

Die Lösungen sind bis Montag, den 7. Oktober 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

16. Rechnen mit komplexen Zahlen.

(a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$ (1 Punkt)

(ii) $\frac{3+i}{4-i}$ (2 Punkte)

(iii) $\frac{(1+2i)^3 - (1+i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$ (3 Punkte)

(b) Bestimme die folgende Teilmenge von \mathbb{C} und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene:

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} . \quad (2 \text{ Punkte})$$

(c) Finde alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeige außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden. (4 Punkte)

[Tipp. $z^3 - 1 = (z - 1) \cdot (z^2 + z + 1)$.]

17. Rechenregeln für komplexe Zahlen.

(a) Zeige, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) . \quad (4 \text{ Punkte})$$

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x, y \in \mathbb{R}$. Beweise, dass wenn $z := x + iy \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

erfüllt, dass dann auch $\bar{z} = x - iy$ dieselbe Gleichung erfüllt. (3 Punkte)

18. Grenzwertberechnungen.

(a) Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz, und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (2 Punkte)

(ii) $b_n = \frac{1+n^2}{2+3n+n^2}$ (3 Punkte)

(iii) $c_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ (3 Punkte)

(iv) $d_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n$ (3 Punkte)

(Ohne Beweis darf verwendet werden: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$.)

- (b) Man finde jeweils ein Beispiel für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ggfs. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften, und zeige, dass das Beispiel tatsächlich die Eigenschaften besitzt.
- (i) (a_n) ist nach oben unbeschränkt, aber nicht gegen $+\infty$ konvergent. (2 Punkte)
 - (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$,
wobei $c \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene Zahl ist. (2 Punkte)
 - (iii) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. (2 Punkte)

19. Ein Näherungsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$. Bereits vor 4000 Jahren war den Sumerern ein Iterationsprozess bekannt, der bei Eingabe einer Zahl $a > 0$ eine Näherung für \sqrt{a} liefert. Wir formulieren diesen hier speziell für $a = 2$ (also zur Näherung an $\sqrt{2}$): Dazu definieren wir eine Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv wie folgt:

$$x_0 := \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

- (a) Mithilfe eines (Taschen-)Rechners berechne man x_1, x_2, x_3 und x_4 . Sieht man daran schon, wie sich die x_n an $\sqrt{2}$ annähern? (2 Punkte)

Wir schreiben im Folgenden die x_n als „Brüche“, d.h. wir schreiben $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $p_n, q_n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $p_0 = 3$ und $q_0 = 2$.

- (b) Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$ und $q_{n+1} = 2p_nq_n$. (2 Punkte)
- (c) Man zeige $p_{n+1} > \sqrt{2}q_{n+1}$. (2 Punkte)
[Tipp. $p_{n+1} - \sqrt{2}q_{n+1} = (\dots)^2 \geq 0$. Warum kann nicht Gleichheit gelten?]
- (d) Man zeige $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2$ und folgere hieraus durch vollständige Induktion, dass $|p_n^2 - 2q_n^2| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (3 Punkte)
- (e) Man folgere aus (c) und (d), dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{q_n^2} \quad (3 \text{ Punkte})$$

(Dies zeigt also, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die nach Aufgabe 15 bestmögliche Approximation an $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen realisiert.)

- (f) Man lese an (e) ab, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. (2 Punkte)