

Kapitel 2

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung in den partiellen Ableitungen einer oder mehrerer gesuchter Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen:

Definition 2.1. *Eine gegebenenfalls vektorwertige Gleichung der Form*

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k . Hierbei ist F eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion. Die Ausdrücke $D^k u$ bezeichnen die Vektoren aller k -ten partiellen Ableitungen der Funktion u . Eine Funktion u heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn sie k mal differenzierbar ist und der obigen Gleichung genügt.

Die partiellen Ableitungen wirken dabei immer nur auf die Funktion, die unmittelbar dahinter steht. Soll sie auf ein Produkt wirken, so setzen wir dieses in Klammern.

2.1 Beispiele

A. Lineare Differentialgleichungen

Für reelle lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = 0$$

kann wegen dem Satz von Schwarz $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ angenommen werden. Sie heißen

elliptisch, wenn a_{ij} auf Ω positiv (negativ) definit ist. Dazu gehört Beispiel 1 und 2.

parabolisch, wenn a_{ij} auf Ω positiv (negativ) semidefinit ist und einen eindimensionalen Kern hat. Dazu gehört Beispiel 5, 7 und 8.

hyperbolisch, wenn a_{ij} auf Ω einen negativen und $n - 1$ positive Eigenwerte hat, oder umgekehrt. Dazu gehört Beispiel 9 und 10.

1. Laplacegleichung.
$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Lösungen der Laplacegleichung heißen harmonische Funktionen. Die Laplacegleichung ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die entsprechende inhomogene Gleichung heißt **Poissongleichung**. $-\Delta u = f$.
Hierbei ist die Funktion f gegeben und die Funktion u gesucht.

2. Helmholtzgleichung.
$$-\Delta u - \lambda u = 0.$$

Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl und u die gesuchte Funktion. Sie ist eine besonders einfache Form der Poissongleichung.

3. Lineare Transportgleichung.
$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$$

Hierbei ist b ein gegebenes \mathbb{R}^n -wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet.

4. Liouvillegleichung.
$$\dot{u} + \nabla(b \cdot u) = 0.$$

Hier ist wie bei der Transportgleichung b ein gegebenes \mathbb{R}^n -wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet. Diese beiden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung sind ähnlich.

5. Wärmeleitungsgleichung.
$$\dot{u} - \Delta u = 0.$$

6. Schrödingergleichung.
$$\imath \dot{u} + \Delta u = 0.$$

Hierbei ist u eine gesuchte komplexe Funktion. Der Faktor \imath , durch den sich die Schrödingergleichung von der Wärmeleitungsgleichung unterscheidet, führt zu deutlichen Unterschieden dieser beiden Gleichungen.

7. Kolmogorovgleichung.
$$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie ist eine Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung.

8. Fokker-Planckgleichung.
$$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij}(t, x) u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(t, x) u}{\partial x_i} = 0.$$

Die Fokker-Planckgleichung verhält sich zu die Kolmogorovgleichung wie die Liouvillegleichung zu der Transportgleichung.

9. Wellengleichung.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0.$$

10. Allgemeine Wellengleichung.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie verallgemeinert die Wellengleichung genauso wie die Kolmogorovgleichung die Wärmeleitungsgleichung verallgemeinert.

11. Airysche Differentialgleichung.
$$\dot{u} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

12. Balkengleichung.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

B. Nichtlineare Differentialgleichungen

1. Eikonalgleichung.
$$|\nabla u| = 1.$$

2. Nichtlineare Poissongleichung.
$$-\Delta u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

3. Minimalflächengleichung.
$$\nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$$

Die Graphen von Lösungen der Minimalflächengleichung sind sogenannte Minimalflächen. Der Flächeninhalt solcher Hyperflächen im \mathbb{R}^{n+1} ändert sich unter infinitesi-

malen Deformationen nicht. Seifenhäute sind Beispiele solcher Minimalflächen.

