Martin Schmidt | **Analysis I** | 2. Oktober 2013

Sebastian Klein | **5. Übung**

Die Lösungen sind bis Freitag, den 11. Oktober 2013, 10.00 Uhr s.t. einzuwerfen.

20. Mehr Grenzwertberechnungen und Häufungspunkte. Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz, und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert. Bestimme außerdem alle ihre Häufungspunkte (dabei darf die Aussage von Aufgabe 22 verwendet werden), sowie bei (a)–(d) ihren Limes superior und ihren Limes inferior.

(a) $a_n = (-1)^n \cdot (1 - \frac{1}{n})$ *(3 Punkte)*

(b) $b_n = (-1)^n \cdot n^{\left((-1)^{n+1}\right)}$ *(3 Punkte)*

(c) $c_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$ [Tipp. Bernoullische Ungleichung.] *(3 Punkte)*

(d) $d_n = (n \cdot a)^n$ mit $0 < a < 1$ *(3 Punkte)*
[Tipp. Beispiel 3.4(i) kann hilfreich sein, aber es gibt auch andere Lösungsmöglichkeiten.]

(e) $e_n = \left(\frac{3+4\imath}{10}\right)^n$ *(3 Punkte)*

(f) $f_n = \imath^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *(4 Punkte)*

(g) $g_n = \left(\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}\right)^n$ [Tipp. Berechne die ersten Folgeglieder.] *(4 Punkte)*

21. Grenzwerte ganzrationaler Folgen. In dieser Aufgabe soll die Folge $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz untersucht werden, wobei P und Q zwei Polynome sind.

Es seien also zwei Polynome P, Q gegeben:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k\, x^k \quad \text{und} \quad Q(x) = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell\, x^\ell \,.$$

Dabei soll $p, q \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q \in \mathbb{R}$ sowie $a_p \neq 0$ und $b_q \neq 0$ sein. (p bzw. q ist also der Grad des Polynoms P bzw. Q.) Wir betrachten die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{P(n)}{Q(n)}$; damit sie wohldefiniert ist, wollen wir $Q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen.

(a) Im Fall $p > q$ beweise man, dass c_n gegen $\pm\infty$ konvergiert, wobei sich das Vorzeichen des Grenzwertes durch das Vorzeichen von $\frac{a_p}{b_q}$ bestimmt. *(a)–(c): (6 Punkte)*

(b) Im Fall $p = q$ beweise man, dass c_n gegen $\frac{a_p}{b_p}$ konvergiert.

(c) Im Fall $p < q$ beweise man, dass c_n gegen 0 konvergiert.

(d) Als Anwendung von (a)–(c) bestimme man die Grenzwerte der folgenden reellen Zahlenfolgen:

$$x_n := \frac{1 - 3\,n^{17}}{n^{12} + 1}\,, \quad y_n := \frac{6\,n^3 + 4\,n^2 + 5}{3\,n^3 + 7\,n + 12} \quad \text{und} \quad z_n := \frac{(n^2+1)^{314}}{(n+1)^{2013}}\,.$$ *(2+2+3 Punkte)*

22. Über Häufungspunkte.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. Beweise, dass dann $\{\lim_{n\to\infty} a_{2n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}\}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. *(5 Punkte)*

(b) Formuliere (ohne Beweis) eine Verallgemeinerung der Aussage von (a) für jede endliche Zahl von Teilfolgen. *(2 Punkte)*

[Auch eine solche Verallgemeinerung darf in anderen Aufgaben verwendet werden.]

23. Über den Limes superior. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkte reelle Zahlenfolgen.

(a) Beweise: $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$. *(4 Punkte)*

(b) Belege durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass nicht immer $\overline{\lim}(a_n + b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$ gilt. *(3 Punkte)*

[Tipp. Aufgabe 22(a) ist nützlich für den Nachweis, dass das Gegenbeispiel tatsächlich die Bedingungen erfüllt.]

24. Ein „Grenzwertsatz“ für die Quadratwurzel.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Es gelte $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeige, dass dann auch die Folge $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, und dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

gilt. *(6 Zusatzpunkte)*

[Tipp. Man unterscheide die Fälle $a = 0$ und $a > 0$. Im Fall $a > 0$ ist die Abschätzung $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$ nützlich.]