Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
13. Übung

22. Mai 2014

111. Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen.

Bei alle Aufgabenteilen muss begründet werden, warum die maximalen und minimalen Werte von den jeweiligen Funktionen auf den Nebenbedingungen angenommen werden.

(a) *Bestimme* die minimale und maximale Entfernung der Kurve in $\mathbb{R}^2$, welche durch $g(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ beschrieben wird zum Ursprung $(0, 0)$. *(4 Zusatzpunkte)*

[*Hinweis:* Die Kurve, die durch $g(x, y) = 100$ beschrieben wird ist eine Ellipse mit Zentrum im Ursprung und gedrehten Hauptachsen. In dieser Aufgabe werden also die Längen der beiden Hauptachsen bestimmt.]

(b) *Bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ angenommen werden.

(6 Zusatzpunkte)

[*Tipp:* Die Beschränktheit der Zwangsbedingungsmenge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 0\}$ zeigt man am einfachsten, indem man Polarkoordinaten verwendet.]

(c) *Bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema der Funktion $f(x, y, z) = xy + 2z$ unter den Nebenbedingungen $g(x, y, z) = x + y + z = 0$ und $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 24$ angenommen werden. *(8 Zusatzpunkte)*

112. Die Jacobische Transformationsformel.

(a) Es sei $a := (3, 3) \in \mathbb{R}^2$, $b := (2, 1) \in \mathbb{R}^2$ und

$$M := \{\, sa + tb \,|\, s, t \in [0, 1] \,\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Skizziere M und *berechne* $\int_M x^2 y \,\mathrm{d}\mu$ mit Hilfe der Jacobischen Transformationsformel.

(4 Zusatzpunkte)

(b) Bestimme $\int_T \frac{1}{2y+x} \,\mathrm{d}\mu$, wobei T das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(5, 0)$ und $(3, 1)$ ist.

(4 Zusatzpunkte)

(c) *Bestimme* das Integral über das Ellipsenringsegment mit $0 < a < b$

$$S := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^2 \le x^2 + 2y^2 \le b^2,\ y \ge 0,\ y \le x \,\}$$

von $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2}$. *(6 Zusatzpunkte)*

[*Tipp:* Benutze Polarkoordinaten.]

(d) Betrachte das Quadrat $Q := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x, y \le 1 \,\}$ und das Quadrat $R := \{\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le u, v \le 1 \,\}$ sowie die Koordinatentransformation

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \mapsto (4u - 4u^2, v) = (x, y).$$

Zeige, dass diese Transformation R auf Q abbildet und benutze diese Transformation, um $\int \chi_Q \,\mathrm{d}\mu$. zu bestimmen und vergleiche dieses Ergebnis mit dem Wert von $\int \chi_Q \,\mathrm{d}\mu$ ohne zu transformieren.

Wieso stimmen diese beiden Ergebnisse nicht überein? *(6 Zusatzpunkte)*

113. Das Lebesgue-Integral.

(a) Man *zeige*, dass die durch

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion auf dem Intervall $I = [0, \infty)$ zwar im Sinne der eindimensionalen Integrationstheorie (s. Kap. 7) uneigentlich Riemann-integrierbar aber nicht Lebesgue-integrierbar (s. Kap. 12) ist.

(3+3 Zusatzpunkte)

(b) **(i)** *Entscheide* mit Begründung, ob für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ auch $f^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(3 Zusatzpunkte)

(ii) *Entscheide* mit Begründung, ob für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ auch $\sqrt{|f|} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(3 Zusatzpunkte)