Partielle Differentialgleichungen

HSS 12

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung in den partiellen Ableitungen einer oder mehrerer gesuchter Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen:

Definition 1.1. *Eine gegebenenfalls vektorwertige Gleichung der Form*

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k. Hierbei ist F eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion. Die Ausdrücke $D^k u$ bezeichnen die Vektoren aller k-ten partiellen Ableitungen der Funktion u. Eine Funktion u heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn sie k mal differenzierbar ist und der obigen Gleichung genügt.

Wir bezeichen höhere partielle Ableitungen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ im Folgenden oft durch $\partial^\gamma = \prod_i \partial_i^{\gamma_i} = \prod_i (\frac{\partial}{\partial x_i})^{\gamma_i}$ für Multiindizes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit der Länge $|\gamma| = \sum_i \gamma_i$. Auf den Multiindizes benutzen wir die Ordungsrealtion $\delta \leq \gamma \Longleftrightarrow \delta_i \leq \gamma_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Die partiellen Ableitungen wirken dabei immer nur auf die Funktion, die unmittelbar dahinter steht. Soll sie auf ein Produkt wirken, so setzen wir dieses in Klammern.

Übungsaufgabe 1.2. *Zeige für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ die verallgemeinerte Leibnizregel*

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{0 \leq \delta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\delta} \partial^\delta u \partial^{\gamma-\delta} v := \sum_{\delta_1=0}^{\gamma_1} \binom{\gamma_1}{\delta_1} \ldots \sum_{\delta_n=0}^{\gamma_n} \binom{\gamma_n}{\delta_n} \partial^\delta u \partial^{\gamma-\delta} v.$$

1.1 Beispiele

A. Lineare Differentialgleichungen

1. Laplacegleichung. $$\triangle u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Lösungen der Laplacegleichung heißen harmonische Funktionen. Die Laplacegleichung ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Die entsprechende inhomogene Gleichung heißt **Poissongleichung.** $-\triangle u = f.$
Hierbei ist die Funktion f gegeben und die Funktion u gesucht.

2. Helmholtzgleichung. $-\triangle u - \lambda u = 0.$

Hier ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und u die gesuchte Funktion. Sie ist eine einfache Poissongleichung.

3. Lineare Transportgleichung. $\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$

Hier ist b ein Vektorfeld auf $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion.

4. Liouvillegleichung. $\dot{u} + \nabla(b \cdot u) = 0.$

Hier ist wie bei der Transportgleichung b ein gegebenes $\mathbb{R}^n$-wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet. Diese beiden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung sind ähnlich.

5. Wärmeleitungsgleichung. $\dot{u} - \triangle u = 0.$

6. Schrödingergleichung. $\imath \dot{u} + \triangle u = 0.$

Hierbei ist u eine gesuchte komplexe Funktion. Der Faktor $\imath$, durch den sich die Schrödingergleichung von der Wärmeleitungsgleichung unterscheidet, führt zu deutlichen Unterschieden dieser beiden Gleichungen.

7. Kolmogorovgleichung. $$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie ist eine Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung.

8. Fokker-Planckgleichung. $$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}(t,x) u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(t,x) u}{\partial x_i} = 0.$$

9. Wellengleichung. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0.$$

10. Allgemeine Wellengleichung. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie verallgemeinert die Wellengleichung genauso wie die Kolmogorovgleichung die Wärmeleitungsgleichung verallgemeinert.

11. Airysche Differentialgleichung. $\dot{u} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

12. Balkengleichung. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$

B. Nichtlineare Differentialgleichungen

1. Eikonalgleichung. $|\nabla u| = 1.$

2. Nichtlineare Poissongleichung. $-\triangle u = f(u).$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene und u die gesuchte Funktion auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

3. Minimalflächengleichung. $\nabla \cdot \dfrac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$

Die Graphen von Lösungen der Minimalflächengleichung sind sogenannte Minimalflächen. Der Flächeninhalt solcher Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ ändert sich unter infinitesimalen Deformationen nicht. Seifenhäute sind Beispiele solcher Minimalflächen.

4. Monge-Amperegleichung. $\det\left(\nabla \nabla^t u\right) = f$. Hier ist f eine gegebene Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion. Dabei steht auf der linken Seite der Gleichung die Determinante der Matrix der zweiten Ableitungen von u.

5. Hamilton-Jacobigleichung. $\dot{u} + H(\nabla u, x) = 0.$

Hierbei ist H eine gegebene Hamiltonfunktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, und u die gesuchte Funktion auf einem entsprechenden Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

6. Skalare Erhaltungsgleichung. $\dot{u} + \nabla \cdot F(u) = 0.$

Hierbei ist F eine gegebene $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diese Differentialgleichung hat zur Folge, dass sich das Integral von u über ein gegebenes Teilgebiet von $\mathbb{R}^n$ so mit der Zeit ändert, wie das Integral von $F(u)$ über den Rand des Gebietes. Deshalb lässt sich $F(u)$ als eine Flussdichte der Erhaltungsgröße u interpretieren.

7. Burgers Gleichung. $\dot{u} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sie ist ein Beispiel für eine skalare Erhaltungsgleichung mit $F(u) = u^2/2$.

8. Reaktions-Diffusionsgleichung. $\dot{u} - \triangle u = f(u).$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

9. Poröse Mediengleichung. $\dot{u} - \triangle (u^\gamma) = 0.$

Hier ist $\gamma \geq 1$ ein gegebener Exponent. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung eines idealen Gases in einem porösen Medium wie Sand.

10. Nichtlineare Wellengleichung. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f(u).$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

11. Korteweg-de-Vries-Gleichung. $4\dot{u} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$

Diese Gleichung besitzt eine sogenannte Laxdarstellung, d.h. sie lässt sich schreiben als

$$\dot{L} = [A, L] \qquad \text{mit} \qquad L := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad A := \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3u}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus entwickelte sich ein neues Verständnis von integrablen Systemen.

C. Lineare Differentialgleichungssysteme

1. Lineare Elastizität. $\mu\triangle u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0.$

Hier sind $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ Konstanten und u die gesuchte $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion.

2. Elastische Wellen. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\triangle u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0.$

3. Maxwellgleichungen.

$$\begin{array}{ll} \dot{E} - \nabla \times B = -4\pi j & \dot{B} + \nabla \times E = 0 \\ \nabla \cdot E = 4\pi\rho & \nabla \cdot B = 0. \end{array}$$

Hier sind die Ladungsverteilung ρ und die Stromverteilung j gegebene reelle bzw. $\mathbb{R}^3$-wertigen Funktionen auf der Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und das elektrische Feld E und das

Magnetfeld B die gesuchten $\mathbb{R}^3$-wertige Funktionen. Weil j ja gerade die Ladungsflussdichte ist erfüllen die gegebenen ρ und j den Erhaltungssatz

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot j = 0.$$

4. Cauchy-Riemanngleichung. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Hier sind $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion auf (Teilgebieten) der komplexen Ebene $x + \imath y = z \in \mathbb{C}$.

D. Nichtlineare Differentialgleichungssysteme

1. Eulergleichung. $\dot{u} + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \quad \nabla \cdot u = 0.$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit und p der Druck.

2. Navier-Stokesgleichung. $\dot{u} + u \cdot \nabla u - \triangle u + \nabla p = 0 \quad \nabla \cdot u = 0.$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit und p der Druck.

3. Einsteins Feldgleichungen. $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij}.$

Hier ist der Energieimpulstensor einer gegebenen Massenverteilung auf der Raumzeit und g_{ij} ist die entsprechende gesuchte Metrik auf der Raumzeit. Diese Metrik g_{ij} ist eine Lorentzmetrik auf der Raumzeit, d.h. eine symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialraum der Raumzeit mit der Signatur $(1, 3)$. R_{ij} ist die dazugehörige Riccikrümmung und R die skalare Krümmung.

$$\Gamma^k_{ij} := \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{3} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \qquad \left(g^{ij}\right) := \left(g_{ij}\right)^{-1} \text{ inverse Metrik}$$

$$R_{ij} := \sum_{k=0}^{3} g^{kl} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} + \sum_{l=0}^{3} \left(\Gamma^k_{lk} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{lj} \Gamma^l_{ik} \right) \right) \qquad R := \sum_{i,j=0}^{3} g^{ij} R_{ij}.$$

4. Ricci fluss. $\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$

Diese Differentialgleichung beschreibt auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einen diffusionsartigen Fluss der Metrik. Er gleicht Inhomogenitäten und Isotropien der Metrik aus und führt nach langen Zeiten zu Metriken mit sehr großen Isometriegruppen. Richard Hamilton hat in den 70ger Jahren ein Programm entworfen, um mit Hilfe dieses Flusses die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen. Diese besagt, dass sich jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit in Teile zerlegen lässt, auf denen eine Isometriegruppe transitiv wirkt. Hamilton versucht durch eine Kontrolle über das Langzeitverhalten des Ricciflusses auf kompakten 3-Mannigfaltigkeiten solche Metriken zu konstruieren. Der russische Mathematiker Grisha Perelman hat 2003 3 Arbeiten ins Netz gestellt und die letzten Hürden überwunden. Das war ein großer Erfolg für die geometrische Analysis.

1.2 Gaußscher Satz

Definition 1.3. *(Zerlegung der Eins) Eine glatte Zerlegung der Eins einer Familie von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit der Vereinigung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Familie $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $h_l : \Omega \to [0,1]$, so dass*

(i) *für jedes $x \in \Omega$ auf einer Umgebung von x nur endlich viele h_l ungleich Null sind.*

(ii) *Für alle $x \in \Omega$ gilt $\sum_{l=1}^{\infty} h_l(x) = 1$.*

(iii) *Jedes h_l außerhalb einer kompakten Teilmenge eines Elements verschwindet.*

Jede Familie von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine glatte Zerlegung der Eins.

Definition 1.4. *Für jede $n \times (n-1)$-Matrix A gibt es genau einen Spaltenvektor $A^{\#} \in \mathbb{R}^n$, so dass $\det(A, x) = x^t \cdot A^{\#}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Er steht senkrecht auf dem Bild von A als Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ und seine Länge ist der Flächeninhalt des Bildes von $[0,1]^{n-1}$ unter A in $\mathbb{R}^n$. Für eine $n \times n$-Matrix A gilt $(A|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#} = \det(A)(A^{-1})^t e_n$.*

Definition 1.5. *Eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ hat differenzierbaren Rand, wenn ihr Abschluss $\bar{\Omega}$ eine Überdeckung von offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Abbildungen $\Phi : U \to O$ mit stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen $\Phi^{-1} : O \to U$ besitzt, die jeweils $O \cap \Omega$ in die obere Halbebene $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ und $O \cap \partial\Omega$ nach $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ abbilden. Seien $\det \Phi' > 0$. Dann ist das Integral einer Funktion f auf $\partial\Omega$ mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ definiert als*

$$\int_{\partial\Omega} f \, \mathrm{d}\sigma = \sum_{l\in\mathbb{N}} \int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}} (h_l f) \circ \Phi \left|(\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#}\right| \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ wobei jeweils } h_l|_{\mathbb{R}^n\setminus O} = 0.$$

Für eine $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion f und die äußere Normale N auf $\partial\Omega$ definieren wir

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N \, \mathrm{d}\sigma := -\sum_{l\in\mathbb{N}} \int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}} ((h_l f) \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ wobei jeweils } h_l|_{\mathbb{R}^n\setminus O} = 0.$$

Um diese Integrale zu berechnen, genügt es Φ auf $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ zu kennen. Stetig differenzierbare Einbettungen $\Psi : U \cap \mathbb{R}^{n-1} \to O \cap \partial\Omega$, deren Ableitungen Ψ' den Rang $n-1$ haben, lassen sich so stetig differenzierbar auf kleine Umgebungen von $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ fortsetzten, dass sie stetig differenzierbare Umkehrabbildungen haben. Deshalb genügt es die Existenz solcher Abbildungen $\Psi = \Phi|_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}}$ vorauszusetzen.

Lemma 1.6. *Auf den $d \times d$ Matrizen ist* det *eine differenzierbare Abbildung mit*

$$\frac{d}{dt}\det(A + tB)\bigg|_{t=0} = \mathrm{Spur}(\det(A)A^{-1}B).$$

Beweis: Für zwei $d \times d$-Matrizen A und B, von denen die erste invertierbar ist, gilt

$$\det(A + tB) = \det(A)\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B) = t^d \det(A)\det(t^{-1}\mathbb{1} + A^{-1}B) \text{ für } t \neq 0.$$

Die Ableitung nach t bei $t = 0$ ist also $\det(A)$ mal dem zweithöchste Koeffizient des charakteristischen Polynoms von $-A^{-1}B$, also $\det(A)\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B)$. **q.e.d.**

Satz 1.7. *(Gaußscher Satz oder Divergenzsatz) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge mit zweimal differenzierbarem Rand und f eine auf $\overline{\Omega}$ stetige $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion, deren partiellen Ableitungen sich stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzten. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \nabla \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma$$

Hierbei ist N die äußere Normale und $N\,\mathrm{d}\sigma$ das entsprechende Maß auf dem Rand $\partial\Omega$.

