Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
8. Übung

25. Oktober 2013

Die Lösungen sind bis Montag, den 4. November 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

35. Berechnung von Konvergenzradien von Potenzreihen. Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen für $x \in \mathbb{K}$. [Tipp. Die Aussagen von Aufgabe 37 sind vielleicht nützlich, und dürfen verwendet werden.]

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \, x^n$ *(3 Punkte)*

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \, x^n$ *(3 Punkte)*

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \, x^n$ *(3 Punkte)*

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n^3+n^2+1)}$ *(4 Punkte)*

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$ *(4 Punkte)*

36. Über den Sinus hyperbolicus und den Cosinus hyperbolicus. Für $x \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\cosh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \,.$$

(a) Schreibe $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ jeweils als Potenzreihe in $x \in \mathbb{K}$, und berechne explizit den Konvergenzradius dieser Potenzreihen. *(4 Punkte)*

(b) Zeige für beliebige $x, y \in \mathbb{K}$:

(i) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$. *(2 Punkte)*

(ii) $\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$. *(2 Punkte)*

(iii) $\sinh(x+y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y)$. *(2 Punkte)*

37. Über den Konvergenzradius von Potenzreihen.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Wir untersuchen die hierdurch bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$.

(a) Beweise: Falls $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und die Folge $\left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ einen Grenzwert besitzt, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius obiger Potenzreihe. *(4 Punkte)*

(b) Beweise: Wenn es $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ mit $|x_1| = |x_2|$ gibt, so dass die Potenzreihe für $x = x_1$ konvergiert, aber für $x = x_2$ divergiert, so ist $|x_1| = |x_2|$ der Konvergenzradius der Potenzreihe. *(1 Punkt)*

(c) Beweise: Gilt für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $0 < R < \infty$, und gibt es ein $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $|x_0| = R$, so dass die Potenzreihe für dieses x_0 noch absolut konvergiert, so konvergiert die Reihe absolut für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = R$. *(1 Punkt)*

38. Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, und Lipschitz-Stetigkeit.

(a) Man zeige durch unmittelbare Anwendung der (ε, δ)-Definition der Stetigkeit (Definition 5.13), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 3$$

an der Stelle $x = 2$ stetig ist. *(2 Punkte)*

(b) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. *(4 Punkte)*

(c) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist. *(3 Punkte)*

(d) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}\ .$$

(i) Man folgere aus Aufgabe 24, dass f stetig ist. *(1 Punkt)*

(ii) Man zeige, dass $f|[1, \infty)$ Lipschitz-stetig (also insbesondere gleichmäßig stetig) ist. *(3 Punkte)*

[Tipp. Man beachte erneut den Tipp zu Aufgabe 24.]

(iii) Man zeige, dass f gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist. *(4 Punkte)*

39. Es seien X, Y Teilmengen von $\mathbb{K}$, $x \in X$ und $f, g : X \to Y$ Funktionen.

(a) **Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft.** Es gebe eine Umgebung U von x mit $U \subset X$ und $f|U = g|U$. Beweise: Dann ist f genau dann in x stetig, wenn g in x stetig ist. *(3 Zusatzpunkte)*

(b) **Links- und rechtsseitige Stetigkeit.** In dieser Teilaufgabe sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in x *linksseitig stetig* (bzw. *rechtsseitig stetig*) ist, wenn für jede in X gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. mit $x_n \geq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(x)$.

Beweise: f ist genau dann in x stetig, wenn f in x sowohl linksseitig stetig als auch rechtsseitig stetig ist. *(5 Zusatzpunkte)*