

Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. Wenn diese Funktionen von mehreren Variablen abhängen, dann sind die Ableitungen, die in der entsprechenden Differentialgleichung mit der Funktion in Beziehung gebracht werden, partielle Ableitungen. Dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Typischerweise sind Differentialgleichungen im folgenden Sinne *lokale* Gleichungen, dass sie nur die Werte einer gesuchten Funktion und endlich vieler Ableitungen für *einen* Wert der Variablen miteinander in Beziehung bringen. Mit Differentialgleichungen werden also Gleichungen folgender Form bezeichnet

$$f(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x), D^k u(x)) = 0.$$

Hierbei ist $x \mapsto u(x)$ die gesuchte Funktion, die auch vektorwertig sein kann, und $x \mapsto D^k u(x)$ bezeichnet die vektorwertige Funktion aller k -ten (partiellen) Ableitungen von u nach den Variablen x . Zuletzt ist F eine möglicherweise vektorwertige Funktion.

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen, so dass auch nur die Ableitungen nach einer Variablen auftauchen.

Definition 1.1. *Differentialgleichungen, in denen nur die Ableitungen nach einer Variablen auftauchen, heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt, um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall eines Punktteilchens im

Schwerefeld nehmen die Newton'schen Gleichungen folgende Form an:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -mg.$$

In dieser Gleichung taucht nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von u des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential- und Integralrechnung schon kennen:

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der linken und rechten Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.2. *Eine Lösung ist eine Funktion u , die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

In der Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -mg$$

hängen m (die Masse des Teilchens) und g (das Schwerfeld) nicht von t ab. Deshalb ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -g.$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite integrieren erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\dot{u}(t) - \dot{u}(t_0) = -g(t - t_0) \quad \text{bzw.} \quad \dot{u}(t) = \dot{u}(t_0) - g(t - t_0).$$

Nach nochmaligem Integrieren erhalten wir schließlich

$$u(t) = u(t_0) + \dot{u}(t_0)(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Funktion $u(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + u_1(t - t_0) + u_0$ ist auf \mathbb{R} unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\frac{du}{dt}(t) = -g(t - t_0) + u_1 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u}{dt^2}(t) = -g.$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$u(t) = -\frac{g(t-t_0)^2}{2} + u_1(t-t_0) + u_0 \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0 \quad \text{und} \quad \frac{du}{dt}(t_0) = u_1.$$

Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.3. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung $m \frac{d^2 u}{dt^2} = -gm$ ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die Werte der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt t_0 interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch $(u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$. Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes (u_0, u_1) gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch*

$$u(t) = -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + u_1(t-t_0) + u_0.$$

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir dann aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs-)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist dann gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da wir uns typischerweise auch die Funktionswerte vorgeben, also die Nullte-Ableitung, sollten wir im Allgemeinen alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben.

Definition 1.4. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.5. *Ein Anfangswertproblem ist die Suche nach einer Lösung u einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n , die zu einem gegebenen Wert t_0 der Variablen t (nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten $n-1$ Ableitungen vorgegebene Werte u_0, \dots, u_{n-1} annimmt:*

$$u(t_0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(t_0) = u_1, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t_0) = u_{n-1}.$$

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solches Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich heraus, dass manche dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.6. (i) Das Anfangswertproblem $\frac{du}{dt} = 2\sqrt{|u|}$ mit $u(0) = 0$ hat die Lösungen

$$u(t) = \begin{cases} -(t+a)^2 & \text{für } t \leq -a \\ 0 & \text{für } -a < t < b \\ (t-b)^2 & \text{für } b \leq t \end{cases}$$

Hier sind a und b zwei nichtnegative reelle Zahlen oder ∞ .

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem $\frac{du}{dt} = f$ mit $u(0) = 0$ keine Lösung.

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) eine Stammfunktion. Wenn nämlich F eine solche Stammfunktion wäre, dann wäre $x \mapsto F(x)$ monoton wachsend und $x \mapsto F(x) - x$ monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muss für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ entweder gelten

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F , dass F zwischen x_1 und x_2 konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von $x \mapsto F(x) - x$, dass diese Funktion zwischen x_1 und x_2 konstant ist. Also ist die Ableitung von F zwischen x_1 und x_2 entweder konstant gleich 0 oder konstant gleich 1. Damit ist F keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Im einfachsten Fall sind die gesuchten Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen sollen, reelle Funktionen. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0, \quad \text{wobei } f : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei haben wir angenommen, dass nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit

einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir annehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, dann hat sie die Form

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \quad \text{mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wenn die Funktion u Werte in einem Vektorraum V annimmt, dann hat sie die Form

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \quad \text{mit einer Funktion} \quad f : \mathbb{R} \times V^n \rightarrow V.$$

Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Wenn dabei f nicht von t abhängt heißt das System autonom ansonsten nicht autonom. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.7. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem von obiger Form lässt sich durch Vergrößerung von V auf V^n in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$ zu einer V^n -wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

offenbar äquivalent zu $\frac{d}{dt}(u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) = (\dot{u}, \dots, u^{(n-1)}, f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}))$.

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$u(t_0) = u_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \quad \text{über in} \quad (u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})(t_0) = (u_0, \dots, u_{n-1}). \textbf{q.e.d.}$$

Im Folgenden werden wir uns also bei der Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme erster Ordnung beschränken können.

Beispiel 1.8. *Die Differentialgleichung $m \frac{d^2 u}{dt^2} = -gm$ ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.3 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.9. Eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hierbei ist u eine gesuchte Funktion von I mit Werten in einem Vektorraum V (z.B. \mathbb{K}^n) und A eine Abbildung von I in die linearen Abbildungen von V auf V (oder im Falle eines normierten Vektorraumes $\mathcal{L}(V)$, die linearen stetigen Abbildungen von V nach V). Im Fall von $V = \mathbb{K}^n$ können wir $\mathcal{L}(V)$ mit den $n \times n$ Matrizen $\mathbb{K}^{n \times n}$ identifizieren und V mit den Spaltenvektoren in \mathbb{K}^n . Dann ist $A(t)u(t)$ das Matrix-Produkt der $n \times n$ -Matrix $A(t)$ mit dem Spaltenvektor $u(t)$, also wieder ein Spaltenvektor. Schließlich ist b eine Abbildung von I nach V . Wenn $b(t) = 0$ ist, dann heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn A und b nicht von t abhängen, also konstante Abbildungen sind, heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nicht autonom.

Satz 1.10. Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über \mathbb{K} . Wenn also u und \tilde{u} Lösungen sind, dann sind auch $u + \tilde{u}$ und λu für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.

Beweis: Seien u und \tilde{u} zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{u}}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t)$, dann erfüllt $u - \tilde{u}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)(u(t) - \tilde{u}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden homogenen Systems. **q.e.d.**

Das wichtigste mathematische Mittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.11. (Banachscher Fixpunktsatz) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine Lipschitzstetige Abbildung von X nach X mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt.

Beweis: Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n -fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0), f^l(x_0)) && \leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n}) \frac{L^n}{1 - L} d(f(x_0), x_0) && \leq \frac{L^n}{1 - L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Wegen $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f . Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1 - L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

Um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungssystemen in normierten Vektorräumen zu zeigen, müssen wir Funktionen von Intervallen in normierte Vektorräume integrieren. Dafür wollen wir das Riemannintegral auf solche Funktionen ausdehnen. Für jedes Teilintervall $I \subset [a, b]$ eines kompakten Intervalles $[a, b]$ und jedes Element v eines normierten Vektorraumes V über \mathbb{K} definiert

$$v\chi_I : [a, b] \rightarrow V, \quad t \mapsto \begin{cases} v & \text{falls } t \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion in $B([a, b], V)$. Dabei kann I nur aus einem Punkt bestehen. Die endlichen Linearkombinationen solcher Funktionen heißen Treppenfunktionen. Sie bilden einen

Untervektorraum von $B([a, b], V)$. Wir definieren das Integral $\int_a^b v \chi_I(t) dt$ als v mal der Intervalllänge von I , und setzen es linear auf alle Treppenfunktionen fort. Es folgt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \leq (b-a) \|f\|_\infty.$$

für jede Treppenfunktion f . Also definiert das Integral eine stetige lineare Abbildung von dem normierten Untervektorraum aller Treppenfunktionen in $B([a, b], V)$ nach V . Wir nennen die Elemente des Abschlusses dieses Unterraumes von $B([a, b], V)$ einfache Funktionen (siehe Dieudonné: Grundzüge der modernen Analysis 1 Abschnitt 7.6).

