

Kapitel 4

Laplacegleichung

Eine der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen ist die Laplacegleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Die entsprechende inhomogene Differentialgleichung heißt Poissongleichung:

$$-\Delta u = f.$$

Beide Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine gesuchte Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sie tauchen in der Physik auf und beschreiben z.B. das elektrische Feld im Vakuum oder mit einer Ladungsverteilung f .

4.1 Fundamentallösungen

Die Laplacegleichung ist invariant unter allen Rotationen und Translationen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n . Deshalb suchen wir zunächst nach kugelsymmetrischen Lösungen, also Lösungen, die nur von der Länge $r = |x| = \sqrt{x \cdot x}$ des Ortsvektors abhängen. Für eine solche Funktion $u(x) = v(r) = v(\sqrt{x \cdot x})$ ergibt die Kettenregel:

$$\nabla_x u(x) = v'(\sqrt{x \cdot x}) \nabla_x r = v'(\sqrt{x \cdot x}) \frac{2x}{2r}.$$

Also geht die Laplacegleichung über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\Delta_x u(x) = \nabla_x \cdot \nabla_x u = v''(r) \frac{x^2}{r^2} + v'(r) \frac{n}{r} - v'(r) \frac{x^2}{r^2 r} = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung können wir folgendermaßen lösen:

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r} \Rightarrow \ln(v'(r)) = (1-n)\ln(r) + C \Rightarrow v(r) = \begin{cases} C' \ln(r) + C'' & \text{für } n = 2 \\ \frac{C'}{r^{n-2}} + C'' & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Definition 4.1. Sei $\Phi(x)$ folgende Lösung der Laplacegleichung:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Hier bezeichnet ω_n das Volumen des Einheitsballs im euklidischen Raum \mathbb{R}^n .

Diese Lösung ist bei $x = 0$ singulär. Mit dieser Wahl der Konstanten haben wir

Satz 4.2. Für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ haben wir folgende Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)d^n y.$$

Beweis: Die Gleichheit der beiden Integrale in der Definition von $u(x)$ ergibt sich aus der Substitution $y \mapsto x-y$. Weil f zweimal differenzierbar ist und kompakten Träger hat, ist auch das zweite Integral nach x zweimal differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)d^n y.$$

Insbesondere ist $\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)d^n y$. Wir zerlegen dieses Integral in ein Integral nahe bei der Singularität von Φ und ein Integral außerhalb der Singularität:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)d^n y & + & \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)d^n y \\ &= I_\epsilon & + & J_\epsilon. \end{aligned}$$

Für $\epsilon \downarrow 0$ konvergiert I_ϵ wegen $\int r \ln r dr = \frac{r^2}{2}(\ln r - \frac{1}{2})$ bzw. $\int r dr = \frac{r^2}{2}$ gegen Null:

$$|I_\epsilon| \leq C \|\Delta_x f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\epsilon)} |\Phi(y)| d^n y \leq \begin{cases} C\epsilon^2(|\ln \epsilon| + 1) & (n = 2) \\ C\epsilon^2 & (n \geq 3). \end{cases}$$

Eine partielle Integration ergibt für das zweite Integral:

$$\begin{aligned}
 J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) d^n y \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)} \nabla_y \Phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y) d^n y + \int_{\partial B(0, \epsilon)} \Phi(y) \nabla_y f(x-y) \cdot N d\sigma(y) \\
 &= K_\epsilon + L_\epsilon.
 \end{aligned}$$

Hier ist N die äußere Normale und $d\sigma$ das Maß auf dem Rand von $\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)$. Der zweite Ausdruck konvergiert im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ wieder gegen Null:

$$|L_\epsilon| \leq |\nabla f|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0, \epsilon)} |\Phi(y)| d\sigma(y) \leq \begin{cases} C\epsilon |\ln \epsilon| & (n=2) \\ C\epsilon & (n \geq 3). \end{cases}$$