Beweis: Mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins genügt es die Aussage für eine Funktion f zu zeigen, die außerhalb einer abgeschlossenen Menge in einer offenen Menge O aus Definition 1.5 verschwindet. Für $\tilde{f} := \det(\Phi')(\Phi')^{-1}(f \circ \Phi)$ gilt wegen Lemma 1.6

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \tilde{f} &= \det(\Phi')\sum_{ijkl}(\Phi')^{-1}_{ij}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x_k \partial x_i}(\Phi)^{-1}_{kl} f_l \circ \Phi - \det(\Phi')\sum_{ijkl}(\Phi')^{-1}_{ij}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x_i \partial x_k}(\Phi')^{-1}_{kl} f_l \circ \Phi \\ &\quad + \det(\Phi')\,\mathrm{Spur}((\Phi')^{-1}(f' \circ \Phi)\Phi') = \det(\Phi')\,\mathrm{Spur}(f' \circ \Phi) = \det(\Phi')(\nabla \cdot f) \circ \Phi.\end{aligned}$$

Aus Jacobi's Transformation von Maßen folgt $\int_O \nabla f \,\mathrm{d}\mu = \int_U \nabla \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu$. Also genügt es

$$\begin{aligned}\int_U \nabla \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu &= -\int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}} (f \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^{\#}\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ &= -\int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}} \det(\Phi')^{-1}(\Phi'\tilde{f}) \cdot \det(\Phi')((\Phi')^{-1})^t e_n \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} = -\int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}_n \,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}^{n-1}}\end{aligned}$$

zu zeigen. Die Funktion $\tilde{f}$ setzt sich stetig differenzierbar auf einen Quader fort, von dessen Rand eine Seite in der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ liegt. Weil $\tilde{f}$ nur auf einer Seite des Randes des Quaders nicht verschwindet, reduziert sich mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung das linke Integral zu einem Integral über die Seite des Quaders in $\mathbb{R}^{n-1}$ und stimmt mit dem Integral auf der rechten Seite überein. **q.e.d.**

1.3 Existenz von Lösungen

Wir wollen zur Erläuterung ein Beispiel einer Differentialgleichung geben, das keine Lösung besitzt. Dieses Beispiel ist eine Vereinfachung (von Nirenberg) eines Beispieles von H. Lewy: Gegeben ist eine komplexwertige Funktion f auf einem Teilgebiet von $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und gesucht ist eine komplexwertige Funktion u auf demselben Teilgebiet, die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y).$$

Wir zeigen, dass es für eine glatte Funktion f, die folgende beiden Bedingungen erfüllt, in keiner Umgebung von $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ eine einmal stetig differenzierbare Lösung u gibt:

(i) $f(-x,y) = f(x,y)$

(ii) Es gibt eine Nullfolge $\varrho_n \downarrow 0$, so dass f auf einer Umgebung der Kreise $\partial B(0,\varrho_n)$ verschwindet, die Integrale $\int_{B(0,\varrho_n)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ aber ungleich Null sind.

Wenn $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine glatte periodische Funktion ist, die auf einem Intervall aber nicht auf $\mathbb{R}$ verschwindet, dann ist $f(x) := \exp(-1/|x|)h(1/|x|)$ ein solches Beispiel. Wir bezeichen die euklidische Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x|$.

1. Schritt: Wegen (i) ist mit $u(x,y)$ auch $-u(-x,y)$ und $w(x,y) = \frac{1}{2}(u(x,y) - u(-x,y))$ eine Lösung. Deshalb können wir $u(-x,y) = -u(x,y)$ annehmen.

2. Schritt: Jede solche Lösung u verschwindet auf den Kreisen $\partial B(0,\varrho_n)$. Um das einzusehen transformieren wir kleine Ringe A folgendermaßen auf Gebiete $\tilde{A}$ im $\mathbb{R}^2$:

$$A \to \tilde{A}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2/2, y) & \text{für } x \geq 0 \\ (-x^2/2, y) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind offenbar Homöomorphismen von A auf $\tilde{A}$. Auf dem Teilgebiet $\tilde{A}_+ = \left\{(s,y) \in \tilde{A} \mid s > 0\right\}$ ist die Funktion $\tilde{u}(s,y) = u(x^2/2, y)$ holomorph:

$$2\bar{\partial}\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}(s,y)}{\partial s} + \imath \frac{\tilde{u}(s,y)}{\partial y} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \imath \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0.$$

Wegen dem 1. Schritt verschwindet $\tilde{u}$ für $s = 0$, und wegen dem Schwarzen Spiegelungsprinzip und dem Identitätssatz auf $\tilde{A}_+$, und wegen dem 1. Schritt auf $\tilde{A}$.

3. Schritt: Wegen dem Gaußschen Satz gilt

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\varrho_n)} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{B(0,\varrho_n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \imath x \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{B(0,\varrho_n)} \nabla \cdot \begin{pmatrix} u \\ \imath x u \end{pmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial B(0,\varrho_n)} \begin{pmatrix} u \\ \imath x u \end{pmatrix} \cdot N(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(x,y) = 0, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (ii). Also gibt es keine einmal stetig differenzierbare Lösung.

Aus diesem Beispiel folgt auch, dass folgende reelle Differentialgleichung keine viermal differenzierbare Lösung hat:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\imath x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\imath x\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}+\imath x\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=f.$$

1.4 Distributionen

Bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen wollen wir einerseits möglichst viele Lösungen bestimmen und andererseits Bedingungen finden, so dass die Lösungen eindeutig werden. Die Anzahl oder sogar die Existenz kann davon abhängen, was wir als Lösung auffassen wollen. Wegen der Ableitungen, die in der partiellen Differentialgleichung vorkommen, muss die Lösung differenzierbar sein, und mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen. Der Begriff von differenzierbaren Funktionen lässt sich auf verschiedene Art erweitern. In diesem Abschnitt wollen wir sogenannte Distributionen einführen, die wohl die größte Klasse von verallgemeinerten differenzierbaren Funktionen darstellen, sich aber im Allgemeinen nicht mehr miteinander multiplizieren lassen. Im Fall von linearen Differentialgleichungen tauchen in der Differentialgleichung nur die gesuchte Funktion oder ihre Ableitungen auf, so dass für lineare partielle Differentialgleichungen schwache Lösungen wohldefiniert sind. Für nichtlineare partielle Differentialgleichungen werden wir sogenannte Sobolevräume einführen. Diese Sobolevräume lassen sich als Teilmengen der Distributionen auffassen, so dass die letzteren als die allgemeinsten differenzierbaren Funktionen gelten können.

Der Träger $\operatorname{supp} f$ einer Funktion f ist der Abschluss von $\{x \mid f(x)\neq 0\}$. Für eine offenen Menge $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ sei $C_0^\infty(\Omega)$ die Algebra der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, d.h. $\operatorname{supp} f \Subset \Omega$. Jedes $f\in L^1(\Omega)$ definiert eine lineare Abbildung

$$F: C_0^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}, \qquad \phi\mapsto\int_\Omega f\phi\,\mathrm{d}\mu.$$

Verallgemeinerte Funktionen auf Ω sind solche Linearformen F auf $C_0^\infty(\Omega)$. Die Elemente von $C_0^\infty(\Omega)$, auf denen die verallgemeinert Funktionen ausgewertet werden, werden Testfunktionen genannt. Mithilfe von partieller Integration erhalten wir

$$\int_\Omega \partial_i f\phi\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x=-\int_\Omega f\partial_i\phi\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x.$$

Deshalb sind solche verallgemeinert Funktionen unendlich oft differenzierbar. Für eine beliebige Linearform F auf $C_0^\infty(\Omega)$ definieren wir als die partielle Ableitung

$$\partial_i F: C_0^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}, \qquad \phi\mapsto -F(\partial_i\phi).$$

Weil der Vektorraum der Testfunktionen unendlichdimensional ist, stellen wir an die Linearformen zusätzliche Stetigkeitsbedingungen, um ihn nicht unhandbar groß zum machen. Damit die stetigen Linearformen unendlich oft differenzierbar sind, müssen die partiellen Ableitungen stetige Operatoren auf dem topologischen Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ bilden. Für $f \in L^1(\Omega))$ sind die entsprechenden verallgemeinerten Funktionen F stetig bezüglich der Supremumsnormen auf kompakten Teilmengen von Ω. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ und jeden endlichen Multiindex α definieren wir folgende Halbnorm:

$$\|\cdot\|_{K,\alpha} : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto \|\phi\|_{K,\alpha} := \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)| \,.$$

Definition 1.8. *Eine Distribution auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Linearform F auf $C_0^\infty(\Omega)$, die bezüglich der Halbnormen $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ stetig ist, d.h. für jede kompakte Teilmenge K gibt es endlich viele Multiindices $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ und $C_1 > 0, \ldots, C_M > 0$, so dass für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit Trägern in K gilt:*

$$|F(\phi)| \leq C_1 \|\phi\|_{K,\alpha_1} + \ldots + C_M \|\phi\|_{K,\alpha_M} .$$

Der Raum dieser Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

Unter dem Träger einer Distribution verstehen wir das Komplement der Vereinigung aller der offenen Mengen, so dass die Distribution auf allen Testfunktionen verschwindet, deren Träger in den offenen Mengen enthalten ist. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $|x|$ die euklidische Länge von des Vektors x. Die Testfunktion

$$\phi(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

hat den Träger $\overline{B(0,1)}$ und ist nichtnegativ. Durch Umskalieren von x und ϕ und durch Translation lässt sich daraus für jeden Ball $B(x_0, \epsilon)$ eine eindeutige nichtnegative Testfunktion $\phi_{B(x_0,\epsilon)}$ konstruieren, deren Träger gleich $\overline{B(x_0, \epsilon)}$ ist, und mit $\int \phi_{B(x_0,\epsilon)} \, \mathrm{d}\mu = 1$. Also gibt es insbesondere für jede offene Menge eine nichtnegative Testfunktion, deren Träger in der offenen Menge enthalten ist. Weil jede stetige Funktion f auf Ω, die nicht identisch verschwindet, auf einem offenen Ball für ein $\epsilon > 0$ entweder größer als ϵ oder kleiner als $-\epsilon$ ist, gibt es ein $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\int_\Omega f\phi \, \mathrm{d}\mu \neq 0$.

Folgender Distribution auf $\Omega \ni 0$ entspricht keine herkömmliche Funktion:

$$\delta : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad \phi \mapsto \phi(0).$$

Eine entsprechende Funktion müsste auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ verschwinden und ihr Integral müsste gleich eins sein. Eine solche Funktion wird Dirac'sche δ-Funktion genannt. Die Familie der Distributionen, die den Funktionen $\phi_{B(0,\epsilon)}$ entsprechen, konvergieren im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen diese Distribution. Der Träger dieser Distribution ist offenbar nur der Punkt $0 \in \Omega$. Auch alle partiellen Ableitungen dieser Funktion hängen nur von den Werten von der Testfunktionen und ihrer Ableitungen an der Stelle $0 \in \Omega$ ab.

Das Produkt einer Distribution F mit einer Funktion $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$gF : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad\qquad \phi \mapsto F(g\phi).$$

Dieses Produkt ist offensichtlich verträglich mit der Einbettung von glatten Funktionen in die Distributionen und der Multiplikation von Funktionen. Allerdings ist schon das Produkt einer Distribution mit einer stetigen aber nicht differenzierbaren Funktion nicht mehr definiert, geschweige denn das Produkt zwischen beliebigen Distributionen.

Die Faltung definiert eine weitere Produktstruktur auf den Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$(g * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^n y = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\,\mathrm{d}^n y.$$

Dieses Produkt ist abelsch und assoziativ (Übungsaufgabe). Wegen der Gleichung

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(g*f)\,\mathrm{d}^n x &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^n y\,\mathrm{d}^n x = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g)(y)f(y)\,\mathrm{d}^n y\,\mathrm{d}^n x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^n x\,\mathrm{d}^n y = \int_{\mathbb{R}^n}(\phi * \mathsf{P}g)f\,\mathrm{d}^n y
\end{aligned}$$
$$\text{mit } \mathsf{T}_x : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(x+\Omega), \quad \phi \mapsto \mathsf{T}_x\phi, \text{ mit } (\mathsf{T}_x\phi)(y) = \phi(y-x)$$
$$\text{und } \mathsf{P} : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(-\Omega), \quad \phi \mapsto \mathsf{P}\phi, \text{ mit } (\mathsf{P}\phi)(y) = \phi(-y)$$

ist die Faltung einer glatten Funktion g mit einer Distribution F definiert als

$$g * F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g) \text{ oder als } g * F : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F(\phi * \mathsf{P}g).$$

Lemma 1.9. *Die Faltung einer Distribution mit einer glatten Funktion mit kompaktem Träger entspricht einer glatten Funktion, ist also eine Distribution im Bild der Einbettung der glatten Funktionen in die Distributionen. Der Träger dieser Funktion ist enthalten in der Summe des Trägers der Funktion mit dem Träger der Distribution.*

Beweis: Aus der Stetigkeit und Linearität folgt dann für jede Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$g * F(\phi) = F(\mathsf{P}g * \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathsf{T}_x\mathsf{P}g)\phi(x)\,\mathrm{d}^n x.$$

Augrund der Stetigkeit der Distribution bezüglich der Halbnormen $\|\cdot\|_{K,0}$ ist $x \mapsto F(\mathsf{T}_x \mathsf{P} g)$ stetig. Weil der Differenzenquotient der Ableitung $\frac{\partial \mathsf{T}(y)}{\partial y_i}$ auf den glatten Funktionen bezüglich der von den Halbnormen $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ induzierten Topologie gegen den Operator $\mathsf{T}(y)\frac{\partial}{\partial x_i}$ konvergiert, sind diese Funktionen sogar glatte Funktionen.

