Aufgaben für den Wiederholungskurs der Analysis 1

vom 13.1.2014 bis 24.1.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Aufgabe 1. Es seien A, B und C Mengen. Zeige, dass folgendes Distributivgesetz gilt:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Aufgabe 2. Bestimme Supremum und Infimum folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $M_1 = \left\{2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$, (b) $M_2 = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N},\, n < m\right\}$.

Hinweis: Verwende bei (a) die Bernoullische Ungleichung.

Aufgabe 3.

(a) Welche Eigenschaft von stetigen Funtionen $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, ist beschrieben durch

$$\forall\, x \in [a,b]\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geqslant n_0 \ :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(b) Wie lautet die Negation dieser Aussage in Quantorenschreibweise?

Aufgabe 4. Sei $\sim$ eine Relation, die folgendermaßen definiert ist:

$$(m, n) \sim (m', n') :\Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

(a) Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeige, dass $(3,4) \sim (2,3)$ gilt.

(c) Skizziere die Partition von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bzgl. dieser Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4. Man gebe für die Funktionen

(a) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ (b) $g(x) = \frac{1}{|x+1|}$ (c) $h(x) = \sqrt{\min(1, x^2)}$

jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie den Bildbereich $B \subseteq \mathbb{R}$ an und skizziere ihre Graphen.

Aufgabe 5. Untersuche, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) := n^2,$

(b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \qquad f(r/s) := r$, wobei $r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}[r, s] = 1$,

(c) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, \qquad f(n) := n + 1.$

(d) $f : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ungerade}\} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\},\ f(n) := 2n.$

2 Das Induktionsprinzip

Aufgabe 1. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n^2 + n$,

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

(d) $\sum\limits_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$,

(f) $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$,
wobei für $k = 1, \ldots, n$ alle x_k dasselbe Vorzeichen haben und $x_k > -1$.

(g) $\sum\limits_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$.

Aufgabe 2. Zeige, dass für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq b$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

Aufgabe 3. Zeige, dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n^3}{3^n} \leqslant 1.$$

Aufgabe 4. Zeige, dass für $y \neq 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + y^{(2^k)}\right) = \frac{1 - y^{(2^{n+1})}}{1 - y}.$$

3 Komplexe Zahlen

Aufgabe 1. Schreibe die folgenden komplexen Zahlen z in der Standardform $z = x + \iota y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und bei (a)-(g) auch in Polarform $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$:

(a) $\frac{1}{1+\iota}$,

(b) $\frac{1}{z'}$, $z' \in \mathbb{C}$,

(c) $\frac{3+6\iota}{8-2\iota}$,

(d) $\frac{\iota+2}{1+\iota} - \frac{7\iota-1}{3-\iota}$,

(e) $(2\iota + 1)(-3\iota - 1)$,

(f) $\frac{\iota}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\iota}{2}}$,

(g) $e^{-\iota\pi/2}$,

(h) $2e^{3\iota\pi/4} \cdot 3e^{\iota\pi/4}$.

Aufgabe 2. Bestimme alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

(a) $z^2 = \iota$,

(b) $z^4 = -1$,

(c) $z^8 = 1$,

(d) $z^2 - 2z = \iota - 1$.

Aufgabe 3. Bestimme die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant 2\}$,

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \iota| < 4\}$,

(c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(|z|) \leqslant 2\}$,

(d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z^3) = 0\}$,

(e) $M_5 := \{\exp(z) \mid z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}$,

(f) $M_6 := \{\exp(x + \iota y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$,

(g) $M_7 := \{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = \lambda\iota,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4 Folgen

Aufgabe 1. Untersuche, ob die nachstehenden Folgen konvergent sind und bestimme gegebenenfalls ihren Limes:

(a) $a_n := \frac{2n^2+24n+5}{4n^2-12n+9}$,

(b) $b_n := \sqrt[n]{10}$,

(c) $c_n := \sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}$,

(d) $d_n := \frac{2^n+6^n}{5^n}$,

(e) $e_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{1+3n+2n^2}$,

(f) $f_n := \frac{2^n}{n}$,

(g) $g_n := \frac{10^n}{n!}$,

(h) $h_n := \frac{n^{10}}{n!}$.

Hinweis: Bei Aufgabenteil (f) verwende man Aufgabe 2.1(b).

Aufgabe 2. Benutze das Monotonieprinzip, um die Konvergenz folgender Folgen zu zeigen:

(a) $a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$,

(b) $b_1 := 4,\ b_{n+1} := \sqrt{3 + b_n}$.

Aufgabe 3. Bestimme alle Häufungspunkte der Folge $a_n := \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$.

Aufgabe 4. Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeige, dass die Produktfolge $(s_n t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Beachte dabei, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht notwendigerweise konvergent ist. Daher können nicht die Rechenregeln für konvergente Folgen angewendet werden.

