Martin Schmidt
Eva Lübcke

12. Februar 2014

Analysis II
Präsenzübung

Die Lösungen werden am Montag, den 17. Februar bzw. Dienstag, den 18. Februar 2014 in den Übungsgruppen besprochen.

64. Metriken.

(a) Man *beweise* oder *widerlege*, dass durch

$$d(x,y) := x - y$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. Dabei ist $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) *Die Metrik der Mannheimer Quadrate.* Zeige, dass für $a, b \in \mathbb{R}^2$ durch

$$d_M(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

eine Metrik definiert wird. Wieso ist diese Metrik für einen Taxifahrer, der durch die Mannheimer Quadrate fährt, sinnvoller als die euklidische Metrik?

65. Grundlagen metrischer Räume.

(a) **(i)** Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$. Finde ein *Beispiel*, so dass die Offenheit und Abgeschlossenheit der Menge A von der Wahl der Menge B abhängt.

(ii) Gebe ein *Beispiel* für eine Menge A in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, die weder offen noch abgeschlossen ist.

(iii) *Zeige*, dass sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\emptyset$ offen und abgeschlossen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind.

(b) Sei A eine Menge in einem metrischen Raum X. Dann ist ein Punkt $x_0 \in A$ genau dann ein *innerer Punkt* von A, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, die ganz in A enthalten ist. Das *Innere* A° von A ist definiert als die Menge aller inneren Punkte von A und ihr *Rand* ∂A als $\overline{A} \setminus A^\circ$.

(i) *Zeige*, dass die Menge A genau dann offen ist, wenn $A = A^\circ$.

(ii) *Zeige*, dass die offenen Mengen äquivalenter Normen übereinstimmen.

(iii) *Bestimme* das Innere, den Abschluß und den Rand der folgenden Mengen im $\mathbb{R}^n$:

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < 1,\, x_i \in \mathbb{Q}, i = 1 \dots n\},$$

$$A_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1, x_1 = 0\}.$$