Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
Letzte Übung

29. November 2013

Die Aufgaben dieser Übung dienen zur Vorbereitung der letzten Vorlesungsthemen für die Klausur. Sie werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Stattdessen wird am Donnerstag, den 5. Dezember 2013 (gegen 11 Uhr) eine Musterlösung auf der Webseite veröffentlicht und die Aufgaben werden in der letzten Großen Übung am 6. Dezember diskutiert.

58. Stammfunktionen. Berechne die folgenden Stammfunktionen, und mache jeweils die Probe durch Differentiation:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x\arcsin(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ [Tipp. Siehe Beispiel 8.7(vi).]

59. Bestimmte Integrale. Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^8 \frac{\exp(1/x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

60. Partialbruchzerlegung. Berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4+3x^3-4x^2-x+6}{x^4+2x^2-8x+5}\,\mathrm{d}x$

[Tipp. Das Nennerpolynom hat in $x=1$ eine zweifache Nullstelle.]

61. Ein Integral aus der Fourier-Analysis. Es sei $m,n\in\mathbb{N}$. Zeige:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } m\neq n \\ \pi & \text{für } m=n \end{cases} .$$

[Tipp. Für $m\neq n$ wende man zweimal partielle Integration an, um zu zeigen, dass ein gewisses Vielfaches des gesuchten Integrals verschwindet. Für $m=n$ wende man einmal partielle Integration und anschließend die Gleichung $\sin^2 = 1-\cos^2$ an.]

62. Flächenberechnung.

(a) Man gebe eine Funktion $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ an, so dass der Graph von f einen Halbkreis vom Radius $r > 0$ in der oberen Halbebene beschreibt.

(b) Man berechne mit Hilfe von Integralen die Fläche einer Kreisscheibe vom Radius r.

63. Funktionen mit verschwindendem Integral.

Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f \geq 0$.

Zeige: Wenn $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ist, so ist schon $f = 0$.

[Ohne Beweis darf verwendet werden, dass für Regelfunktionen $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ aus $g \leq h$ folgt: $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$. — Tipp. Man nehme an, dass es ein $t_0 \in (a, b)$ mit $\varepsilon := f(t_0) > 0$ gibt. Dann zeige man, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a, b]$ und $f(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.]

Mit dem Abschnitt 8.2 des Skripts und dem vorliegenden Übungsblatt endet der für die Abschlußklausur relevante Stoff der Analysis I.

Wir wünschen Euch allen viel Erfolg bei der Abschlußklausur, und anschließend ein gesegnetes Weihnachtsfest 2013 sowie einen guten Rutsch ins neue Jahr.

— Martin Schmidt, Sebastian Klein, und alle TutorInnen.

Laßt uns nun lustig integrieren
umgekehrt muss man nur diff'renzieren ...