Aufgabe 5. Welche der beiden Größen $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ist im Allgemeinen größer für reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Aufgabe 6. Bestimme Limes Superior und Limes Inferior der nachstehenden Folgen:

(a) $a_n := \begin{cases} \frac{2n}{n+1} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{n}{2n+1} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

(b) $b_n := (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

Aufgabe 7. Man bestimme die Limiten der nachstehenden Folgen von Partialsummen:

(a) $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$,

(b) $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!}$.

5 Reihen

Aufgabe 1. Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren. Die Grenzwerte müssen nicht angegeben werden.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{\frac{1}{n}}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\exp(-n)$,

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{(2{,}7)^n n!}$,

(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{(2{,}8)^n n!}$.

Aufgabe 2. Berechne für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius ρ der folgenden Potenzreihen. Konvergieren die Reihen für $x = \pm\rho$ bzw. $|z| = \rho$?

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^{n!}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^{2n}}x^{2n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n n^3}$,

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$.

Aufgabe 3. Beweise, dass die Reihen

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$,

konvergieren und berechne ihren Grenzwert.

Aufgabe 4. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2014n+1}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^n$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\binom{3n}{n}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\alpha^n$ mit $\alpha \geqslant 0$.

6 Stetigkeit

Aufgabe 1. Zeige, dass die Funktion

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{\sin(x)} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 2. Die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien definiert durch

$$g_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|}.$$

(a) Zeige, dass alle Funktionen g_n stetig sind.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$x \mapsto g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

definiert bzw. stetig?

Aufgabe 3.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \, x \mapsto \sqrt{|1 - x|}$$

gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R}, \, x \mapsto \frac{1}{x}$$

stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(c) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \, x \mapsto |x|$$

Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 4. Zeige, dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $f(x) := \min\{x, 1\}$, (b) $f(x) := |x|^q,\ q \in \mathbb{Q}_+$.

Aufgabe 5.

(a) Zeige, dass die reelle Polynomfunktion $p(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1$ genau vier Nullstellen besitzt.

(b) Zeige, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_{2n+1} \neq 0$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

(c) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeige, dass ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert, so dass $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Aufgabe 6. Untersuche die Funktionen

(a) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}$, (b) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}$

auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

Aufgabe 7. Welche der Funktionen $e^{-1/x}$ und e^{-1/x^2} lassen sich in Null stetig fortsetzen?

Aufgabe 8. Die durch

$$f : D_f := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\} \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x + 2 \text{ für } x < -2, \\ 0 \text{ für } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x - 2 \text{ für } x > 2 \end{cases}$$

definierte Funktion ist bijektiv, so dass ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to D_f$ existiert. Man zeige, dass f stetig ist, aber f^{-1} nicht. Wieso widerspricht dies nicht dem Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion?

7 Differentialrechnung

Aufgabe 1. Untersuche folgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \leqslant 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x < 1, \\ x - 1 & \text{für } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Betrachte die Funktion

$$f : (1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}\right).$$

Untersuche, ob f auf dem Definitionsbereich differenzierbar ist und berechne gegebenenfalls die Ableitung f'.

Aufgabe 3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen definiert und wo sind sie differenzierbar? Man berechne gegebenenfalls ihre Ableitungen.

(a) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$.

(b) $g(x) = \ln(\cos(x))$,

(c) $h(x) = x^{a^x}$.

Aufgabe 4. Man finde alle kritschen Punkte der folgenden Funktionen und untersuche, ob es sich um lokale Maxima, lokale Minima oder weder noch handelt. Sind dies auch globale Extrema?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 11x^2 + 40x - 7$,

(b) $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$,

(c) $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)$.

Aufgabe 5. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \cot^3(x)$,

(b) $f(x) = e^{(e^x)}$.

Aufgabe 6. Es sei $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$. Man zeige, dass es ein $L > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in [0,1]$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Aufgabe 7. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2x + \frac{1}{1+x^2}.$$

Zeige, dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt und berechne $(f^{-1})'(1)$.

Aufgabe 8. Der für feste $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegebenen Ellipse ist ein achsenparalleles Rechteck mit Flächeninhalt $A(x, y) = 4xy$ einbeschrieben. Bestimme die „optimalen" Werte $(x_{\max}, y_{\max})$ in Abhängigkeit von a und b, für welche der Flächeninhalt A maximal ist.

8 Anwendungen der Differenzierbarkeit

Die Regeln von L'Hôpital

Aufgabe 1. Berechne die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln(x)}{\tan^2(x)}$,

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{\cosh(x)}$,

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x}$,

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x^m+1)}{\ln(x^n)}$ für $n, m \in \mathbb{N}$,

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}$,

(f) $\lim\limits_{x \to \infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right]$,

(g) $\lim\limits_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$,

(h) $\lim\limits_{x \to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}$.

Tipp: Bei (f) substituiere $x = \frac{1}{y}$.

