Martin Schmidt
Eva Lübcke

Analysis II
1. Übung

12. Februar 2014

Die Lösungen sind am Donnerstag, den 20. Februar 2014, bis 17.00 Uhr in die Briefkästen in A5 einzuwerfen.

66. Metriken.

(a) Man *beweise* oder *widerlege*, dass durch

$$(x-y)^2$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass durch die Einschränkung der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ auf die Vereinigung der Inversen der natürlichen Zahlen mit $\{0\}$ wegen

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

eine Metrik auf $\overline{\mathbb{N}}$ gegeben ist durch

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm},\ d(n,\infty) = d(\infty,n) = \frac{1}{n},\ d(\infty,\infty) = 0.$$

(6 Punkte)

67. Wie man aus Metriken weitere konstruiert.

(a) Gegeben seien eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X sowie eine monoton steigende Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und der Eigenschaft

$$\forall\, t,s \in \mathbb{R}_0^+ \ :\ f(t+s) \leq f(t) + f(s)\ .$$

Zeige, dass dann

$$\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(d(x,y))$$

eine weitere Metrik auf X ist. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}$ die Voraussetzungen aus (a) erfüllt. *(3 Punkte)*

(c) *Folgere* aus (a) und (b), dass durch $\widetilde{d}(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird. *(3 Punkte)*

(d) Seien $x := (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, y := (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige die Konvergenz der Reihe

$$d_F(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

(1 Punkt)

(e) *Zeige* mit Hilfe von (c) und (d), dass durch d_F auf dem Raum (s) aller Folgen in $\mathbb{R}$ eine Metrik gegeben ist, (s) also ein metrischer Raum ist. Diese Metrik heißt auch *Fréchet-Metrik.*

(3 Punkte)

68. Normen.

(a) Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann bezeichnet man die Menge $\{ v \in V \mid \|v\| = 1 \}$ aller Vektoren von V mit der Norm 1 als *Einheitskugel* in $(V, \|\cdot\|)$.

(i) *Skizziere* die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
(3 Punkte)

(ii) Kann man an den Bildern aus (i) ablesen, dass diese drei Normen äquivalent sind?
(Nur zum Nachdenken)

(b) Sei $x \in \mathbb{C}^n$. *Zeige*, dass die Maximumsnorm der Grenzwert der $\boldsymbol{p}$-Normen ist, d.h.

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \,. \qquad \textit{(6 Punkte)}$$

[*Tipp:* Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ gegeben, so erweitere man den Ausdruck für $\|x\|_p$ mit $|x_k|$, wobei $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|x_k| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ ist.]

(c) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir bezeichnen mit $C^1([a, b], \mathbb{R})$ den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$. Ferner sei für $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$

$$\|f\|_0 := \sup\{ \, |f(x)| \mid x \in [a, b] \, \} \quad \text{und} \quad \|f\|_1 := \|f\|_0 + \sup\{ \, |f'(x)| \mid x \in [a, b] \, \} \,.$$

(i) *Zeige*, dass durch $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ zwei Normen auf $C^1([a, b], \mathbb{R})$ definiert werden.
(6 Punkte)

(ii) *Beweise oder widerlege*: $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ sind zueinander äquivalent. *(6 Punkte)*
[*Tipp:* Untersuche $f(x) := \sin(cx)$ mit $c \geq \frac{2\pi}{b-a}$.]

69. Grundlagen metrischer Räume. *Belege* die folgenden Aussagen *durch jeweils ein Beispiel*:

(a) Es gibt einen metrischen Raum, in dem jede Teilmenge zugleich offen und abgeschlossen ist. *(4 Punkte)*

(b) Der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen ist im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. *(4 Punkte)*