Durch nochmaliges partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}
 K_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)} \Delta_y \Phi(y) f(x-y) d^n y - \int_{\partial B(0, \epsilon)} \nabla_y \Phi(y) f(x-y) \cdot N d\sigma(y) \\
 &= - \int_{\partial B(0, \epsilon)} \nabla_y \Phi(y) f(x-y) \cdot N d\sigma(y),
 \end{aligned}$$

weil für $y \neq 0$ ϕ harmonisch ist. Der Gradient von Φ ist $\nabla \Phi(y) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{y}{|y|^n}$. Der zum Ursprung zeigende Normalenvektor ist $-\frac{y}{|y|}$. Wenn σ_n das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n bezeichnet, dann berechnet sich das Volumen ω_n des Einheitsballs durch

$$\omega_n = \int_0^1 \sigma_n r^{n-1} dr = \frac{\sigma_n}{n}.$$

Weil $n\omega_n \epsilon^{n-1}$ das Volumen von $\partial B(0, \epsilon)$ ist, ist K_ϵ der Mittelwert von $-f$ auf $\partial B(0, \epsilon)$. Weil f stetig ist, konvergiert dieser Mittelwert im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen $-f(x)$. **q.e.d.**

Im Sinne von Distributionen gilt also $-\Delta \Phi(x) = \delta(x)$. Hieraus erklärt sich die Wahl der Konstanten bei der Definition von Φ . Die Faltung einer Funktion f mit Φ ist auch definiert, wenn f nur stetig ist, oder sogar nur lokal integrierbar ist. Im Allgemeinen ist die einer stetigen Verteilung f entsprechende Lösung der Poissonsgleichung nicht zweimal differenzierbar. Aber der Satz gilt auch für Lipschitzstetige f . Diese Lösung der Poissonsgleichung ist sogar für alle Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wohl definiert, und auch eine schwache Lösung der Poissonsgleichung. Weil die Poissonsgleichung eine inhomogene lineare Differentialgleichung ist, ist jede Lösung nur bestimmt bis auf Addition einer Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung, also einer harmonischen Funktion.

4.2 Mittelwerteigenschaften

Für eine harmonische Funktion u auf einem Gebiet, das einen Ball $B(x, r)$ vom Radius r enthält, ist der Mittelwert von u auf dem Rand $\partial B(x, r)$ des Balls gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x . Weil das für beliebige Radien gilt und der Mittelwert von u auf dem Ball $B(x, r)$ gleich einem gewichtetem Mittelwert aller Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x, r')$ mit $0 \leq r' \leq r$ ist, ist auch der Mittelwert auf $B(x, r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x . Das führt zu aufschlussreichen Schlussfolgerungen.

Mittelwerteigenschaft 4.3. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet Ω , das den Ball $B(x, r)$ enthält. Dann sind die Mittelwerte von u auf dem Ball $B(x, r)$ und dessen Rand gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x . Sind umgekehrt die Mittelwerte einer zweimal differenzierbaren Funktion $u \in C^2(\Omega)$ auf allen Bällen $B(x, r)$, die in Ω enthalten sind, oder auf Rändern dieser Bälle gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten, dann ist u auf Ω harmonisch.*

Beweis: Sei $\Psi(r)$ der Mittelwert von u auf den Rändern der Bälle $B(x, r) \subset \Omega$:

$$\Psi(r) = \frac{1}{r^{n-1}n\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) d\sigma(z).$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z d\sigma(z) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot N d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{nr^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot N d\sigma(y) = \frac{1}{nr^{n-1}\omega_n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) d^n y. \end{aligned}$$

Wenn u harmonisch ist, dann ist Ψ konstant solange $B(x, r)$ in Ω liegt. Wegen der Stetigkeit von u konvergiert $\Psi(r)$ im Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0} r$ gegen $u(x)$. Also sind die Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle in Ω gleich $u(x)$. Es gilt auch

$$\frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(x,r)} u(y) d^n y = \frac{1}{r^n \omega_n} \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} u(y) d\sigma(y) ds = \frac{n}{r^n} \int_0^r s^{n-1} \Psi(s) ds.$$

Weil Ψ konstant ist, ist auch der Mittelwert von u auf $B(x, r)$ gleich $u(x)$.

