Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
2. Übung

13. September 2013

Die Lösungen sind bis Freitag, den 20. September 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

6. Bild und Urbild. Es seien M, M' Mengen, $f : M \to M'$ eine Abbildung, und $A, B \subset M$ sowie $A', B' \subset M'$ Teilmengen.

(a) Zeige, dass gilt:

(i) $f^{-1}[A' \cup B'] = f^{-1}[A'] \cup f^{-1}[B']$ *(2 Punkte)*

(ii) $f^{-1}[A' \cap B'] = f^{-1}[A'] \cap f^{-1}[B']$ *(2 Punkte)*

(iii) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ *(2 Punkte)*

(b) Belege durch ein Beispiel, dass im Allgemeinen jedoch

$$f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$$

gilt. *(2 Punkte)*

7. Rechenregeln für reelle Zahlen.

(a) Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $x^3 = x$ für $x \in \mathbb{R}$, indem man Satz 2.10(ii) verwendet. *(2 Punkte)*

(b) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweise die folgenden Regeln:

(i) $\big(a < b \text{ und } c < d\big) \implies a + c < b + d\,.$ *(2 Punkte)*

(ii) $\big(0 < a < b \text{ und } 0 < c < d\big) \implies ac < bd\,.$ *(2 Punkte)*

(iii) $ab > 0 \iff \big(a > 0, b > 0 \text{ oder } a < 0, b < 0\big)\,.$ *(2 Punkte)*

(iv) $ab < 0 \iff \big(a > 0, b < 0 \text{ oder } a < 0, b > 0\big)\,.$ *(2 Punkte)*

8. Über die Betragsfunktion.

(a) Für jede der folgenden Ungleichungen bestimme man die Lösungsmenge (bezüglich $x \in \mathbb{R}$) als ein Intervall oder eine Vereinigung von Intervallen, und skizziere die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden.

(i) $|x| < 3$ *(2 Punkte)*

(ii) $3 < |x - 5|$ *(2 Punkte)*

(iii) $2 \leq |x + 4| \leq 5$ *(3 Punkte)*

(b) Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige: $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|\,.$ *(3 Punkte)*
[Tipp. Zeige $|a + b| + |a - b| \geq 2\,|a|$. Ja, das hilft!]

(c) Zeige: Ist $a, b \neq 0$, so gilt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2\,.$$ *(3 Punkte)*

[Tipp. Man überlege sich, dass es ausreicht, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für $x > 0$ zu beweisen. Hierfür zeige man $(x - 1) \cdot (\frac{1}{x} - 1) \leq 0$ und multipliziere aus.]

(d) Zeige: Es gilt

$$\max(a,b) = \tfrac{1}{2}(\,a+b+|a-b|\,) \quad \text{und} \quad \min(a,b) = \tfrac{1}{2}(\,a+b-|a-b|\,)\,.$$

Dabei sind $\max(a,b)$ und $\min(a,b)$ definiert durch

$$\max(a,b) := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \min(a,b) := \begin{cases} b & \text{falls } a \geq b \\ a & \text{sonst} \end{cases}\,.$$
(3 Punkte)

9. Infimum und Supremum. Zeige, dass die folgenden Mengen beschränkt sind, und bestimme ihr Infimum und ihr Supremum. Untersuche auch, ob Infimum und Supremum jeweils Elemente der Menge (und damit ihr Minimum bzw. Maximum) sind.

(a) $M_1 := \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ *(3 Punkte)*

(b) $M_2 := (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ *(3 Punkte)*

(c) $M_3 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ *(3 Punkte)*

(d) $M_4 := \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| < 3 \,\}$ *(3 Punkte)*

10. Über „Schnitte“ von $\mathbb{R}$. Es seien $M, N \subset \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen mit $M \cup N = \mathbb{R}$, so dass $x < y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$ gilt. Zeige, dass dann

$$\sup(M) = \inf(N)$$

gilt. *(4 Punkte)*

[Tipp. Zeige zunächst $\sup(M) \leq \inf(N)$. Dann führe man die Annahme $\sup(M) < \inf(N)$ zu einem Widerspruch, und folgere so $\sup(M) = \inf(N)$.]

Das griechische Alpha-Bet

Alpha	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ϱ
Beta	B	β	Kappa	K	$\varkappa$	Sigma	Σ	σ ς
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Ypsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ε	Nu	N	ν	Phi	Φ	φ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omikron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	ϑ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω