Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I

1. Übung

6. September 2013

Die Lösungen sind bis Freitag, den 13. September 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

1. Die Aufgabe mit den Kängurus. Das folgende Rätsel stammt von Lewis Carroll (Pseudonym des englischen Mathematikers C. L. Dodgson, 1832–1898). Es seien die folgenden Aussagen gegeben:

0. Alle Katzen und alle Kängurus sind Tiere.
1. Die einzigen Tiere in diesem Haus sind Katzen.
2. Jedes Tier, das gern in den Mond starrt, ist als Schoßtier geeignet.
3. Wenn ich ein Tier verabscheue, gehe ich ihm aus dem Weg.
4. Es gibt keine fleischfressenden Tiere außer denen, die bei Nacht jagen.
5. Es gibt keine Katze, die nicht Mäuse tötet.
6. Kein Tier mag mich, außer denen im Haus.
7. Kängurus sind nicht als Schoßtiere geeignet.
8. Nur fleischfressende Tiere töten Mäuse.
9. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht mögen.
10. Tiere, die bei Nacht jagen, starren gerne in den Mond.

Man untersuche, wie ich mich gegenüber Kängurus verhalte. Es sollen nur die gegebenen Aussagen und keine weiteren Informationen verwendet werden. (Man beachte insbesondere, dass es nicht klar ist, ob es nicht vielleicht Kängurus gibt, die zugleich auch Katzen sind.)

Dabei gehe man so vor, dass man zunächst geeignete Mengen definiert, um die Aussagen 1. bis 10. in mengentheoretische Aussagen umzuformulieren. Diese verwende man, um das Problem zu lösen. *(10 Punkte)*

2. Rechnen mit Mengen.

(a) Man gebe für die folgenden Paare von Mengen A, B jeweils ihren Schnitt $A \cap B$, ihre Vereinigung $A \cup B$ sowie die Differenz $A \setminus B$ an. Dabei bezeichnet $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

(i) $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 9, 10\}$ *(3 Punkte)*

(ii) $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \leq 100 \,\}$, $B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > 5 \,\}$ *(3 Punkte)*

(iii) $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl} \,\}$, $B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade} \,\}$ *(3 Punkte)*

(b) Man gebe $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ an. *(3 Punkte)*

Bitte wenden.

3. Rechenregeln für Mengen. Es seien A, B und C beliebige Mengen.

(a) Beweise: $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = (C \setminus B) \setminus A$. *(4 Punkte)*

(b) Beweise: $A \subset B \iff A \cup B = B$ *(4 Punkte)*

(c) Man belege anhand eines Beispiels, dass nicht immer $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ gilt. *(2 Punkte)*

4. Relationen.

(a) Man gebe bei den folgenden Relationen R jeweils mit Begründung an, ob R reflexiv, symmetrisch und/oder transitiv ist. Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen?

(i) R ist eine Relation auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, und zwar gilt für $a, b \in \mathbb{R}$:
$(a, b) \in \mathsf{R} \iff a \leq b$. *(3 Punkte)*

(ii) R ist eine Relation auf der Menge M der Teilnehmer der Tutorien zur Analysis I, und zwar gilt für $a, b \in M$:
$(a, b) \in \mathsf{R} \iff a$ sitzt in dem selben Tutorium der Analysis I wie b. *(3 Punkte)*

(iii) R ist eine Relation auf der Menge N aller Personen, und zwar gilt für $a, b \in N$:
$(a, b) \in \mathsf{R} \iff \big(a$ ist mit b verheiratet oder $a = b\big)$. *(3 Punkte)*

(b) Beweise oder gib ein Gegenbeispiel an: Jede transitive und symmetrische Relation ist auch reflexiv. *(3 Punkte)*

5. Über Abbildungen.

(a) Es sei $M = \{1, 2, 3\}$. Gib (ohne Beweis) alle bijektiven Abbildungen $f : M \to M$ an. *(3 Punkte)*

(b) Man gebe eine Menge M und zwei Abbildungen $f, g : M \to M$ an, so dass

$$f \circ g \neq g \circ f$$

gilt. *(3 Punkte)*