Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
2. Übung

20. Februar 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 27. Februar 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

70. Folgenkonvergenz im $\mathbb{R}^n$.

(a) Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben das Element $x_k \in \mathbb{R}^n$ jeweils in „Komponenten", d.h. in der Form $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ mit $x_k^j \in \mathbb{R}$.

Zeige: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, wenn für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die „Komponentenfolge" $(x_k^j)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \Big(\lim_{k\to\infty} x_k^1 \,, \ \ldots \ , \ \lim_{k\to\infty} x_k^n \Big) \ \in \ \mathbb{R}^n \,.$$ *(6 Punkte)*

Bemerkung. In Satz 9.37 werden wir sehen, dass je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Die obige Aussage gilt deshalb nicht nur bezüglich der Maximumnorm, sondern auch bezüglich jeder beliebigen anderen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Dieser Konvergenzbegriff ist gemeint, wenn von der „Konvergenz im $\mathbb{R}^n$" (ohne ausdrückliche Angabe einer Metrik bzw. Norm) die Rede ist.

(b) *Untersuche,* ob die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_k := \Big(\sqrt[k]{k} \,, \ (1+\tfrac{1}{k})^k \,, \ \tfrac{1}{k} \Big) \ \in \ \mathbb{R}^3$$

in $\mathbb{R}^3$ konvergiert und *bestimme* gegebenenfalls den Grenzwert. *(4 Punkte)*

(c) Konvergiert die Folge aus (b) bezüglich der diskreten Metrik (Beispiel 9.2(i)) auf $\mathbb{R}^3$? *(3 Punkte)*

71. Diverses zu metrischen Räumen.

(a) *Beweise oder widerlege:* Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y und ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $f^{-1}[K] \subset X$ kompakt. *(3 Punkte)*

(b) *Finde (mit Begründung)* eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die ein Maximum und ein Minimum besitzt, aber nicht kompakt ist. *(3 Punkte)*

(c) *Beweise oder widerlege:* Für jede Menge X ist die diskrete Metrik auf X (siehe Beispiel 9.2(i)) vollständig. *(4 Punkte)*

(d) Man *gebe explizit* eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$ *an*, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. *(4 Punkte)*

72. Vervollständigung metrischer Räume. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir werden in dieser Aufgabe eine „Vervollständigung“ von X konstruieren.

(a) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchyfolgen von X.
Zeige: Die reelle Zahlenfolge $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Man verwende die Ungleichung aus Beispiel 9.33(iii) („Parallelogrammungleichung“), um $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)|$ auszurechnen.]

(b) Seien $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei weitere Cauchyfolgen von X mit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \widetilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, \widetilde{y}_n) = 0$.
Zeige, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} d(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

gilt. *(3 Punkte)*
[*Tipp:* Man verwende wieder die Parallelogrammungleichung.]

(c) Sei $\mathfrak{C}$ die Menge der Cauchyfolgen von X. Für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ schreiben wir $(x_n) \sim (\widetilde{x}_n)$, wenn $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \widetilde{x}_n) = 0$ gilt.
Zeige, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{C}$ definiert wird (siehe Abschnitt 1.3). *(3 Punkte)*

(d) Sei $\widetilde{X}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{C}$ bezüglich $\sim$.
Zeige: Dann gibt es genau eine Abbildung $\widetilde{d} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $(x_n), (y_n) \in \mathfrak{C}$ gilt:

$$\widetilde{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \ .$$

Dabei bezeichnen wir für $(x_n) \in \mathfrak{C}$ mit $[(x_n)] \in \widetilde{X}$ die Äquivalenzklasse von (x_n) bezüglich $\sim$. *(3 Punkte)*

(e) *Zeige*, dass $\widetilde{d}$ eine Metrik auf $\widetilde{X}$ ist. *(4 Punkte)*

(f) Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $(x) = (x)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Folge in X, die konstant gleich x ist; offenbar ist $(x) \in \mathfrak{C}$. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : X \to \widetilde{X}, \ x \mapsto [(x)] \ .$$

Zeige: Φ ist eine *Isometrie*, das heißt, es gilt

$$\forall\, x, y \in X \ : \ \widetilde{d}(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y) \ .$$

Folgere hieraus: Φ ist injektiv und stetig. *(3 Punkte)*

(g) *Zeige*: Das Bild $\Phi[X]$ liegt dicht in $\widetilde{X}$. *(3 Punkte)*

(h) *Beweise*, dass $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ ein vollständiger metrischer Raum ist. *(6 Zusatzpunkte)*
[*Tipp:* Es sei eine Cauchyfolge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widetilde{X}$ gegeben. Da nach (g) das Bild $\Phi[X]$ dicht in $\widetilde{X}$ liegt, existiert zu $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein $x_n \in X$ mit $\widetilde{d}(\Phi(x_n), \xi_n) < \frac{1}{n}$. Man zeige, dass die hierdurch definierte Folge (x_n) in X eine Cauchyfolge ist, die also ein Element $\xi := [(x_n)] \in \widetilde{X}$ repräsentiert, und dass die Folge (ξ_n) in $\widetilde{X}$ gegen ξ konvergiert.]

Wegen (f) ist das Bild $\Phi[X] \subset \widetilde{X}$ eine „Kopie“ von X, die in $\widetilde{X}$ enthalten ist. Indem man $\Phi[X]$ mit X identifiziert, kann man daher $\widetilde{X}$ als eine „Vervollständigung“ von X auffassen.