Martin Schmidt | **Analysis I** | 31. Oktober 2013

Sebastian Klein | **9. Übung**

Die Lösungen sind bis Freitag, den 8. November 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

40. Mehr Beispiele zur Stetigkeit.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist. *(4 Punkte)*

(b) Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist? Gib ein solches c an, oder beweise, dass es keines gibt. *(5 Punkte)*

(c) Zeige, dass die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in allen $x \in \mathbb{Q}$ unstetig, und in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist. *(7 Punkte)*
[Tipp. Man überlege sich, dass es in jedem offenen Intervall von $\mathbb{R}$ eine irrationale Zahl gibt.]

41. Über punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) Ein Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 2nx & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2 - 2nx & \text{falls } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(i) Skizziere den Graphen von f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(3 Punkte)*

(ii) Zeige, dass f_n stetig ist. *(3 Punkte)*
[Tipp. Aufgabe 39(a),(b).]

(iii) Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. *(3 Punkte)*

(iv) Untersuche, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist. *(3 Punkte)*
[Tipp. Bestimme zuerst die einzig mögliche Grenzwertfunktion f für den gleichmäßigen Grenzwert der (f_n), und finde sodann für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x \in \mathbb{R}$, so dass $|f_n(x) - f(x)|$ maximal wird.]

(b) Eine Charakterisierung der gleichmäßigen Konvergenz. Für beschränkte Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ definieren wir die sogenannte *Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \sup\{\, |f(x)| \,\big|\, x \in X \,\} \;\in\; [0, \infty) \,.$$

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$. Beweise, dass die Funktionenfolge (f_n) genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. *(5 Punkte)*

42. Über den Zwischenwertsatz. Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Zeige, dass die reelle Polynomfunktion $p(x) := x^6 + x^2 + 4x - 5$ im Intervall $[-1, 1]$ mindestens eine Nullstelle besitzt. *(4 Punkte)*

(b) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass f mindestens einen Fixpunkt, das heißt ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$, besitzt. *(5 Punkte)*
[Tipp. $f - \mathbb{1}_{[a,b]}$.]

(c) Zeige, dass es <u>keine</u> stetige Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden ihrer Funktionswerte an genau zwei Punkten in $[a, b]$ annimmt. *(8 Punkte)*
[Tipp. Zwischenwertsatz und Satz 5.26.]

43. Eine Iteration zur Approximation von π.

Vorweg zeige man:

(a) Sei $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Man zeige, dass dann gilt: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin(x)^2}}{2}}$.
(3 Zusatzpunkte)

[Tipp. Satz 4.29: $\cos(x) = \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \ldots$.]

Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{2^{2n+1} - 2^{n+1} \cdot \sqrt{2^{2n} - a_n^2}} \quad \text{für } n \geq 1 \,.$$

(b) Zeige durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a_n = 2^n \cdot \sin(\frac{1}{2^n} \cdot \pi)$.
(4 Zusatzpunkte)

(c) Folgere aus (b): $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$. *(3 Zusatzpunkte)*
[Tipp. Satz 6.14(ii).]