Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
9. Übung

10. April 2011

Die Lösungen sind am Mittwoch, den 30. April 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

94. Singularitäten. Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - x^4 - y^2\ .$$

(a) *Untersuche* die Niveaumengen von g daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. *(4 Punkte)*

(b) *Skizziere* die Niveaumengen von g, die Singularitäten besitzen sowie einige weitere. *(3 Punkte)*

Sei nun

$$h : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi],\ (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$$

(c) *Untersuche* die Niveaumengen von h daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von $[-\pi, \pi]^2$ sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. *(4 Punkte)*

(d) *Skizziere* die Niveaumengen von h, die Singularitäten besitzen. *(3 Punkte)*

95. Extremwertsuche unter Nebenbedingungen.

(a) Sei $U := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad g : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy\ .$$

(i) *Zeige*, dass die Niveaumengen zu $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ glatt sind. *(2 Punkte)*

(ii) *Bestimme* die Gesamtheit aller kritischen Punkte von f auf den Niveaumengen $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (Wenn man festzustellen versucht, welcher der kritischen Punkte auf einer vorgegebenen Niveaufläche liegt, kommt man auf eine kubische Gleichung, die nicht gelöst zu werden braucht.) *(4 Punkte)*

(b) *Begründe* analog zu (a), dass die folgenden Funktionen Maximum und Minimum annehmen und *bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema angenommen werden.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x - 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$, *(4 Punkte)*

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ unter der Nebenbedinung $x^2 - xy + y^2 = 3$, *(4 Punkte)*

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *(4 Punkte)*

(c) *Begründe*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 4(x^2 + xy + y^2) + z^2$$

auf der Menge

$$M := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \,\}$$

Maximum und Minimum annimmt und *bestimme* den maximalen und den minimalen Wert. *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Betrachte den Rand $\partial M := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9 \,\}$ und das Innere $M^\circ := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 9 \,\}$ einzeln.]

96. Ein Tetraeder.

Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ das Tetraeder mit den Eckpunkten $A := (0,0,0)$, $B := (2,0,0)$, $C := (0,3,0)$ und $D := (0,0,4)$.

(a) *Begründe,* dass es einen Punkt in $\mathbb{R}^3$ gibt, für den die Summe S der Quadrate der Entfernungen von den Ecken minimal ist und *bestimme* diesen Punkt sowie den Wert von S. *(4 Punkte)*

(b) Wo liegt der gesuchte Punkt, wenn man zusätzlich fordert, dass er auf der Sphäre mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ liegen soll? *(4 Punkte)*

(c) Wo liegt der Punkt, wenn er nicht nur auf der Sphäre, sondern außerdem auf der Ebene mit der Gleichung $x + y + z = 0$ liegen soll? *(5 Punkte)*

97. Ein Kriterium für die Definitheit symmetrischer (2 × 2)-Matrizen.

Es sei $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ eine symmetrische (2×2)-Matrix. Bekanntlich ist dann die Determinante bzw. die Spur von A

$$\det(A) := ac - b^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Spur}(A) := a + c\,.$$

Wir nennen A positiv bzw. negativ definit, wenn die durch A beschriebene symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) := x \cdot Ay$ diese Eigenschaft hat. *Zeige:*

(a) *Zeige*, dass eine symmetrische Matrix genau dann positiv (negativ) definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte größer (kleiner) als Null sind. *(6 Zusatzpunkte)*
[*Tipp:* Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass für eine symmetrische Matrix A stets eine orthogonale Matrix B (d.h. $B^T = B^{-1}$) exisitiert, so dass

$$A = B^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.]$$

(b) **(i)** A ist genau dann positiv definit, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$ ist. *(2 Zusatzpunkte)*

(ii) A ist genau dann negativ definit, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$ ist. *(2 Zusatzpunkte)*

(iii) A ist genau dann indefinit (d.h. es gibt $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta(x, x) > 0$ und $\beta(\widetilde{x}, \widetilde{x}) < 0$), wenn $\det(A) < 0$ ist. *(2 Zusatzpunkte)*

[*Tipp:* In den Aufgabenteilen (b)-(d) verwende man das charakteristische Polynom von A.]

Bemerkung. Diese Kriterien sind vor allem hilfreich, um zu untersuchen, ob die Hessematrix einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt die Voraussetzung von Aufgabe 87(b) erfüllt.

98. Wiederholungsaufgaben.

(a) *Noch einmal metrische Räume.*

Untersuche die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ (versehen mit der euklidischen Norm bzw. Metrik) darauf, ob sie offen und/oder abgeschlossen und/oder beschränkt und/oder kompakt und/oder vollständig sind. Dabei genügt jeweils eine knappe Begründung der Behauptung.

(i) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 + y^3 \leq 1 \}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(ii) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1 \quad \text{und} \quad y \neq 0 \}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$ *(2 Zusatzpunkte)*

(b) *Noch einmal Extremwertsuche und Differentialrechnung.*

(i) *Bestimme* die kritischen Punkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und *entscheide*, ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder werder noch handelt. Sind die lokalen Extrema auch globale Extrema?

1. $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy^2 + x^2 + 3$,
2. $f(x,y) = 3x(1-y^2) - x^3$.

(4+4 Zusatzpunkte)

(ii) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \cos\left(\frac{xy}{\pi} + x + y\right).$$

an dem Punkt $(\pi, -\pi)$. *(4 Zusatzpunkte)*

(c) *Noch einmal Dunstkreis des Banachschen Fixpunktsatzes.*

(i) Betrachte $I = [1, \infty)$ und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Zeige, dass f einen eindeutigen Fixpunkt in I besitzt. Wie kann man diesen Fixpunkt annähern?

(4 Zusatzpunkte)

(ii) *Das Inverse der komplexen Exponentialfunktion.*

1. *Bestimme* für $z = x + \iota y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)) := (\mathrm{Re}(e^z), \mathrm{Im}(e^z))$. *(4 Zusatzpunkte)*
2. Zeige mit Hilfe des Satzes der inversen Funktion, dass die Ableitung der Umkehrfunktion von F gegeben ist durch die lineare Abbildung

$$(F^{-1})'(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (a,b) \mapsto \left(\mathrm{Re}\left(\frac{a+\iota b}{u+\iota v}\right), \mathrm{Im}\left(\frac{a+\iota b}{u+\iota v}\right)\right).$$

(6 Zusatzpunkte)

(iii) *Bestimme* die Menge S aller Punkte $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, so dass durch den Satz der impliziten Funktion auf einer Umgebung von (x_0, y_0) eine Funktion $\varphi(x,y)$ existiert mit $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ und alle Lösungen von

$$f(x,y,z) = xy^2 + 4x^2 z + z^2 y^2 = 0$$

von der Form $(x, y, \varphi(x,y))$ sind. *Bestimme* zudem den Gradienten $\nabla\varphi(x,y)$ für einen Punkt der zu S gehört. *(6 Zusatzpunkte)*

Frohe Ostern!