Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
12. Übung

22. November 2013

Die Lösungen sind bis Freitag, den 29. November 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

53. Noch eine Extremwertsuche.

Es sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

(a) Finde alle kritische Punkte von f, und untersuche, ob es sich jeweils um eine lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f handelt. *(5 Punkte)*

(b) Untersuche, ob f auf seinem Definitionsbereich $[1,\infty)$ ein globales Maximum und/oder ein globales Minimum annimmt, und bestimme gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. *(5 Punkte)*

54. Über Taylorpolynome und Taylorreihen.

(a) Bestimme die Taylorreihe von $f(x) := x^2 + 3x + 5$ im Punkt $x_0 = 0$, sowie im Punkt $x_1 = 2$. *(3 Punkte)*

(b) Es sei $f(x) := \sqrt{x}$.

(i) Berechne das Taylorpolynom 3. Ordnung $T_{3,4}$ von f im Punkt $x_0 = 4$. *(3 Punkte)*

(ii) Zeige, dass für $x \in (3,5)$ gilt: $|f(x) - T_{3,4}(x)| \leq \frac{5}{10368} \cdot \sqrt{3} < \frac{1}{1000}$. *(4 Punkte)*
[Tipp. Taylorformel (Satz 7.37).]

(c) Es sei $f(x) := \frac{1}{x^3-2x^2+x-2}$.

(i) Man bestimme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$f(x) = \frac{\alpha\, x + \beta}{1 + x^2} + \frac{\gamma}{x-2}\,. \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

[Tipp. Man bringe den rechten Ausdruck „auf einen Nenner“, und mache dann im Zähler einen Koeffizientenvergleich bezüglich x.]

(ii) Mit Hilfe der Darstellung von f aus (i) und der geometrischen Reihe bestimme man die Taylorreihe von f an der Stelle $x_0 = 0$. *(4 Punkte)*

(iii) Man bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe aus (ii). *(3 Punkte)*

(d) Es sei $f(x) := \arctan(x)$.

(i) Man benutze die bekannte Tatsache $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (siehe Beispiel 7.8(ix)), um mithilfe der geometrischen Reihe die Taylorreihe von f' im Punkt $x_0 = 0$ anzugeben. *(3 Punkte)*

(ii) Man folgere aus (i), dass die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$$

lautet. Man berechne den Konvergenzradius R dieser Reihe. Konvergiert sie auf $(-R, R)$ gegen f? *(4 Punkte)*

(iii) *Begründe sorgfältig*, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ gilt. *(3 Punkte)*
[Tipp. Abelscher Grenzwertsatz (Satz 7.45).]

[Ein Verweis auf Beispiel 7.48(v) zählt nicht.]

55. Ein Konvergenzkriterium für die Taylorreihe. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Wir setzen voraus, dass es Konstanten $C, r > 0$ gibt, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in I \ : \ |f^{(n)}(x)| \leq C \cdot r^n$$

gilt.

Zeige, dass dann die Taylorreihe $T(x)$ von f an der Stelle x_0 für jedes $x \in I$ konvergiert, und zwar gegen $f(x)$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Ist $T_{n,x_0}(x)$ das Taylorpolynom von f der Ordnung n an der Stelle x_0, so zeige man mit Hilfe von Satz 7.37, dass $\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_{n,x_0}(x)|$ eine Nullfolge ist.]

56. Konvexe und konkave Funktionen. Zeige, dass die Umkehrfunktion einer konvexen, bijektiven, monoton wachsenden Funktion konkav ist. *(5 Punkte)*

57. Über das Integral von Treppenfunktionen.

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Für jedes Teilintervall $I \subset [a,b]$ (einschließlich der Intervalle, die nur aus einem Punkt bestehen) heißt die Funktion

$$\chi_I : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* zu I. Endliche Linearkombinationen $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{I_k}$ ($c_k \in \mathbb{R}$, $I_k \subset [a,b]$ Intervalle) solcher Funktionen heißen *Treppenfunktionen*. Wir definieren das Integral $\int_a^b \chi_I \,\mathrm{d}x$ als die Intervalllänge von I, und setzen diese Integralfunktion linear auf die Treppenfunktionen fort.