4. Monge-Amperegleichung. $\det(\nabla\nabla^t u) = f$. Hier ist f eine gegebene Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion. Dabei steht auf der linken Seite der Gleichung die Determinante der Matrix der zweiten Ableitungen von u .

5. Hamilton-Jacobigleichung. $\dot{u} + H(\nabla u, x) = 0$.

Hierbei ist H eine gegebene Hamiltonfunktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, und u die gesuchte Funktion auf einem entsprechenden Gebiet in \mathbb{R}^n .

6. Skalare Erhaltungsgleichung. $\dot{u} + \nabla \cdot F(u) = 0$.

Hierbei ist F eine gegebene \mathbb{R}^n -wertige Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diese Differentialgleichung hat zur Folge, dass sich das Integral von u über ein gegebenes Teilgebiet von \mathbb{R}^n so mit der Zeit ändert, wie das Integral von $F(u)$ über den Rand des Gebietes. Deshalb lässt sich $F(u)$ als eine Flussdichte der Erhaltungsgröße u interpretieren.

7. Burgers Gleichung. $\dot{u} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sie ist ein Beispiel für eine skalare Erhaltungsgleichung mit $F(u) = u^2/2$.

8. Reaktions-Diffusionsgleichung. $\dot{u} - \Delta u = f(u)$.

Hier ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

9. Poröse Mediengleichung. $\dot{u} - \Delta(u^\gamma) = 0$.

Hier ist $\gamma \geq 1$ ein gegebener Exponent. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung eines idealen Gases in einem porösen Medium wie Sand.

10. Nichtlineare Wellengleichung. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(u)$.

Hier ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

11. Korteweg-de-Vries-Gleichung. $4\dot{u} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$.

Diese Gleichung besitzt eine sogenannte Laxdarstellung, d.h. sie lässt sich schreiben als

$$\dot{L} = [A, L]$$

mit zwei gewöhnlichen Differentialoperatoren

$$L := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad A := \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3u}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus entwickelte sich ein neues Verständnis von integrierbaren Systemen.

C. Lineare Differentialgleichungssysteme

1. Lineare Elastizität. $\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) = 0.$

Hier sind $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ gegebene positive Konstanten und u die gesuchte \mathbb{R}^n -wertige Funktion.

2. Elastische Wellen. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) = 0.$

3. Maxwellgleichungen.

$$\begin{aligned} \dot{E} - \nabla \times B &= -4\pi j & \dot{B} + \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 4\pi \rho & \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned}$$

Hier sind die Ladungsverteilung ρ und die Stromverteilung j gegebene reelle bzw. \mathbb{R}^3 -wertigen Funktionen auf der Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und das elektrische Feld E und das Magnetfeld B die gesuchten \mathbb{R}^3 -wertige Funktionen. Weil j ja gerade die Ladungsflussdichte ist erfüllen die gegebenen ρ und j den Erhaltungssatz

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot j = 0.$$

4. Cauchy-Riemanngleichung. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Hier sind $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion auf (Teilgebieten) der komplexen Ebene $x + iy = z \in \mathbb{C}$.

D. Nichtlineare Differentialgleichungssysteme

1. Eulergleichung. $\dot{u} + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \quad \nabla \cdot u = 0.$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit und p der Druck.

2. Navier-Stokesgleichung. $\dot{u} + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = 0 \quad \nabla \cdot u = 0.$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit und p der Druck.

3. Einsteins Feldgleichungen. $R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \kappa T_{ij}.$

Hier ist der Energieimpulstensor einer gegebenen Massenverteilung auf der Raumzeit und g_{ij} ist die entsprechende gesuchte Metrik auf der Raumzeit. Diese Metrik g_{ij} ist eine Lorentzmetrik auf der Raumzeit, d.h. eine symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialraum der Raumzeit mit der Signatur $(1, 3)$. R_{ij} ist die dazugehörige Ricci-Krümmung und R die skalare Krümmung.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &:= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^3 g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\ R_{ij} &:= \sum_{k=0}^3 g^{kl} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^j} + \sum_{l=0}^3 (\Gamma_{lk}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^l) \right) \\ (g^{ij}) &:= (g_{ij})^{-1} \text{ inverse Metrik} \\ R &:= \sum_{i,j=0}^3 g^{ij} R_{ij}. \end{aligned}$$