Satz 1.12. *In einem Banachraum V ist $f \in B([a, b], V)$ genau dann einfach, wenn es für jedes $x \in [a, b]$ Elemente $v, w \in V$ gibt, und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|f(y) - v\| < \epsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x) \cap [a, b]$ und $\|f(y) - w\| < \epsilon$ für alle $y \in (x, x + \delta) \cap [a, b]$ gilt. Jede einfache Funktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

Beweis: Wenn f die obige Bedingung erfüllt, dann ist für jedes $\epsilon > 0$ jedes $x \in [a, b]$ in einem in $[a, b]$ offenen Teilintervall $I_x \subset [a, b]$ enthalten, so dass die Abstände zwischen Funktionswerten von f an zwei Punkten von $I_x \cap (-\infty, x)$ oder von $I_x \cap (x, \infty)$ jeweils kleiner als ϵ sind. Die offene Überdeckung $\bigcup_{x \in [a, b]} I_x$ der kompakten Menge $[a, b]$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Wir ordnen die Randpunkte und Indexpunkte der entsprechenden Intervalle I_x zusammen mit a und b der Größe nach an. Dann gibt es eine Treppenfunktion in $B(f, \epsilon) \subset B([a, b], V)$, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten jeweils konstant ist. Das gilt für alle $\epsilon > 0$, und f ist eine einfache Funktionen.

Wenn umgekehrt f einfach ist, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g \in B(f, \epsilon/2)$. Für jedes $x \in [a, b]$ wählen wir $\delta > 0$ so, dass g auf $(x - \delta, x) \cap [a, b]$ und $(x, x + \delta) \cap [a, b]$ konstant ist. Der Abstand zwischen Funktionswerten von f an zwei Punkten in $(x - \delta, x) \cap [a, b]$ oder in $(x, x + \delta) \cap [a, b]$ ist also jeweils kleiner als ϵ . Das gilt für jedes $\epsilon > 0$ mit einem geeignet gewählten $\delta > 0$. Für streng monotone wachsende bzw. fallende gegen x konvergierende Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen mit Grenzwerten v bzw. w . Dann erfüllt f die Bedingung des Satzes. Wenn x nicht zu den abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen einer in $B([a, b], V)$ gegen f konvergierenden Folge von Treppenfunktionen gehört, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass die Abstände zwischen den Funktionswerte von f an zwei Punkten in $(x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$ kleiner als ϵ sind. Deshalb ist f an höchstens abzählbar vielen Punkten unstetig. **q.e.d.**

Die Summe der charakteristischen Funktionen der Intervalle $(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$ ist auf $[0, 1]$ riemannintegrierbar mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen, aber nicht einfach.

Für einen Banachraum V ist der Abschluss des Unterraumes der Treppenfunktionen in $B([a, b], V)$ auch ein Banachraum. Weil das Integral lipschitzstetig ist, bildet es Cauchyfolge bzw. Nullfolgen von Treppenfunktionen auf Cauchyfolgen bzw. Nullfolgen

in V ab. Der Grenzwert der Integrale eine Folge von Treppenfunktionen, die gegen eine einfache Funktion konvergiert ist dann unabhängig von der Wahl dieser Folge und definiert das Integral der einfachen Funktion. Aus der Lipschitzstetigkeit von $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$, $f \mapsto \|f\|$ und $\|f\| \mapsto \int_a^b \|f(t)\|dt$ folgt für einfache Funktionen f

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Satz 1.13. Für eine einfache Funktion $f \in B([a, b], V)$ ist $F : [a, b] \rightarrow V$ mit $F(t) = \int_a^t f(s)ds$ stetig und überall dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$.

Beweis: Für $t, t_0 \in [a, b]$ gilt $\|F(t) - F(t_0)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s)\|ds \leq |t - t_0| \cdot \|f\|_\infty$. Also ist F Lipschitzstetig. Aus $\|f(s) - f(t_0)\| < \epsilon$ für $s \in [t_0, t] \cap [a, b]$ bzw. $[t, t_0] \cap [a, b]$ folgt

$$\left\| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0) \right\| \leq \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s) - f(t_0)\|ds < \epsilon.$$

Insbesondere ist F überall dort, wo f stetig ist, differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$. **q.e.d.**

Aus dem Mittelwertsatz 8.5.1. (Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis 1 Abschnitt 8.5) folgt, dass eine stetige Funktion $F : [a, b] \rightarrow V$, die außerhalb einer abzählbaren Teilmenge differenzierbar ist, und deren Ableitung dort mit einer einfachen Funktion f übereinstimmt, sich nur um eine Konstante von $\int_a^x f(t)dt$ unterscheidet.

Satz 1.14. (Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Intervall, $A : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V und $b : I \rightarrow V$ stetig. Dann besitzt für jedes $u_0 \in V$ und $t_0 \in I$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$ mit $u(t_0) = u_0$ genau eine differenzierbare Lösung $u : I \rightarrow V$.

Bemerkung 1.15. Jede Lösung der Differentialgleichung muss differenzierbar sein und damit auch stetig. Dann muss sie sogar stetig differenzierbar sein.

Beweis: Sei $[\alpha, \beta] \subset I$ ein kompaktes Teilintervall von I , das t_0 enthält. Weil A auch auf $[\alpha, \beta]$ stetig ist, ist A auf $[\alpha, \beta]$ beschränkt und $\|A\|_\infty = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|A(t)\| < \infty$. Wir nehmen zunächst an, dass $L = (\beta - \alpha)\|A\|_\infty$ kleiner ist als 1. Dann erfüllt die Abbildung

$$f : C([\alpha, \beta], V) \rightarrow C([\alpha, \beta], V), \quad u \mapsto f(u) \text{ mit } f(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(s)u(s) + b(s))ds$$

für alle $u, \tilde{u} \in C([\alpha, \beta], V)$ die Gleichung

$$(f(u) - f(\tilde{u}))(t) = \int_{t_0}^t A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))ds.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(\tilde{u})\|_\infty &\leq \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot \|A\|_\infty(\beta - \alpha) \\ &= \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot L. \end{aligned}$$

Also ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$. Wegen dem Banachschen Fixpunktsatz hat f genau einen Fixpunkt $u \in C([\alpha, \beta], V)$, der für alle $t \in [\alpha, \beta]$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(s)u(s) + b(s))ds$$

erfüllt. Dann gilt aber wegen des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung:

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ und } u(t_0) = u_0.$$

Also ist u eine Lösung des Anfangswertproblems auf (α, β) .

Wenn \tilde{u} auf (α, β) eine zweite Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\tilde{u}}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t) \quad \text{und} \quad \tilde{u}(t_0) = u_0$$

ist, dann folgt wieder aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\tilde{u}(s) + b(s))ds.$$

Daraus folgt $f(\tilde{u}) = \tilde{u}$ und wegen dem Banachschen Fixpunktsatz $u = \tilde{u}$.

Wenn $(\beta - \alpha)\|A\|_\infty > 1$, dann wählen wir eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (α, β) , so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Punkt t_n in der Vereinigung der offenen Bälle um t_0, \dots, t_{n-1} mit Radius $\frac{1}{3\|A\|_\infty}$ liegt. Induktiv folgt, dass die Anfangswertprobleme $\dot{u}_n(t) = A(t)u_n(t) + b(t)$ mit $u_n(t_n) = u_{n-1}(t_n)$ auf der Vereinigung aller offenen Bälle um t_0, \dots, t_n mit Radius $\frac{1}{3\|A\|_\infty}$ genau eine Lösung haben und mit der einzigen Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems übereinstimmen. Also hat das ursprüngliche Anfangswertproblem im Inneren jedes kompakten Teilintervalls von I , das t_0 enthält, genau eine Lösung. Dann hat es auf der Vereinigung I aller solchen Teilintervalle genau eine Lösung. **q.e.d.**

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt sofort:

Korollar 1.16. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum, und $A : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ und $b : I \rightarrow V$ stetige Abbildungen. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I, V) \rightarrow V, u \mapsto u(t_0)$ einen linearen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf V . Für jede Lösung \tilde{u} der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ induziert die Abbildung $C(I, V) \rightarrow V, u \mapsto u(t_0) - \tilde{u}(t_0)$ einen affinen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung nach V . **q.e.d.**

Insbesondere haben die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Für reelle gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung stimmt die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Nachdem wir für eine erste Klasse von Differentialgleichungen die Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblems gezeigt haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen ausrechnen können.

