Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
6. Übung

20. März 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 27. März 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

84. Kritische Punkte, lineare Approximation, Gradient, Rotation und Divergenz.

(a) *Berechne* den Gradienten und *bestimme* alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ *(4 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y \cdot \sin(x)$ *(4 Punkte)*

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^4 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz$ *(6 Punkte)*

(b) Berechne die Ebenendarstellung $E : ax + by + cz = d$ der lineare Approximation von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - 5xy^2 - 3y + 4$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (2,1)$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $z = f(x,y)$. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Die lineare Approximation von f an (x_0,y_0) ist gleich dem Taylorpolynom erster Ordnung von f an (x_0,y_0).]

(c) *Berechne* die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x^2y, y^2z, xz)\ .$$ *(3+3 Punkte)*

85. Mehr Rechenregeln für die Ableitung.

(a) Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k\, y_k$ und der hiervon induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

(i) Sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

gegeben.
Zeige, dass $(\nabla f)(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und *begründe*, warum f an $x = 0$ in keine Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist. *(4 Punkte)*

(ii) Sei nun die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

gegeben.
Zeige, dass für die k-te partielle Ableitung von h an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\|x\|}\, e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}\, x$. Dabei ist $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ der k-te Standardeinheitsvektor von $\mathbb{R}^n$. *(5 Punkte)*

(iii) *Folgere* aus (ii): h ist differenzierbar und für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$h'(x)v = \frac{1}{\|x\|}\, v - \frac{x \cdot v}{\|x\|^3}\, x\ .$$

Dabei bedeutet der Ausdruck $h'(x)v$ die Anwendung der linearen Abbildung $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf den Richtungsvektor v. *(4 Zusatzpunkte)*

(b) Es seien X_1, X_2, Y normierte Vektorräume und $\beta : X_1 \times X_2 \to Y$ eine stetige, bilineare Abbildung.
Zeige, dass β als Abbildung des Produkt-Vektorraums $X_1 \times X_2$ differenzierbar ist und dass für alle $(x_1,x_2), (v_1,v_2) \in X_1 \times X_2$ gilt:

$$\beta'(x_1,x_2)(v_1,v_2) = \beta(v_1,x_2) + \beta(x_1,v_2)\ .$$ *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Satz 10.11.]

86. Geometrische Anschauung des Laplaceoperators in $\mathbb{R}^2$.

Im Folgenden sei $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma_r(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ eine Parametrisierung der Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius r.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom höchstens ersten Grades. *Zeige*, dass

$$\int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0) \Big)\, dt = 0. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom zweiten Grades. *Zeige*, dass dann

$$\frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0) \Big)\, dt = \triangle f(p_0). \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nun ein homogenes Polynom in $(x_0 - x, y_0 - y) \in \mathbb{R}^2$ vom Grad größergleich 3, d.h.

$$f(x, y) = \sum_{k+\ell=n} a_k (x - x_0)^k (y - y_0)^\ell$$

mit $n \geq 3$. *Zeige*, dass

$$\lim_{r\to 0} \left(r^{-2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0) \Big)\, dt \right) = 0. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

(d) Sei schließlich $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. *Folgere* aus (a)-(c) und mit Hilfe der mehrdimensionalen Taylorentwicklung, dass

$$\lim_{r\to 0} \left(\frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \Big(f(p_0 + \gamma_r(t)) - f(p_0) \Big)\, dt \right) = \triangle f(p_0).$$

(6 Zusatzpunkte)

Bemerkung: Dies bedeutet, dass der Laplace-Operator das Integral über die Abweichung der Funktionswerte von f auf einem infinitesimal kleinen Kreis um $f(p_0)$ zu $f(p_0)$ misst und das Ergebnis mit der Kreisfläche „gewichtet“. Er kann also als *radialsymmetrische Ableitung* von f an p_0 betrachtet werden.

Information

Der erste Termin der ***Abschlußklausur*** *zur Analysis II ist*
Donnerstag, der 12. Juni 2014.

Um an dieser Klausur teilnehmen zu können, müssen Sie sich zwischen dem **2. April** und dem **16. April** zur Prüfung **anmelden**. Dies erfolgt elektronisch über das Studierendenportal (*Prüfungen → Prüfungsanmeldung*). Falls Sie die Analysis II unter den bei Ihnen vom System angezeigten Prüfungen nicht finden (dies kann insbesondere bei Nebenfachstudierenden der Fall sein) oder sonstige Probleme bei der Anmeldung auftreten sollten, wenden Sie sich bitte an das Studienbüro.

Bitte beachten Sie, dass Ihre Anmeldung ab dem Ende der Anmeldefrist *verbindlich* ist und ein Rücktritt von der Prüfung ab diesem Zeitpunkt nur noch aus wichtigem Grund (wie z.B. Krankheit) möglich ist. Lediglich in dem Fall, dass Sie die Zulassung zur Abschlußklausur nicht erreichen, wird die Anmeldung von uns storniert und gilt dann als nicht erfolgt.

Nach Informationen des Studienbüros wird der **zweite Klausurtermin** für die Analysis II zwischen dem **23. August 2014** und dem **30. August 2014** (beide Samstage sind als mögliche Termine eingeschlossen) liegen.

Zur Vorbereitung auf die Klausur am zweiten Termin wird in den kommenden Semesterferien ein **Wiederholungskurs** angeboten. Dieser soll vornehmlich denjenigen Teilnehmern, die die Klausur am 12. Juni nicht bestehen, zur Vorbereitung auf die Klausur am zweiten Termin dienen.

Der Wiederholungskurs findet voraussichtlich vom ***4. August*** *bis zum* ***15. August 2014*** *statt: jeweils von Montag bis Freitag täglich von* ***13.45*** *bis* ***15.15 Uhr*** *in A5, 6, Raum C015.*

Er wird von Dr. Sebastian Klein geleitet. Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.