Wenn umgekehrt die Mittelwerte von u auf allen Bällen $B(x, r)$ in Ω gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten sind, dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n} \int_0^r s^{n-1} \Psi(s) ds.$$

Deshalb verschwindet die Ableitung der rechten Seite nach r :

$$-\frac{n^2}{r^{n+1}} \int_0^r s^{n-1} \Psi(s) ds + \frac{n}{r^n} r^{n-1} \Psi(r) = -\frac{n}{r} u(x) + \frac{n}{r} \Psi(r) = 0.$$

Dann sind auch die Mittelwerte $\Psi(r)$ gleich $u(x)$. Weil u zweimal differenzierbar ist, ist nach unserer obigen Formel Ψ differenzierbar. Wenn die Ableitungen $\Psi'(r)$ zu allen $x \in \Omega$ verschwinden, dann verschwinden die Integrale von Δu über alle Bälle in Ω . Also ist u dann harmonisch. Dasselbe gilt auch, wenn die Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x, r)$ gleich den Werten von u an den Mittelpunkten sind. **q.e.d.**

4.3 Maximumprinzip

Wenn eine harmonische Funktion u auf einem offen zusammenhängendem Gebiet Ω ihr Supremum (oder Infimum) in einem Punkt $x \in \Omega$ annimmt, dann gibt es sicherlich einen Ball $B(x, r) \subset \Omega$. Dann folgt aus der Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(x, r)} |u(y) - u(x)| d^n y = 0.$$

Also muss u auf $B(x, r)$ konstant sein. Insbesondere ist die Teilmenge von Ω , auf der u gleich $u(x)$ ist, offen und abgeschlossen. Weil aber Ω zusammenhängend ist, muss dann diese Teilmenge ganz Ω sein. Damit folgt aus der Mittelwerteigenschaft ein

Starkes Maximumprinzip 4.4. *Besitzt eine harmonische Funktion auf einem offenen zusammenhängenden Gebiet ein Maximum, dann ist sie konstant.* **q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip 4.5. *Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ eine auf dem Abschluss eines beschränkten offenen Gebietes Ω stetige Funktion, die auf Ω harmonisch ist. Dann nimmt u sein Maximum (und Minimum) auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω an.*

Beweis: Weil u stetig ist, nimmt sie ihr Maximum und Minimum auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}$ an. Wegen dem Starken Maximumprinzip liegt es auf dem Rand. **q.e.d.**

Das Maximumprinzip lässt sich ohne die Mittelwerteigenschaft verallgemeinern.

Definition 4.6. *Auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt L von der Form*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad \text{mit symmetrischen } a_{ij} = a_{ji}$$

elliptisch, wenn
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) k_i k_j > 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und alle } k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Die Bedingung, dass a_{ij} symmetrisch ist, ist keine Einschränkung, weil wir wegen dem Satz von Schwarz a_{ij} durch $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ ersetzen können.

Satz 4.7. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einem beschränkten offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten $a_{ij}(x)$ und $b_i(x)$, die sich stetig und elliptisch auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen. Dann nimmt jede auf Ω zweimal stetig differenzierbare Funktion u , die sich stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzt und $Lu \geq 0$ erfüllt, das Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass L uniform elliptisch ist, dass es also ein $\lambda > 0$ gibt mit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) k_i k_j \geq \lambda \sum_{i=1}^n k_i^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und alle } k \in \mathbb{R}^n.$$

Die stetige Funktion $(x, k) \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) k_i k_j$ nimmt auf der kompakten Menge $(x, k) \in \bar{\Omega} \times S^{n-1} \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ ein Minimum $\lambda > 0$ an. Also ist L uniform elliptisch.

Sei $v(x) = \exp(\alpha x_1)$ mit $\alpha > 0$. Weil L uniform elliptisch ist folgt $Lv = \alpha(\alpha a_{11}(x) + b_1(x))v \geq \alpha(\alpha\lambda + b_1(x))v$. Weil die stetigen Koeffizienten b_i auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}$ beschränkt sind, gibt es ein groß genuges $\alpha > 0$ mit $Lv > 0$. Weil L linear ist, folgt $L(u + \epsilon v) > 0$ für alle $\epsilon > 0$ und auf ganz Ω . Weil $u + \epsilon v$ auf $\bar{\Omega}$ stetig ist, nimmt es dort ein Maximum an. Weil $u + \epsilon v$ auf Ω zweimal differenzierbar ist, verschwinden an einem Maximum $x_0 \in \Omega$ alle ersten partiellen Ableitungen und alle zweiten Richtungsableitungen sind nicht positiv. Die symmetrische Hessische ist dort negativ semidefinit und damit gleich $\frac{\partial^2(u+\epsilon v)(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_k B_{ki} \lambda_k B_{kj}$ mit einer Orthogonalmatrix B und nicht positiven $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Aus der Elliptizität folgt $-L(u + \epsilon v)(x_0) \geq -\lambda \sum_{ki} \lambda_k B_{ki}^2 \geq 0$ im Widerspruch zu $L(u + \epsilon v) > 0$. Deshalb liegt für alle $\epsilon > 0$ das Maximum in $x_0 \in \partial\Omega$:

