Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
7. Übung

27. März 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 3. April 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

87. Gradient, Rotation, Divergenz.

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ eine *Niveaulinie* von f, das ist eine differenzierbare Abbildung, so dass die Funktion $f \circ c : (a, b) \to \mathbb{R}$ konstant ist. *Zeige*, dass für $t \in (a, b)$ dann gilt: $(\nabla f)(c(t)) \cdot (c'(t)1) = 0$. *(4 Punkte)*

Interpretation. Der Gradient $(\nabla f)(x)$ steht senkrecht auf der „Niveaufläche“ $f^{-1}[\{f(x)\}]$ von f. (Beachte, dass c eine Kurve in dieser Niveaufläche beschreibt.)

(b) Es sei nun $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. *Berechne* div(rot g). *(4 Punkte)*

(c) *Zeige*, dass das differenzierbare Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nur dann Gradient einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sein kann, wenn $\mathrm{rot}(g) = 0$ ist. *(4 Punkte)*

(d) Es sei

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2 + 3y^2 + z(8x + y), x(6y + z), x(4x + y)).$$

(i) *Zeige* $\mathrm{rot}(g) = 0$. *(2 Punkte)*

(ii) *Zum Knobeln: Finde* eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Gradient das Vektorfeld g ist. *(5 Zusatzpunkte)*

88. Zu Satz 10.27: Hinreichendes Kriterium für lokale Extremwerte.

(a) Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. *Zeige:* Wenn β *positiv definit* (bzw. *negativ definit*) ist, d.h. wenn $\beta(x, x) > 0$ (bzw. $\beta(x, x) < 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\beta(x, x) \geq \delta \, \|x\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \beta(x, x) \leq -\delta \, \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Satz 9.37]

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f. Indem man zeigt, dass die Voraussetzungen von Satz 10.27 erfüllt sind, *beweise* man: Wenn

$$f''(x_0)(x, x) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f''(x_0)(x, x) < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum). *(2 Punkte)*

Bemerkung. Diese Verschärfung von Satz 10.27 gilt nicht, wenn f auf einem unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum definiert ist, siehe Beispiel 10.28.

89. Extremwertsuche.

(a) *Bestimme* alle lokalen Extrema der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 84(a), und *entscheide* jeweils, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt. *(4+4+4 Punkte)*

(b) Es sei X ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}$ sowie $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien Funktionen mit $\widetilde{f}|_X = f$ und $\widetilde{f}$ differenzierbar. *Zeige*, dass f differenzierbar ist und dass für alle $x \in X$ gilt, dass $f'(x,y) = \widetilde{f}'(x,y)|_X$. *(3 Punkte)*

(c) Es sei X ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Wir betrachten die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x - x_0\|^2\ ,$$

wobei $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ die euklidische Norm von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Indem man die Methoden der Extremwertsuche auf f anwendet, *zeige* man, dass es genau einen Punkt $x_1 \in X$ gibt, in dem f ein lokales Minimum annimmt und dass der Verbindungsvektor $x_1 - x_0$ senkrecht zu X ist. (Tatsächlich hat f in x_1 sogar ein globales Minimum.)

[*Tipp:* Benutze Aufgabenteil (b).] *(4 Punkte)*

(d) *Bestimme* $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $[0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto at + b$ die Wurzelfunktion $\sqrt{t}$ auf dem Intervall $[0,1]$ optimal quadratisch approximiert, das heißt so, dass

$$\int_0^1 (\,\sqrt{t}\ -\ (at+b)\,)^2\,\mathrm{d}t$$

möglichst klein wird. *(4 Punkte)*

90. Ein Taylorpolynom.

Es sei

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \cos(xy)\ .$$

(a) *Berechne* das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_{2,(\frac{1}{2},\pi)}f(x,y)$ von f an der Stelle $\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$. *(4 Punkte)*

(b) Benutze $T_{2,(\frac{1}{2},\pi)}f(x,y)$, um eine Näherung für $\cos(xy)$ an $(0.9, 1.6)$ zu *berechnen* und *vergleiche* diese Näherung mit dem Ergebnis des Taschenrechners. *(2 Punkte)*