Beispiel 1.17. Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen jetzt an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= F(t) + f(t) - 2S(t) \\ \dot{F}(t) &= -S(t) + f(t) \\ \dot{f}(t) &= S(t) + F(t) - 2f(t)\end{aligned}$$

Beispiel 1.18. Seien $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Wenn u eine Nullstelle bei einem $t_1 \in \mathbb{R}$ hat, dann stimmt u mit der eindeutigen Lösung $u = 0$ des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems mit $u(t_1) = 0$ überein. Andernfalls hat u keine Nullstelle und wir können die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{d}{dt} \ln(u(t)) = A(t) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0.$$

Wir erhalten

$$\ln(u(t)) = \int_{t_0}^t A(s)ds + \ln(u_0) \quad \text{bzw.} \quad u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right) u_0.$$

Für alle $s \in \mathbb{R}$ hat folgendes Anfangswertproblem also die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \dot{u}_s(t) &= A(t)u_s(t) \quad \text{mit} \quad u_s(s) = b(s) \\ u_s(t) &= \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) b(s) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(r)dr\right) \exp\left(-\int_{t_0}^s A(r)dr\right) b(s). \end{aligned}$$

$$\text{Dann folgt} \quad \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t u_s(t)ds = u_t(t) + \int_{t_0}^t A(t)u_s(t)ds = b(t) + A(t) \int_{t_0}^t u_s(t)ds.$$

Also löst $\int_{t_0}^t u_s(t)ds$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = 0.$$

Wir erhalten also die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems als die Summe des homogenen Anfangswertproblems und dem Integral über alle Anfangswertprobleme

$$\int_{t_0}^t u_s(t)ds \quad \text{mit} \quad \dot{u}_s(t) = A(t)u_s(t) \quad \text{und} \quad u_s(s) = b(s).$$

des homogenen Problems, wobei wir als Anfangswerte jeweils den inhomogenen Term einsetzen. Dieses Verfahren wollen wir jetzt rechtfertigen und verallgemeinern.

Satz 1.19. (Variation der Parameter) Sei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und V ein Banachraum. Dann ist die Abbildung

$$C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V \rightarrow C([\alpha, \beta], V) \quad (A, b, t_0, u_0) \mapsto u$$

auf die eindeutige Lösung u des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

stetig. Die Einschränkung dieser Abbildung auf ein festes t_0 hängt analytisch von A , b und u_0 ab. Für jedes $(A, b, t_0) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta]$ ist dann die entsprechende Einschränkung der Abbildung ein affiner Isomorphismus von $u_0 \in V$ auf die Menge der Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, berechnen wir mit ihm die Lösung eines inhomogenen Anfangswertproblems aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems.

Korollar 1.20. Sei $A : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung auf einem offenen nicht notwendigerweise beschränkten Intervall und $b : I \rightarrow V$ auch. Dann setzen sich wegen der Variation der Parameter die eindeutigen Lösungen $u_s(t)$ der Anfangswertprobleme

$$\dot{u}_s(t) = A(t)u_s(t) \quad \text{mit} \quad u_s(s) = b(s)$$

zu einer stetigen Abbildung $I \times I \mapsto V \quad (s, t) \mapsto u_s(t)$ zusammen. Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit} \quad u(t_0) = u_0$$

ist die Summe des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems und des Integrals

$$\int_{t_0}^t u_s(t) ds.$$

Beweis: Wegen des vorangehenden Satzes ist die Abbildung $s \mapsto u_s(t)$ auf allen Teilintervallen $[\alpha, \beta] \subset I$ stetig von $[\alpha, \beta]$ nach $C([\alpha, \beta], V)$. Dann ist für alle $t_0 \in [\alpha, \beta]$

$$(\alpha, \beta) \times (\alpha, \beta) \rightarrow V \quad (x, y) \mapsto \int_{t_0}^x u_s(y) ds.$$

wegen Satz 1.13 eine stetig differenzierbare Funktion mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^x u_s(y) ds = u_x(y) \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{t_0}^x u_s(y) ds = \int_{t_0}^x A(y) u_s(y) ds = A(y) \int_{t_0}^x u_s(y) ds.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t u_s(t) ds = u_t(t) + \int_{t_0}^t A(t) u_s(t) ds = b(t) + A(t) \int_{t_0}^t u_s(t) ds \text{ und } \int_{t_0}^{t_0} u_s(t) ds = 0.$$

Diese Funktion löst das inhomogene Anfangswertproblem mit $u_0 = 0$. Wegen Satz 1.10 ist die eindeutige Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems die Summe dieser Funktion und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems. **q.e.d.**

Beweis von Satz 1.19: Offenbar ist die Abbildung

$$C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V \times C([\alpha, \beta], V) \rightarrow C([\alpha, \beta], V)$$

$$(A, b, t_0, u_0, u) \mapsto f_{A,b,t_0,u_0}(u) \text{ mit } f_{A,b,t_0,u_0}(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(s)u(s) + b(s)) ds$$

stetig differenzierbar und hängt für festes t_0 analytisch von A , b , u_0 und u ab. Weil das Integral linear ist, ist sie sogar eine Summe von linearen Abbildungen und einer bilinearen Abbildung. Damit ist f sogar ein Polynom in A , b , u_0 , und u . Die

Lipschitzkonstante \tilde{L} der Abbildung $\tilde{f} = f_{\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{u}_0}$, mit einem Element $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V$ können wir abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(u) - \tilde{f}(\tilde{u})\|_\infty &= \left\| \int_{\tilde{t}_0}^t A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))ds + \int_{\tilde{t}_0}^t (\tilde{A}(s) - A(s))(u(s) - \tilde{u}(s))ds \right\|_\infty \\ &\leq |\beta - \alpha| \|u - \tilde{u}\|_\infty \left(\|A\|_\infty + \|\tilde{A} - A\|_\infty \right). \end{aligned}$$

Wir wählen das Intervall $[\alpha, \beta]$ und $\epsilon > 0$ so klein, dass die den Elementen $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{u}_0)$ in dem ϵ -Ball von (A, b, t_0, u_0) entsprechenden \tilde{f} Lipschitz-stetig sind mit Lipschitzkonstante $\tilde{L} \leq |\beta - \alpha|(\|A\|_\infty + \epsilon) \leq L_0 < 1$. Für $n > m \geq N \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}^n(u) - \tilde{f}^m(u)\|_\infty &\leq \left\| \tilde{f}^m(\tilde{f}^{n-m}(u) - \tilde{f}^0(u)) \right\|_\infty \leq \tilde{L}^m \left\| \sum_{l=1}^{n-m} (\tilde{f}^l(u) - \tilde{f}^{l-1}(u)) \right\|_\infty \\ &\leq \tilde{L}^N \left(\sum_{l=0}^{n-m-1} \tilde{L}^l \|\tilde{f}(u) - u\|_\infty \right) \leq \frac{\tilde{L}^N}{1 - \tilde{L}} \|\tilde{f}(u) - u\|_\infty. \end{aligned}$$

Wir wählen die Startfunktion $u = 0$. Dann ist $\|\tilde{f}(u) - u\|$ beschränkt durch

$$\|\tilde{f}(0) - 0\|_\infty \leq \|u_0\| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + |\beta - \alpha| \left(\|b\|_\infty + \|\tilde{b} - b\|_\infty \right).$$

Weil auf dem ϵ -Ball um (A, b, t_0, u_0) die Lipschitzkonstante uniform durch $L_0 < 1$ beschränkt ist, konvergiert dann die Folge $(\tilde{f}^n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Anfangswertproblems. Der Grenzwert ist als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Abbildungen eine stetige Funktion von (A, b, t_0, u_0) , die für festes t_0 analytisch von (A, b, u_0) abhängt (also eine konvergente Potenzreihe besitzt).

Wenn die Lipschitzkonstante größer als 1 ist, überdecken wir das Intervall durch hinreichend kleine Teilintervalle und setzen die entsprechenden Lösungen fort. **q.e.d.**

Damit haben wir die Berechnung der Lösung auf das Lösen des homogenen Anfangswertproblems zurückgeführt.