Wenn $x \mapsto F(T_x P g)$ in einer Umgebung eines Punktes x nicht verschwindet, dann ist $g(x-y)$ für ein y im Träger von F nicht Null. Also ist $x = y + (x-y)$ die Summe eines Elementes des Trägers von F und eines Elementes des Trägers von g. **q.e.d.**

Aufgrund dieses Lemmas ist sogar die Faltung einer Distribution F mit einer Distribution G mit kompaktem Träger definiert:

$$F * G : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto F(\phi * \mathsf{P}G) \text{ mit } \qquad \mathsf{P}G(\phi) := G(\mathsf{P}\phi).$$

Die Faltung mit der Dirac'schen δ-Funktion ist gleich der ursprünglichen Funktion. Die Dirac'sche δ-Funktion ist also bezüglich der Faltung das Einselement. Wir hatten eine Familie von Testfunktionen $\phi_{B(0,\epsilon)}$ eingeführt, die im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen die Dirac'sche δ-Funktion konvergieren. Für eine beliebige Distribution F konvergiert die Familie von glatten Funktionen $f_\epsilon := \phi_{B(0,\epsilon)} * F$ im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ in einem bestimmten Sinne gegen die Distribution U. Eine solche Familie $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon>0}$ in $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\lambda_\epsilon \geq 0 \qquad \operatorname{supp} \lambda_\epsilon \subset \bar{B}(0,\epsilon) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_\epsilon \, \mathrm{d}^n x = 1,$$

die also gegen die Dirac'sche δ-Funktion konvergiert, heißt Mollifier. Damit zeigen wir, dass sich verallgemeinerte Funktionen durch glatte Funktionen annähern lassen.

Lemma 1.10. *Sei $f \in C(\Omega)$ und $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon>0}$ ein Mollifier. Dann konvergiert die Familie von glatten Funktionen $\lambda_\epsilon * f$ im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ auf allen kompakten Teilmengen von Ω gleichmäßig gegen f. Wenn f glatt ist gilt dasselbe für alle Ableitungen von f.*

Beweis: Auf kompakten Mengen ist $f \in C(\Omega)$ gleichmäßig stetig. Weil Ω offen ist, ist jedes $x \in \Omega$ in einem Ball $B(x,\epsilon) \subset \Omega$ enthalten. Für hinreichend kleine ϵ hängt der Wert von $\lambda_\epsilon * f$ bei x nur von den Werten von f auf $B(x,\epsilon) \subset \Omega$ ab und ist wohldefiniert. Für solche hinreichend kleine ϵ gilt dann

$$\left|(\phi_{B(0,\epsilon)} * f)(x) - f(x)\right| = \left|\int_{B(x,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y-x)(f(y)-f(x)) \, \mathrm{d}^n y\right| \leq \sup_{y \in B(x,\epsilon)} |f(y)-f(x)|.$$

Daraus folgt auf kompakten Mengen die gleichmäßige Konvergenz $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \lambda_\epsilon * f = f$. Aufgrund der Definition der Faltung gilt für zwei glatte Funktionen f und g:

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

Deshalb zeigen dieselben Argumente für glatte f, dass auch alle die Faltungen von λ_ϵ mit den partiellen Ableitungen von f auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen die entsprechenden partiellen Ableitungen von f konvergieren. **q.e.d.**

Jedes Element $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definiert auf natürliche Weise eine Distribution

$$F_f : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \phi \mapsto \int_\Omega f\phi \, \mathrm{d}\mu.$$

Für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit Träger in der kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ und $f \in L^1(\Omega)$ gilt

$$|F_f(\phi)| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)| \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ besitzt dann jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ eine endliche Überdeckung durch offene Mengen $O_1, \ldots, O_L$, auf denen die Einschränkungen von f für $l = 1, \ldots, L$ jeweils in $f|_{O_l} \in L^1(O_l)$ liegen. Daraus folgt dann die Stetigkeit von F_f:

$$|F_f(\phi)| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)| \sum_{l=1}^{L} \|f|_{O_l}\|_{L^1(O_l)}.$$

Lemma 1.11. *(Fundamentallemma der Variationsrechnung) Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gelte $F_f(\phi) \geq 0$ auf allen nichtnegativen Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann ist f fast überall nichtnegativ. Insbesondere ist die Abbildung $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, mit $f \mapsto F_f$ injektiv.*

Beweis: Weil die Aussage lokal ist, genügt es sie für $f \in L^1(\Omega)$ zu zeigen. Wir setzen f auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ gleich Null und können $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Für Mollifier $(\lambda_\epsilon)_{\epsilon>0}$ gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda_\epsilon * f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) f(x-y) \, \mathrm{d}^n y - f(x) \right| \mathrm{d}^n x \leq \\ \leq \int_{B(0,\epsilon)} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_\epsilon(y) |f(x-y) - f(x)| \, \mathrm{d}^n x \, \mathrm{d}^n y \leq \sup_{y \in B(0,\epsilon)} \|f(\cdot - y) - f\|_1.\end{aligned}$$

Wenn f die charakteristische Funktion eines endlichen Quaders ist, dann konvergiert das Supremum auf der rechten Seite im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen Null. Wegen der Dreiecksungleichung konvergiert dieses Supremum auch für Linearkombinationen solcher Fbnktionen, also für Treppenfunktionen, im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ gegen Null. Weil die Treppenfunktionen dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen, wird dieses Supremum auch für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für hinreichend kleine ϵ beliebig klein. Deshalb konvergiert für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Familie $(\lambda_\epsilon * f)_{\epsilon>0}$ für $\epsilon \downarrow 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f. Dann existiert eine Nullfolge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\|f_{n+1} - f_n\|_1 \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n = \lambda_{\epsilon_n} * f$

gilt. Weil dann $|f_1| + \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_{n+1} - f_n|$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, konvergiert nach Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz diese Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f. Offenbar ist $(\lambda_\epsilon * f)(x) = F_f(\lambda_\epsilon(x - \cdot)$. Deshalb folgt $(\lambda_\epsilon * f)(x) \geq 0$ aus der Bedingung $F_f(\phi) \geq 0$ für alle nichtnegativen Testfunktionen ϕ. Dann folgt aus dieser Bedingung, dass tatsächlich fast überall $f \geq 0$ gilt.

Wenn insbesondere f im Kern der Abbildung $f \mapsto F_f$ liegt, muss fast überall $f \geq 0$ und $f \leq 0$ also $f = 0$ gelten. **q.e.d.**

Eine kurze und empfehlenswerte Einleitung in die Theorie der Distributionen ist das erste Kapitel von Lars Hörmander: “Linear Partial Differential Operators”.

1.5 Regularität von Lösungen

Unter der Regularität einer Lösung einer Differentialgleichung versteht man die lokalen Eigenschaften der entsprechenden Funktionen. Wir werden nur solche Lösungen betrachten, die mindestens Distributionen sind. In diesen enthalten sind messbare Funktionen bzw. allgemeiner L^p-Funktionen. Diese enthalten die Funktionen, deren erste oder n-te Ableitungen ebenfalls solche L^p-Funktionen sind. Die Räume solcher Funktionen werden Sobolevräume genannt. In diesen Funktionen sind die glatten Funktionen enthalten. Zuletzt kommen die analytischen Funktionen mit der höchsten Regularität.

1.6 Randwertprobleme

Bei der Untersuchung von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen streben wir eine möglichst vollständige Charakterisierung aller Lösungen an. Im Allgemeinen haben partielle Differentialgleichungen unendlich viele Lösungen. Eine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der ersten n Ableitungen an einem Punkt. Für partielle Differentialgleichungen streben wir eine analoge Charakterisierung an. Weil die Lösungen auf höherdimensionalen Gebieten definiert sind, liegt es nahe, dass die Vorgabe von Funktionswerten und eventuell einigen Ableitungen auf dem Rand des Gebietes, die Lösung eindeutig festlegt. Solche Vorgaben nennt man Randwertprobleme. In einem zweiten Schritt soll bestimmt werden für welche Randwerte eine Lösung existiert. Mit der Beantwortung beider Fragen sind alle Lösungen eindeutig durch die möglichen Randwerte bzw. Anfangswerte klassifiziert.

Kapitel 2

Maximumprinzipien

2.1 Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

Für eine harmonische Funktion u auf einem Gebiet, das einen Ball $B(x,r)$ vom Radius r enthält, ist der Mittelwert von u auf dem Rand $\partial B(x,r)$ des Balles gerade gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Weil das für beliebige Radien gilt und der Mittelwert von u auf dem Ball $B(x,r)$ gerade gleich einem gewichtetem Mittelwert aller Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r')$ mit $0 \leq r' \leq r$ ist, ist dann auch der Mittelwert auf dem Ball $B(x,r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Dieser Sachverhalt führt zu aufschlussreichen Folgerungen.

Mittelwerteigenschaft 2.1. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet Ω, das den Ball $B(x,r)$ enthält. Dann sind die Mittelwerte von u auf dem Ball $B(x,r)$ und dessen Rand gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Sind umgekehrt die Mittelwerte einer zweimal differenzierbaren Funktion $u \in C^2(\Omega)$ auf allen Bällen $B(x,r)$, die in Ω enthalten sind, oder auf Rändern dieser Bälle gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten, dann ist u auf Ω harmonisch.*

Beweis: Für $x \in \Omega$ sei $\Phi(r)$ definiert als der Mittelwert von u auf $\partial B(x,r) \subseteq \Omega$:

$$\Phi(r) := \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,\mathrm{d}\sigma(z).$$

Hier bezeichnet ω_n das Volumen des Einheitsballs im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir für die Ableitung $\Phi'(r) =$

$$\frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z\,\mathrm{d}\sigma(z) = \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot N\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{B(x,r)} \triangle u\,\mathrm{d}\mu.$$

Für harmonische u ist also Φ konstant solange $B(x,r)$ in Ω liegt. Wegen der Stetigkeit von u konvergiert $\Phi(r)$ im Grenzwert $\lim r \to 0$ gegen $u(x)$. Also sind diese Mittelwerte von u gleich den Werten $u(x)$ von u an den entsprechenden Mittelpunkten. Wegen

$$\frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r \frac{1}{s^{n-1}n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,s)} s^{n-1}u(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}s = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

folgt daraus, dass auch der Mittelwert von u auf $B(x,r) \subseteq \Omega$ gleich $u(x)$ ist.

Wenn aber umgekehrt die Mittelwerte von u auf allen Bällen $B(x,r)$ in Ω gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten sind, dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Deshalb verschwindet die Ableitung der rechten Seite nach r:

$$-\frac{n^2}{r^{n+1}}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{n}{r^n}r^{n-1}\Phi(r) = -\frac{n}{r}u(x) + \frac{n}{r}\Phi(r) = 0.$$

Dann sind auch die Mittelwerte $\Phi(r)$ von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r)$ gleich $u(x)$. Weil u zweimal stetig differenzierbar ist, ist nach unser obigen Formel Φ differenzierbar, und die Ableitung $\Phi'(r)$ verschwindet genau dann, wenn die Integrale von $\triangle u$ über alle Bälle in Ω verschwinden, bzw. u harmonisch ist. **q.e.d.**

Aufgrund dieser Mittelwerteigenschaft gilt für $\psi \in C_0^\infty((0,r))$:

$$\left(\int\limits_0^r \psi(s)\,\mathrm{d}s\right) u(x) = \int\limits_{B(x,r)} u(y)\frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y.$$

Diese Charakterisierung können wir auf Distributionen übertragen:

Schwache Mittelwerteigenschaft 2.2. *Sei U eine harmonische Distribution auf einem offenen Gebiet Ω, das den Ball $B(x,r)$ enthält. Für $\psi \in C_0^\infty((0,r))$ mit $\int \psi\,\mathrm{d}\mu = 0$ verschwindet U auf folgender Testfunktion mit kompakten Träger in Ω:*

$$f(y) = \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}.$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass es eine Testfunktion mit kompaktem Träger in Ω gibt, die $\triangle g = f$ erfüllt. Aufgrund der Voraussetzungen an ψ gibt es eine Testfunktion Ψ mit kompaktem Träger in $[0, r]$, deren Ableitung gerade gleich ψ ist. Wir definieren

$$g(y) = \int_r^{|y-x|} \frac{\Psi(s)}{ns^{n-1}\omega_n} \, \mathrm{d}s.$$

Das ist eine Testfunktion mit kompaktem Träger in $B(x, r) \subseteq \Omega$, die nur von $s = |y-x|$ abhängt. Für eine Funktion $u(x) := v(|x|) = v(\sqrt{x \cdot x})$ ergibt die Kettenregel für $x \neq 0$:

$$\nabla_x u(x) = v(|x|)\nabla_x |x| = v'(|x|)\frac{2x}{2|x|} \qquad \triangle_x u(x) = v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} v'(|x|) \tag{2.1}$$