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) + \epsilon \inf_{x \in \Omega} v(x) \leq \sup_{x \in \Omega} (u(x) + \epsilon v(x)) = \max_{x \in \partial\Omega} (u(x) + \epsilon v(x)) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x) + \epsilon \max_{x \in \partial\Omega} v(x).$$

Weil v auf $\bar{\Omega}$ beschränkt ist, und das für alle $\epsilon > 0$ gilt folgt die Aussage. **q.e.d.**

Die negativen Funktionen erfüllen die Ungleichung $Lu \leq 0$, und nehmen entsprechend das Minimum auf dem Rand an. Insbesondere nehmen Lösungen der Gleichung $Lu = 0$ sowohl das Minimum als auch das Maximum auf dem Rand an.

4.4 Greensche Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, durch welche Vorgaben eine harmonische Funktion auf einem offenen zusammenhängendem Gebiet Ω eindeutig bestimmt ist. Es bietet sich an die Werte von u oder einiger ihrer partiellen Ableitungen auf dem Rand $\partial\Omega$ festzulegen. Wir nennen eine Funktion auf dem Abschluss eines

Gebietes n -mal stetig differenzierbar, wenn sie n -mal differenzierbar ist, und sich alle partiellen Ableitungen bis zur n -ten Ordnung stetig auf den Abschluss fortsetzen.

Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf das Vektorfeld $v(x)\nabla u(x)$ ergibt die

Erste Greensche Formel 4.8. *Seien u und v auf $\bar{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Im Folgenden wirkt ∇ nur auf die unmittelbar folgende Funktion. Es gilt*

$$\int_{\Omega} v(y)\Delta u(y)d^n y + \int_{\Omega} \nabla v(y) \cdot \nabla u(y)d^n y = \int_{\partial\Omega} v(z)\nabla u(z) \cdot N d\sigma(z). \quad \text{q.e.d.}$$

Vertauschen wir in der Ersten Greenschen Formel die Rollen von u und v und subtrahieren das Ergebnis von der ursprünglichen Formel, so erhalten wir die

Zweite Greensche Formel 4.9. *Seien u und v auf $\bar{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} (v(y)\Delta u(y) - u(y)\Delta v(y))d^n y = \int_{\partial\Omega} (v(z)\nabla u(z) - u(z)\nabla v(z)) \cdot N d\sigma(z). \quad \text{q.e.d.}$$

Wir wollen die Zweite Greensche Formel auf die Fundamentallösung $v(y) = \Phi(x-y)$ anwenden. Diese Fundamentallösung ist für $y \neq x$ harmonisch, aber bei $y = x$ singulär. Deshalb integrieren wir wie im Beweis von Satz 4.2 nur über das Komplement von $B(x, \epsilon)$. Im Beweis von Satz 4.2 haben wir gesehen, dass für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon))} u(z)\nabla_z \Phi(x-z) \cdot N d\sigma(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon))} u(x-z)\nabla_z \Phi(z) \cdot N d\sigma(z) = u(x).$$

Alle anderen Integrale konvergieren für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen Null. Deshalb folgt der

Greensche Darstellungssatz 4.10. *Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ auf einem offenen beschränkten Gebiet Ω eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x \in \Omega$:*

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Phi(x-y)\Delta u(y)d^n y + \int_{\partial\Omega} (\Phi(x-z)\nabla_z u(z) - u(z)\nabla_z \Phi(x-z)) \cdot N d\sigma(z).$$