Satz 1.21. (*Exponentialfunktion*) Die Potenzreihe $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ konvergiert für alle $A \in \mathcal{L}(V)$, wenn V ein Banachraum ist. Außerdem gilt

$$\int_0^t A \exp(sA) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \exp(tA) - \mathbf{1} \quad \frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp((tA)A).$$

Beweis: Aus $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ folgt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Dann folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion auf \mathbb{R} und Satz 1.13. **q.e.d.**

Korollar 1.22. (Lösung des autonomen Anfangswertproblems) Das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = Au(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

mit $A \in \mathcal{L}(V)$ und stetigem $b : I \rightarrow V$ besitzt die eindeutige Lösung

$$u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)A)b(s)ds.$$

Wenn auch b nicht von t abhängt gilt

$$u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0 + \frac{\exp((t - t_0)A) - \mathbf{1}}{A}b = \exp((t - t_0)A)u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^{n+1}A^n}{(n+1)!}b.$$

Beweis: Es genügt wegen der Variation der Parameter zu zeigen, dass das homogene Anfangswertproblem ($b = 0$) durch $u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0$ gelöst wird. Das folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Damit bleibt noch das Problem der Berechnung der Exponentialfunktion. Dazu benutzen wir die Diagonalisierung bzw. Jordannormalform von Matrizen.

Übungsaufgabe 1.23. (i) Aus der Analysis wissen wir, dass das Anfangswertproblem der Differentialgleichung

$$u^{(n)}(t) = 0 \text{ mit } u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}$$

die Lösung

$$u(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{u_l t^l}{l!}$$

besitzt. Dieses Anfangswertproblem ist äquivalent zu den Anfangswertproblemen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbf{1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^l}{l!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l$$

Zeige direkt diese Identität.

(ii) Zeige, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) gilt

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \exp(t\lambda) \cdot \exp \left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(iii) Die Matrix A habe mit der invertierbare Matrix B folgende Jordannormalform:

$$A = B \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{pmatrix} B^{-1}$$

mit Jordanblöcken J_1, \dots, J_n von der Form wie in (ii). Zeige, dass dann gilt

$$\exp(tA) = B \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Beispiel 1.24. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

lässt sich diagonalisieren auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Beispiels der Störche, Frösche und Fliegen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ F(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ F(0) \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.25 (Gronwall). Seien $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $a \in L^1([\alpha, \beta])$ eine nichtnegative lebesgueintegrierbare Funktion und $b, u \in L^\infty([\alpha, \beta])$ beschränkte messbare reelle Funktionen. Gilt die erste der folgenden Ungleichungen für fast alle $t \in [\alpha, \beta]$, dann auch die zweite:

$$u(t) \leq b(t) + \int_{\alpha}^t a(s)u(s)ds \implies u(t) \leq b(t) + \int_{\alpha}^t \exp \left(\int_s^t a(s')ds' \right) a(s)b(s)ds.$$

Beweis: Wir setzen die erste Ungleichung n mal in sich selber ein und erhalten

$$\begin{aligned} u(t) \leq b(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\alpha}^t a(t_1) \int_{\alpha}^{t_1} a(t_2) \cdots \int_{\alpha}^{t_{k-1}} a(t_k) b(t_k) dt_k \cdots dt_1 + \\ + \int_{\alpha}^t a(t_1) \int_{\alpha}^{t_1} a(t_2) \cdots \int_{\alpha}^{t_{n-1}} a(t_n) u(t_n) dt_n \cdots dt_1. \end{aligned}$$

Weil a nicht negativ ist, folgen diese Ungleichungen induktiv aus der ersten Ungleichung. Durch vertauschen der Indizes und der Integrationen erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^t a(t_n) \int_{\alpha}^{t_n} a(t_{n-1}) \cdots \int_{\alpha}^{t_2} a(t_1) u(t_1) dt_1 \cdots dt_n &= \int_{\alpha < t_1 < \cdots < t_n < t} a(t_n) \cdots a(t_1) u(t_1) dt_n \cdots dt_1 \\ &= \int_{\alpha}^t \int_{t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t} a(t_n) \cdots a(t_2) a(t_1) u(t_1) dt_n \cdots dt_1. \end{aligned}$$

Alle Permutationen von t_2, \dots, t_n bilden die offenen Teilmengen

$$\{(t_2, \dots, t_n) \in [t_1, t]^{n-1} \mid t_1 < t_2 < \dots < t_n < t\}$$

auf disjunkte Mengen ab, die zusammen das gleiche Volumen wie $[t_1, t]^{n-1}$ haben. Weil sich $a(t_2) \cdots a(t_n)$ und $dt_n \cdots dt_2$ durch die Permutationen nicht ändert erhalten wir

$$u(t) \leq b(t) + \int_{\alpha}^t \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\int_{\alpha}^s a(s') ds' \right)^{k-1}}{(k-1)!} a(s) b(s) ds + \int_{\alpha}^t \frac{\left(\int_{\alpha}^s a(s') ds' \right)^{n-1}}{(n-1)!} a(s) u(s) ds.$$

Wegen $\int_{\alpha}^t a(s) ds \leq \|a\|_{L^1([\alpha, \beta])}$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_{\alpha}^s a(s') ds' \right)^k}{k!}$ gleichmäßig für $s \in [\alpha, t]$. Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ erhalten wir die zweite Ungleichung. **q.e.d.**

Lemma 1.26. (Fundamentallösung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum und $A : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ stetig. Für $t_0 \in I$ konvergiert die Reihe $F : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$

$$F(t) = \mathbf{1}_V + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t A(t_n) \int_{t_0}^{t_n} A(t_{n-1}) \cdots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \cdots dt_n$$

gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t) \quad \text{mit} \quad F(t_0) = \mathbf{1}.$$

Beweis: Wir können $t > t_0$ annehmen, indem wir andernfalls t durch $-t$, t_0 durch $-t_0$, I durch $-I = \{t \mid -t \in I\}$, $F(s)$ durch $F(-s)$ und $A(s)$ durch $-A(-s)$ ersetzen. Die Funktion $\|F(s)\|$ erfüllt auf dem Intervall $[t_0, t]$ die Voraussetzungen des Gronwallschen Lemmas mit $b = 1$ und $a(s) = \|A(s)\|$. Deshalb ist $\|F(t)\|$ durch die positive Reihe von $\exp(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds)$ beschränkt. Wegen der Konvergenz der Reihe im Beweis des Gronwallschen Lemmas konvergiert die Reihe für $F(t)$ auf kompakten Teilmengen von I gleichmäßig. Aus folgender Gleichung schließen wir mit Satz 1.13 $\dot{F}(t) = A(t)F(t)$:

$$\int_{t_0}^t A(s)F(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^t A(s) \int_{t_0}^s A(t_n) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_n ds = F(t) - F(t_0). \mathbf{q.e.d.}$$

Diese Lösung $F(t)$ heißt Fundamentallösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0.$$

Die lineare Abbildung $F(t)$ bildet jedes u_0 auf den Wert der entsprechenden Lösung an der Stelle t ab. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0 \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad u(t_1) = u_1$$

ist die Fundamentallösung des ersten Anfangswertproblems an der Stelle t_1 als lineare Abbildung invers zu der Fundamentallösung des zweiten Anfangswertproblems an der Stelle t_0 . Deshalb ist die Fundamentallösung eine einmal stetig differenzierbare Abbildung von I in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad \text{mit} \quad u(s) = b(s)$$

ist dann gegeben durch

$$u_s(t) = F(t)F^{-1}(s)b(s).$$

Wegen der Variation der Parameter ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

gegeben durch

$$u(t) = F(t) \left(u_0 + \int_{t_0}^t F^{-1}(s)b(s)ds \right).$$

Deshalb genügt es zum Lösen einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung, die Fundamentallösung zu bestimmen. Wenn alle $A(t)$ miteinander kommutieren:

$$A(t)A(t') = A(t')A(t) \quad \text{für alle } t, t' \in I,$$

wie das im Fall $V = \mathbb{R}$ gilt, dann folgt wie im Beweis des Gronwallschen Lemmas

$$F(t) = \mathbb{1}_V + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t A(t_n) \int_{t_0}^{t_n} A(t_{n-1}) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_n = \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right),$$

im Allgemeinen aber nicht. Im endlichdimensionalen Fall, wenn wir A durch $n \times n$ Matrizen darstellen können, ist allerdings folgende Beziehung sehr nützlich.

Satz 1.27. (*Spur und Determinante*) Sei $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalls I in die \mathbb{K} -wertigen $n \times n$ Matrizen. Dann gilt für die Fundamentallösung

$$F : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n} \text{ mit } \dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ und } F(t_0) = \mathbb{1},$$

$$\frac{d}{dt} \det(F(t)) = \text{Spur}(A(t)) \det(F(t)) \text{ mit } \det(F(t_0)) = 1.$$

Also hat $\det(F(t))$ auf I keine Nullstellen und $F(t)$ ist für alle $t \in I$ invertierbar.

