Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
8. Übung

3. April 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 10. April 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

90. Der Banachsche Fixpunktsatz.

(a) (i) *Zeige* mit Hilfe des Banachschen Fixpunksatzes 11.1, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^{-x}}{2} - x$$

im Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt. *(5 Punkte)*

(ii) Verwende einen Taschenrechner, um die ersten drei Näherungen der Nullstelle x^* von $f(x)$ mit Startwert $x_0 = 0$ zu *berechnen*. Nach wievielen Schritten wäre eine Genauigkeit von 10^{-10} erreicht? *(4 Punkte)*

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \left(1 - \tfrac{y^2}{3}\, , 1 - \tfrac{x^2}{4}\right).$$

Zeige, dass f genau einen Fixpunkt $(x^*, y^*) \in [0, 1] \times [0, 1]$ besitzt und *folgere*, dass die Gleichung $x^4 - 8x^2 + 48x - 32 = 0$ genau eine Lösung in $[0, 1]$ besitzt. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Man verwende die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$.]

91. Picard-Iteration.

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = u(t), \quad u(0) = 1\ . \qquad (\star)$$

(a) Verwende das Iterationsverfahren von Picard

$$u_0(t) = 1\ , \qquad u_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t u_n(s)\,\mathrm{d}s\ ,$$

um die ersten fünf Glieder einer Folge zu *bestimmen*, welche nach dem Banachschen Fixpunktsatz gegen die Lösung u von $(\star)$ konvergiert. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Siehe Beweis von Satz 11.3.]

(b) Wie lautet die Lösung von $(\star)$? *(2 Punkte)*

92. Zum Satz 11.8 über die inverse Funktion.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) *Zeige,* dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = 1$, aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbar ist. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Für die Untersuchung bei $x = 0$ kann man Aufgabe 46(b) auf $f(x) - x$ anwenden.]

(b) *Zeige,* dass f auf keiner Umgebung von $x = 0$ injektiv ist. *(5 Punkte)*
[*Tipp:* Angenommen, $f_{|(-\varepsilon,\varepsilon)}$ wäre injektiv für ein $\varepsilon > 0$. Dann wäre $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ nach Satz 6.3 streng monoton und deshalb würde $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \geq 0$ bzw. $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \leq 0$ gelten. Indem man nun für eine geschickt gewählte Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Werte $f'(a_n)$ und $f''(a_n)$ ausrechnet erhält man einen Widerspruch.]

93. Zum Satz über die implizite Funktion.

(a) Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) *Zeige*, dass die durch $f(x, y) = 0$ lokal bestimmte implizite Funktion $y = g(x)$ einen kritischen Punkt in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, wenn

$$f(x, y) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \ \text{ und } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$ *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Man differenziere die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ mit Hilfe der Kettenregel.]

(ii) Sei nun f zudem zweimal differenzierbar. *Zeige*, dass in (x, y) ein lokales Maximum vorliegt, wenn

$$-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} < 0. \tag{$\star$}$$

(4 Punkte)

Bemerkung: Analog zeigt man dieselbe Aussage auch für ein lokales Minimum mit „> 0“ anstelle von „< 0“ in $(\star)$.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1.$$

(i) *Bestimme*, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal in der Form $y = g(x)$ auflösbar ist. *(4 Punkte)*

(ii) *Bestimme* mit Hilfe von (a) die kritischen Punkte von g und *entscheide* jeweils, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder weder noch handelt. *(3 Punkte)*

(c) *Zeige,* dass man die Schnittmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der beiden Nullstellenmengen

$$x^2 - 2xy + y^2 - z^3 = -1 \quad \text{und} \quad e^{x-y} - 2z = -1$$

in der Nähe des Punktes $(1, 1, 1) \in S$ durch eine Kurve in Abhängigkeit von x parametrisieren kann, d.h. dass es eine Umgebung $\mathcal{O}$ von 1 in $\mathbb{R}$ und eine Umgebung U' von $(1, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\alpha : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ (eine „Kurve“) gibt, so dass

$$S \cap U' = \{\, (t, \alpha(t)) \mid t \in \mathcal{O} \,\}$$

gilt. *(3 Punkte)*

Information

Der zweite Klausurtermin iat am Dienstag, den 26. August 2014.