Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
12. Übung

15. Mai 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 22. Mai 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

108. Integralberechnung mit der Jacobischen Transformationsformel.

(a) Es sei A das rautenförmige Gebiet, welches durch die Geraden $x + 2y = 2$, $x - 2y = 2$, $x + 2y = -2$ und $x - 2y = -2$ berandet wird.

(i) *Finde* Koordinaten u, v so dass es eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ gibt, so dass $A' = \Phi^{-1}[A]$ ein Quadrat der Seitenlänge 4 ist. Drücke (x, y) mit Hilfe der Koordinaten (u, v) aus. *(4 Punkte)*

(ii) Benutze diese Koordinaten, um $\int_A (3x + 6y)^2 \, \mathrm{d}\mu$ zu *berechnen.* *(3 Punkte)*

(b) Es sei

$$B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x + y \leq 3 \} .$$

Berechne $\int_B \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \mathrm{d}\mu$ mit Hilfe der Transformationsformel. *(5 Punkte)*

(c) Gegeben seien die Parabeln $P_1 : y = x^2$, $P_2 : y = 2x^2$, $P_3 : x = y^2$, $P_4 : x = 3y^2$ für $x, y > 0$. Wir betrachten die Fläche C zwischen den Stücken von P_1 und P_2, die jeweils Schnittpunkte mit P_3 und P_4 haben und den Stücken von P_3 und P_4, die jeweils Schnittpunkte mit P_1 und P_2 haben.

Skizziere die Fläche C im $\mathbb{R}^2$ und *berechne* den Flächeninhalt von C mit Hilfe der Transformationsformel. *(6 Punkte)*

[*Tipp:* Beachte, dass auf den Rändern von C gilt, dass entweder $\frac{y}{x^2}$ oder $\frac{x}{y^2}$ konstant ist und dass es ausreicht die inverse Transformation $\Phi^{-1}(x, y)$ zu kennen, um $\det(\Phi(u, v))$ zu bestimmen.]

(d) Es sei D das durch die Ellipsen $9x^2 + y^2 = 9$ und $9x^2 + y^2 = 81$ sowie die Geraden $y = -x$ und $y = 0$ eingeschlossene Gebiet im zweiten Quadranten der xy-Ebene.

(i) *Bestimme* das Gebiet D' der $r\varphi$-Ebene, in das D unter der Koordinatentransformation $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = 3r \cdot \sin(\varphi)$ übergeht. *(3 Punkte)*

(ii) *Skizziere* D in der xy-Ebene sowie D' in der $r\varphi$-Ebene. *(2 Punkte)*

(iii) *Berechne* die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cdot \cos(\varphi), 3r \cdot \sin(\varphi)) ,$$

die zu der Transformation aus (i) gehört sowie ihre Determinante. *(2 Punkte)*

(iv) *Berechne* mit Hilfe von (i)–(iii) das Integral

$$\int_D \frac{xy}{9x^2 + y^2} \, \mathrm{d}\mu . \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

[*Tipp:* Der Wert $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ könnte nützlich sein.]

109. Polarkoordinaten.

(a) Es sei $R \in (0, \infty]$, $B_R := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R um Null in $\mathbb{R}^2$ und $f \in L^1(B_R)$. *Zeige*, dass dann gilt:

$$\int_{B_R} f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r \cdot f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r .$$

Diese Formel beschreibt die sogenannte *Integration in Polarkoordinaten.* *(6 Punkte)*
[*Tipp:* Sei $O := B_R \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2 \})$ und $U := (0, R) \times (-\pi, \pi)$ sowie $\Phi : U \to O$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Man zeige, dass in dieser Situation die Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel (Satz 12.33) erfüllt sind. Warum gilt $\int_{B_R} f \, \mathrm{d}\mu = \int_O f \, \mathrm{d}\mu$?]

(b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \exp(-(x^2 + y^2)) .$$

Zeige, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ist und *berechne* $\int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}\mu$. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Verwende Aufgabenteil (a) und betrachte zunächst $f \cdot \chi_{B_R}$.]

(c) Verwende das Ergebnis von (b), um zu *zeigen*, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

gilt. *(4 Punkte)*

110. Eine L^1-Nullfolge, die nirgends punktweise konvergiert.

Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2^p + q$ und $q < 2^p$. Sei

$$I_{p,q} := [q \cdot 2^{-p}, (q + 1)2^{-p}] \ \text{ und } f_n := \chi(I_{p,q}).$$

Dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offenbar eine Folge in $L^1(\mathbb{R})$.

(a) *Zeige*, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $L^1(\mathbb{R})$ ist. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für kein $x \in [0, 1]$ konvergiert. *(3 Punkte)*

Mit dem Abschnitt 12.6 des Skripts und dem vorliegenden Übungsblatt endet der für die Abschlußklausur relevante Stoff der Analysis II.

Informationen zur Abschlußklausur

Die **Abschlußklausur** zur Analysis II findet

am **Donnerstag, den 12. Juni 2014**, von **15.00 bis 16.30 Uhr** im Schloss **SO, Raum 108**

statt. Sie können eine Woche vor der Klausur im Studierendenportal abfragen, welcher Sitzplatz Ihnen für die Klausur zugewiesen worden ist. Wir empfehlen dringend, spätestens 15 Minuten vor Beginn der Klausur zu erscheinen.

Zur Teilnahme an der Abschlußklausur ist eine *Anmeldung* im Studienbüro erforderlich (Studenten, die sich nicht über das Studienbüro anmelden können wenden sich für die Anmeldung direkt an Eva Lübcke). Obwohl die reguläre Anmeldefrist abgelaufen ist, können Sie die Anmeldung auch jetzt noch (gegen Zahlung einer Nachgebühr) nachholen. Falls Sie an der Klausur teilnehmen wollen, aber bisher nicht angemeldet sind, ist es jedoch unbedingt notwendig, dass Sie die Anmeldung so rasch wie möglich nachholen. *Ohne Anmeldung hat niemand die Möglichkeit an der Abschlußklausur teilzunehmen!*

Bitte bringen Sie zur Klausur die folgenden *Gegenstände* mit:

- mindestens ein Schreibgerät (dokumentenecht, schwarze oder blaue Tinte, *kein* Rotstift, *kein* Bleistift, *kein* radierbarer Tintenroller oder radierbarer Kugelschreiber),
- Ihren Studierendenausweis bzw. Ihre ecUM-Karte.

Sie brauchen *kein Schreibpapier* mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird. Selbstverständlich dürfen Sie *Nahrungsmittel und Getränke* zur Klausur mitbringen, allerdings nur solche, von denen keine Belästigung der anderen Klausurteilnehmer (etwa durch Geräusch oder Geruch) ausgeht.

Als *Hilfsmittel* dürfen Sie ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt (210×297 mm) mitbringen und während der Klausur verwenden. Dies gilt unabhängig davon, ob es von Hand oder mit dem Computer o.ä. beschriftet ist und auch die Schriftgröße spielt keine Rolle. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten usw.) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes *Handy* ist während der Klausur abzuschalten.