Beweis: Weil die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ ein Polynom in den Einträgen der entsprechenden Matrix ist, ist sie eine analytische Funktion. Wir berechnen zunächst die Ableitung dieser Funktion bei der Matrix B in Richtung der Matrix AB

$$\frac{d}{dt} \det(B + tAB) \big|_{t=0} = \text{Spur}(A) \det(B).$$

Es gilt nämlich

$$\det(B + tAB) = \det((\mathbb{1} + tA)B) = \det(\mathbb{1} + tA) \det(B).$$

Für $t \neq 0$ ist $\det(\mathbb{1} + tA) = \det(t(t^{-1}\mathbb{1} + A)) = t^n \det(t^{-1}\mathbb{1} + A)$ das Produkt von t^n mit dem charakteristischen Polynom von $-A$ bezüglich der Variablen t^{-1} . Der Koeffizient vor t ist dann der zweithöchste Koeffizient des charakteristischen Polynoms von $-A$, also die $-\text{Spur}(-A) = \text{Spur}(A)$:

$$\det(\mathbb{1} + tA) = 1 + t \text{Spur}(A) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt} \det(B + tAB) \bigg|_{t=0} = \text{Spur}(A) \det(B) = \text{Spur}(ABB^{-1} \det(B)).$$

Die adjunkte Matrix $B^{-1} \det(B)$ ist als Matrix der Unterdeterminanten von B auch für nicht invertierbare Matrizen wohldefiniert. Mit der Kettenregel erhalten wir für $F(t)$

$$\frac{d}{dt} \det(F(t)) = \text{Spur}(\dot{F}(t)F^{-1}(t) \det(F(t))) = \text{Spur}(A(t)) \det(F(t)). \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Aus Beispiel 1.18 folgt

$$\det(F(t)) = \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) ds \right).$$

1.4 Floquettheorie

In diesem Abschnitt betrachten wir gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichungssysteme in dem Banachraum V mit periodischen Koeffizienten:

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad \text{mit} \quad A(t + \omega) = A(t) \quad \text{für ein} \quad \omega \in \mathbb{R}^\times \quad \text{und alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ stetig. Sei F die entsprechende Fundamentallösung zu einem $t_0 \in \mathbb{R}$, dann folgt $F(t + \omega) = F(t)M$ mit der Monodromie $M = F(t_0 + \omega)$ aus

$$\dot{F}(t + \omega)M^{-1} = A(t)F(t + \omega)M^{-1} \quad \text{mit} \quad F(t_0 + \omega)M^{-1} = \mathbf{1}_V.$$

Der Anfangswert $u_0 \in V$ ist genau dann Eigenvektor von M mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn $u(t + \omega) = F(t)Mu_0 = \lambda u(t)$ für die entsprechende Lösung $u(t) = F(t)u_0$ gilt.

Wenn G eine stetig differenzierbare Abbildung von \mathbb{R} in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$ ist, wird jede Lösung u obiger Differentialgleichung durch die Abbildung $u \mapsto \tilde{u}$ mit $\tilde{u}(t) = G(t)u(t)$ auf eine Lösung folgender Differentialgleichung abgebildet:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}}(t) &= \frac{d}{dt}G(t)u(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t)\tilde{u}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t)\tilde{u}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{u}(t) \quad \text{mit} \\ \tilde{A}(t) &= \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t). \end{aligned}$$

Die Floquettheorie beantwortet die Frage, wann zwei homogene lineare Differentialgleichungssysteme, deren Koeffizienten periodisch sind bezüglich der Periode $\omega \in \mathbb{R}^\times$ durch ein periodisches invertierbares $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(V))$ aufeinander abgebildet werden.

Satz 1.28. *Seien V ein Banachraum, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ und $\tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ stetig und periodisch mit der Periode $\omega \in \mathbb{R}^\times$. Dann gibt es genau dann eine stetig differenzierbare Abbildung $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$, die*

$$G(t + \omega) = G(t) \quad \text{und} \quad \tilde{A}(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

erfüllt, wenn es ein invertierbares $G \in \mathcal{L}(V)$ gibt, so dass für die beiden entsprechenden Monodromien $\tilde{M} = GMG^{-1}$ gilt.

Beweis: Wenn ein differenzierbares und invertierbares $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ die Koeffizienten $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ auf $\tilde{A}(t) = \dot{G}(t)G^{-1}(t) + G(t)A(t)G^{-1}(t)$ abbildet, dann erfüllen die entsprechenden Fundamentallösungen F und \tilde{F} offenbar

$$\tilde{F}(t) = G(t)F(t)G^{-1}(t_0) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist die Monodromie \tilde{M} des transformierten Systems gleich

$$\tilde{M} = \tilde{F}(t_0 + \omega) = G(t_0 + \omega)F(t_0 + \omega)G^{-1}(t_0) = GMG^{-1} \quad \text{mit} \quad G = G(t_0) = G(t_0 + \omega).$$

Wenn es umgekehrt ein invertierbares $G \in \mathcal{L}(V)$ gibt mit $\tilde{M} = GMG^{-1}$, dann transformiert die stetig differenzierbare Abbildung invertierbare $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ mit $G(t) = \tilde{F}(t)GF^{-1}(t)$ und $G(t_0) = G$ die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf die Lösungen der Differentialgleichungen $\dot{u}(t) = \tilde{A}(t)u(t)$ und erfüllt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$G(t+\omega) = \tilde{F}(t+\omega)GF^{-1}(t+\omega) = \tilde{F}(t)\tilde{M}GM^{-1}F^{-1}(t) = \tilde{F}(t)GF^{-1}(t) = G(t). \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Lemma 1.29. *Eine Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist genau dann von der Form $A = \exp(B)$ mit $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, wenn A invertierbar ist. Die Eigenwerte von B sind die Logarithmen der Eigenwerte von A und bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ eindeutig.*

Beweis: Wenn es eine Matrix B gibt mit $\exp(B) = A$, dann besitzt B eine Jordansche Normalform. Dann werden durch $z \mapsto \exp(z)$ die Eigenwerte von B auf die Eigenwerte von A abgebildet. Also hat dann A keinen Eigenwert Null und ist invertierbar.

Wenn umgekehrt A invertierbar ist, dann genügt es offenbar für jeden Jordanblock von A eine Matrix B zu finden, so dass $\exp(B)$ gleich dem Jordanblock ist. Aus der Taylorreihe von $\ln(1+z)$ bei $z=0$ folgt folgende Identität formaler Potenzreihen:

$$1+z = \exp(\ln(1+z)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l z^l}{l} \right)^m.$$

Weil echte obere Dreiecksmatrizen nilpotent sind, ist folgende Reihe endlich und definiert eine Umkehrfunktion von \exp auf Jordanblöcken mit $\lambda \neq 0$:

$$\ln \left(\lambda \mathbb{1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda^{-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \ln(\lambda) \mathbb{1} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^{-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Korollar 1.30. *Sei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ stetig und periodisch mit der Periode $\omega \in \mathbb{R}^\times$. Dann gibt es eine stetig differenzierbare periodische Abbildung $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ in die invertierbaren $n \times n$ -Matrizen mit Periode ω , die das Differentialgleichungssystem $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ in ein autonomes System $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ transformiert.*

Beweis: Sei M die Monodromie des periodischen Differentialgleichungssystems $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$. Wegen dem vorangehenden Lemma gibt es dann eine Matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ mit $\exp(B) = M$. Das autonome Differentialgleichungssystem $\dot{u}(t) = \tilde{A}u(t)$ mit $\tilde{A} = B/\omega$ hat die Fundamentallösung $F(t) = \exp((t-t_0)\tilde{A})$ und die Monodromie $\tilde{M} = F(t_0+\omega) = \exp(B) = M$. Dann folgt die Aussage aus Satz 1.28. **q.e.d.**

1.5 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit auf nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen. Dabei müssen wir allerdings an die Nichtlinearität gewisse Einschränkungen machen.

