{u} - \triangle u = 0$.

**(a)** Zeigen Sie: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ eine weitere Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. *(2 Punkte)*

**(b)** Verwenden Sie (a), um zu zeigen: $v(x,t) := x \cdot \nabla u + 2t\,\dot{u}$ ist noch eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. [Tipp: Man betrachte $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}$.] *(4 Punkte)*

**(c)** In der Situation $n = 1$ sei eine glatte Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u(x,t) := v(\frac{x^2}{t})$. Zeigen Sie, dass $u$ genau dann eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung ist, wenn $v$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$4z\, v''(z) + (2+z)\, v'(z) = 0 \quad \text{für } z > 0 \qquad (\star)$$

erfüllt. *(5 Punkte)*

**(d)** Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von $(\star)$ gegeben ist durch

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Differenzieren Sie anschließend $v(\frac{x^2}{t})$ nach $x$ und bestimmen Sie die Konstante $c$ so, dass man die Fundamentallösung $\Phi$ für $n = 1$ erhält. *(7 Punkte)*

**30. Separation der Variablen bei der Wärmeleitungsgleichung**

Es sei das folgende Randwertproblem für $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}^+$ mit $l > 0$ gegeben:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(x,t)$ durch einen Ansatz der Separation der Variablen, d.h. durch den Ansatz $u(x,t) := X(x) \cdot T(t)$ mit reellwertigen Funktionen $x \mapsto X(x)$ bzw. $t \mapsto T(t)$, die jeweils nur von $x$ bzw. $t$ abhängen .

[Tipp: Das Ziel des Separationsansatzes ist es, die DGL so umformen zu können, dass die eine Seite der Gleichung ausschließlich von $x$, die jeweils andere Seite ausschließlich von $t$ abhängt.]

*(8 Punkte)*

*Bitte wenden.*

**31. Glättungseigenschaft der Wärmeleitungsgleichung**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) &= F(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit

$$F(x) := \begin{cases} 1, & \text{für} \quad |x| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{für} \quad |x| > \varepsilon \end{cases}.$$

und einem $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: $u(x,t) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und jedes $t > 0$, egal wie klein die positive Zahl $\varepsilon$ wird.

[Tipp: Substituieren Sie in der Formel zur Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems aus Korollar 5.5 die dortige Integrationsvariable $y$ durch $z := \frac{x-y}{\sqrt{4t}}$ und schreiben Sie die Fundamentallösung mit dieser neuen Integrationsvariablen $z$.] *(5 Punkte)*

*Physikalische Interpretation:* Selbst wenn $u$ zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Unstetigkeitsstelle hat, ist die Funktion $u$ zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ stetig im Raum. Wenn also zwei Metallstücke verschiedener Temperatur bei $t = 0$ fest verbunden werden, wird sich (nach dieser Modellierung) an der Verbindungsstelle schlagartig die mittlere Temperatur einstellen und die Temperaturkurve stetig durch beide Werkstücke verlaufen.

**Abgabe bis Freitag, den 9. Mai 2014, 8:30 Uhr, im Briefkasten Nr. 46219**