Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II

10. Übung

30. April 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 8. Mai 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

99. Über Quader, Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen.

(a) Seien Q_1, Q_2 zwei Quader des $\mathbb{R}^d$.

(i) *Zeige:* $Q_1 \cap Q_2$ ist die leere Menge oder ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(3 Punkte)*

(ii) *Beweise oder widerlege:* $Q_1 \cup Q_2$ ist ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(1 Punkt)*

(b) Wie in der Vorlesung definieren wir zu einer jeden Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus M$. Es seien nun Q_1, Q_2 zwei Quader in $\mathbb{R}^d$. *Zeige*:

(i) $\chi_{Q_1 \cap Q_2} = \chi_{Q_1} \cdot \chi_{Q_2}$ *(2 Punkte)*

(ii) $\chi_{Q_1 \cup Q_2} = \chi_{Q_1} + \chi_{Q_2} - \chi_{Q_1} \cdot \chi_{Q_2}$ *(3 Punkte)*

(c) Es seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. *Zeige*, dass dann auch

$$f + g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Treppenfunktionen sind. *(4 Punkte)*

100. Ein Beispiel für Nullmengen im $\mathbb{R}^2$.

Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. *Zeige*, dass g eine Nullmenge ist. *(8 Punkte)*

[*Tipp:* Man untersuche zunächst ein Teilstück von g von endlicher Länge und verwende dann Lemma 12.4.]

101. Lesbegue-integrable Funktionen.

(a) *Zeige*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in [0,2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel (Kapitel 12), aber auf dem Intervall $[0,2]$ nicht Riemann-integrabel (Kapitel 8) ist und *berechne* $\int f \, \mathrm{d}\mu$ im Sinne der Lesbegueschen Theorie. *(5 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right] \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel ist. *(4 Punkte)*

(c) *Berechne* $\int g \, \mathrm{d}\mu$ für die Funktion g aus (b). *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Man benutze die Reihendarstellung von e.]

102. Das Cantorsche Diskontinuum.

Wir definieren rekursiv eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ durch

$$C_0 := [0,1] \quad \text{und} \quad C_{n+1} := \tfrac{1}{3}\,C_n \cup \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\,C_n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann heißt $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ das *Cantorsche Diskontinuum.*

(a) *Skizziere* C_n für $n = 0, 1, 2, 3$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige,* dass C eine kompakte Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist. *(8 Punkte)*

[*Tipp:* Man zeige der Reihe nach: (1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C_{n+1} \subset C_n \subset [0,1]$. (2) C_n ist kompakt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und daher ist auch C kompakt. (3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist C_n eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen endlichen Quadern von $\mathbb{R}$ und die Summe der Maße dieser Quader beträgt $(\frac{2}{3})^n$. (4) C ist eine Nullmenge.]

(c) *Zeige,* dass C überabzählbar ist. *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Zeige zunächst, dass $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}} \in C$ für jede Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i \in \{0,2\}$ gilt und konstruiere sodann mithilfe der Darstellung reeller Zahlen zur Basis 2 eine injektive Abbildung $[0,1] \to C$.]