Zu beachten ist, dass die Darstellung einer Treppenfunktion φ als Linearkombination von charakteristischen Funktionen nicht eindeutig ist. Damit die obige Definition des Integrals von Treppenfunktionen vernünftig ist, wollen wir daher in dieser Aufgabe beweisen, dass $\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x$ unabhängig von der Wahl dieser Darstellung ist. Dazu schreiben wir φ auf zweierler Art als Linearkombination von charakteristischen Funktionen: Es seien $n, \widetilde{n} \in \mathbb{N}$, $I_1, \ldots, I_n, \widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_{\widetilde{n}}$ Teilintervalle von $[a,b]$ und $c_1, \ldots, c_n, \widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_{\widetilde{n}} \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{I_k} = \sum_{k=1}^{\widetilde{n}} \widetilde{c}_k \cdot \chi_{\widetilde{I}_k} \qquad (*)$$

gilt. Nun zeige man:

(a) Es existiert eine *gemeinsame Verfeinerung* der beiden Darstellungen von φ, das soll heißen, es existieren $m \in \mathbb{N}$, Teilintervalle $J_1, \ldots, J_m$ von $[a,b]$ und $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{m} d_\ell \cdot \chi_{J_\ell} ,$$

derart, dass die $J_1, \ldots, J_m$ paarweise disjunkt sind, und dass für jedes $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ sowohl ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $J_\ell \subset I_k$ als auch ein $\widetilde{k} \in \{1, \ldots, \widetilde{n}\}$ mit $J_\ell \subset \widetilde{I}_{\widetilde{k}}$ existiert. *(5 Zusatzpunkte)*

(b) Geht man von einer Darstellung von φ wie in $(*)$ zu einer Verfeinerung wie in (a) über, so ändert sich dadurch der Wert des Integrals nicht. *(4 Zusatzpunkte)*

(c) Folgere aus (a) und (b): Der Wert des Integrals einer Treppenfunktion ist unabhängig davon, welche Darstellung als Linearkombination von charakteristischen Funktionen für die Berechnung zugrundegelegt wird. *(1 Zusatzpunkt)*

Information

Die **Abschlußklausur** zur Analysis I findet

am **Donnerstag, den 19. Dezember 2013**, um **14.00–15.30 Uhr**
in den Räumen **SO 108** und **M 003**

statt. Sie können eine Woche vor der Klausur im Studierendenportal abfragen, in welchem Raum (und auf welchem Platz) Sie die Klausur schreiben. Wir empfehlen dringend, spätestens 15 Minuten vor Beginn der Klausur zu erscheinen.

Inhalt der Abschlußklausur ist der gesamte Stoff der Vorlesung und der Übungen zur Analysis I.

Zur Teilnahme an der Abschlußklausur ist eine *Anmeldung* im Studienbüro erforderlich. Obwohl die reguläre Anmeldefrist abgelaufen ist, können Sie die Anmeldung auch jetzt noch (gegen Zahlung einer Nachgebühr) nachholen. Falls Sie an der Klausur teilnehmen wollen, aber bisher nicht angemeldet sind, ist es jedoch unbedingt notwendig, dass Sie die Anmeldung so rasch wie möglich nachholen. *Ohne Anmeldung hat niemand die Möglichkeit, an der Abschlußklausur teilzunehmen.*

Falls Sie Ihre Zulassung zur Abschlußklausur auf eine Zulassungsleistung in einem **vergangenen** Semester stützen wollen, die **bisher nicht im Studienbüro registriert** wurde, **beispielsweise** weil

- Sie noch **niemals zu einer Abschlußklausur zur Analysis I an der Universität Mannheim angemeldet** waren,
- oder Sie die Zulassungsleistung **an einer anderen Hochschule** erbracht haben,

wenden Sie sich bitte **so schnell wie möglich**, spätestens bis zum 27.11., an Sebastian Klein, `s.klein@math.uni-mannheim.de`. (Beachten Sie bitte die Präzisierung gegenüber der Information auf dem 11. Übungsblatt.)

Bitte bringen Sie zur Klausur die folgenden *Gegenstände* mit:

- mindestens ein Schreibgerät (schwarze oder blaue Tinte, *kein* Rotstift, *kein* Bleistift),
- Ihren Studierendenausweis bzw. ecUM-Karte, und Ihren Personalausweis oder Reisepaß.

Sie brauchen *kein Schreibpapier* mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird. Selbstverständlich dürfen Sie *Nahrungsmittel und Getränke* zur Klausur mitbringen, allerdings nur solche, von denen keine Belästigung der anderen Klausurteilnehmer (etwa durch Geräusch oder Geruch) ausgeht.

Als *Hilfsmittel* dürfen Sie wieder ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt (210×297 mm) mitbringen und während der Klausur verwenden. Dies gilt unabhängig davon, ob es von Hand oder mit dem Computer o.ä. beschriftet ist, und auch die Schriftgröße spielt keine Rolle. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein ein- oder zweisprachiges Wörterbuch verwenden. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten usw.) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes *Handy* ist während der Klausur abzuschalten.