Daraus ergibt sich

$$\triangle_y g(y) = \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n} - \frac{(n-1)\Psi(|y-x|)}{n|y-x|^n\omega_n} + \frac{n-1}{|y-x|}\frac{\Psi(|y-x|}{n|y-x|^{n-1}\omega_n} = f(y).\textbf{q.e.d.}$$

Weylsches Lemma 2.3. *Sei U eine harmonische Distribution auf dem offenen Gebiet Ω. Dann gibt es eine harmonische Funktion $u \in C^\infty(\Omega)$, so dass U die entsprechende Distribution ist (auf den Testfunktionen mit kompaktem Träger in Ω).*

Beweis: Zunächst definieren wir u. Für jedes $x \in \Omega$ sei $B(x, r)$ ein Ball in Ω und ψ eine Testfunktion mit kompaktem Träger in $(0, r)$, die $\int_0^r \psi(s) \, \mathrm{d}s = 1$ erfüllt. Dann sei

$$u(x) := U(f_x) \quad \text{mit} \qquad f_x(y) := \frac{\psi(|y-x|)}{n|y-x|^{n-1}\omega_n}.$$

Aufgrund der Schwachen Mittelwerteigenschaft hängt $u(x)$ nicht von der Wahl von r und ψ ab. Also können wir r und ψ so wählen, dass wir sie für alle y in einer kleinen Umgebung von x in der Definition von $u(y)$ verwenden können. Dort ist u die Faltung einer solchen Testfunktion f zu $x = 0$ mit der Distribution U. Man beachte, dass diese Testfunktionen punktsymmetrisch sind $\mathsf{P}f = f$. Wegen Lemma 1.9 ist u undendlich oft differenzierbar. Aufgrund der Schwachen Mittelwerteigenschaft verschwinden harmonische Distributionen auf allen Testfunktionen, deren Integrale verschwinden, und die nur von dem Abstand von einem beliebigen Punkt abhängen. Letzteres ist äquivalent dazu, dass sie invariant sind unter allen Drehungen um diesen Punkt sind. Aus der Invarianz des Lebesguemaßes unter den Drehungen folgt, dass die Faltung $\phi * \psi$ einer Testfunktion ϕ, die invariant ist unter Drehungen um y, mit einer Testfunktion ψ, die invariant ist unter Drehungen um z, invariant ist unter Drehungen um $y + z$:

$$(\phi*\psi)(\mathsf{O}x+y+z) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathsf{O}x+y+z-x')\psi(x') \, \mathrm{d}^n x' = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathsf{O}(x-x')+y)\psi(\mathsf{O}x'+z) \, \mathrm{d}^n x'.$$

Das Integral der Faltung $\phi * \psi$ ist gleich dem Produkt der Integrale von ϕ und ψ:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\phi * \psi)(x)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\psi(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x \\ = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x\right).\end{aligned}$$

Dann ist die Faltung von f mit Testfunktionen der Form wie sie in der Schwachen Mittelwerteigenschaft betrachtet werden, wieder eine solche Testfunktion. Deshalb hat auch $\tilde{U}$ die schwache Mittelwerteigenschaft. Weil u stetig ist, setzt sich $\tilde{U}$ eindeutig auf $L^1(\Omega)$-Funktionen mit kompaktem Träger in Ω fort und erfüllt die erste Formulierung der Mittelwerteigenschaft. Also ist u harmonisch. Für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt es ein $r > 0$ mit $\phi_{B(0,\epsilon)} * \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\tilde{U}(\phi) = U(\mathsf{P}\phi_{B(0,\epsilon)} * \phi)$ für $0 < \epsilon < r$. Aus Lemma 1.10 folgt

$$U(\phi) = U(\lim_{\epsilon\downarrow 0} \mathsf{P}\phi_{B(0,\epsilon)} * \phi) = \tilde{U}(\phi).$$

Also stimmen die Distributionen U und $\tilde{U}$ überein. **q.e.d.**

Insbesondere haben wir gezeigt, dass eine Distribution genau dann harmonisch ist, wenn sie die Schwache Mittelwerteigenschaft hat, oder wenn sie einer harmonischen Funktion entspricht. Die schwachen Lösungen der Laplacegleichung stimmen also mit den starken Lösungen überein, so dass es genügt starke Lösungen zu betrachten.

Zum Abschluss dieses Abschnittes werden wir sehen, dass aus der Mittelwerteigenschaft für nichtnegative harmonische Funktionen eine sogenannte Harnackungleichung folgt. Diese besagt, dass allein durch den einen Wert einer solchen nichtnegativen harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet alle Werte auf einer kompakten Teilmenge des Gebietes gleichmäßig für alle solchen Funktionen abgeschätzt werden.

Harnacksche Ungleichung 2.4. *Sei Ω' ein offenes zusammenhängendes Gebiet mit kompakten Abschluss $\bar{\Omega}'$ in dem offenen Gebiet Ω. Dann gibt es ein $C > 0$, das nur von Ω und Ω' abhängt, so dass für jede auf Ω nicht negative harmonische Funktion u*

$$\sup_{x\in\Omega'} u(x) \leq C \inf_{x\in\Omega'} u(x)$$

gilt. Insbesondere gilt für alle $x, y \in \Omega'$

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y).$$

Beweis: Sei $r > 0$ so gewählt, dass für alle $x \in \Omega'$ die Bälle $B(x, 2r)$ in Ω enthalten sind ($2r$ ist der Abstand von Ω' vom Rand von Ω). Zunächst nehmen wir an dass $x, y \in \Omega'$ voneinander höchstens den Abstand r haben. Aufgrund der Mittelwerteigenschaft folgt

$$u(x) = \frac{1}{2^n r^n \omega_n}\int_{B(x,2r)} u\,\mathrm{d}\mu \geq \frac{2^{-n}}{r^n\omega_n}\int_{B(y,r)} u\,\mathrm{d}\mu = 2^{-n}u(y)$$

aus $B(y,r) \subseteq B(x,2r)$. Weil $\bar{\Omega}'$ kompakt und zusammenhängend ist können wir $\bar{\Omega}'$ mit endlich vielen Bällen $B_1,\dots,B_N$ vom Radius $r/2$ überdecken, so dass zwei aufeinander folgende Bälle jeweils nicht leeren Schnitt miteinander haben. Durch N fache Anwendung des schon bewiesenen Spezialfalles folgt für beliebige $x,y \in \Omega'$

$$u(x) \geq 2^{-nN} u(y).$$

Weil x und y beliebig sind folgt dann auch $\sup_{x\in\Omega'} u(x) \leq 2^{nN} \inf_{x\in\Omega'} u(x)$. **q.e.d.**

Harnackscher Konvergenzsatz 2.5. *Eine monotone Folge harmonischer Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem offenen zusammenhängendem Gebiet Ω konvergiert genau dann gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen eine harmonische Funktion auf Ω, wenn$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für ein $x \in \Omega$ beschränkt ist.*

Beweis: Wenn u_n auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert, dann insbesondere an allen $x \in \Omega$. Sei umgekehrt für ein $x \in \Omega$ die Folge $u_n(x)$ beschränkt. Dann konvergiert wegen der Monotonie $u_n(x)$. Wegen der Monotonie ist für $n \geq m$ die Folge $(u_n - u_m)_{n\geq m}$ nicht negativ. Wegen der Harnackschen Ungleichung ist diese Folge auf kompakten Mengen von Ω beschränkt und monoton. Also konvergiert sie dort gleichmäßig gegen eine Funktion, die wieder die Mittelwerteigenschaft hat. **q.e.d.**

2.2 Maximumprinzip harmonischer Funktionen

Wenn eine harmonische Funktion u auf einem offen zusammenhängendem Gebiet Ω ihr Supremum (oder Infimum) in einem Punkt $x \in \Omega$ annimmt, dann gibt es sicherlich einen Ball $B(x,r) \subseteq \Omega$. Dann folgt aber aus der Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{r^n\omega_n} \int\limits_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, \mathrm{d}^n y = 0.$$

Also muss u auf $B(x,r)$ konstant sein. Insbesondere ist die Teilmenge von Ω, auf der u gleich $u(x)$ ist offen und abgeschlossen. Weil aber Ω zusammenhängend ist, muss dann diese Teilmenge ganz Ω sein. Damit folgt aus der Mittelwerteigenschaft ein

Starkes Maximumprinzip 2.6. *Eine auf einer offenen und zusammenhängenden Menge harmonische Funktion, die dort einen Extremwert annimmt, ist konstant.***q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip 2.7. *Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ eine auf dem Abschluss eines beschränkten offenen Gebietes*[1] *$\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ stetige Funktion, die auf Ω harmonisch ist. Dann nimmt u sein Maximum (und Minimum) auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω an.*

[1] Wir bezeichnen mit $A \Subset B$ Teilmengen A von B mit kompaktem Abschluss $\bar{A}$ in B.

Beweis: Die stetige Funktion u nimmt auf $\bar{\Omega}$ ein Maximum und Minimum an. Wenn sie nicht auf $\partial\Omega$ liegen, dann ist u wegen des Starken Maximumprinzips konstant.**q.e.d.**

Wegen dem Maximumprinzip sind harmonische Funktionen eindeutig durch ihre Randwerte bestimmt. Allgemeiner betrachten wir das

Dirichletproblem 2.8. *Auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ ist für gegebene Funktionen f auf Ω und g auf $\partial\Omega$ eine Lösung der Poissongleichung $-\triangle u = f$ gesucht, die sich stetig auf den Rand fortsetzt und dort die Werte $u|_{\partial\Omega} = g$ annimmt.*

Die Differenz zweier Lösungen ist harmonisch und verschwindet auf dem Rand. Wegen dem schwachen Maximumprinzip hat das Dirichletproblem höchstens eine Lösung.

2.3 Poissonsche Darstellungsformel

Im Mittelwertsatz ist der Wert einer harmonischen Funktion bei x durch die Werte auf $\partial B(x,r)$ festgelegt. Mit einer expliziten Formel werden wir jetzt eine harmonische Funktion in $B(x,r)$ durch ihre Werte auf $\partial B(x,r)$ berechnen. Zunächst definieren wir

Greensche Funktion vom Einheitsball 2.9.

$$G_{B(0,1)}(x,y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|x-y| - \ln\frac{|x-|x|^2y|}{|x|}\right) & \textit{für } n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{|x|^{n-2}}{|x-|x|^2y|^{n-2}}\right) & \textit{für } n>2. \end{cases}$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften **(i)** $G_{B(0,1)}(x,y) = G_{B(0,1)}(y,x)$.

(ii) $G_{B(0,1)}(x,y) = 0$ für $x \in \partial B(0,1)$ oder $y \in \partial B(0,1)$.

(iii) $\triangle_x G_{B(0,1)}(x,y) = 0$ für $x \neq y$ und $y \neq \frac{x}{|x|^2} (= \tilde{x}) \iff x \neq \frac{y}{|y|^2} (= \tilde{y})$.

Die erste Eigenschaft folgt aus $(\frac{|x-|x|^2y|}{|x|})^2 = 1-2(x\cdot y)+|x|^2|y|^2 = (\frac{|y-|y|^2x|}{|y|})^2$. Die zweite folgt dann aus $x-|x|^2y = x-y$ für $|x|=1$. Wegen (2.1) ist der erste Summand von $G_{B(0,1)}$ für $x \neq y$ harmonisch. Genauso folgt für festes y und eine Funktion $u(x) = v(r)$ mit $r = \sqrt{1+|x|^2|y|^2-2x\cdot y}$ wegen $(x|y|^2-y)^2 = |y|^2r^2$ für $r \neq 0$

$$\nabla u(x) = \frac{x|y|^2-y}{r}v'(r) \qquad \triangle u(x) = |y|^2\left(v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)\right).$$

Deshalb ist auch der zweite Summand harmonisch. Wir definieren (gilt auch für $n = 2$):

$$
\begin{aligned}
K(x,y) &:= -\nabla_y G_{B(0,1)}(x,y) \cdot \frac{y}{|y|} = -\nabla_y G_{B(0,1)}(y,x) \frac{y}{|y|} \\
&= -\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{y}{|y|} \nabla_y \left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2} |\tilde{y}-x|^{n-2}} \right) \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \frac{y}{|y|} \left(\frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{y}{|y|^n |\tilde{y}-x|^{n-2}} - \frac{(\tilde{y}-x)\left(\frac{1}{|y|^2} - 2\frac{y^2}{|y|^4}\right)}{|y|^{n-2} |\tilde{y}-x|^n} \right) \\
(\text{für } |y| = 1) &= \frac{1}{n\omega_n} \frac{1 - xy - (x^2 - 2xy + 1) + (1 - xy)}{|x-y|^n} \quad = \frac{1 - |x|^2}{n\omega_n |x-y|^n}.
\end{aligned}
$$

Poissonsche Darstellungsformel 2.10. *Für $g \in C(\partial B(0,1))$ ist die eindeutige harmonische Funktion $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ mit $u|_{\partial B(0,1)} = g$ gegeben durch*

$$u(x) = \int\limits_{\partial B(0,1)} K(x,y) g(y) \,\mathrm{d}\sigma(y).$$

Beweis: Wegen der Eigenschaft (iii) ist $x \mapsto K(x,y)$ harmonisch für $x \neq y$ und $x \neq \tilde{y}$ und damit auch u auf $B(0,1)$. Wegen dem Maximumprimzip genügt es zu zeigen, dass sich u stetig auf $\partial B(0,1)$ fortsetzt mit $u|_{\partial B(0,1)} = g$. Aus dem Gaußschen Satz folgt

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} K(x,y) \,\mathrm{d}\sigma(y) + \int\limits_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y G_{B(0,1)}(x,y) \cdot N \,\mathrm{d}\sigma(y) = -\int\limits_{B(0,1) \setminus B(x,\epsilon)} \triangle_x G_{B(0,1)} \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}} x = 0$$

für $x \in B(0,1)$ und hinreichend kleine $\epsilon > 0$. Hier bezeichnet N die äußere Normale von $B(x,\epsilon)$. Weil der zweite Summand von $G_{B(0,1)}$ auch bei x harmonisch ist gilt sogar

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} K(x,y) \,\mathrm{d}\sigma(y) = \begin{cases} \int_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| \cdot N \,\mathrm{d}\sigma(y) & \text{für } n = 2 \\ -\int_{\partial B(x,\epsilon)} \nabla_y \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} \cdot N \,\mathrm{d}\sigma(y) & \text{für } n > 2. \end{cases}.$$

Dieses Integral ist wegen (2.1) gleich 1. Die Familie von glatten Funktionen $y \mapsto K(x,y)$

(i) ist auf $y \in \partial B(0,1)$ positiv, **(ii)** hat dort Integral 1,

(iii) und konvergiert für alle $y_0 \in \partial B(0,1)$ im Grenzwert $x \to y_0$ auf kompakten Mengen von $\partial B(0,1) \setminus \{y_0\}$ gleichmäßig gegen Null.

