

1. Über die lineare Transportgleichung.

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor. Die (homogene) lineare Transportgleichung in Richtung von b ist dann die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0. \quad (*)$$

Dabei ist $u = u(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion, \dot{u} bezeichnet die Ableitung von u nach dem Parameter $t \in \mathbb{R}$, und der Gradient ∇u bezieht sich nur auf die Ableitung nach den Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

- (a) *Zeige:* Ist $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$, so ist u auf jeder der parallelen Geraden in Richtung $(b, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konstant. (4 Punkte)
- (b) Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann *zeige* man, dass $u(x, t) := g(x - tb)$ eine Lösung von $(*)$, ist, und zwar die einzige mit $u(\cdot, 0) = g$. (4 Punkte)

2. Über den Laplaceoperator. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

- (a) Seien $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonische Funktionen. *Zeige*, dass die Funktion $w(x) := u(x) \cdot v(x)$ genau dann harmonisch ist, wenn $\nabla u \perp \nabla v$ gilt. (5 Punkte)
- (b) Seien $f \in C^2(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$. Man *zeige*, dass dann

$$g \Delta f = \operatorname{div}(g \nabla f) - \nabla f \cdot \nabla g$$

gilt. (5 Punkte)

- (c) Sei $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. *Zeige*, dass Δu in den Polarkoordinaten $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$ die Darstellung

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

besitzt. (8 Punkte)

3. Ein einfaches Randwertproblem zur Laplace-Gleichung.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet. Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sei eine Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{mit} \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Zeige, dass $u = 0$ gilt. (6 Punkte)

[Tipp. Man untersuche $\int_{\Omega} u (\Delta u) d\mu$ mittels Aufgabe 2(b) und des Gaußschen Integralsatzes.]

4. Extremale des Dirichletintegrals.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet. Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ „minimiere in $C^1(\overline{\Omega})$ das Dirichletintegral $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2$ bei festgehaltenem Rand“, d.h. für jede Funktion $v \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ gelte

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \leq \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2.$$

Ziel der Aufgabe ist es, zu beweisen, dass u harmonisch ist. Dazu gehe man im Einzelnen wie folgt vor:

Es sei eine beliebige Funktion $\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ gegeben, deren Träger $\text{Tr}(\lambda) := \overline{\{x \in \overline{\Omega} \mid \lambda(x) \neq 0\}}$ in Ω enthalten ist. Dann betrachten wir die Funktionenschar $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ mit

$$u_t : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto u(x) + t \lambda(x)$$

sowie die differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{\Omega} \|\nabla u_t\|^2.$$

Nun gehe man wie folgt vor:

- (a) Man berechne $\frac{\partial}{\partial t} \big|_{t=0} (\|\nabla u_t\|^2) = 2 \nabla u \cdot \nabla \lambda$. (5 Punkte)
- (b) Mit Hilfe von (a) zeige man: $f'(0) = -2 \int_{\Omega} \lambda \Delta u$. (5 Punkte)
[Tipp. Aufgabe 2(b) und Gaußscher Integralsatz.]
- (c) Andererseits folgere man aus der Minimalitätseigenschaft von u : $f'(0) = 0$. (3 Punkte)
- (d) Durch Kombination von (b) mit (c) schließe man, dass $\Delta u|_{\Omega} = 0$ ist; daher ist u harmonisch.

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass es zu jedem $x \in \Omega$ und jeder offenen Umgebung U von x in Ω eine „Höckerfunktion“ $\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\lambda \geq 0$, $\text{Tr}(\lambda) \subset U$ und $\lambda(x) = 1$ gibt. Man wende (b) und (c) auf ein derartiges λ an, um zu zeigen, dass $\Delta u(x) = 0$ ist. (5 Punkte)