Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
11. Übung

8. Mai 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 15. Mai 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

103. Integralberechnung mit dem Satz von Fubini.

Berechne $\int (f \cdot \chi_M)\,\mathrm{d}\mu$ für die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}^d$ und Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $M := [0,a] \times [0,b], \quad f(x,y) := x^2y^2$ *(3 Punkte)*

(b) $M := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\,\}, \quad f(x,y) := \sin(x) + y^3 + 4.$ *(3 Punkte)*

(c) $M := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ und } \sqrt{x} \le y \le 1\,\}, \quad f(x,y) := e^{y^3}.$ *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Man überlege sich, welche Integrationsreihenfolge die sinnvollere ist.]

104. Eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die nicht beschränkt ist.

Wir zeigen in mehreren Schritten, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrabel ist, obwohl $f(x)$ in der Nähe von $x = 1$ nicht beschränkt ist.

(a) *Finde* eine monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen (nicht unbedingt Treppenfunktionen) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$, die fast überall (punktweise) gegen f konvergiert. *(3 Punkte)*

(b) *Begründe*, dass f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechne $\int f_n\,\mathrm{d}\mu$. *(4 Punkte)*

(c) Folgere mittels des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22), dass f Lebesgue-integrierbar ist und *berechne* den Wert des Integrals $\int f\,\mathrm{d}\mu$. *(3 Punkte)*

105. Eine Funktion, die nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{für } (x,y) \in ([0,1]\times[0,1]) \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) *Berechne* $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. *(6 Punkte)*

(b) *Folgere* aus dem Ergebnis von (a), dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. *(2 Punkte)*

106. Warnung vor bedenkenlosem Vertauschen von Integration und Grenzwertbildung.

Betrachte die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(a) $f_n := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$ *(6 Punkte)*

(b) $f_n := n \cdot \chi_{[1/n,2/n]}$ *(6 Punkte)*

Man bearbeite jeweils für (a) und (b) die folgenden Punkte:

(i) *Skizziere* die Funktionen f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$.

(ii) *Zeige*, dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Lebesgue-integrierbaren Funktionen bestehen und fast überall gegen $f \equiv 0$ konvergieren.

(iii) *Untersuche*, ob

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = 0$$

gilt.

(iv) *Gebe an*, welche der Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22) und des Satzes der beschränkten Konvergenz von Lebesgue (Korollar 12.24) erfüllt bzw. nicht erfüllt sind.

107. Weitere Grenzwertaussagen für das Lebesgue-Integral.

Es sei (f_n) eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert.

(a) Es existiere ein $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $|f| \leq g$ fast überall. *Zeige,* dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist. *(6 Punkte)*

[*Tipp:* Man wende Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz (Korollar 12.24) auf die Folge (g_n) mit

$$g_n := \max(-g, \min(f_n, g)), \quad \text{d.h.} \quad g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } f_n(x) > g(x) \\ f_n(x) & \text{für } -g(x) \leq f_n(x) \leq g(x) \\ -g(x) & \text{für } f_n(x) < -g(x) \end{cases}$$

an. Die Formeln $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ und $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ sind vielleicht nützlich.]

(b) Es existiere ein $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $h \geq 0$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ fast überall $|f_n - f| \leq h$ gilt. *Zeige*, dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist und dass $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$ gilt. *(4 Punkte)*

[*Tipp:* Man verwende zunächst (a), um $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen und dann Lebesgues Satz, um die Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert zu beweisen.]