Deshalb ist auf Ω jede Lösung u der Poissonsgleichung $-\Delta u = f$ durch die Werte von u und die Ableitung von u auf dem Rand $\partial\Omega$ in Richtung der Normalen eindeutig bestimmt. Umgekehrt stellt sich dann die Frage, für welche solche Daten auch eine Lösung existiert. Aus dem schwachen Maximumprinzip folgt, dass für eine Wahl von f und eine Wahl von Werten von u auf dem Rand $\partial\Omega$ höchstens eine Lösung existiert, weil die Differenz zweier solcher Lösungen harmonisch ist und auf dem Rand verschwindet. Deshalb erscheint es naheliegend folgendes Randwertproblem zu formulieren:

Dirichletproblem 4.11. Zu gegebenen Funktionen f auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und g auf $\partial\Omega$ ist eine Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$ gesucht, die sich stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzt und auf dem Rand $\partial\Omega$ mit g übereinstimmt.

Greensche Funktion 4.12. Eine Funktion $G_\Omega : \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für das Gebiet Ω , wenn folgendes gilt:

- (i) Für $x \in \Omega$ ist $y \mapsto G_\Omega(x, y) - \Phi(x - y)$ eine harmonische Funktion auf $y \in \Omega$.
- (ii) Für $x \in \Omega$ setzt sich $y \mapsto G_\Omega(x, y)$ stetig auf $\partial\Omega$ fort und verschwindet auf $y \in \partial\Omega$.

Mit dem Zweiten Greenschen Satz gilt für die Funktion $v(y) = G_\Omega(x, y) - \Phi(x - y)$:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \Phi(x - y) \Delta u(y) d^n y + \int_{\partial\Omega} (\Phi(x - z) \nabla_z u(z) - u(z) \nabla_z \Phi(x - z)) \cdot N d\sigma(z) \\ & = - \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) \Delta u(y) d^n y - \int_{\partial\Omega} u(z) \nabla_z G_\Omega(x, z) \cdot N d\sigma(z). \end{aligned}$$

Also ergibt der Greensche Darstellungssatz:

$$u(x) = - \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) \Delta_y u(y) d^n y - \int_{\partial\Omega} u(z) \nabla_z G_\Omega(x, z) \cdot N d\sigma(z).$$

Haben umgekehrt $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichende Regularität, dann ist

$$u(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) d^n y - \int_{\partial\Omega} g(z) \nabla_z G_\Omega(x, z) \cdot N d\sigma(z)$$

eine Lösung des Dirichletproblems. Wegen Satz 4.2 löst der erste Summand das Dirichletproblem zu $g = 0$. Wenn g Randwert einer hinreichend regulären Funktion auf $\bar{\Omega}$ ist, dann löst die Subtraktion des entsprechenden ersten Summanden das Dirichletproblem zu $f = 0$ und stimmt mit dem zweiten Summanden überein. Damit reduziert sich das Dirichletproblem auf die Bestimmung der Greenschen Funktion.

Für $x \in \Omega$ ist die Differenz $y \mapsto G_\Omega(x, y) - \Phi(x - y)$ eine harmonische Funktion auf $y \in \Omega$, die auf dem Rand gerade gleich $-\Phi(x - y)$ ist. Deshalb ist diese Differenz die Lösung des Dirichletproblem für die Funktionen $f = 0$ und $g(x) = -\Phi(x - y)$.

Satz 4.13. (Symmetrie der Greenschen Funktion) Sei Ω ein Gebiet, das eine Greensche Funktion G_Ω besitzt. Dann gilt $G_\Omega(x, y) = G_\Omega(y, x)$ für alle $x \neq y \in \Omega$.

Beweis: Für $x \neq y \in \Omega$ sei $\epsilon > 0$ so klein, dass die beiden Bälle $B(x, \epsilon)$ und $B(y, \epsilon)$ disjunkt sind und in Ω liegen. Die Zweite Greensche Formel auf dem Gebiet $\Omega \setminus (B(x, \epsilon) \cup B(y, \epsilon))$ mit den Funktionen $u(z) = G(x, z)$ und $v(z) = G(y, z)$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, \epsilon)} (G(y, z) \nabla_z G(x, z) - G(x, z) \nabla_z G(y, z)) \cdot N d\sigma(z) \\ = \int_{\partial B(y, \epsilon)} (G(x, z) \nabla_z G(y, z) - G(y, z) \nabla_z G(x, z)) \cdot N d\sigma(z). \end{aligned}$$

Im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ konvergieren die beiden zweiten Summanden genau wie L_ϵ im Beweis von Satz 4.2 gegen Null. Die beiden ersten Summanden konvergieren in diesem Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ genau wie die Umformung von K_ϵ zu einem Randintegral im Beweis von Satz 4.2 gegen $G(y, x)$ bzw. $G(x, y)$. **q.e.d.**

Wir beschränken uns auf $\Omega = B(0, 1)$, auf den sich alle Bälle zurückführen lassen. Wir spiegeln mit der Inversion an der Einheitssphäre $\partial B(0, 1)$ $x \mapsto \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$ das Innere vom Einheitsball auf das Äußere, wobei die Einheitssphäre festgehalten wird. Das Dirichletproblem für den Einheitskreis mit den Funktion $f = 0$ und $g(x) = \Phi(x - y)$ wird durch die Inversion der Singularität bei $y = x$ am Einheitskreis gelöst:

Greensche Funktion vom Einheitsball 4.14. *Die Greensche Funktion vom Einheitsball $B(0, 1)$ ist gegeben durch*

$$G_{B(0,1)}(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(|x|(\tilde{x} - y)) = \begin{cases} \Phi(x - y) - |x|^{2-n} \Phi(\tilde{x} - y) & \text{für } n > 2 \\ \Phi(x - y) - \Phi(\tilde{x} - y) - \Phi(x) & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Beweis: Für $|y| = 1$ gilt $|x|^2 |\tilde{x} - y|^2 = 1 - 2y \cdot x + |x|^2 = |x - y|^2$. Deshalb stimmen auf dem Rand $y \in \partial B(0, 1)$ die Funktionen $\Phi(|x|(\tilde{x} - y))$ und $\Phi(x - y)$ überein. **q.e.d.**

Poissonsche Darstellungsformel 4.15. *Für $f \in C^2(\overline{B(z, r)})$ und $g \in C(\partial B(z, r))$ ist die folgende Funktion die eindeutige Lösung des entsprechenden Dirichletproblems:*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(z, r)} G_{B(0,1)}\left(\frac{x-z}{r}, \frac{y-z}{r}\right) f(y) d^n y + \frac{1 - \frac{|x-z|^2}{r^2}}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(z + ry)}{\left|\frac{x-z}{r} - y\right|^n} d\sigma(y).$$

Beweis: Aufgrund des Transformationsverhaltens der Fundamentallösung unter der Abbildung $x \mapsto \frac{x-z}{r}$, ist die Greensche Funktion für den Ball $B(z, r)$ gegeben durch

$$G_{B(z, r)}(x, y) = r^{2-n} G_{B(0,1)}\left(\frac{x-z}{r}, \frac{y-z}{r}\right).$$

Weil die beiden gegebenen Funktionen f und g getrennt in die beiden Summanden eingehen, genügt es die beiden Fälle $g = 0$ und $f = 0$ getrennt zu betrachten. Die Argumente des Satzes 4.2 zeigen, dass im Fall $g = 0$ die angegebene Funktion auf $B(z, r)$ die Poissongleichung löst. Wegen der Symmetrie der Greenschen Funktion setzt sich $x \mapsto G_{B(z,r)}(y, x)$ stetig auf $\overline{B(z, r)}$ fort und verschwindet auf dem Rand $x \in \partial B(z, r)$. Also löst die angegebene Funktion das Dirichletproblem zu $g = 0$.