Wegen (i)-(iii) setzt sich u stetig auf $\partial B(0,1)$ fort und ist dort gleich g. **q.e.d.**

Aufgrund des Transformationsverhaltens von $\triangle$ unter $x \mapsto r(x-z)$ gilt für jede harmonische Funktion u auf $B(z,r)$, die sich stetig auf $\partial B(z,r)$ fortsetzt

$$u(x) = \frac{r^2 - |x-z|^2}{nr\omega_n} \int\limits_{\partial B(z,r)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1 - \frac{|x-z|^2}{r^2}}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{u(z+ry)}{|\frac{x-z}{r} - y|^n} \, \mathrm{d}\sigma(y). \quad (2.2)$$

Also sind insbesondere alle Werte von u in $B(z,r)$ allein durch die Werte von u auf $\partial B(z,r)$ bestimmt. Durch Ableiten nach x erhalten wir ähnliche Formeln für die Werte der Ableitungen von u. Diese Formel impliziert auch die Mittelwerteigenschaft. Weil der Integralkern als Funktion von x analytisch ist, zeigt sie sogar folgendes:

Korollar 2.11. *Jede harmonische Funktion ist analytisch.* **q.e.d.**

Korollar 2.12. *Es gibt eine Konstante $C(n,k)$, die nur von der Dimension n und der Ordnung k abhängt, so dass alle partiellen k-ten Ableitungen einer auf einer offenen Menge $\Omega \supset B(x,r)$ harmonischen Funktion u beschränkt sind durch*

$$\left| \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right| \leq \frac{C(n,k)}{r^k} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x,r))}.$$

Beweis: Die Ungleichung folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel (2.2). **q.e.d.**

Satz von Liouville 2.13. *Eine auf $\mathbb{R}^n$ beschränkte harmonische Funktion ist konstant.*

Beweis: Weil u beschränkt ist, sind die Normen $\|u\|_{L^\infty(\partial B(x,r))}$ beschränkt. Dann folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel, dass die ersten partiellen Ableitungen von u durch ein Vielfaches von $1/r$ beschränkt sind. Aus dem Grenzwert $r \to \infty$ folgt, dass alle ersten partiellen Ableitungen von u verschwinden und u konstant ist. **q.e.d.**

Lemma 2.14. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, das 0 enthält, und u sei eine harmonische beschränkte Funktion auf $\Omega \setminus \{0\}$. Dann lässt sich u harmonisch auf Ω fortsetzten.*

Beweis: Wir wählen einen kleinen Ball $\overline{B(0,r)} \subseteq \Omega$. Dann gibt es wegen der Poissonschen Darstellungsformel eine eindeutige Lösung $\tilde{u}$ zu dem Dirichletproblem mit den Randwerten von u auf $\partial B(0,r)$. Sei $G_{B(0,r)}(x,y) := r^{2-n} G_{B(0,1)}(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$. Die Familie von Funktionen $u_\epsilon(x) := \tilde{u}(x) - u(x) + \epsilon G_{B(0,r)}(x,0)$ auf $B(0,r) \setminus \{0\}$ ist harmonisch. Aufgrund der Konstruktion verschwinden diese Funktionen auf dem Rand $\partial B(0,r)$. Wenn eine dieser Funktionen u_ϵ mit $\epsilon > 0$ auf $B(0,r) \setminus \{0\}$ einen negativen Wert annimmt, dann besitzt sie wegen der Beschränktheit von u und der Unbeschränktheit von $G_{B(0,1)}(\cdot, 0)$ ein negatives Minimum im Inneren, was dem Starken Maximumprinzip widerspricht. Deshalb sind diese Funktionen nicht negativ. Analog gilt für negative ϵ, dass u_ϵ nicht positiv ist, weil andernfalls diese harmonische Funktion ein positives Maximum im Inneren von $B(0,r) \setminus \{0\}$ hätte. Dann muss $u_0 := \tilde{u} - u$ identisch verschwinden. Also ist $\tilde{u}$ eine harmonische Fortsetzung von u auf $B(0,r)$. **q.e.d.**

2.4 Klassische Maximumprinzipien

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Maximumprinzip von harmonischen Funktionen auf Lösungen von elliptischen Differentialoperatoren.

Definition 2.15. *Ein elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ hat folgende Gestalt $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega), u \mapsto Lu$ mit*

$$(Lu)(x) := \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x). \tag{2.3}$$

Hier sind a_{ij}, b_i und c reelle Funktionen auf Ω, die für ein $1 \leq \Lambda < \infty$ folgendes erfüllen

(i) $|a_{ij}| \leq \Lambda, |b_i| \leq \Lambda, |c| \leq \Lambda$ *auf* Ω

(ii) $\sum_{ij}^{n} a_{i,j}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \Lambda^{-1}|\lambda|^2 = \Lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2.16. *Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt ein $u \in C^2(\Omega)$ mit $Lu \leq f$ bzw. $Lu \geq f$ Ober- bzw. Unterlösung von $Lu = f$ auf Ω. Eine Ober- und Unterlösung heißt Lösung.*

Wir zeigen zuerst das schwache Maximumprinzip.

Schwaches Maximumprinzip 2.17. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}$ mit $c = 0$. Dann gilt*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) \qquad \text{für} \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \qquad \text{mit} \qquad Lu \geq 0.$$

Beweis: Falls $\sup_{x\in\Omega} u(x) > \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)$ nimmt u sein Maximum bei $x_0 \in \Omega$ an mit

$$\nabla u(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad D^2 u(x_0) \leq 0$$

Die zweite Ungleichung bedeutet $\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j\partial_i\partial_j u(x_0) \leq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Weil die Hessische eine symmetrische Matrize ist, lässt sie sich mit einer orthogonalen Matrix diagonalisieren. Kein Eigenwert ist positiv. Dann gibt es eine Matrix $(d_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ mit

$$\partial_i\partial_j u(x_0) = -\sum_{k=1}^{n} d_{ik}d_{jk} \quad \text{und} \quad (Lu)(x_0) = -\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}(x_0)d_{ik}d_{jk} \leq -\Lambda^{-1}\|d\|_2^2 \leq 0.$$

Sei $v(x) := e^{\alpha x_1}$. Dann folgt für hinreichend großes α

$$(Lv)(x) = \alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x) > 0 \qquad L(u + \epsilon v) > 0 \qquad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Deshalb nehmen für alle $\epsilon > 0$ die Funktionen $u + \epsilon v$ ihr Maximum auf $\partial\Omega$ an.

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) + \epsilon \inf_{x\in\Omega} v(x) \leq \sup_{x\in\Omega} u(x) + \epsilon v(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) + \epsilon v(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) + \epsilon \sup_{x\in\partial\Omega} v(x).$$

Weil v auf $\overline{\Omega}$ beschränkt ist, und das für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Aussage. **q.e.d.**

Korollar 2.18. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Teilmenge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \le 0$. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ folgt aus $Lu \ge 0$ bzw. $Lu = 0$*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \le \sup_{x\in\partial\Omega} u_+(x) \text{ mit } u_+ := \tfrac{1}{2}(u + |u|) \qquad \text{bzw.} \qquad \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|$$

Beweis: Für $\sup_{x\in\Omega} u(x) \le 0$ ist die erste Aussage richtig. Andernfalls folgt wegen $Lu - cu \ge -cu \ge 0$ auf $\Omega' := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ aus dem Schwachen Maximumprinzip 2.17

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\Omega'} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega'} u(x) \le \sup_{x\in\partial\Omega} u_+(x),$$

wegen $u(x) = 0$ bei $x \in \partial\Omega' \setminus \partial\Omega$. Falls $Lu = 0$, dann folgt auch für $-u$

$$\inf_{x\in\Omega} u(x) = -\sup_{x\in\Omega} -u(x) \ge -\sup_{x\in\partial\Omega} (-u(x))_+ \quad \text{und} \quad \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 2.19. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einem offenen beschränkten Gebiet $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \le 0$. Dann hat für gegebene Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g \in C(\partial\Omega)$ folgendes Dirichletproblem höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$:*

$$Lu = f \text{ auf } \Omega \quad \text{mit} \quad u|_{\partial\Omega} = g. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Für das starke Maximumprinzip zeigen wir zuerst folgendes Randpunktlemma.

Randpunktlemma 2.20. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer beschränkten offenen Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega)$ erfülle $Lu \ge 0$ auf Ω. Außerdem sei u stetig in $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) > u(x)$ für alle $x \in \Omega$, und Ω enthalte einen offenen Ball $B \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial B$. Schließlich gelte eine der folgenden Bedingungen:*
(i) $c = 0$. **(ii)** $c \le 0$ *und* $u(x_0) \ge 0$. **(iii)** $u(x_0) = 0$.
Existiert die Ableitung von u in x_0 in Richtung der äußere Normalen, so ist sie positiv.

Beweis: In jedem der drei Fälle gilt für $\tilde{L} = L - c_+$ auf Ω

$$\tilde{L}(u - u(x_0) = Lu - cu(x_0) - c_+(u - u(x_0)) \ge 0.$$

Also können wir o.B.d.A. $c \le 0, u < 0$ und $u(x_0) = 0$ annehmen. Weiterhin sei o.B.d.A. $B(0,R) \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial B(0,R) \cap \partial\Omega$. Für $v(x) := e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$ gilt $\quad e^{\alpha|x|^2} Lv =$

$$= 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - 2\alpha \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i x_i) + e^{\alpha|x|^2} cv \ge 4\alpha^2 \Lambda^{-1} |x|^2 - 2|\alpha|(\Lambda + \Lambda|x|) - \Lambda,$$

wegen $c \le 0$ und $e^{\alpha|x|^2} v \le 1$. Für $0 < \varrho < R$ und hinreichend großes α folgt

$$L(u + \epsilon v) \ge \epsilon Lv \ge 0 \qquad \text{auf} \qquad \Omega' = B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)}.$$

Auf $\partial B(0, \varrho)$ gilt $u < 0$ und auf $\partial B(0, R)$ gilt $v = 0$. Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gilt dann $u + \epsilon v \leq 0$ auf $\partial\Omega'$, und wegen Korollar 2.18 auch auf Ω'. Wegen $x_0 \in \partial\Omega'$ und $u(x_0) = 0 = v(x_0)$ folgt für die äußere Normalenableitung von $B(0, R)$ in x_0

$$N \cdot \nabla u(x_0) \geq -\epsilon N \cdot \nabla v(x_0) = 2\epsilon\alpha R e^{-\alpha R^2} > 0.$$ **q.e.d.**

Wenn $N \cdot \nabla u(x_0)$ nicht existiert, gilt für alle $\delta > 0$ und die Normale N von B in x_0

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{|x - x_0|} < 0 \qquad \text{auf} \qquad \{x \in \Omega \mid |(x - x_0) \cdot N| \geq \delta |x - x_0|\}$$

Nun können wir folgendes Maximumprinzip von Hopf beweisen.

