Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
11. Übung

15. November 2013

Die Lösungen sind bis Freitag, den 22. November 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

48. Extremwertprobleme.

(a) Man bestimme alle lokalen Extrema der drei Funktionen aus Aufgabe 44(b), und untersuche, ob es sich um lokale Maxima oder lokale Minima handelt. Man bestimme außerdem mit Hilfe des Zwischenwertsatzes die Bildmengen dieser Funktionen. *(3+3+3 Punkte)*
[Tipp. Aufgabe 50(a)(ii) darf verwendet werden.]

(b) Ein Unternehmer will ins Eintopfgeschäft einsteigen. Seine „Erbsensuppe-Spezial" soll in zylindrischen Blechdosen (von vorgegebener Blechstärke) mit dem Dosenvolumen $V > 0$ verkauft werden. Welche Maße müssen die Dosen haben, damit der Materialaufwand minimal wird? (Hinweis: Ein Kreiszylinder mit Radius r und Höhe h hat das Volumen $\pi r^2 h$ und die Oberfläche $2\pi r \cdot (r+h)$.) *(4 Punkte)*

(c) Hans Raser will sein neues Motorrad seiner Freundin Helga vorführen. Ihr Haus liegt im Abstand $h > 0$ von der geradlinig verlaufenden Landstraße mitten auf einer großen Wiese. Auf der Landstraße fährt Hans 100 km/h, und auf der Wiese 40 km/h. Wo muss Hans abbiegen, um möglichst schnell zu Helga zu gelangen? *(4 Punkte)*

49. Kurvendiskussion.

Wir betrachten die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x+5} & \text{falls } x < -2 \\ |x| & \text{falls } -2 \le x < 5 \\ x^3 - 9x^2 - 21x + 210 & \text{falls } x \ge 5 \end{cases}$$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.

(a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. *(2 Punkte)*

(b) Bestimme alle Stellen, an denen f stetig oder differenzierbar ist, und berechne f'. *(5 Punkte)*

(c) Finde alle lokalen Maxima und alle lokalen Minima von f. *(5 Punkte)*

(d) Bestimme das Bild von f. *(3 Punkte)*

(e) Skizziere den Graphen von f. *(3 Punkte)*

50. Grenzwertberechnung von Funktionswerten.

(a) Berechne die folgenden Grenzwerte:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\tan(7x)}$ *(3 Punkte)*

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x \cdot \ln(x)$ *(3 Punkte)*

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ *(3 Punkte)*

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to \infty-} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *(3 Punkte)*

[Tipp. Man verbringe bei (iv) nicht zu viel Zeit mit dem Versuch, die Regel von l'Hopital anzuwenden. Stattdessen dividiere man lieber durch e^x.]

(b) Zeige für $\alpha, \beta > 0$:

$$\lim_{x\to\infty-} \frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = \infty \ .$$

Interpretation. Jede noch so kleine (positive) Potenz von e^x geht für $x \to \infty$ wesentlich schneller gegen ∞ als jede noch so große Potenz von x. *(3 Punkte)*

[Tipp. $\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = (\frac{e^{(\alpha/\beta)x}}{x})^{\beta}$.]

51. Die Produktregel für n-te Ableitungen. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-fach differenzierbare Funktionen und $h := f \cdot g : I \to \mathbb{R}$. Beweise durch vollständige Induktion, dass dann auch h n-fach differenzierbar ist, und dass für $x \in I$ gilt

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \ .$$

Dabei bezeichnet $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ bzw. $\binom{n}{0} = 1$ den Binomialkoeffizienten zu (n, k), siehe auch die Binomische Formel 3.24. *(5 Zusatzpunkte)*

52. Zum Mittelwertsatz. Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $x^* \in (a, b)$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Es sei f auf (a, b) differenzierbar und f' in x^* noch stetig. Wir setzen weiter voraus, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in (a, b) \setminus \{x^*\}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ gibt, so dass $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Man zeige, dass f in x^* eine *Nullstelle höherer Ordnung* besitzt, das bedeutet per Definition: $f(x^*) = f'(x^*) = 0$. *(5 Zusatzpunkte)*

(b) Es sei f differenzierbar auf $(a, b) \setminus \{x^*\}$ und es existiere ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x^*-} f'(x) = c = \lim_{x\to x^*+} f'(x)$. Zeige, dass f dann auch in x^* differenzierbar ist, und zwar mit $f'(x^*) = c$. *(5 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Zu beweisen ist, dass die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}$ für $x \neq x^*$ und $h(x^*) = c$ stetig ist. Dazu zeige man, dass h linksseitig stetig und rechtsseitig stetig ist, siehe Aufgabe 39(b).]

Information

Falls Sie für die Teilnahme an der Abschlußklausur **Ihre Zulassung aus einem vergangenen Semester übernehmen** möchten (anstatt die Zulassungs-Übungsleistung im laufenden Semester erneut zu erbringen), so beachten Sie bitte folgendes:

- Falls Sie schon in einem früheren Semester **an der Universität Mannheim zu einer Klausur zur Analysis I zugelassen** waren, brauchen Sie nichts weiter zu unternehmen; das Studienbüro weiß von Ihrer früheren Zulassung und berücksichtigt diese automatisch.
- In **allen anderen Fällen**, z.B. wenn Sie an einer **anderen Hochschule** eine Zulassung zur Analysis-I-Klausur erworben haben, nehmen Sie bitte baldmöglichst, spätestens bis **Mittwoch, den 27. November**, Kontakt mit Sebastian Klein, `s.klein@math.uni-mannheim.de` auf, um Ihre frühere Zulassung nachzuweisen.