Im Fall $f = 0$ ist die vermeintliche Lösung des Dirichletproblems auf $B(z, r)$ offenbar harmonisch. Der entsprechende Integralkern ist in den Koordinaten von $B(0, 1)$ für $|y| = 1$ und $n > 2$ ist gegeben durch (Der Fall $n = 2$ verbleibt als Übungsaufgabe):

$$\begin{aligned} K(x, y) &= -\nabla_y G_{B(0,1)}(x, y) \cdot \frac{y}{|y|} = -\nabla_y G_{B(0,1)}(y, x) \frac{y}{|y|} \\ &= -\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{y}{|y|} \nabla_y \left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2} |\tilde{y}-x|^{n-2}} \right) \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \frac{y}{|y|} \left(\frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{y}{|y|^n |\tilde{y}-x|^{n-2}} - \frac{(\tilde{y}-x) \left(\frac{1}{|y|^2} - 2\frac{y^2}{|y|^4} \right)}{|y|^{n-2} |\tilde{y}-x|^n} \right) \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \frac{1-xy - (|x|^2 - 2xy + 1) + (1-xy)}{|x-y|^n} = \frac{1-|x|^2}{n\omega_n |x-y|^n}. \end{aligned}$$

Also ist (i) der Integralkern $K(x, y)$ für $(x, y) \in B(0, 1) \times \partial B(0, 1)$ positiv.

(ii) Für alle $x \in \partial B(0, 1)$ und $\epsilon > 0$ konvergiert die Familie von Funktionen $y \mapsto K(\lambda x, y)$ im Grenzwert $\lambda \uparrow 1$ auf $y \in \partial B(0, 1) \setminus B(x, \epsilon)$ gleichmäßig gegen Null, und

(iii) das Einsetzen der harmonischen Funktion $u = 1$ in die obige Folgerung aus dem Greenschen Darstellungssatz zeigt $\int_{\partial B(0,1)} K(x, y) d\sigma(y) = 1$ für $x \in B(0, 1)$.

Wegen (i)-(iii) konvergiert im Grenzwert $\lambda \uparrow 1$ für stetige g die Familie von Funktionen $x \mapsto \int_{\partial B(0,1)} g(y) K(\lambda x, y) d\sigma(y)$ auf $x \in \partial B(0, 1)$ gleichmäßig gegen g . **q.e.d.**

Für eine auf $B(z, r)$ harmonische und auf $\overline{B(z, r)}$ stetige Funktion u gilt also:

$$u(x) = \frac{1 - \frac{|x-z|^2}{r^2}}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{u(z+ry)}{\left|\frac{x-z}{r} - y\right|^n} d\sigma(y) = \frac{r^2 - |x-z|^2}{nr\omega_n} \int_{\partial B(z,r)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y).$$

Dadurch ist u auf $B(z, r)$ allein durch seine Werte auf $\partial B(z, r)$ bestimmt. Durch Ableiten nach x erhalten wir ähnliche Formeln für die Werte der Ableitungen von u . Die Formel impliziert die Mittelwerteigenschaft. Weil für $y \in \partial B(z, r)$ die Taylorreihe von $x \mapsto |x-y|^{-n} = (y^2 - 2xy + x^2)^{-\frac{n}{2}}$ in $x = z$ auf allen Bällen $B(z, r')$ mit $r' < r$ gleichmäßig gegen $|x-y|^{-n}$ konvergiert, ist jede harmonische Funktion analytisch.

Korollar 4.16. *Auf offenen Gebieten sind harmonische Funktionen analytisch.* **q.e.d.**

Korollar 4.17. Sei u eine harmonische Funktion auf einem Gebiet $\Omega \supset \overline{B(x, r)}$. Dann gibt es eine Konstante $C(n, k)$, die nur von der Dimension n und der Ordnung k abhängt, so dass bei x alle k -ten partiellen Ableitungen von u beschränkt sind durch

$$\left| \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right| \leq \frac{C(n, k)}{r^k} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x, r))}.$$

Beweis: Die Ungleichung folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel 4.15 und der als Übungsaufgabe zu zeigenden Ungleichung $\left| \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \frac{1}{|x|^n} \right| \leq \frac{C(n, k)}{|x|^{n+k}}$ für $|x| \neq 0$. **q.e.d.**

Satz von Liouville 4.18. Eine auf \mathbb{R}^n beschränkte harmonische Funktion ist konstant.

Beweis: Weil u beschränkt ist, sind die Normen $\|u\|_{L^\infty(\partial B(x, r))}$ beschränkt. Dann folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel, dass die ersten partiellen Ableitungen von u durch ein Vielfaches von $1/r$ beschränkt sind. Aus dem Grenzwert $r \rightarrow \infty$ folgt, dass alle ersten partiellen Ableitungen von u verschwinden und u konstant ist. **q.e.d.**

Lemma 4.19. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, das 0 enthält, und u sei eine harmonische beschränkte Funktion auf $\Omega \setminus \{0\}$. Dann lässt sich u harmonisch auf Ω fortsetzen.