Definition 1.31. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal Lipschitzstetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x').$$

Satz 1.32. *(Picard-Lindelöf, lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei V ein Banachraum, $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \rightarrow V$ stetig und bezüglich der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig, d.h. für jedes $(t_0, u_0) \in O$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(u_0, \delta)$*

$$\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\|$$

gilt. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ ein $\delta > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(u_0, \delta)} \subset O$ auch $\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\|$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : u \mapsto F(u) \quad \text{mit} \quad F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(u_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], V)$. Sei

$$\|f(\cdot, u_0)\|_\infty = \sup_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|f(s, u_0)\|.$$

Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon(\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta$, dann ist für alle $u \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$

$$\|F(u) - u_0\|_\infty \leq \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u_0) + f(s, u(s)) - f(s, u_0)) ds \right\| \leq \epsilon(\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta.$$

Also bildet F den vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $u, \tilde{u} \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ gilt

$$\|F(u) - F(\tilde{u})\|_\infty \leq \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\| ds \leq \epsilon L \|u - \tilde{u}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $\epsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L} \right\} = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta} \right\}$.

Dann definiert F eine Lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt u ist wegen Satz 1.13 stetig differenzierbar mit $\dot{u}(t) = f(t, u)$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ mit $u(t_0) = u_0$, und löst auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ das Anfangswertproblem. Wenn u umgekehrt auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ das Anfangswertproblem löst, dann verschwindet die Ableitung von $F(u) - u$, und beide Funktionen $F(u)$ und u sind bei $t = t_0$ gleich u_0 . Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F . Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Wir wollen jetzt analog zu der Variation der Parameter untersuchen, wie die Lösungen der Anfangswertprobleme, also die Fixpunkte von F , von t_0 , u_0 und f abhängen. Indem wir für ein solches Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$, die Funktion u durch den Vektor $\tilde{u} = (t, u)$ ersetzen, und die Funktion f durch $\tilde{f}(\tilde{u}) = (1, f(t, u)) = (1, f(\tilde{u}))$, erhalten wir ein äquivalentes Anfangswertproblem $\dot{\tilde{u}}(t) = \tilde{f}(\tilde{u}(t))$ mit $\tilde{u}(t_0) = \tilde{u}_0 = (t_0, u_0)$, in dem die Funktion \tilde{f} nicht mehr von t abhängt. Weil solche Anfangswertprobleme bezüglich t translationsinvariant sind, können wir dann den Anfangspunkt 0 wählen. Deshalb untersuchen wir im Folgenden vorwiegend die Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems von u_0 und f .

Für eine differenzierbare Funktion f erfüllt jede Lösung u von $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$

$$\ddot{u}(t) = \frac{d}{dt} f(t, u(t)) = \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial u} \dot{u}(t) = \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial u} f(t, u(t)).$$

Indem wir immer höhere Ableitungen bilden sehen wir, dass für r mal (stetig) differenzierbare Funktionen f , jede Lösung auch $(r + 1)$ mal (stetig) differenzierbar ist. Wir werden gleich sehen, dass in diesem Fall die Lösung der entsprechenden Anfangswerte auch r mal (stetig) differenzierbar von u_0 abhängt.

Satz 1.33. *Sei V ein Banachraum, $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \rightarrow V$ eine stetige Abbildung, die partiell nach u r mal stetig differenzierbar ist mit $r \in \mathbb{N}$, und deren Ableitung $\frac{\partial f}{\partial u}$ lokal beschränkt ist. Dann gibt es für alle $(t_0, u_0) \in I \times U$ eine*

offene Umgebung W von u_0 in V , $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : W \rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$, so dass für $v \in W$ die Funktion $g(v)$ die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } u(t_0) = v.$$

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil $\frac{\partial f}{\partial u}$ lokal beschränkt ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(u_0, \delta) \subset O$, so dass $\frac{\partial f}{\partial u}$ auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(u_0, \delta)$ durch L beschränkt ist. Wegen dem Schrankensatz ist dann f auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(u_0, \delta)$ für festes t in u lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \min \left\{ \delta, \frac{1}{L} \right\}$ ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf. Dann definiert

$$F : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(u_0, \delta)) \rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \quad (v, u) \mapsto F(v, u)$$

$$\text{mit } F(v, u)(t) = v + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

eine stetige Abbildung. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F(v, u)}{\partial u}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(v, u)}{\partial u} : C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V) &\rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \quad z \mapsto \frac{\partial F(v, u)}{\partial u}(z) \\ \text{mit } \frac{\partial F(v, u)}{\partial u}(z)(t) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial f(s, u(s))}{\partial u}(z(s)) ds. \end{aligned}$$

Weil $\frac{\partial f(s, u(s))}{\partial u}$ durch L beschränkt ist, ist $\frac{\partial F(v, u)}{\partial u}$ durch $L\epsilon < 1$ beschränkt. Also konvergiert für $v \in V$ und $u \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(u_0, \delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)} - \frac{\partial F(v, u)}{\partial u} \right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F(v, u)}{\partial u} \right)^l$$

in $\mathcal{L}(C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)} - \frac{\partial F(v, u)}{\partial u}$. Offenbar ist für $v_0, v_1 \in V$ die punktweise Differenz der entsprechenden Abbildungen eine konstante Abbildung:

$$F(v_0, u) - F(v_1, u) = v_0 - v_1.$$

Deshalb ist für jedes $u \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(u_0, \delta))$ die Abbildung $v \mapsto F(v, u)$ eine glatte Abbildung von V nach $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(u_0, \delta)) \rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \quad (v, u) \mapsto u - F(v, u)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung $\frac{\partial G}{\partial u}(v, u)$. Das Urbild von $0 \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$

besteht aus den Fixpunkten der Abbildungen $u \mapsto F(v, u)$. Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $u_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen $u \mapsto F(v, u)$. Diese Abbildung ist genauso oft stetig differenzierbar, wie G . An der Formel für die erste partielle Ableitung $\frac{\partial F(v, u)}{\partial u}$ erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung existieren und stetig sind, bis zu der die partiellen Ableitungen von f nach u stetig sind. Also ist G und damit auch die Abbildung g auf die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass die Lösung des Anfangswertproblems unter den gleichen Voraussetzungen stetig differenzierbar von t_0 und von f abhängt, wenn auf dem Raum der Funktionen $f \in C(I \times U, V)$ die Supremumsnorm von f und von $\frac{\partial f}{\partial u}$ benutzt wird.

Wenn in diesem Satz die Funktion f nicht von t abhängt, dann lassen sich die ersten $r + 1$ Ableitungen $\dot{u}(t), \dots, u^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach u bei $u(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r + 1)$ mal stetig nach t differenzierbar. Insbesondere hängen für glatte f , die nicht von t abhängen, die Lösungen des Anfangswertproblems glatt von u_0 und t ab. Die Abhängigkeit von t_0 ist wenn f nicht von t abhängt trivial.

Wenn f von t abhängt können wir höhere Ableitungen nach t_0 mit dem oben beschriebenen Trick für differenzierbare Funktionen f kontrollieren. Jetzt wollen wir die Lösungen auf möglichst große Intervalle fortsetzen.

Satz 1.34. (*Globale Existenz und Eindeutigkeit*) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \rightarrow V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal lipschitzstetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

genau eine Lösung besitzt, deren Graph in O liegt. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern a und b eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$).
- (ii) $t \mapsto \|f(t, u(t))\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.
- (iii) Die Lösung u lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O , d.h. $\lim_{t \downarrow a} (t, u(t)) \notin O$ (bzw. $\lim_{t \uparrow b} (t, u(t)) \notin O$).

Beweis: Für jedes Intervall (a, b) , das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

eine Lösung \tilde{u} besitzt, so dass sich \tilde{u} auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ stetig fortsetzen lässt, und der Graph der Fortsetzung in O liegt, besitzt das neue Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \quad \text{mit} \quad u(a) = \lim_{t \rightarrow a+} \tilde{u}(t) \quad \text{bzw.} \quad u(b) = \lim_{t \rightarrow b-} \tilde{u}(t)$$

wegen des Satzes von Picard-Lindelöf eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b . Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf zeigt auch, dass auf $[a, a + \epsilon]$ bzw. $[b - \epsilon, b]$ dieses Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist und mit \tilde{u} übereinstimmt. Also existiert ein maximales Intervall (a, b) , auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Wenn am linken bzw. rechten Rand die Bedingungen (i) und (ii) nicht erfüllt sind, dann ist die Ableitung der Lösung auf einer offenen Menge $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ beschränkt und deshalb ist die Lösung dort lipschitzstetig. Dann konvergiert für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert auch die Folge $((t_n, u(t_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times V$. Der Grenzwert kann dann aber nicht in O liegen, weil sonst die Lösung eine Fortsetzung auf eine Umgebung von a bzw. b hätte. **q.e.d.**

Bemerkung 1.35. (i) Wenn (ii) erfüllt ist, kann $t \mapsto f(t, u(t))$ nicht stetig auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Also können u und f nicht so stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, dass a (bzw. b) im Definitionsbereich von u und $(a, u(a))$ (bzw. $(b, u(b))$) im Definitionsbereich von f liegt.