Hopfs Maximumprinzip 2.21. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen und zusammenhängenden Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega)$ erfülle $Lu \geq 0$ auf Ω. Falls u sein Maximum im Inneren von Ω annimmt und entweder*
(i) $c = 0$ *oder* **(ii)** $c \leq 0$ *und* $\sup_{x \in \Omega} u(x) \geq 0$ *gilt, dann ist u konstant.*

Beweis: Für das Maximum $\sup_{x \in \Omega} u(x) = u(x_0)$ gilt in beiden Fällen (i) und (ii)

$$L(u - u(x_0)) = Lu - cu(x_0) \geq 0.$$

Deshalb können wir o.B.d.A. $c \leq 0, u \leq 0$ und $u(x_0) = 0$ annehmen. Falls u nicht konstant ist, also u nicht identisch verschwindet, so ist

$$\emptyset \neq \Omega' = \{x \in \Omega \mid u(x) < 0\} \neq \Omega.$$

Da Ω zusammenhängend ist, gilt $\partial\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset$. Sei $x \in \Omega'$ mit $\varrho := d(x, \partial\Omega' \cap \Omega) < d(x, \partial\Omega)$. Daraus folgt $B(x, \varrho) \subseteq \Omega'$ und $\overline{B(x, \varrho)} \subseteq \Omega$. Und es existiert ein $y \in \partial B(x, \varrho) \cap \partial\Omega' \cap \Omega$ mit $u(y) = 0$. Da $u \in C^2(\Omega)$ folgt aus Randpunktemma 2.20 $\nabla u(y) \neq 0$. Das widerspricht der Eigenschaft, dass u sein Maximum in y annimmt. **q.e.d.**

Als zweite Anwendung erhalten wir die Eindeutigkeit des Neumannproblems.

Satz 2.22. *Sei L ein elliptischer Operator auf einer zusammenhängenden offenen und beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \leq 0$ und jeder Randpunkt $x \in \partial\Omega$ sei auch Randpunkt eines Balles $B \subseteq \Omega$. Weiter seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\varrho : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Dann hat folgendes Neumannproblem bis auf eine Konstante höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, deren äußere Normalenableitung $N \cdot \nabla u$ auf ganz $\partial\Omega$ existiert:*

$$Lu = f \text{ auf } \Omega \qquad \text{und} \qquad N \cdot \nabla u = \varrho \text{ auf } \partial\Omega$$

Beweis: Die Differenz $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ zweier Lösungen erfüllt $Lu = 0$ auf Ω und $N \cdot \nabla u = 0$ auf $\partial\Omega$. Wenn sie nicht konstant ist, gilt $\sup_{x\in\Omega} \pm u(x) > 0$. Sei also o.B.d.A.

$$M := \sup_{x\in\Omega} u(x) > 0.$$

Gilt $u(x_0) = M$ für ein $x_0 \in \Omega$ so folgt aus Hopfs Maximumprinzip Satz 2.21, dass u konstant ist. Also gilt $u(x_0) = M$ für eine $x_0 \in \partial\Omega$. Dann folgt aus dem Randpunktlemma 2.20 $N \cdot \nabla u(x_0) > 0$ im Widerspruch zur Annahme. **q.e.d.**

Schließlich schätzen wir Lösungen von inhomogenen Gleichungen punktweise ab.

Satz 2.23. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $c \leq 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ erfülle $Lu \geq f$ für $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} f_-(x)$$

wobei $C(\Omega, \Lambda) := e^{C(\Lambda)d} - 1$ mit $\quad d = d(\Omega) := \inf_{e\in\partial B(0,1)} \sup_{x,y\in\Omega} (x \cdot e - y \cdot e) \leq \operatorname{diam} \Omega.$

Beweis: Wir können o.B.d.A. $\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < d\}$ annehmen. Auf Ω gilt dann

$$\begin{aligned}
(L - c)e^{\alpha x_1} &= e^{\alpha x_1}(\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1) \geq e^{\alpha x_1}\alpha(\alpha\Lambda^{-1} - \Lambda) \geq 1 \quad \text{für} \qquad \alpha \geq \Lambda + \Lambda^2 \\
L(u - v) &= Lu - (L - c)v - cv \geq f + \sup_{y\in\Omega} f_-(y) \geq 0 \quad \text{mit} \\
v(x) &:= \sup_{y\in\partial\Omega} u_+(y) + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{y\in\Omega} f_-(y) \geq 0 \quad \text{und} \quad f_- := \tfrac{1}{2}(|f| - f).
\end{aligned}$$

Weil $u - v \leq u - \sup_{y\in\partial\Omega} u_+(y) \leq 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, folgt $u - v \leq 0$ aus Korollar 2.18, also

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \sup_{x\in\Omega} v(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} u_+(x) + (e^{\alpha d} - 1) \sup_{x\in\Omega} f_-(x) \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 2.24. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung $Lu = f$ zu $f : \Omega \to \mathbb{R}$, und mit der Konstante $C(\Omega, \Lambda)$ aus Satz 2.23 sei $c_0 := 1 - C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} c_+(x) > 0$, dann folgt*

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq c_0^{-1}\big(\sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} |f(x)|\big).$$

Beweis: Für $L_0 := L - c_+$ gilt $L_0 u = Lu - c_+ u = f - c_+ u$. Aus der Anwendung von Satz 2.23 auf $\pm u$ und L_0 folgt folgende Ungleichung und daraus auch die Behauptung:

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + C(\Omega, \Lambda) \sup_{x\in\Omega} c_+(x) \sup_{x\in\Omega} |u(x)|. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Kapitel 3

Funktionenräume

3.1 Banachräume

Zuerst erinnern wir an ein paar grundlegende Begriffe.

Definition 3.1. *Ein normierter Vektorraum ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum X mit einer Norm, d.h. einer Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *und Gleichheit nur für* $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\|$ *für* $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für* $x, y \in X$.

Eine Norm erzeugt durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik Ist X mit dieser Matrix vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent, so heißt $(X, \| \ \|)$ ein Banachraum.

Eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf X heißt inneres Produkt oder Skalarprodukt auf X. Sie erzeugt durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm auf X. Ist die erzeugte Metrik vollständig, so heißt $(X, \langle ., . \rangle)$ Hilbertraum.

Der Raum aller stetigen, linearen Abbildungen $\mathcal{L}(X, Y)$ zwischen zwei normierten Vektorräumen X, Y ist mit der Norm $\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ wieder ein normierter Vektorraum, und ein Banachraum, wenn Y ein Banachraum ist. Der Dualraum $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ ist der Banachraum der stetigen linearen Funktionale auf X.

Wir konstruieren mit folgendem Kriterium von Lax und Milgram Isomorphien:

Satz von Lax und Migram 3.2. *Falls ein $T \in \mathcal{L}(X, X)$ auf einem Hilbertraum X folgendes erfüllt, dann ist T ein Isomorphismus, d.h. T ist bijektiv und $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$:*

$$\langle Tx, x \rangle \geq C|x|^2 \qquad \text{für ein } C > 0 \text{ und für alle } x \in X. \tag{3.1}$$

Beweis: Aus (3.1) folgt $C\|x\|^2 \leq \langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\| \cdot \|x\|$ aund damit auch

$$C\|x\| \leq \|Tx\| \qquad \text{für alle } x \in X \tag{3.2}$$

Insbesondere ist T injektiv. Für eine Cauchyfolge $(Tx_m)_{m\in\mathbb{N}}$ im Bild von T, die gegen y konvergiert, ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ wegen (3.2) eine Cauchyfolge, und konvergiert gegen ein x mit $Tx = y$. Für $z \in (\operatorname{Bild} T)^\perp$ folgt $z = 0$ aus (3.1) und $0 = \langle Tz, z\rangle \geq C\|z\|^2$, und damit $\operatorname{Bild} T = \overline{\operatorname{Bild} T} = X$. Also ist T bijektiv und wegen (3.2) ist T^{-1} stetig. **q.e.d.**

Eine stetige lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Teilfolge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in X eine Teilfolge von $(Tx_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Verkettung einer stetigen und einer kompakten Abbildung ist wieder kompakt.

Lemma von Ehrling 3.3. *Es seien X, Y, Z Banachräume und $X \to Y \hookrightarrow Z$ zwei stetige, lineare Abbildungen, deren erste $T : X \to Y$ kompakt und deren zweite $I : Y \hookrightarrow Z$ injektiv ist. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $C(\epsilon) < \infty$ mit*

$$\|Tx\|_Y \leq \epsilon\|x\|_X + C(\epsilon)\|ITx\|_Z \qquad \textit{für alle } x \in X.$$

Beweis: Andernfalls existiert ein $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in X$ mit

$$\epsilon\|x_m\|_X + m\|ITx_m\|_Z < \|Tx_m\|_Y = 1.$$

Dann ist $x_m \in X$ beschränkt, und, da T kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $(Tx_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $y \in Y$. Der Grenzwert der entsprechenden Teilfolge von $(\|Tx_m\|_Y)_{m\in\mathbb{N}}$ ist $\|y\|_Y = 1$, und insbesondere $y \neq 0$. Aufgrund der Annahme konvergiert die entsprechende Teilfolge von $(\|ITx_m\|)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen Null und wegen der Stetigkeit von I gegen $\|Iy\|$, im Widerspruch zu der Injektivität von I. **q.e.d.**

Injektive kompakte Störungen von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen:

Lemma 3.4. *Seien $T, K : X \to Y$ stetige lineare Abbildungen zwischen zwei Banachräumen X, Y. Die erste T sei ein Isomorphismus, und die zweite K sei kompakt. Ist $T - K$ injektiv oder surjektiv, so ist $T - K$ ein Isomorphismus.*

Beweis: O.B.d.A. können wir $X = Y$ und $T = \mathbb{1}_X$ annehmen.
Zuerst sei $\mathbb{1} - K$ injektiv. Wir behaupten, dass dann folgendes gilt:

$$\|(\mathbb{1} - K)x\| \geq C\|x\| \qquad \text{für ein } C > 0 \text{ und alle } x \in X. \tag{3.3}$$

Andernfalls existiert eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|(\mathbb{1}-K)x_m\| < \frac{1}{m}\|x_m\|$ und o.B.d.A. $\|x_m\| = 1$. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $Kx_m \to y$ und $x_m \to -y$ wegen $\|(\mathbb{1} - K)x_m\| \to 0$. Dann ist $(\mathbb{1} - K)y$ der Grenzwert von $(\mathbb{1} - K)x_m \to 0$. Weil $\mathbb{1} - K$ injektiv ist folgt $y = 0$ im Widerspruch zu $1 = \|x_m\| \to \|y\|$. Das zeigt (3.3).

Dann ist für jede Cauchyfolge $(\mathbb{1}-K)x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ im Bild$(\mathbb{1}-K)$ mit Grenzwert y auch $(x_M)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, mit einem Grenzwert x mit $(\mathbb{1}-K)x = y$. Also ist Bild$(\mathbb{1}-K)$ abgeschlossen. Wenn $\mathbb{1}-K$ nicht surjektiv ist, sei $x \in X \setminus \text{Bild}(\mathbb{1}-K)$. Aus $(\mathbb{1}-K)^n x = (\mathbb{1}-K)^{n+1} y$ mit $y \in X$, würde $(\mathbb{1}-K)^n(x-(\mathbb{1}-K)y) = 0$ folgen, und, da $\mathbb{1}-K$ injektiv ist, auch $x = (\mathbb{1}-K)y \in \text{Bild}(\mathbb{1}-K)$ im Widerspruch zu $x \in X \setminus \text{Bild}(\mathbb{1}-K)$. Das ergibt $(\mathbb{1}-K)^n x \in \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^n \setminus \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}$. Mit $\mathbb{1}-K$ ist auch $(\mathbb{1}-K)^n$ injektiv und von der Form $\mathbb{1}-\tilde{K}$ mit $\tilde{K}$ kompakt:

$$(\mathbb{1}-K)^n = \mathbb{1} - \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l-1} K^l.$$

Aufgrund des schon gezeigten ist dann auch Bild$(\mathbb{1}-K)^n$ abgeschlossenen. Dann gilt $d((\mathbb{1}-K)^n x, \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}) > 0$. Sei $y_n \in \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}$ mit

$$d((\mathbb{1}-K)^n x, \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}) \le \|(\mathbb{1}-K)^n x - y_n\| \le 2d((\mathbb{1}-K)^n x, \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}).$$

Dann gilt $\quad d(\tilde{y}_n, \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}) \ge 1/2$ für $\tilde{y}_n := \dfrac{(\mathbb{1}-K)^n x - y_n}{\|(\mathbb{1}-K)^n x - y_n\|} \in \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^n$.

$$\|K\tilde{y}_n - K\tilde{y}_m\| = \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m - (\mathbb{1}-K)\tilde{y}_n + (\mathbb{1}-K)\tilde{y}_m\| \ge 1/2 \qquad \text{für } m > n,$$

wegen $\tilde{y}_m + (\mathbb{1}-K)\tilde{y}_n - (\mathbb{1}-K)\tilde{y}_m \in \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}$. Also konvergiert keine Teilfolge von $(K\tilde{y}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, was $\|\tilde{y}_m\| = 1$ und der Kompaktheit von K widerspricht. Also ist $\mathbb{1}-K$ surjektiv und ein Isomorphismus, weil wegen (3.3) die Umkehrabbildung stetig ist.

