Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
7. Übung

18. Oktober 2013

Die Lösungen sind bis Freitag, den 25. Oktober 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

Die Aufgaben dieses Blatts dienen der Festigung der bisher erworbenen Kenntnisse und der Vorbereitung auf die Zwischenklausur.

29. Komplexe Zahlen. Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $\Im(z^2) = 2$ erfüllen, und skizziere die Lösungsmenge. *(3 Zusatzpunkte)*

30. Vollständige Induktion. Man beweise die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ *(3 Zusatzpunkte)*

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ *(3 Zusatzpunkte)*

31. Eine spezielle Funktion. Wir betrachten die Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}\ .$$

(a) Zeige, dass f streng monoton wachsend ist. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) Bestimme Supremum und Infimum der Menge $\{\, f(n) \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ und untersuche, ob diese Menge ein Maximum und/oder ein Minimum besitzt. *(3 Zusatzpunkte)*

(c) Skizziere den Graphen von f so, dass das Verhalten von $f(t)$ für sehr große und sehr kleine Werte von t erkennbar ist. *(1 Zusatzpunkt)*

32. Konvergenz von Folgen und Reihen.

(a) Man bestimme für die folgenden Folgen alle ihre Häufungspunkte, und untersuche, ob sie in $\mathbb{K}$ konvergieren.

(i) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *(3 Zusatzpunkte)*

(ii) $b_n := \frac{\sqrt{3n^2+a}}{2n+1}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. [Man beachte Aufgabe 24.] *(3 Zusatzpunkte)*

(iii) $c_n := (1 - \frac{1}{n})^n$ *(3 Zusatzpunkte)*

(iv) $d_n := (1 + i^n) \cdot \frac{6n+7}{3n+2}$ *(3 Zusatzpunkte)*

(b) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und auf absolute Konvergenz. Die Grenzwerte müssen nicht angegeben werden.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2010\,n+1}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ *(2 Zusatzpunkte)*

(c) Berechne den Grenzwert der folgenden unendlichen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \left((-1)^k + \frac{1}{2^k} \right) .$$ *(3 Zusatzpunkte)*

33. Über Konvergenz.

(a) Beweise: Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Zahlenfolgen, die sich nur in endlich vielen Gliedern voneinander unterscheiden, d.h. für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = b_n$. Zeige, dass dann (a_n) genau dann in $\mathbb{K}$ konvergiert, wenn (b_n) in $\mathbb{K}$ konvergiert, und dass im Falle der Konvergenz die Grenzwerte dieser beiden Folgen übereinstimmen. *(3 Zusatzpunkte)*

(c) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann heißt die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := a_{\tau(n)}$ eine *Umordnung* von (a_n). Beweise, dass die Folge (b_n) genau dann konvergiert, wenn die Folge (a_n) konvergiert, und dass im Falle der Konvergenz ihre Grenzwerte übereinstimmen. *(3 Zusatzpunkte)*

34. Eine weitere Charakterisierung des Limes superior. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Zahlenfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$b_n := \sup\{\, a_k \mid k \geq n \,\}$$

definierte Folge. Zeige:

(a) Die Folge (b_n) ist eine reelle Zahlenfolge, sie ist monoton fallend und nach unten beschränkt. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) Die Folge (b_n) ist in $\mathbb{R}$ konvergent, und zwar gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim}\, a_n$. *(4 Zusatzpunkte)*

Erinnerung

Um an der *Abschlußklausur* teilnehmen zu können, müssen Sie sich zwischen dem **16. Oktober** und dem **30. Oktober** zur Prüfung anmelden. Dies erfolgt elektronisch über das Studierendenportal (*Prüfungen* → *Prüfungsanmeldung*). Falls Sie die Analysis I unter den bei Ihnen vom System angezeigten Prüfungen nicht finden sollten (dies könnte insbesondere bei Nebenfachstudierenden der Fall sein), oder sonst bei der Anmeldung ein Problem auftreten sollte, wenden Sie sich bitte an das Studienbüro.

Bitte beachten Sie, dass Ihre Anmeldung ab dem Ende der Anmeldefrist *verbindlich* ist, und ein Rücktritt von der Prüfung ab diesem Zeitpunkt nur noch aus wichtigem Grund (wie z.B. Krankheit) möglich ist. Lediglich in dem Fall, dass Sie die Zulassung zur Abschlußklausur nicht erreichen, wird die Anmeldung von uns storniert und gilt dann als nicht erfolgt.