4. Riccifluss. $\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$

Diese Differentialgleichung beschreibt auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einen diffusionsartigen Fluss der Metrik. Er gleicht Inhomogenitäten und Isotropien der Metrik aus und führt nach langen Zeiten zu Metriken mit sehr großen Isometriegruppen. Richard Hamilton hat in den 70er Jahren ein Programm entworfen, um mit Hilfe dieses Flusses die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen. Diese besagt, dass sich jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit in Teile zerlegen lässt, auf denen eine Isometriegruppe transitiv wirkt. Hamilton versucht durch eine Kontrolle über das Langzeitverhalten des Ricciflusses auf kompakten 3-Mannigfaltigkeiten solche Metriken zu konstruieren. Der russische Mathematiker Grisha Perelman hat 2003 3 Arbeiten ins Netz gestellt und die letzten Hürden überwunden. Das war ein großer Erfolg für die geometrische Analysis.

2.2 Der Gaußsche Satz

Definition 2.2. (Zerlegung der Eins) Eine glatte Zerlegung der Eins einer Familie von offenen Mengen in \mathbb{R}^n mit der Vereinigung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Familie $(h_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $h_l : \Omega \rightarrow [0, 1]$, so dass

- (i) für jedes $x \in \Omega$ auf einer Umgebung von x nur endlich viele h_l ungleich Null sind.
- (ii) Für alle $x \in \Omega$ gilt $\sum_{l=1}^{\infty} h_l(x) = 1$.
- (iii) Jedes h_l außerhalb einer kompakten Teilmenge eines Elementes verschwindet.

Jede Familie von offenen Mengen in \mathbb{R}^n besitzt eine glatte Zerlegung der Eins.

Definition 2.3. Für jede $n \times (n-1)$ -Matrix A gibt es genau einen Spaltenvektor $A^\# \in \mathbb{R}^n$, so dass $\det(A, x) = x^t \cdot A^\#$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Er steht senkrecht auf dem Bild von A als Hyperfläche in \mathbb{R}^n und seine Länge ist der Flächeninhalt des Bildes von $[0, 1]^{n-1}$ unter A in \mathbb{R}^n . Für eine $n \times n$ -Matrix A gilt $(A|_{\mathbb{R}^{n-1}})^\# = \det(A)(A^{-1})^t e_n$.

Definition 2.4. Eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat differenzierbaren Rand, wenn ihr Abschluss $\bar{\Omega}$ eine Überdeckung von offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Abbildungen $\Phi : U \rightarrow O$ mit stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen $\Phi^{-1} : O \rightarrow U$ besitzt, die jeweils $O \cap \Omega$ in die obere Halbebene $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ und $O \cap \partial\Omega$ nach $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ abbilden. Seien $\det \Phi' > 0$. Dann ist das Integral einer Funktion f auf $\partial\Omega$ mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins $(h_l)_{l \in \mathbb{N}}$ definiert als

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma = \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} (h_l f) \circ \Phi \left\| (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^\# \right\| d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ wobei jeweils } h_l|_{\mathbb{R}^n \setminus O} = 0.$$

Für eine \mathbb{R}^n -wertige Funktion f und die äußere Normale N auf $\partial\Omega$ definieren wir

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma = - \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} ((h_l f) \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^\# d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ wobei jeweils } h_l|_{\mathbb{R}^n \setminus O} = 0.$$

Um diese Integrale zu berechnen, genügt es Φ auf $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ zu kennen. Stetig differenzierbare Einbettungen $\Psi : U \cap \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow O \cap \partial\Omega$, deren Ableitungen Ψ' den Rang $n-1$ haben, lassen sich so stetig differenzierbar auf kleine Umgebungen von $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ fortsetzen, dass sie stetig differenzierbare Umkehrabbildungen haben. Deshalb genügt es die Existenz solcher Abbildungen $\Psi = \Phi|_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}}$ vorauszusetzen.

