Die Lösungen sind bis Freitag, den 18. Oktober 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

25. Rechnen mit Reihen.

(a) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$. (Die Grenzwerte brauchen nicht berechnet zu werden.)

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ *(2 Punkte)*

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}$ *(3 Punkte)*

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k}$ *(3 Punkte)*

(iv) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4+k^2+14k+30}{2k^4+2k^3+k+12}$ *(2 Punkte)*

(v) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+14k+30}{2k^4+2k^3+k+12}$ *(3 Punkte)*

(vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *(3 Punkte)*

(b) Beweise, dass die folgende Reihe in $\mathbb{R}$ konvergent ist und berechne ihren Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+3)} .$$ *(4 Punkte)*

[Tipp. Man schreibe $\frac{1}{(2k-1)(2k+3)} = \frac{\alpha}{2k-1} + \frac{\beta}{2k+3}$ mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.]

(c) Man erläutere, wie man ohne Taschenrechner die Summe $\sum_{k=0}^{1729} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+5}$ auf 10 Nachkommastellen genau berechnen kann, und führe diese Berechnung durch. *(4 Punkte)*
[Tipp. $2^{10} > 1000$.]

26. Reihen, deren Glieder Quadrate sind. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

(a) Beweise: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ absolut. *(4 Punkte)*

(b) Man belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Umkehrung von (a) falsch ist. *(2 Punkte)*

(c) Man belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Aussage von (a) falsch wird, wenn man „absolute Konvergenz" jeweils durch „Konvergenz in $\mathbb{R}$" ersetzt. *(2 Punkte)*

27. Über das Konvergenzverhalten der Summandenfolge konvergenter Reihen.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Zahlenfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Zeige, dass dann $(n \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man verwende entweder das Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 4.3), oder aber Cauchy's Verdichtungssatz (Satz 4.12).]

(b) Bleibt die Aussage von (a) richtig, wenn man auf die Voraussetzung, dass (a_n) monoton fallend sein soll, verzichtet? Man gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. *(5 Zusatzpunkte)*

28. Cesaro-Konvergenz von reellen Zahlenfolgen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der arithmetischen Mittel $c_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Man nennt — nach ERNESTO CESÀRO (1859–1906) — die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cesaro-konvergent*, wenn die Folge (c_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist dies der Fall, so nennen wir die Zahl $\lim_{n\to\infty} c_n$ den *Cesaro-Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Beweise: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cesaro-konvergent, und a ist auch der Cesaro-Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(6 Punkte)*
[Tipp. $c_n - a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}(a_k - a) + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(a_k - a)$.]

(b) Finde eine Cesaro-konvergente reelle Zahlenfolge (a_n), die nicht im üblichen Sinne konvergent ist, und beweise, dass diese Folge die genannten Eigenschaften hat. *(4 Punkte)*

(c) Finde eine beschränkte reelle Zahlenfolge (a_n), die nicht Cesaro-konvergent ist, und beweise, dass diese Folge die genannten Eigenschaften hat. *(5 Zusatzpunkte)*
[Tipp. Man kann die Folge (a_n) so konstruieren, dass jedes Glied entweder 1 oder -1 ist.]

Informationen zur Zwischenklausur

Die **Zwischenklausur** zur Analysis I findet

am Samstag, den 26. Oktober 2013
9.30–11.00 Uhr
im Gebäude A3, Raum 001

statt. Wir empfehlen dringend, spätestens 15 Minuten vor Beginn der Klausur zu erscheinen. Sofern Sie zu den Übungen zur Analysis I angemeldet sind, ist eine separate Anmeldung zur Zwischenklausur nicht erforderlich.

Die Zwischenklausur wird aus *etwa* 5-6 Aufgaben bestehen, durch die bis zu 150 Punkte erreicht werden können. Die in der Klausur gesammelte Punktzahl wird zu den Punkten der Übungsaufgaben addiert. Die Zulassung zur Abschlußklausur ist erreicht, wenn am Ende des Semesters mindestens 50% der Maximalpunktzahl (aus Übungen und Zwischenklausur) erlangt worden sind.

Stoff der *Zwischenklausur* sind **die Abschnitte 1.1 bis 4.1 des Vorlesungsskripts**, sowie die dazu gehörenden Übungen.

Bitte bringen Sie zur Klausur die folgenden *Gegenstände* mit:

- mindestens ein Schreibgerät (schwarze oder blaue Tinte, *kein* Rotstift, *kein* Bleistift),
- Ihren Studierendenausweis bzw. ecUM-Karte.

Sie brauchen *kein Schreibpapier* mitzubringen, da dieses von uns gestellt wird. Selbstverständlich dürfen Sie *Nahrungsmittel und Getränke* zur Klausur mitbringen, allerdings nur solche, von denen keine Belästigung der anderen Klausurteilnehmer (etwa durch Geräusch oder Geruch) ausgeht.

Als *Hilfsmittel* dürfen Sie ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt (210×297 mm) mitbringen und während der Klausur verwenden. Dies gilt unabhängig davon, ob es von Hand oder mit dem Computer o.ä. beschriftet ist, und auch die Schriftgröße spielt keine Rolle. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein (ein- oder zweisprachiges) Wörterbuch in der Klausur verwenden. Weitere Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Skripten usw.) sind *nicht* zugelassen, ein etwa mitgebrachtes *Handy* ist während der Klausur abzuschalten.