Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
10. Übung

8. November 2013

Die Lösungen sind bis Freitag, den 15. November 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

44. Rechnen mit Ableitungen.

(a) Mittels der Ergebnisse aus Abschnitt 7.2 begründe man, warum die folgenden Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sind und berechne jeweils die Ableitung. Dabei vereinfache man den Ausdruck für f' so weit wie möglich.

(i) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^4+1}{x^2-1}$ *(4 Punkte)*

(ii) $(1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot \ln(\ln(x))$ *(4 Punkte)*

(iii) $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{1/x^2}$ *(4 Punkte)*
[Tipp. $a^b = \exp(b \cdot \ln(a))$.]

(iv) $\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \exp(\imath\, x) = \cos(x) + \imath \cdot \sin(x)$ *(4 Punkte)*

(b) Ist $f : X \to \mathbb{K}$ eine auf $X \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion, die in $x_0 \in X$ differenzierbar ist, so heißt x_0 ein *kritischer Punkt* von f, wenn $f'(x_0) = 0$ gilt. Man finde alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen:

(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ *(4 Punkte)*

(ii) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$ *(4 Punkte)*

(iii) $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ *(4 Punkte)*

(c) Zeige, dass für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot q^k = \frac{1}{(1-q)^2} \; .$$ *(4 Punkte)*

[Tipp. Beispiel 7.4(v).]

45. Nachweis der Differenzierbarkeit. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases} \; .$$

Untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an den folgenden Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$, und berechne gegebenenfalls $f'(x_0)$.

(a) $x_0 = 0$, *(5 Punkte)*

(b) $x_0 = 1$. *(5 Punkte)*

[Tipp. Für die Untersuchung der Stetigkeit von stückweise definierten Funktionen ist Aufgabe 39(b) nützlich.]

46. Hinreichende Kriterien für Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $\alpha, C > 0$.

(a) Es gelte $|f(x)| \leq C \cdot |x|^{\alpha}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist mit $f(0) = 0$. *(4 Punkte)*

(b) Es gelte $|f(x)| \leq C \cdot |x|^{1+\alpha}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit $f(0) = f'(0) = 0$. *(4 Punkte)*

47. Die Ableitung als „bestmögliche lineare Approximation".

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine auf $X \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion und $x_0 \in X$. Für $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $g_a(x) := f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$ die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Steigung a. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen zueinander äquivalent sind:

(1) f ist in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = a$.

(2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X \; : \; (\, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g_a(x)| < \varepsilon \cdot |x - x_0| \,)$.

(10 Zusatzpunkte)

Information

Nach Informationen des Studienbüros wird die **Nachschreibeklausur** zur Analysis I zwischen dem **1.2.2014** und dem **8.2.2014** (beide Samstage sind als mögliche Termine eingeschlossen) stattfinden.

Zur Vorbereitung auf die Nachklausur wird in den kommenden Semesterferien ein **Wiederholungskurs** angeboten, der vornehmlich denjenigen Teilnehmern, die die Abschlußklausur nicht bestehen, zur Vorbereitung auf die Nachschreibeklausur dienen soll. Dieser Wiederholungskurs findet **vom 13. bis zum 24.1.2014**, jeweils von Montag bis Freitag täglich von **12.00-13.30 Uhr** in **A5, 6, Raum C015** statt, und wird von Dipl.-Math. Eva Lübcke geleitet. Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.