(ii) Wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial f(t, u)}{\partial u}$ existiert und lokal beschränkt ist, dann ist f in u lokal lipschitzstetig, weil wegen dem Schrankensatz jede obere Schranke an $\frac{\partial f(t, u)}{\partial u}$ eine Lipschitzkonstante bezüglich u ist. Für endlichdimensionale V folgt das aus der Stetigkeit von $\frac{\partial f(t, u)}{\partial u}$. Wegen dem Schrankensatz gilt für $f(t, u) = A(t)u$ auch $|\ln(\|u(t)\|) - \ln(\|u(t_0)\|)| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| ds$. In diesem Fall kann $f(t, u)$ nur am Rand des Definitionsbereiches von A unbeschränkt sein. Dann ist auch (ii) nur am Rand des Definitionsbereiches von A möglich.

Wenn $\dim V < \infty$ kann man die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel), auf stetige Funktionen f verallgemeinern. Anstatt dem Banachschen Fixpunktsatz verwenden wir dann den Satz von Arzela Ascoli.

Satz 1.36. (Arzela–Ascoli) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlich dimensionaler Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn

- (i) für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist und
- (ii) für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x , d.h. für jedes $x \in K$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $x' \in B(x, \delta) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n(x') \in B(f_n(x), \epsilon) \subset V$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar auf K gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass aus $d(x, y) < 2\delta_y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y, \delta_y) | y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1, \delta_1) \cup \dots \cup B(y_N, \delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1, \dots, \delta_N$. Dann enthält für alle Paare $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1, \delta_1), \dots, B(y_N, \delta_N)$ den einen Punkt x . Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1, 2\delta_1), \dots, B(y_N, 2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig auf ganz K .

Sei $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die in K dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $m \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_m der Menge der Folge $(f_n(x_m))_{n \in \mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V . Wir definieren jetzt induktiv eine Teilfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in V , so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$ gilt $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$. Dafür wählen wir zunächst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(g_n(x_1), a_1) \leq \frac{1}{n}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_M von $(g_n(x_M))_{n \in \mathbb{N}}$ und ersetzen alle Folgenglieder von $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $M-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n \geq M}$, so dass für alle $n \geq M$ gilt $d(g_n(x_M), a_M) < \frac{1}{n}$. Dann gilt für alle $m = 1, \dots, M$ und alle $n \geq m$ auch $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(g_n(x), g_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$. Die Überdeckung $(B(x_m, \delta))_{m \in \mathbb{N}}$ von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass alle $l, n \geq M$ an den Zentren der Bälle der Teilüberdeckung $d(g_l(x_m), g_n(x_m)) < \frac{\epsilon}{3}$ erfüllen. Dann folgt für alle $x \in K$ und alle $l, n \geq M$

$$d(g_l(x), g_n(x)) \leq d(g_l(x), g_l(x_m)) + d(g_l(x_m), g_n(x_m)) + d(g_n(x_m), g_n(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ eine Cauchyfolge und konvergiert.

q.e.d.

Satz 1.37. (Satz von Peano) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum, $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und f eine stetige Abbildung $f : O \rightarrow V$. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0.$$

Beweis: Für jedes $(t_0, u_0) \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(u_0, \delta)} \subset O.$$

Auf dieser kompakten Menge ist dann f beschränkt durch $\|f\|_\infty < \infty$. Verkleinere also gegebenenfalls ϵ , so dass $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ gilt. Für jede Partition P

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] = [t_{-M}, t_{1-M}] \cup \dots \cup [t_{-1}, t_0] \cup [t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_{N-1}, t_N]$$

mit $t_0 - \epsilon = t_{-M} < t_{1-M} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_0 + \epsilon$ des Intervalls $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, die t_0 als den Anfangs- und Endpunkt eines Teilintervalls enthält, definieren wir folgendermaßen eine Näherungslösung u_P der Differentialgleichung. Auf den Intervallen $[t_{-m}, t_{1-m}]$ definieren wir u_P induktiv für $m = 1, \dots, m = M$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{1-m} für $m = 1$ gleich u_0 ist und für $m > 1$ gleich dem Wert $u_P(t_{1-m})$ von dem schon konstruierten u_P bei t_{1-m} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{1-m}, u_P(t_{1-m}))$ ist. Entsprechend definieren wir die Lösung auch induktiv auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n]$ für $n = 1, \dots, n = N$ dadurch, dass jeweils der Wert bei t_{n-1} für $n = 1$ gleich u_0 ist und für $n > 1$ gleich dem Wert $u_P(t_{n-1})$ von dem schon konstruierten u_P bei t_{n-1} ist, und die Ableitung jeweils konstant gleich $f(t_{n-1}, u_P(t_{n-1}))$ ist. Wegen $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ und weil f auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(u_0, \delta)}$ beschränkt ist durch $\|f\|_\infty$, liegen dann alle Werte von u_P in $\overline{B(u_0, \delta)}$.

Sei nun $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen, deren maximale Intervalllängen eine Nullfolge bilden. Wir zeigen jetzt, dass eine Teilfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der entsprechenden Folge von Näherungslösungen gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Wegen dem Schrankensatz erfüllt die Folge der Näherungslösungen auf $K = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli. Deshalb konvergiert eine Teilfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gegen eine stetige Funktion u , die bei t_0 gleich u_0 ist. Weil die stetige Funktion f auf der kompakten Teilmenge $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(u_0, \delta)}$ stetig und damit gleichmäßig stetig ist, konvergiert die Folge von Funktionen $t \mapsto f(t, u_n(t))$ auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion $t \mapsto f(t, u(t))$.

Indem wir für $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ die Endpunkte der Teilintervalle einer solchen Partition P zwischen t_0 und t auswählen und in jedem Teilintervall den am nächsten bei t_0 liegenden Randpunkt als Zwischenpunkt auswählen, definiert jede solche Partition eine Riemannsumme des Integrals über $[t_0, t]$ bzw. $[t, t_0]$. Dann ist $u_P(t) - u_0$ die P entsprechende Riemannsumme von dem Integral $\int_{t_0}^t f(s, u_P(s)) ds$. Weil die Differenz der Riemannsummen zweier Funktionen beschränkt ist durch die Supremumsnorm der Differenz der Funktionen mal der Intervalllänge, konvergiert im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ die Differenz von $u_n(t) - u_0$ und der der Partition P_n entsprechenden Riemannsumme von $\int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ gegen Null. Wegen dem Kriterium von Riemann konvergieren diese Riemannsummen gegen $\int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$. Also folgt für $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Wegen Satz 1.13 löst u dann das Anfangswertproblem mit $u(t_0) = u_0$. **q.e.d.**

Eine Lösung einer Differentialgleichung auf einem abgeschlossenen Intervall ist eine stetige Funktion, die im Inneren stetig differenzierbar ist, und deren Ableitung sich

stetig auf das abgeschlossene Intervall fortsetzen lässt. Weil eine Funktion auf der Vereinigung von zwei Intervallen genau dann stetig ist, wenn sie auf beiden Intervallen stetig ist und auf der Schnittmenge übereinstimmt, können wir solche Lösungen zusammensetzen: Wenn u_1 eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_1) = u_0$ auf $[t_1 - \epsilon, t_1]$ ist und u_2 auf $[t_1, t_1 + \epsilon]$. Dann ist

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{für } t \in [t_1 - \epsilon, t_1] \\ u_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1 + \epsilon] \end{cases}$$

eine Lösung auf $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$. Also können wir Lösungen wieder nach links bzw. rechts fortsetzen. Für jede total geordnete Familie von offenen Intervallen, auf denen jeweils eine Lösung existiert und jeweils auf der Schnittmenge von zwei solchen Intervallen übereinstimmt, ist die Vereinigung auch das Intervall einer Lösung. Wegen dem Zornschen Lemma existiert dann für jede Lösung ein maximales offenes Intervall, auf das wir sie fortsetzen können. Wir erhalten also wie im Satz 1.34:

Satz 1.38. (*Globale Existenz*) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum, $O \subset \mathbb{R} \times V$ offen und $f : O \rightarrow V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

eine Lösung besitzt, deren Graph in O liegt. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern a und b eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$)
- (ii) $t \mapsto \|f(t, u(t))\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.
- (iii) Die Lösung u lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O . **q.e.d.**

Jede maximale Lösung kann also nicht als Lösung auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden. Aber es kann mehrere solcher maximaler Lösungen geben, und zwei verschiedene maximale Lösungen können auf unterschiedlichen Intervallen definiert sein und auf Teilintervallen übereinstimmen.

1.6 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen

erster Ordnung haben also die Form

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)).$$

Wenn es gelingt, die Funktion f als einen Quotienten stetiger Funktionen zu schreiben

$$f(t, u) = \frac{g(t)}{h(u)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{u}(t)h(u(t)) = g(t).$$

Wenn H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G , dann gilt

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = \dot{u}(t)h(u(t)) = g(t) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = \frac{g(t)}{h(u(t))} \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

$$H(u(t)) - H(u_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was auf solchen Intervallen gilt, in denen eine der Mengen $\{x \mid h(x) > 0\}$ oder $\{x \mid h(x) < 0\}$ dicht liegt, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(u_0)).$$

Satz 1.39. (*Trennung der Variablen*) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder fast überall positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I riemannintegrabel. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h . Dann ist H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \rightarrow I$ von einem offenen Intervall I' auf I . Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = \frac{g(t)}{h(u(t))} \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

gegeben durch

$$u(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(u_0)).$$

Sie ist auf dem Intervall definiert, auf dem $G(t) - G(t_0) + H(u_0)$ in I' liegt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t, u)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t, u) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t, u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(t, u)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t, u(t)) = \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} + \frac{du(t)}{dt} \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial u} = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial u} + \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

$$F(t, u(t)) = F(t_0, u_0).$$

Diese Gleichung beschreibt implizit die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.40. (*Exakte Differentialgleichungen*) Sei $(t, u) \mapsto F(t, u)$ differenzierbar. Dann sind alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial u} + \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

implizit gegeben durch

$$F(t, u(t)) = F(t_0, u_0).$$

q.e.d.

Für zwei Funktionen $g(t, u)$ und $h(t, u)$ mit $f(t, u) = -\frac{g(t, u)}{h(t, u)}$, gibt es nicht immer eine Funktion $F(t, u)$ mit $\frac{\partial F(t, u)}{\partial t} = g(t, u)$ und $\frac{\partial F(t, u)}{\partial u} = h(t, u)$.

Lemma 1.41. (*Stammfunktion*) Seien g und h zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t, u)$ mit

$$\frac{\partial F(t, u)}{\partial t} = g(t, u) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(t, u)}{\partial u} = h(t, u) \quad \text{wenn} \quad \frac{\partial g(t, u)}{\partial u} = \frac{\partial h(t, u)}{\partial t} \quad \text{gilt.}$$

Beweis: Sei $(t_0, u_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t, u) = (t - t_0) \int_0^1 g(t_s, u_s) ds + (u - u_0) \int_0^1 h(t_s, u_s) ds,$$

mit $t_s = t_0 + s(t - t_0)$ und $u_s = u_0 + s(u - u_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(t, u)}{\partial t} &= \int_0^1 g(t_s, u_s) ds + (t - t_0) \int_0^1 \frac{\partial g(t_s, u_s)}{\partial t} s ds + (u - u_0) \int_0^1 \frac{\partial h(t_s, u_s)}{\partial t} s ds \\ &= \int_0^1 g(t_s, u_s) ds + \int_0^1 \frac{dg(t_s, u_s)}{ds} s ds = g(t_s, u_s) s \Big|_{s=0}^{s=1} = g(t, u) \\ \frac{\partial F(t, u)}{\partial u} &= \int_0^1 h(t_s, u_s) ds + (u - u_0) \int_0^1 \frac{\partial h(t_s, u_s)}{\partial u} s ds + (t - t_0) \int_0^1 \frac{\partial g(t_s, u_s)}{\partial u} s ds \\ &= \int_0^1 h(t_s, u_s) ds + \int_0^1 \frac{dh(t_s, u_s)}{ds} s ds = h(t_s, u_s) s \Big|_{s=0}^{s=1} = h(t, u)\end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus $\frac{\partial F(t, u)}{\partial t} = g(t, u)$ und $\frac{\partial F(t, u)}{\partial u} = h(t, u)$ und dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g(t, u)}{\partial u} = \frac{\partial^2 F(t, u)}{\partial u \partial t} = \frac{\partial^2 F(t, u)}{\partial t \partial u} = \frac{\partial h(t, u)}{\partial t}. \quad \text{q.e.d.}$$

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, gemäß der wir F fortsetzen, eindeutig und stetig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω , d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \rightarrow \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. also, es gibt zu jedem solchen p eine stetige Abbildung $[0, 1] \times S^1 \rightarrow \Omega$, die auf $\{0\} \times S^1$ gerade gleich p und die auf $\{1\} \times S^1$ konstant ist. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t)h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muss, bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.42. Die Differentialgleichung

$$2t\dot{u} + u(t) = 0$$

ist nicht exakt, weil gilt

$$\frac{\partial u}{\partial u} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$

die Differentialgleichung

$$2tu(t)\dot{u}(t) + u^2(t) = 0$$

ist aber exakt, weil gilt

$$\frac{\partial u^2}{\partial u} = 2u = \frac{\partial}{\partial t} 2ut.$$

Korollar 1.43. (Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion auf die Form gebracht werden kann

$$\dot{u}(t)h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial h(t, u)}{\partial t} = \frac{\partial g(t, u)}{\partial u},$$

dann existiert auf einfach zusammenhängenden Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F , so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt}F(t, u(t)) = \dot{u}(t) \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial u} + \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $u(t_0) = u_0$

$$F(t, u(t)) = F(t_0, u_0). \quad \text{q.e.d.}$$

Um für eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{u}(t)h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t, u(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M(t, u)}{\partial t} h(t, u) + M(t, u) \frac{\partial h(t, u)}{\partial t} = \frac{\partial M(t, u)}{\partial u} g(t, u) + M(t, u) \frac{\partial g(t, u)}{\partial u}$$

lösen. Das ist eine partielle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche Differentialgleichung. In einigen Fällen können wir Lösungen erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. u abhängen.

Zuletzt bemerken wir, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.44. (i)

$$\dot{u}(t) = f(at + bu(t) + c) \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Für $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Für $b \neq 0$ führt die Substitution $v(t) = at + bu(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{v}(t) = a + bf(v(t))$ oder auch $\frac{\dot{v}(t)}{a + bf(v(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a + bf(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = f(at + bu(t) + c) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

$$\text{die Gleichung} \quad F(at + bu(t) + c) - F(at_0 + bu_0 + c) = t - t_0.$$

(ii) $\dot{u} = f\left(\frac{u(t)}{t}\right)$ homogene Differentialgleichung. Die Substitution $v(t) = \frac{u(t)}{t}$ führt zu

$$\dot{v}(t) = \frac{f(v(t)) - v(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{v}(t)}{f(v(t)) - v(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{u} = f\left(\frac{at + bu(t) + c}{\alpha t + \beta u(t) + \gamma}\right) \text{ mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ ist, dann ist entweder $\alpha t + \beta u(t)$ ein Vielfaches von $at + bu(t)$ oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante $\neq 0$ ist, dann hat das lineare Gleichungssystem

$$at_0 + bu_0 + c = 0$$

$$\alpha t_0 + \beta u_0 + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_0, u_0) . Die Differentialgleichung können wir umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t + t_0) - u_0) &= f\left(\frac{a(t + t_0) + bu(t + t_0) + c - (at_0 + bu_0 + c)}{\alpha(t + t_0) + \beta u(t + t_0) + \gamma - (\alpha t_0 + \beta u_0 + \gamma)}\right) \\ &= f\left(\frac{a + b\frac{u(t+t_0)-u_0}{t}}{\alpha + \beta\frac{u(t+t_0)-u_0}{t}}\right). \end{aligned}$$

Also erhalten wir ein Beispiel von der Form (ii).

(iv) Bernoullische Differentialgleichung:

$$\dot{u}(t) + g(t)u(t) + h(t)u^\alpha(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $v(t) = u^{1-\alpha}(t)$ führt zu der Differentialgleichung

$$\dot{v}(t) = (1 - \alpha)\dot{u}(t)u^{-\alpha}(t) = (\alpha - 1)g(t)v(t) + (\alpha - 1)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im Abschnitt 1.3 gelöst haben.