Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
3. Übung

26. Februar 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 6. März 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

73. Abgeschlossene und offene Mengen.

(a) Man *untersuche*, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ offen oder abgeschlossen sind:

(i) $M_1 := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1 \,\}$ *(2 Punkte)*

(ii) $M_2 := \{\, (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ *(2 Punkte)*

(b) Es sei nun (X,d) ein metrischer Raum und $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(i) *Zeige:* $\{\, x \in X \mid f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0 \,\}$ ist abgeschlossen in X. *(4 Punkte)*

(ii) *Zeige:* $\{\, x \in X \mid f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0 \,\}$ ist offen in X. *(4 Punkte)*

(c) Man *belege durch ein Beispiel*, dass die Aussage aus (b)(ii) falsch wird, wenn man unendlich viele stetige Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots : X \to \mathbb{R}$ betrachtet. Wie steht es mit der Aussage aus (b)(i)? *(4 Punkte)*

74. Stetigkeit im $\mathbb{K}^n$.

Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten in dieser Aufgabe den $\mathbb{K}^n$ und den $\mathbb{K}^m$ jeweils mit der von einer Norm induzierten Metrik; die Wahl der Norm ist dabei für die folgenden Stetigkeitsuntersuchungen beliebig, weil auf diesen Räumen nach Satz 9.37 je zwei Normen zueinander äquivalent sind.

(a) *Untersuche*, ob die folgenden Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$ *(4 Punkte)*

[*Tipp:* Man benutze von Satz 9.30 die Äquivalenz (i)⇔(iii). Bei der Anwendung ist Aufgabe 70(a) nützlich.]

(b) Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$. *Zeige,* dass die „k-te Projektion", d.h. die Abbildung

$$\mathrm{pr}_k : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig ist. *(3 Punkte)*

(c) Sei $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine Abbildung. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei $f_k := \mathrm{pr}_k \circ f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ die „k-te Komponente" von f.
Zeige: f ist genau dann stetig, wenn f_k für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Aufgabe 70(a).]

(d) Sei $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine Abbildung. Dann ist der *Graph* von f die Menge

$$G(f) := \{\, (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{K}^m \,\} \subset \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^{m+n}\ .$$

Zeige: Wenn f stetig ist, so ist $G(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}^{m+n}$.
[*Tipp:* Aufgabe 73(b)(i).] *(3 Punkte)*

75. Ableiten und Integrieren als lineare Operatoren auf Funktionenräumen.
Sei $a < b$. Wir betrachten den Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ als normierten Raum mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\{\,|f(x)| \mid x \in [a,b]\,\}$. Weiter sei $C^1([a,b],\mathbb{R})$ der Unterraum von $C([a,b],\mathbb{R})$, der aus denjenigen $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ besteht, die auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar sind und deren Ableitung $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ sich stetig auf $[a,b]$ fortsetzen läßt. Für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ auch diese stetige Fortsetzung der Ableitung von f.

Wir untersuchen den „Differentialoperator" von $C^1([a,b],\mathbb{R})$, d.h. die Abbildung

$$D : C^1([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto f' .$$

(a) *Zeige*, dass die Abbildung D linear ist und *bestimme* ihren Kern. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass D an *keiner* Stelle $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ stetig ist. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Zu zeigen ist, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes $\delta > 0$ eine Funktion $g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ existiert mit $\|f-g\|_\infty < \delta$ und $\|D(f) - D(g)\|_\infty \geq \varepsilon$. Dabei kann hier $\varepsilon := 1$ gewählt werden. Um eine Idee zu bekommen, wie eine geeignete Funktion g aussehen könnte, kann man noch einmal den Tipp zu Aufgabe 68(c)(ii) anschauen.]

Wir betrachten nun auch den „Integraloperator" $I : C([a,b],\mathbb{R}) \to C^1([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto I(f)$, der durch

$$I(f)(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } x \in [a,b]$$

gegeben ist.

(c) *Zeige*, dass die Abbildung I linear ist und *bestimme* ihren Kern. *(3 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass I Lipschitz-stetig ist. *(3 Punkte)*

(e) *Zeige*, dass I ein „Rechts-Inverses" von D ist, d.h. dass

$$D \circ I : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto f$$

gilt und *bestimme* das Bild von D.
(*Kurzschreibweise:* $D \circ I = \mathbb{1}_{C([a,b],\mathbb{R})}$.) *(4 Punkte)*

(f) *Zeige*, dass

$$I \circ D : C^1([a,b],\mathbb{R}) \to C^1([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto f - f(a)$$

und *bestimme* das Bild von I.

(g) *Zeige*, dass

$$I : C([a,b],\mathbb{R}) \to \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$$

und

$$D : \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a) = 0\} \to C([a,b],\mathbb{R})$$

zueinander inverse lineare Abbildungen sind. *(4 Zusatzpunkte)*

(h) *Zeige*, dass für die Abbildungen I und D aus (g) gilt, dass

$$\|I(f)'\|_\infty = \|f\|_\infty \quad \text{und} \quad \|D(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty.$$

Folgere hieraus, dass $\|f'\|_\infty$ eine Norm auf $\{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$ ist *und* dass I und D aus (g) Isometrien sind, wenn man die Menge $\{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$ mit der durch $\|f'\|_\infty$ induzierten Metrik versieht. *(6 Zusatzpunkte)*