Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
3. Übung

20. September 2013

Die Lösungen sind bis Freitag, den 27. September 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

11. Eine bijektive Funktion. Zeige, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-2,3) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{t+2} & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{t}{3-t} & \text{für } t > 0 \end{cases} .$$ *(6 Punkte)*

[Tipp. Man zeige, dass f das Intervall $(-2,0]$ bijektiv auf das Intervall $(-\infty,0]$, sowie das Intervall $(0,3)$ bijektiv auf das Intervall $(0,\infty)$ abbildet. Warum folgt daraus die Bijektivität von f?]

12. Nochmal das Supremum. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann

$$\sup\{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x < a \,\} = a$$

gilt. *(3 Punkte)*

13. Vollständige Induktion. Beweise die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$. *(4 Punkte)*

(b) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. *(4 Punkte)*

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar. *(4 Punkte)*
[Tipp. Man überlege sich, dass man, um im Induktionsschritt die Aussage für $n+1$ auf die Aussage für n zurückzuführen, zu zeigen hat, dass ein gewisser Ausdruck durch 3 teilbar ist. Dies kann man entweder durch einen weiteren Induktionsbeweis nachweisen, oder indem man auf raffinierte Weise (b) anwendet.]

(d) Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge $(n \in \mathbb{N})$ besitzt 2^n Elemente. *(4 Punkte)*

(e) Jede endliche, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum. *(4 Punkte)*

14. Vom „Größenverhältnis“ zwischen einer Menge und ihrer Potenzmenge. Sei M eine beliebige Menge.

(a) Finde eine injektive Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$. *(2 Punkte)*

(b) Sei $g : M \to \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Abbildung. Ist dann

$$N_g := \{\, p \in M \,|\, p \notin g(p) \,\} \in \mathcal{P}(M)\ ,$$

so gilt

$$\text{für jedes } p \in M: \quad g(p) \neq N_g\ .$$

Insbesondere gibt es keine surjektive Abbildung $g : M \to \mathcal{P}(M)$. *(4 Punkte)*
[Tipp: Angenommen, es gäbe ein $p_0 \in M$ mit $g(p_0) = N_g$. Dann führe man die beiden Möglichkeiten $p_0 \in N_g$ und $p_0 \notin N_g$ jeweils auf einen Widerspruch.]

Bemerkung 1. Den Sachverhalt, dass es keine surjektive Abbildung $g : M \to \mathcal{P}(M)$ gibt, drückt man auch mit der Aussage aus, dass $\mathcal{P}(M)$ *mächtiger* sei als M. Im Falle einer endlichen Menge M bedeutet dies gerade, dass $\mathcal{P}(M)$ eine größere Zahl von Elementen enthält als M. (Wir sahen schon in Aufgabe 13(d), dass die Potenzmenge einer n-elementigen Menge $2^n > n$ Elemente enthält.)

Bemerkung 2. Die im Tipp skizzierte Beweisstrategie wurde von Bertrand Russell im sogenannten „Paradoxon vom Barbier“ veranschaulicht: Der Barbier eines Dorfes behauptet, dass er genau diejenigen Einwohner des Dorfs rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Das kann doch wohl nicht sein. Warum nicht? Rasiert der Barbier denn sich selbst?

15. Über die Approximation von $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen.

Ist eine irrationale Zahl $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gegeben, so läßt sich ξ beliebig gut durch rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ annähern: Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert nach Satz 2.41 ein $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \varepsilon$. Hieraus ergibt sich eine interessante Frage: Durch wie „einfache" Brüche ist diese Approximation möglich, das heißt: Wie groß muss in der gekürzten Darstellung $\frac{p}{q}$ der Nenner q mindestens sein, damit man eine Approximation an ξ mit $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \varepsilon$ erhalten kann? Von dieser Frage ist die folgende Definition inspiriert:

Sei $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und außerdem $k \in \mathbb{N}$. Wir sagen, eine irrationale Zahl $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist durch rationale Zahlen approximierbar von Ordnung* k, wenn es ein (nur von ξ abhängendes) $c > 0$ gibt, so dass die Ungleichung

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{c}{q^k} \tag{$*$}$$

von unendlich vielen rationalen Zahlen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ erfüllt wird. Ist dies der Fall, so nennen wir jedes solche c eine *Proportionalitätskonstante* zur Approximation von ξ von Ordnung k.

(a) Zeige: Für festes ξ, k, c kann die Gleichung $(*)$ zu gegebenem $q_0 \in \mathbb{N}$ höchstens endlich viele Lösungen $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $q = q_0$ besitzen. Folgere: Gibt es eine Schranke $q_{\max} \in \mathbb{N}$, so dass für jede Lösung $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von $(*)$ $q \le q_{\max}$ gilt, so ist c sicher *keine* Proportionalitätskonstante zur Approximation von ξ von Ordnung k. *(2 Punkte)*

Im Folgenden wollen wir die Approximierbarkeit speziell der irrationalen Zahl $\xi = \sqrt{2}$ untersuchen. Konkret wollen wir zeigen, dass $\sqrt{2}$ von keiner höheren Ordnung als $k = 2$ approximiert werden kann, und dass für $k = 2$ für die Proportionalitätskonstante c kein kleinerer Wert als $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ möglich ist. Dazu zeige man für zunächst beliebige $p, q \in \mathbb{N}$:

(b) Es gilt $|p^2 - 2q^2| \ge 1$. Man finde ein Beispiel von Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $|p^2 - 2q^2| = 1$. *(2 Punkte)*

[Tipp. Es kann hilfreich sein, den Beweis von Lemma 2.43 nochmal anzusehen.]

(c) Es gilt

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| \ge \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{p}{q}} \cdot \frac{1}{q^2}. \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

[Tipp. $|\frac{p}{q} + \sqrt{2}| \cdot |\frac{p}{q} - \sqrt{2}| = |\frac{p^2}{q^2} - 2| = \frac{1}{q^2} \cdot |p^2 - 2q^2|$.]

(d) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 3$ und $c > 0$. Ist $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Lösung der Ungleichung

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| < \frac{c}{q^k}, \tag{$\dagger$}$$

so zeige man mit Hilfe von $(\dagger)$ und (c), dass

$$\frac{c}{q^k} > \frac{1}{2\sqrt{2} + c} \cdot \frac{1}{q^2}$$

gilt, und folgere hieraus $q < c \cdot (2\sqrt{2} + c)$. Hieraus folgere man mit (a), dass $\sqrt{2}$ *nicht* von Ordnung k durch rationale Zahlen approximierbar ist. *(4 Punkte)*

(e) Sei nun $k = 2$ und $c > 0$. Ist $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Lösung der Ungleichung $(\dagger)$ mit diesen k, c, so zeige man $\frac{p}{q} < \sqrt{2} + \frac{c}{q^2}$ und weiter (mittels (c)) $(2\sqrt{2}\,c - 1)\,q^2 + c^2 > 0$. Ist $c < \frac{1}{2\sqrt{2}}$, so folgere man hieraus $q < \frac{c}{\sqrt{1 - 2\sqrt{2}\,c}}$, und hieraus mit (a), dass c *keine* Proportionalitätskonstante zur Ordnung $k = 2$ sein kann. *(4 Punkte)*

Bemerkung. Später werden wir sehen, dass die demnach bestmögliche Approximationsordnung $k = 2$ mit $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ für $\xi = \sqrt{2}$ tatsächlich erreicht wird. — Mehr über die Approximierbarkeit irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen kann man nachlesen im Kapitel 11 des Buchs G. Hardy, M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition, Oxford 1979.