Satz 2.5. (*Gaußscher Satz oder Divergenzsatz*) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit zweimal differenzierbarem Rand und f eine auf $\overline{\Omega}$ stetige \mathbb{R}^n -wertige Funktion, die auf Ω stetig differenzierbar ist mit Lebesgue-integrierbaren partiellen Ableitungen. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma$$

Hierbei ist N die äußere Normale und $N d\sigma$ das entsprechende Maß auf dem Rand $\partial\Omega$.

Beweis: Mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins genügt es die Aussage für eine Funktion f zu zeigen, die außerhalb einer abgeschlossenen Menge in einer offenen Menge O aus Definition 2.4 verschwindet. Für $\tilde{f} = \det(\Phi')(\Phi')^{-1}(f \circ \Phi)$ gilt wegen Satz 1.27

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{f} &= \det(\Phi') \sum_{ijkl} (\Phi')_{ij}^{-1} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_k \partial x_i} (\Phi')_{kl}^{-1} f_l \circ \Phi - \det(\Phi') \sum_{ijkl} (\Phi')_{ij}^{-1} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_i \partial x_k} (\Phi')_{kl}^{-1} f_l \circ \Phi \\ &\quad + \det(\Phi') \operatorname{Spur}((\Phi')^{-1}(f' \circ \Phi)\Phi') = \det(\Phi') \operatorname{Spur}(f' \circ \Phi) = \det(\Phi')(\nabla \cdot f) \circ \Phi. \end{aligned}$$

Aus Jacobi's Transformation von Maßen folgt $\int_O \nabla \cdot f d\mu = \int_U \nabla \cdot \tilde{f} d\mu$. Also genügt es

$$\begin{aligned} \int_U \nabla \tilde{f} d\mu &= - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} (f \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#} d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ &= - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} \det(\Phi')^{-1} (\Phi' \tilde{f}) \cdot \det(\Phi') ((\Phi')^{-1})^t e_n d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} = - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}_n d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{aligned}$$

zu zeigen. Die Funktion \tilde{f} setzt sich stetig differenzierbar auf einen Quader fort, von dessen Rand eine Seite in der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ liegt. Weil \tilde{f} nur auf einer Seite des Randes des Quaders nicht verschwindet, reduziert sich mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung das linke Integral zu einem Integral über die Seite des Quaders in \mathbb{R}^{n-1} und stimmt mit dem Integral auf der rechten Seite überein. **q.e.d.**

2.3 Existenz von Lösungen

Wir wollen zur Erläuterung ein Beispiel einer Differentialgleichung geben, das keine Lösung besitzt. Dieses Beispiel ist eine Vereinfachung (von Nirenberg) eines Beispiels von H. Lewy: Gegeben ist eine komplexwertige Funktion f auf einem Teilgebiet von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und gesucht ist eine komplexwertige Funktion u auf demselben Teilgebiet, die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + ix \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

Wir zeigen, dass es für eine glatte Funktion f , die folgende beiden Bedingungen erfüllt, in keiner Umgebung von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ eine einmal stetig differenzierbare Lösung u gibt:

- (i) $f(-x, y) = f(x, y)$
- (ii) Es gibt eine Nullfolge $\rho_n \downarrow 0$, so dass f auf einer Umgebung der Kreise $\partial B(0, \rho_n)$ verschwindet, die Integrale $\int_{B(0, \rho_n)} f(x, y) dx dy$ aber ungleich Null sind.

Wenn $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine glatte periodische Funktion ist, die auf einem Intervall aber nicht auf \mathbb{R} verschwindet, dann ist $f(x) = \exp(-1/\|x\|)h(1/\|x\|)$ ein solches Beispiel.

1. Schritt: Wegen (i) ist mit $u(x, y)$ auch $-u(-x, y)$ und $w(x, y) = \frac{1}{2}(u(x, y) - u(-x, y))$ eine Lösung. Deshalb können wir $u(-x, y) = -u(x, y)$ annehmen.

