Martin Schmidt
Tobias Simon

Differentialgleichungen

20. Februar 2014

3. Übung

7. Lineare Differentialgleichungen.

Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen linearen Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = t \cdot u(t) + t, \quad u(1) = 1 \, .$$

(5 Punkte)

8. Die Exponentialabbildung für Matrizen.

Gegenstand dieser Aufgabe ist die *Exponentialabbildung* (für Matrizen), das heißt die Potenzreihe

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} A^k \quad \text{für Matrizen } A \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

die wir etwa bei der Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten benötigen werden.

(a) Funktionalgleichung der $\exp$**-Funktion**
Für zwei Matrizen $A,B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt im Allgemeinen nicht $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$. Dies gilt nur, wenn die beiden Matrizen kommutieren, d.h. $[A,B] := AB - BA = 0$.

(i) Zeigen Sie: Falls $[A,B] = 0$ gilt, so gilt die binomische Formel

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

(6 Punkte)

(ii) Begründen Sie kurz, an welcher Stelle bei der binomischen Formel ein Problem entsteht, wenn die Matrizen nicht kommutieren. *(2 Punkte)*

(iii) Zeigen Sie mit Teil (i) für kommutierende Matrizen die Formel

$$\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B).$$

[Tipp: Absolute Konvergenz.] *(4 Punkte)*

(b) Wie man $\exp(A)$ ausrechnet.
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(i) *Basiswechsel.* Ist $C \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, so gilt $\exp(CAC^{-1}) = C\cdot\exp(A)\cdot C^{-1}$. *(2 Punkte)*

(ii) *Diagonalmatrizen.* Ist $A = \mathrm{diag}(c_1,\dots,c_n)$ mit $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{K}$ eine Diagonalmatrix, so gilt $\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{c_1},\dots,e^{c_n})$. *(2 Punkte)*

Bitte wenden.

(iii) *Nilpotente Matrizen.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine nilpotente Matrix in Normalform. Man berechne $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$. *(5 Punkte)*

(iv) *Jordan-Blöcke.* Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block zum Eigenwert λ. Berechnen Sie $\exp(tA)$.
[Tipp: (a) in Verbindung mit (b)(ii),(iii).] *(4 Punkte)*

Abgabe bis Freitag, den 28. Februar 2014, <u>8:30 Uhr</u>, im Briefkasten Nr. 46219 (Eingang C-Teil, A5-Gebäude).

Hinweise: Beachten Sie bitte die (aus organisatorischen Gründen notwendige) frühere Uhrzeit des Abgabetermins. Als Entgegenkommen werden die neuen Übungsblätter künftig bereits bis Donnerstag abends online gestellt worden sein.
Wie bereits in der Vorlesung und in den Tutorien angekündigt, sind ab sofort Abgaben mit maximal **drei Namen pro Blatt** erlaubt und ausdrücklich erwünscht. Wir bitten Sie daher, nach Möglichkeit Ihre bearbeiteten Lösungen jeweils in Dreiergruppen abzugeben.