Nun sei $\mathbb{1}-K$ surjektiv. Zunächst nehmen wir an, dass $\mathbb{1}-K$ nicht injektiv ist. Dann existiert $x = x_1 \in \text{Kern}(\mathbb{1}-K) \setminus \{0\}$. Da $\mathbb{1}-K$ surjektiv ist, existiert induktiv

$$(\mathbb{1}-K)x_{n+1} = x_n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt $\quad (\mathbb{1}-K)^{n-1} x_n = x_1 \neq 0 \quad$ und $\quad (\mathbb{1}-K)^n x_n = (\mathbb{1}-K)x_1 = 0.$

$$x_n \in \text{Kern}(\mathbb{1}-K)^n \setminus \text{Kern}(\mathbb{1}-K)^{n-1} \text{ für } n \ge 1.$$

Kern$(\mathbb{1}-K)^{n-1}$ ist abgeschlossen und sei $k_n \in \text{Kern}(\mathbb{1}-K)^{n-1}$ mit

$$d((\mathbb{1}-K)^n x, \text{Kern}(\mathbb{1}-K)^{n+1}) \le \|(\mathbb{1}-K)^n x - k_n\| \le 2d((\mathbb{1}-K)^n x, \text{Kern}(\mathbb{1}-K)^{n+1}).$$

Dann gilt $\quad d(\tilde{x}_n, \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n+1}) \ge 1/2$ für $\tilde{x}_n := \dfrac{x_n - k_n}{\|x_n - k_n\|}$.

$$\|K\tilde{x}_n - K\tilde{x}_m\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m - (\mathbb{1}-K)\tilde{x}_n + (\mathbb{1}-K)\tilde{x}_m\| \ge 1/2 \qquad \text{für } m > n,$$

da $\tilde{x}_m + (\mathbb{1}-K)\tilde{x}_n - (\mathbb{1}-K)\tilde{x}_m \in \text{Bild}(\mathbb{1}-K)^{n-1}$. Das widerspricht wieder der Kompaktheit von K und $\|\tilde{x}_m\| = 1$. Also ist $\mathbb{1}-K$ auch injektiv. **q.e.d.**

Bemerkung 3.5. *Allgemein kann man zeigen, dass eine kompakte Störung eines Isomorphismus ein Fredholmoperator vom Index* 0 *ist, siehe H.W.Alt: Lineare Funktionalanalysis Satz 8.15. Dabei heißt eine Abbildung* $T : X \to Y$ *Fredholmoperator, falls*

(i) $\operatorname{Bild} T \subseteq Y$ *ist abgeschlossenen,* **(ii)** $\dim \operatorname{Kern} T < \infty$.

(iii) $\dim \operatorname{Kokern} T = \dim(Y/\operatorname{Kern}) < \infty$.

Die Differenz $\operatorname{Ind} T := \dim \operatorname{Kern} T - \dim \operatorname{Kokern} T$ *heißt der Index von* T.

3.2 Hölderräume

Definition 3.6. (Hölderräume) *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $k \in N_0$. *Der Raum der* k*-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf* Ω *bzw. auf* A *mit* $\Omega \subseteq A \subseteq \bar{\Omega}$ *ist*

$$C^k(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \partial^\gamma u \text{ existiert für } |\gamma| \le k \text{ und ist stetig auf } \Omega\}$$
$$C^k(A) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \partial^\gamma u \text{ setzt sich für } |\gamma| \le k \text{ stetig auf } A \text{ fort}\}$$

und $C^\infty(A) := \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(A)$. *Der Index* 0 *bezeichnet Funktionen mit kompaktem Träger:*

$$C_0^k(A) := \{u \in C^k(A) | \operatorname{supp}(u) \Subset A\} \qquad C_0^\infty(A) := \cap_{k\in\mathbb{N}} C_0^k(A).$$

Für beschränktes Ω *ist* $C^k(\bar{\Omega})$ *ein Banachraum mit* $\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\gamma|\le k} \|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Für $0 < \alpha \le 1$ *ist die Hölderkonstante definiert als* $\operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} u := \sup_{x\ne y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$

und eine Lipschitzkonstante $\operatorname{lip}_\Omega u := \operatorname{höl}_{\Omega,1} u$. *Eine Funktion* u *mit endlicher Hölder- bzw. Lipschitzkonstante heißt hölder- bzw. lipschitzstetig. Der Raum der Funktion mit beschränkten und hölderstetigen Ableitungen bis zur* k*-ten Ordnung ist*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \|\partial^\gamma u\|_{L^\infty}(\Omega) + \operatorname{höl}_{\Omega,\alpha}(\partial^\gamma u) < \infty \text{ für } |\gamma| \le k\}.$$

zusammen mit der Norm $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma|\le k} (\|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} + \operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} \partial^\gamma u)$.

Wir nennen $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *Hölderräume. Schließlich sei für* $\Omega \subseteq A \subseteq \bar{\Omega}$

$$C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(A) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \varrho > 0 : u|_{A\cap B(x,\varrho)} \in C^{k,\alpha}(\Omega \cap B(x,\varrho))\}.$$

Übungsaufgabe 3.7. *Zeige dass für* $\alpha > 1$ *lokal* $u \equiv \mathrm{const}$ *aus* $\operatorname{höl}_{\Omega,\alpha} u < \infty$ *folgt.*

Proposition 3.8. $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Weil die stetigen und beschränkten Funktionen auf einem metrischen Raum mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum sind, konvergiert $\partial^\gamma u_j$ für $|\gamma| \le k$ gleichmäßig gegen eine solche Funktion u_γ. Für $\gamma_i \ge 1$ folgt aus

$$\partial^{\gamma-e_i} u_j(x+te_i) = \partial^{\gamma-e_i} u_j(x) + \int\limits_0^t \partial^\gamma u_j(x+se_i)\,\mathrm{d}s \quad \text{auf} \quad \{x+te_i \mid |t|<\epsilon\} \subseteq \Omega$$

die analoge Gleichung für die entsprechenden Grenzwerte. Deshalb folgt $u_\gamma = \partial^\gamma u$ mit $u = \lim u_j$ aus der gleichmäßigen Konvergenz aller partiellen Ableitungen der Ordnung $\le k$. Genauso konvergiert $\frac{\partial^\gamma u_j(x)-\partial^\gamma u_j(y)}{|x-y|^\alpha}$ auf $\{(x,y) \in \Omega\times\Omega \mid x \neq y\}$ gleichmäßig gegen eine stetige beschränkte Funktion. Der Grenzwert stimmt mit dem punktweisen Grenzwert $\frac{\partial^\gamma u(x)-\partial^\gamma u(y)}{|x-y|^\alpha}$ überein. Also kovergiert u_j in $C^{k,\alpha}(\Omega)$ gegen u. **q.e.d.**

Das Produkt zweier hölderstetiger Funktionen ist wieder hölderstetig.

Proposition 3.9. *Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \le 1$. Dann gilt für $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$*

$$\mathrm{höl}_{\Omega,\alpha}(uv) \le \mathrm{höl}_{\Omega,\alpha} u \|v\|_{L^\infty\Omega} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \mathrm{höl}_{\Omega,\alpha} v$$

und für $u, v \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ $\quad \|uv\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \le C(n,k)\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$.

Beweis: Die erste Abschätzung folgt aus folgender Ungleichung für $x, y \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |uv(x) - uv(y)| &\le |u(x)-u(y)|\ |v(x)| + |u(y)\ |v(x)-v(y) \\ &\le \left(\mathrm{höl}_{\Omega\alpha} u\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \mathrm{höl}_{\Omega,\alpha} v\right) |x-y|^\alpha, \end{aligned}$$

Die zweite folgt aus dieser unter Beachtung der Produktregel

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{0\le\beta\le\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta u \partial^{\gamma-\beta} v \quad \text{für } |\gamma| \le k. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Proposition 3.10. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $0 < \beta < \alpha$ sind folgende Einbettungen kompakt:*

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar\Omega).$$

Beweis: Eine Funktion $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist gleichmäßig stetig und läßt sich daher stetig auf $\bar\Omega$ fortsetzen. Klarerweise ist die Einbettung $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar\Omega)$ stetig. Eine in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ beschränkte Folge von Funktionen $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist auf $\bar\Omega$ gleichgradig stetig beschränkt. Da $\bar\Omega$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, und die Einbettung der Hölderräume in den Raum der bis zum Rand stetigen Funktionen ist kompakt. Für $0 < \beta < \alpha$, $x \neq y \in \Omega$ und $\delta > 0$ gilt

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} \le \mathrm{höl}_{\Omega,\alpha} u\ \delta^{\alpha-\beta} \qquad \text{wenn} \qquad |x-y| \le \delta \tag{3.4}$$

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} \le 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\ \delta^{-\beta} \qquad \text{wenn} \qquad |x-y| \ge \delta. \tag{3.5}$$

Für $\delta \geq \operatorname{diam}\Omega$ folgt daraus die Beschränktheit von $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$:

$$\text{höl}_{\Omega,\beta}\, u \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha}\, u \operatorname{diam}^{\alpha-\beta}(\Omega)$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert also eine in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ beschränkte Folge u_j gleichmäßig in $C^0(\bar{\Omega})$ gegen eine Funktion u. Mit (3.4) und (3.5) folgt für alle $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\limsup_{i,j\to\infty} \text{höl}_{\Omega,\beta}(u_i - u_j) &:= \lim_{k\to\infty} \sup_{i,j\geq k} \text{höl}_{\Omega,\beta}(u_i - u_j) \leq \\ &\leq \limsup_{i,j\to\infty} \delta^{\alpha-\beta}(\text{höl}_{\Omega,\alpha}\, u_i + \text{höl}_{\Omega,\alpha}\, u_j) + \limsup_{i,j\to\infty} 2\delta^{-\beta}\|u_i - u_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta^{\alpha-\beta}.\end{aligned}$$

Also ist u_j eine Cauchyfolge, und damit konvergent in $C^{0,\beta}(\Omega)$. **q.e.d.**

Für Einbettungen mit $k > 0$ muss $\partial\Omega$ eine gewisse Regularität aufweisen.

Definition 3.11. *Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$. Wir nennen $\partial\Omega$ C^k- bzw. $C^{k,\alpha}$-regulär ($\partial\Omega \in C^k$ bzw. $C^{k,\alpha}$), wenn $\partial\Omega$ lokal der Graph einer C^k bzw. $C^{k,\alpha}$ Funktion ist. D,h. für alle $x_0 \in \partial\Omega$ existieren $\varrho > 0$, $M < \infty$ und $\varphi \in C^k(B^{n-1}(0,\varrho))$ bzw. $C^{k,\alpha}(B^{n-1}(0,\varrho))$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\|\varphi\|_\infty < M$, so dass nach einer geeigneten Rotation*

$$\{x - x_0 \mid x \in \Omega\} \cap B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M, M) = \{(y,t) \in B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M,M) \mid t > \varphi(y)\}.$$

Damit erhalten wir den Kompaktheitsansatz für Hölderräume mit $k > 0$.

Proposition 3.12. *Seien $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $k \geq l \in \mathbb{N}_0$, $0 < \beta, \alpha \leq 1$ mit $k + \alpha > l + \beta$. Dann sind die Einbettungen $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\Omega)$ kompakt.*

Beweis: Für $k = l$ folgt die Aussage sofort aus Proposition 3.10. Auch der allgemeine Fall folgt aus Proposition 3.10, wenn wir zeigen, dass die Einbettung

$$C^1(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,1}(\Omega) \tag{3.6}$$

wohldefiniert und stetig ist. Da $\partial\Omega \in C^{0,1}$, hat Ω nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, und diese haben alle positiven Abstand zueinander. Für $x, y \in \Omega$, die nicht in derselben Zusammenhangskomponente liegen, gilt somit

$$|u(x) - u(y)| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega)\|u\|_{L^\infty(\Omega)}|x - y|.$$

Für $x, y \in \Omega$ in der selben Zusammenhangskomponente gibt es nach dem folgenden Lemma einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$, mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t \leq C(\Omega)|x - y|.$$

Daraus folgt für $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_0^1 |\nabla u(\gamma(t)| \,\mathrm{d}t \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega)|x-y|.$$

Also ist $\operatorname{lip}_\Omega u = \text{höl}_{\Omega,1}\, u \leq C(\Omega)\|u\|_{C^1(\Omega)}$, und (3.6) wohldefiniert und stetig. **q.e.d.**

Lemma 3.13. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann gibt es $C(\Omega) < \infty$, so dass für zwei beliebige Punkte $x, y \in \Omega$ ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : |0,1| \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und folgender Eigenschaft existiert:*

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \leq C(\Omega)|x-y|. \tag{3.7}$$

Beweis: Für $x_0 \in \partial\Omega$ setzen wir nach einer geeigneten Rotation

$$U(x_0) := \left\{x \in \Omega \mid x - x_0 \in B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M, M)\right\},$$

wobei $\varrho := \varrho_{x_0} > 0$, $M := M_{x_0}$ und $\varphi_{x_0} \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\varrho))$ wie in Definition 3.11 sind. Dann ist (3.7) für $U(x_0) \cap \Omega$ mit $C := C(\varrho, M, \operatorname{lip}\varphi) < \infty$ erfüllt. Für $x_0 \in \Omega$ wählen wir $U(x_0) := B(x_0, \varrho_{x_0}) \Subset \Omega$, und sehen dass (3.7) für $U(x_0)$ mit $C = 1$ erfüllt.