2. Schritt: Jede solche Lösung u verschwindet auf den Kreisen $\partial B(0, \rho_n)$. Um das einzusehen transformieren wir kleine Ringe A folgendermaßen auf Gebiete \tilde{A} im \mathbb{R}^2 :

$$A \rightarrow \tilde{A}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2/2, y) & \text{für } x \geq 0 \\ (-x^2/2, y) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind offenbar Homöomorphismen von A auf \tilde{A} . Auf dem Teilgebiet $\tilde{A}_+ = \{(s, y) \in \tilde{A} \mid s > 0\}$ ist die Funktion $\tilde{u}(s, y) = u(x^2/2, y)$ holomorph:

$$2\bar{\partial}\tilde{u} = \frac{\partial\tilde{u}(s, y)}{\partial s} + i\frac{\tilde{u}(s, y)}{\partial y} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + ix\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) = 0.$$

Wegen dem 1. Schritt verschwindet \tilde{u} für $s = 0$, und wegen dem Schwarzen Spiegelsprinzip und dem Identitätssatz auf \tilde{A}_+ , und wegen dem 1. Schritt auf \tilde{A} .

3. Schritt: Wegen dem Gaußschen Satz gilt

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \rho_n)} f dx dy &= \int_{B(0, \rho_n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + ix \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{B(0, \rho_n)} \nabla \cdot \begin{pmatrix} u \\ ixu \end{pmatrix} dx dy \\ &= \int_{\partial B(0, \rho_n)} \begin{pmatrix} u \\ ixu \end{pmatrix} \cdot N(x, y) d\sigma(x, y) = 0, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (ii). Also gibt es keine einmal stetig differenzierbare Lösung.

Man kann aus diesem Beispiel sofort folgern, dass die reelle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ix \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - ix \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + ix \frac{\partial}{\partial y} \right) u = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = f$$

keine viermal stetig differenzierbare Lösung hat.

2.4 Regularität von Lösungen

Unter der Regularität einer Lösung einer Differentialgleichung versteht man die lokalen Eigenschaften der entsprechenden Funktionen. Wir werden nur solche Lösungen betrachten, die mindestens Distributionen sind. In diesen enthalten sind messbare Funktionen bzw. allgemeiner L^p -Funktionen. Diese enthalten die Funktionen, deren erste oder n -te Ableitungen ebenfalls solche L^p -Funktionen sind. Die Räume solcher Funktionen werden Sobolevräume genannt. In diesen Funktionen sind die glatten Funktionen enthalten. Zuletzt kommen die analytischen Funktionen mit der höchsten Regularität.

2.5 Anfangswert und Randwertprobleme

Bei der Untersuchung von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen streben wir eine möglichst vollständige Charakterisierung aller Lösungen an. Im Allgemeinen haben partielle Differentialgleichungen unendlich viele Lösungen. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung einen n -dimensionalen Lösungsraum hat. Eine Lösung ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der ersten n Ableitungen an einem Punkt. Für partielle Differentialgleichungen streben wir eine analoge Charakterisierung an. Weil die Lösungen auf höherdimensionalen Gebieten definiert sind, liegt es nahe, dass die Vorgabe von Funktionswerten und eventuell einigen Ableitungen auf dem Rand des Gebietes, die Lösung eindeutig festlegt. Solche Vorgaben nennt man Randwertprobleme. Bei Evolutionsgleichungen legt die Physik nahe, als Randwert einen räumlichen Schnitt zu wählen, also die Lösung zu einem gegebenen Zeitpunkt festzulegen. Solche Randwertprobleme heißen dann Anfangswertprobleme. In einem zweiten Schritt soll bestimmt werden für welche Randwerte bzw. Anfangswerte eine Lösung existiert. Mit der Beantwortung beider Fragen sind alle Lösungen eindeutig durch die möglichen Randwerte bzw. Anfangswerte klassifiziert.