Beweis: Auf einem kleinen Kreis $B(0, r) \subset \Omega$ gibt es wegen Satz 4.15 eine eindeutige Lösung \tilde{u} des Dirichletproblems mit den Randwerten von $u|_{\partial B(0, r)}$. Die Familie von harmonischen Funktionen $u_\epsilon(x) = \tilde{u}(x) - u(x) + \epsilon G_{B(0, r)}(x, 0)$ auf $B(0, r) \setminus \{0\}$ verschwinden aufgrund der Konstruktion auf dem Rand $\partial B(0, r)$. Für jedes $\epsilon > 0$ ist u_ϵ auf $B(0, r) \setminus \{0\}$ nicht negativ, weil andernfalls wegen der Beschränktheit von u und der Unbeschränktheit von $G_{B(0, r)}(\cdot, 0)$ die harmonische Funktion u_ϵ auf $B(0, r) \setminus \{0\}$ ein negatives Minimum im Inneren hätte, was dem Starken Maximumprinzip widerspricht. Analog ist u_ϵ für negative ϵ nicht positiv, weil andernfalls u_ϵ ein positives Maximum im Inneren von $B(0, r) \setminus \{0\}$ hätte. Dann muss $u_0 = \tilde{u} - u$ identisch verschwinden. Also ist \tilde{u} eine harmonische Fortsetzung von u auf $B(0, r)$. **q.e.d.**

4.5 Dirichlet's Prinzip

Es gibt eine andere Methode um das Dirichletproblem zu lösen. Die Lösung lässt sich eindeutig dadurch charakterisieren, dass sie das Minimum eines Energiefunktional ist.

Dirichlet's Prinzip 4.20. Sei Ω ein beschränktes offenes Gebiet, auf dem der Gaußsche Satz gilt. Für alle stetigen Funktionen f auf Ω und g auf $\partial\Omega$ ist die Lösung des Dirichletproblems 4.4 gleich dem Minimum folgenden Funktional auf der Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\bar{\Omega}$, die auf $\partial\Omega$ gleich g sind:

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u - u f \right) d^n x.$$

Beweis. Sei u eine Lösung des Dirichletproblems und w eine auf $\bar{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, die auf $\partial\Omega$ gleich g ist. Aus partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (-\Delta u - f)(u - w) d^n x = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)) d^n x. \\ \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u - fu) d^n x &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w - fw) d^n x \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u d^n x + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla w \cdot \nabla w - fw \right) d^n x \end{aligned}$$

Hier haben wir die Cauchy Schwarz'sche Ungleichung benutzt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w d^n x &\leq \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w d^n x + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla w) \cdot (\nabla u - \nabla w) d^n x = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u d^n x + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla w \cdot \nabla w d^n x. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich also $I(u) \leq I(w)$. Wenn umgekehrt u ein Minimum von $I(u)$ ist, dann erfüllen alle $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, die auf $\partial\Omega$ verschwinden

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} I(u + tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(I(u) + t \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - fv) d^n x + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v d^n x \right) \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - fv) d^n x = \int_{\Omega} (-\Delta u - f)v d^n x. \end{aligned}$$

Aus der letzten partiellen Integration folgt dann $-\Delta u = f$ auf Ω .

q.e.d.

Zum Abschluss wollen wir noch erwähnen, dass die Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen Dirichletproblems auch aus dem Funktional folgt. Die Differenz zweier Lösungen ist nämlich harmonisch und verschwindet auf dem Rand. Für diese Wahl $f = 0$ und $g = 0$ ist das Funktional offensichtlich nicht negativ, und genau dann Null, wenn u konstant ist, also wegen der Randbedingung verschwindet. Mit Hilfe des Dirichletprinzips lässt sich sogar für eine große Klasse von Funktionen f und g zeigen, dass das entsprechende Funktional nur genau einen Extremwert hat, der immer ein Minimum ist, und die Lösung des Dirichletproblems ergibt.