Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II 6. März 2014

4. Übung

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 13. März 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

76. Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$.

Man *untersuche* für die folgenden Funktionen $f_k : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f_k(x,y)$ jeweils, ob f_k in $(0,0)$ stetig fortsetzbar ist (d.h. man untersuche, ob man einen Wert $f_k(0,0) \in \mathbb{R}$ so wählen kann, dass die hierdurch fortgesetzte Funktion $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $(0,0)$ stetig ist).

(a) $f_1(x,y) := \dfrac{\sqrt{|x|}y}{|x|+|y|}$ *(5 Punkte)*

(b) $f_2(x,y) := \dfrac{2x-y}{|x|+2|y|}$ *(5 Punkte)*

(c) $f_3(x,y) = \dfrac{x^3\,y}{x^6+y^4}$ *(5 Punkte)*

77. Die Exponentialfunktion für Matrizen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auch den Raum der reellen $(n\times n)$-Matrizen. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, konvergiert für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Potenzreihe $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt die *(matrixwertige) Exponentialabbildung.*

(a) Sei $t, s \in \mathbb{R}$. *Berechne* $\exp(A)$ für die folgenden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

(i) $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ *(3 Punkte)*

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ *(4 Punkte)*

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ *(4 Punkte)*

[*Tipp:* Man rechne jeweils zuerst A^n für $n \leq 3$ aus, um auf Ideen zu kommen, wie A^n allgemein aussieht.]

(b) *Berechne* $e^A \cdot e^B$ und $e^B \cdot e^A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(c) Sei $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \cdot B = B \cdot A$. *Zeige:* $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.
[Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass auch für miteinander kommutierende Matrizen die binomische Formel $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$ gilt.] *(4 Punkte)*

(d) *Folgere* aus (c), dass $\exp(A)$ stets invertierbar ist mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(3 Punkte)

(e) *Zeige*, dass für beliebiges $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ gilt, dass $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ gilt und *folgere* hieraus, dass für diagonalisierbares $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ auch e^A diagonalisierbar ist. *(3 Punkte)*

78. Derivationen.

Sei V ein Banachraum. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V),\ L \mapsto A \cdot L - L \cdot A.$$

(a) *Berechne* $D_A(L)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass D_A eine Derivation auf $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. dass für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ gilt:

$$D_A(L_1 \cdot L_2) = D_A(L_1) \cdot L_2 + L_1 \cdot D_A(L_2)\ .$$ *(3 Punkte)*

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann sind Links- und Rechtsmultiplikation $\ell(A)$ und $r(A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ definiert als

$$\ell(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto A \cdot L$$

und

$$r(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto L \cdot A.$$

Zeige, dass für $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$r(B)\ell(A) = \ell(A)r(B).$$ *(2 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass $\exp(\ell(A)) = \ell(\exp(A))$ und dass $\exp(r(A)) = r(\exp(A))$.
Tipp: Zeige, dass $\ell(A^n) = (\ell(A))^n$ bzw. $r(A^n) = (r(A))^n$ und benutze dieses. *(3 Punkte)*

(e) *Zeige* mit Hilfe von Aufgabe 77, Teil (c) sowie (c) und (d), dass

$$\exp(D_A)L = \exp(A) \cdot L \cdot \exp(-A).$$

Dabei wird $\exp(D_A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ und $\exp(\pm A)$ in $\mathcal{L}(V)$ gebildet. *(2 Punkte)*