Aufgabe 2. Wo steckt der Fehler in der Anwendung der Regeln von L'Hôpital?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Wie lautet der richtige Grenzwert?

Konvexität

Aufgabe 3. Auf welchen Intervallen ist die Cosinus-Funktion $f(x) = \cos(x)$ strikt konvex?

Aufgabe 4. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(a) Sei außerdem $g : I \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige, dass dann auch $f + g$ konvex ist.

(b) Sei $g : J \to I$ konvex und f zusätzlich monoton wachsend. Zeige, dass dann auch $f \circ g : J \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(c) Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ zwei relative Minima der konvexen Funktion f. Zeige $f(x_1) = f(x_2)$.

9 Integralrechnung

Aufgabe 1. Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int\limits_1^9 \exp(\sqrt{x})\ \mathrm{d}x$,

(b) $\int\limits_0^{2\pi} \exp(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x$,

(c) $\int\limits_0^1 4x(\ln(x))^2\ \mathrm{d}x$,

(d) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1-x^2}\ \mathrm{d}x$,

(e) $\int\limits_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\ \mathrm{d}x$,

(f) $\int\limits_1^3 x \cdot e^x\ \mathrm{d}x$,

(g) $\int\limits_9^\infty \frac{1}{x^2-9}\ \mathrm{d}x$,

(h) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x.$,

(i) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x$.

Aufgabe 2. Bestimme mittels Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x}.$$

Aufgabe 3. Zeige, dass folgendes Integral konvergent, jedoch nicht absolut konvergent ist:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}.$$

Aufgabe 4. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \int\limits_2^{x^3+x} e^{t^2}\ \mathrm{d}t$.

(a) Berechne die Ableitung f'.

(b) Zeige, dass f bijektiv ist.

(c) Bestimme $(f^{-1})'(0)$, wobei f^{-1} die Umkehrfunktion von f bezeichnet.

10 Taylorentwicklung

Aufgabe 1. Bestimme die Taylorreihe von $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ im Punkt $x_0 = 0$ sowie im Punkt $x_1 = 1$. Was fällt dir auf?

Aufgabe 2. Bestimme das Taylorpolynom $T_{2,0}$ zweiten Grades um $x_0 = 0$ von

$$f(x) = \exp(x^2 + 2x + 1).$$

Aufgabe 3. Berechne die Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{x}$ um $x_0 = 2$.

Aufgabe 4. Sei

$$f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1 + x).$$

Berechne die Taylorreihe um $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 5. Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{2 + x^2}.$$

Berechne die Taylorreihe um $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 6. Bestimme die Taylorreihe von $f(x) = (a + x)^{-1}$, $a \neq 0$, um $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 7. Welches ist der minimalen Grad $n \in \mathbb{N}$ des Taylorpolynoms der Funktion $f(x) = e^{-2x}$ um $x_0 = 1$, so dass sich das Taylorpolynom $T_{n,1}$ und die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $(0, 2)$ um höchstens $1/10$ unterscheiden?

11 Konvergenz von Funktionenfolgen

Aufgabe 1. Gebegen sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n(x) := e^{-nx} \text{ für } x \in [0,1] \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Untersuche diese auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) = 0$ für alle $x \notin [-1,1]$. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, nehmen wir an, dass f nicht identisch 0 ist. Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen gleichmäßig, punktweise oder gar nicht gegen f?

(a) $f_n(x) := f(x-n)$,

(b) $g_n(x) := f(x)/n$,

(c) $h_n(x) := f(x/n)$,

(d) $k_n(x) := f(nx)$,

wobei $n \in \mathbb{N}$. Falls die Grenzfunktion existiert: Wie sieht sie aus?

Aufgabe 3. Bestimme den punktweisen Grenzwert der durch

$$f_n(x) := \sin(x/n) \text{ für } x \in [-\pi,\pi]$$

definierten Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ Überprüfe mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, ob die Konvergenz auch gleichmäßig ist.

Aufgabe 4. Aus der Vorlesung ist bekannt, wann man Integration und Grenzprozess vertauschen darf: Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, eine gleichmäßig konvergente und Folge riemannintegrierbarer Funktionen und sei $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Betrachte die nachstehenden Funktionenfolgen:

(a) $f_n(x) = \frac{1}{n}\cos(\frac{\pi}{2}nx)$,

(b) $g_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2x & \text{für} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{für} \quad x > \frac{2}{n}. \end{cases}$

(c) $h_n(x) = \sin(\pi x^n)$.

(i) Welche dieser Folgen konvergiert gleichmäßig auf dem Intervall $[0,1]$?

(ii) Bestimme jeweils $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x$ und $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$.

(iii) Welche Arten von Beispielen sind die Folgen aus (a)-(c) für den obigen Satzes?

Tipp: Für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x$ *in* (c) *benutze die Abschätzung* $\sin(x) \leqslant x$. *Zu Hause könnt ihr nochmal probieren, diese Ungleichung mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung herzuleiten!*