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_i \in \bar{\Omega}$ mit

$$\bar{\Omega} \subseteq U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_N).$$

Für jedes $i = 1, \ldots, N$ ist (3.7) für $U(x_i) \cap \Omega$ mit einem $C_i < \infty$ erfüllt. Wir setzen $C = \max\{C_1, \ldots, C_N\}$. Wähle $\delta > 0$, so dass für beliebige $x, y \in \Omega$ mit $|x-y| < \delta$

$$x, y \in U(x_i) \cap \Omega \qquad \text{für ein } i = 1, \ldots, N$$

gilt. Also ist (3.7) für $x, y \in \Omega$ mit $|x-y| < \delta$ mit $C = \max\{C_1, \ldots, C_N\}$ erfüllt.

Da Ω zusammenhängend ist, existiert für $x, y \in \Omega$ mit $|x-y| \geq \delta$ ein stetig differenzierbarer Weg γ von x nach y mit (er durchläuft jedes $U(x_i)$ höchstens einmal)

$$L(\gamma) \leq \left(\sum_{i=1}^N C_i \operatorname{diam}(U(x_i) \cap \Omega)\right) \leq \left(\sum_{i=1}^N C_i \operatorname{diam}(U(x_i) \cap \Omega)\right) \frac{|x-y|}{\delta} =: C_0|x-y|.$$

Mit $C(\Omega) := \max\{C_0, \ldots, C_N\} < \infty$ ist (3.7) erfüllt, und das Lemma bewiesen. **q.e.d.**

3.3 Soboleväume

Wir beginnen mit einer kurzen Erinnerung an L^p-Räume.

Definition 3.14. *(L^p-Räume) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, d.h. $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra auf Ω und μ ein σ–additives Maß auf $\mathcal{A}$. Für $1 \le p \le \infty$ und meßbares $u : \Omega \to \mathbb{K}$ sei*

$$\|u\|_{L^p(\mu)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} & \text{für } 1 \le p < \infty, \\ \inf\{\lambda \mid \mu\text{-fast überall gilt } |u| \le \lambda\} & \text{für } p = \infty, \end{cases}$$

und definieren den Raum der p–integrablen bzw. der beschränkten meßbaren Funktionen

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{K} \text{ meßbar } \mid \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\right\},$$

wobei wir wie üblich Funktionen identifizieren, die μ–fast überall übereinstimmen. $L^p(\mu)$ ist mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ ein Banachraum und für $p = 2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega u \, \bar{v} \, \mathrm{d}\mu$$

ein Hilbertraum. Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar schreiben wir abkürzend $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, wobei μ das n–dimensionale Lebesguemaß ist und $\mathcal{A}$ die σ–Algebra der lebesguemeßbaren Teilmengen von Ω bezeichnet. Weiter setzen wir

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{K} \mid u|_{\Omega'} \in L^p(\Omega') \text{ für alle } \Omega' \Subset \Omega\},$$

wobei u_m in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gegen u konvergiert, falls $u_m|_{\Omega'} \to u|_{\Omega'}$ in $L^p(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$.

Für $1 \le p \le \infty$ heißt $1 \le q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ der zu p konjugierte Exponent, und es gilt für $u \in L^p(\mu), v \in L^q(\mu)$ die Hölderungleichung

$$\left|\int_\Omega u \, v \, \mathrm{d}\mu\right| \le \|u\|_{L^p(\mu)} \|v\|_{L^q(\mu)}.$$

Für $1 \le p, q, r \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ folgt für $u \in L^p(\mu), v \in L^q(\mu)$

$$\|uv\|_{L^r(\mu)} = \|u^r v^r\|_{L^1(\mu)}^{\frac{1}{r}} \le \|u^r\|_{L^{\frac{p}{r}}(\mu)}^{\frac{1}{r}} \|v^r\|_{L^{\frac{q}{r}}(\mu)}^{\frac{1}{r}} = \|u\|_{L^p(\mu)} \|v\|_{L^q(\mu)}.$$

$$\mu(\Omega)^{-1/r} \|u\|_{L^r(\mu)} \le \mu(\Omega)^{-1/p} \|u\|_{L^p(\mu)} \qquad \text{für } \mu(\Omega) < \infty \text{ und } 1 \le r \le p < \infty \tag{3.8}$$

Mit Induktion erhalten wie die verallgemeinerte Hölderungleichung

$$\left|\int_\Omega u_1 \dots u_m \, \mathrm{d}\mu\right| \le \|u_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \cdots \|u_m\|_{L^{p_m}(\mu)} \qquad \text{für} \qquad \tfrac{1}{p_1} + \ldots + \tfrac{1}{p_m} = 1. \tag{3.9}$$

Auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist für $1 \le p < \infty$ jede Treppenfunktion in $L^p(\Omega)$ ein Grenzwert von Funktionen in $C_0(\Omega)$. Also liegt $C_0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.

Diese Aussage wollen wir verschärfen, indem wir zeigen, dass die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, d.h. $C_0^\infty(\Omega)$, für $1 \le p < \infty$ in $L^p(\Omega)$ dicht liegen. Dazu wählen wir einen Mollifier $\lambda \in C_0^\infty(B(0,1)), \lambda \ge 0$ mit $\int \lambda = 1$ (z.B. $\lambda = \phi_{B(0,1)}$). Wir setzen $\lambda_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\lambda(\frac{x}{\epsilon})$ für $\epsilon > 0$ und sehen $\lambda_\epsilon \in C_0^\infty(B(0,\epsilon)$ und $\int \lambda_\epsilon = 1$. Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definieren wir die Faltung

$$u_\epsilon(x) := (\lambda_\epsilon * u)(x) := \int \lambda_\epsilon(x-y)u(y) \, \mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \text{ für } x \in \Omega \text{ mit } \epsilon < d(x, \partial\Omega). \tag{3.10}$$

Wir sehen $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega')$ für $\Omega' \Subset \Omega$ mit $d(\Omega', \partial\Omega) > \epsilon$. Für $u \in L^1(\Omega)$ können wir u_ϵ auf ganz $\mathbb{R}^n$ definieren mit $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $\mathrm{supp}(u) \Subset \Omega$ und $\epsilon < d(\mathrm{supp}(u), \partial\Omega)$ gilt $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Für $u = \chi_{\Omega''}$ mit $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ und $\epsilon < \min\{d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)\}$ gilt

$$u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega) \qquad\qquad 0 \le u_\epsilon \le 1 \qquad\qquad u_\epsilon \equiv 1 \text{ auf } \Omega'.$$

u_ϵ approximiert u in lokalen Räumen, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 3.15. *(i) Für $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega), 1 \le p < \infty$ gilt $u_\epsilon \to u$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, so gilt $u_\epsilon \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) Für $u \in C^0(\Omega)$ gilt für alle $\Omega' \Subset \Omega$ $u_\epsilon \to u$ in $C^0(\bar{\Omega}')$.

(iii) Für $u \in C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $0 < \alpha \le 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, gilt für $0 < \beta < \alpha$ $u_\epsilon \to u$ in $C^{k,\beta}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, und für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt $\|u_\epsilon\|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \le \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$, falls $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega)$.

Beweis: Für $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), x \in \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ und $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega'')$ gilt, wegen $\int \lambda_\epsilon = 1$,

$$u_\epsilon(x) - u(x) = \int_{\Omega''} \lambda_\epsilon(x-y)(u(y) - u(x)) \, \mathrm{d}^{\mathrm{n}}y = \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)(u(x-y) - u(x)) \, \mathrm{d}^{\mathrm{n}}y. \tag{3.11}$$

(i) Wegen $\lambda_\epsilon \ge 0$, $\int \lambda_\epsilon = 1$ und der Konvexität von $x \mapsto |x|^p$ folgt[1] $\left(\int \lambda_\epsilon |f|\right)^p \le \int \lambda_\epsilon |f|^p$

[1] Diese Ungleichung folgt auch aus der allgemeinen Hölderungleichung (3.8)

für $f \in L^p(B(0,\epsilon))$ aus Jensens Ungleichung[2]. Für $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$ folgt

$$\begin{aligned}\|u_\epsilon - u\|^p_{L^p(\Omega')} &\le \int\limits_{\Omega'} \int\limits_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|u(x-y) - u(x)|^p \,\mathrm{d}^n y \,\mathrm{d}^n x \\ &= \int\limits_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)\|u(\cdot - y) - u\|^p_{L^p(\Omega')} \,\mathrm{d}^n y \le \sup_{|y|<\epsilon} \|u(\cdot - y) - u\|^p_{L^p(\Omega')} \to 0\end{aligned}$$

im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$, weil das für den dichten Unterraum der Treppenfunktionen gilt. Für $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $1 \le p < \infty$ folgt im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ genauso

$$\begin{aligned}\|u_\epsilon - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|u(x-y) - u(x)|^p \,\mathrm{d}^n y \,\mathrm{d}^n x = \\ &= \int\limits_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)\|u(\cdot - y) - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \,\mathrm{d}^n y \le \sup_{|y|<\epsilon} \|u(\cdot - y) - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

(ii) Für $u \in C^0(\Omega)$ folgt da u gleichmäßig stetig auf $\Omega' \Subset \Omega$ ist aus (3.11)

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \le \sup_{x \in \Omega', |x-y|<\epsilon} |u(x) - u(y)| \to 0.$$

(iii) Für $x \in \Omega'$ gilt $B(x,\epsilon) \Subset \Omega$, $\lambda_\epsilon(x - .) \in C^\infty_0(\Omega)$ und für $|\gamma| \le k$

$$\partial^\gamma u(x) = \int\limits_\Omega \lambda_\epsilon(x-y)\partial^\gamma u(y) \,\mathrm{d}^n y.$$

Daher genügt es $k = 0$ zu betrachten. Aus (ii) folgt $\|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \to 0$. Mit (3.11) folgt aus (3.4) für $x_1 \neq x_2 \in \Omega'$ und $x_1 - y \neq x_2 - y$ oder für $x_1 \neq x_1 - y$ und $x_2 \neq x_2 - y$

$$\begin{aligned}&|(u_\epsilon - u)(x_1) - (u_\epsilon - u)(x_2)| \le \\ &\qquad \le \int\limits_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|(u(x_1 - y) - u(x_1)) - (u(x_2 - y) - u(x_2))| \,\mathrm{d}^n y \\ &\qquad \le 2\,\mathrm{höl}_{\Omega,\alpha}(u) \min\{|x_1 - x_2|^\alpha, \epsilon^\alpha\} \le 2\epsilon^{\alpha-\beta}\,\mathrm{höl}_{\Omega'',\alpha}(u)|x_1 - x_2|^\beta.\end{aligned}$$

[2] In Rudin: "Real and Complex Analysis" findet sich folgender einfache Beweis: Sei $t = \int \lambda_\epsilon |f|$. Aus der Konvexität von $s \mapsto s^p$ folgt $s^p \ge t^p + pt^{p-1}(s-t)$ (Tangente an $s \mapsto s^p$) für $s \ge 0$, also $|f(x)|^p \ge t^p + pt^{p-1}(|f(x)| - t)$. Daraus folgt $\int \lambda_\epsilon |f|^p \ge \int \lambda_\epsilon t^p + pt^{p-1} \int \lambda_\epsilon(|f| - t)) = t^p = (\int \lambda_\epsilon |f|)^p$.

Dies ergibt $\text{höl}_{\Omega',\beta}(u_\epsilon - u) \leq 2\epsilon^{\alpha-\beta}\,\text{höl}_{\Omega'',\alpha}\, u \to 0$ für $\epsilon \downarrow 0$. Weiter gilt

$$|u_\epsilon(x)| \leq \int\limits_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|u(x-y)|\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{und}$$

$$|u_\epsilon(x_1) - u_\epsilon(x_2)| \leq \int\limits_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)|u(x_1-y) - u(x_2-y)|\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha}(u)|x_1-x_2|^\alpha.$$

Dies ergibt $$\|u_\epsilon\|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}.$$ **q.e.d.**

Daraus folgt sofort

Proposition 3.16. *$C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis: Die Treppenfunktionen mit kompaktem Träger in Ω liegen dicht in $L^p(\Omega)$. Für $u \in L^p(\Omega), \text{supp}(u) \Subset \Omega' \Subset \Omega$, $0 < \epsilon < d(\text{supp}(u), \partial\Omega')$ gilt $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Mit Proposition 3.15 (ii) folgt für $\epsilon \downarrow 0$ $\quad \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mu(\Omega')^{1/p}\|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \to 0$. **q.e.d.**

Wir kommen zu den Sobolevräumen.

Definition 3.17. (Sobolevräume) *Auf einer offenen nicht leeren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist für $1 \leq p \leq \infty$ der Raum der Sobolevfunktionen mit k-fachen L^p-integrierbaren schwachen Ableitungen definiert als* $W^{k,p}(\Omega) :=$

$$\left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall |\gamma| \leq k \exists u_\gamma \in L^p(\Omega) : \int u_\gamma \varphi \,\mathrm{d}\mu = (-1)^{|\gamma|} \int u \partial^\gamma \varphi \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

Wir nennen $\partial^\gamma u := u_\gamma$ die schwache Ableitung von u und definieren die Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega} := \sum_{0 \leq \gamma \leq k} \|\partial^\gamma u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir $W_0^{k,p}(\Omega)$ als den Abschluß $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Für $\Omega \subseteq A \subseteq \bar{\Omega}$ sei

$$W^{k,p}_{\text{loc}}(A) := \{u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \varrho > 0 : u|_{\Omega \cap B(x,\varrho)} \in W^{k,p}(\Omega \cap B(x,\varrho))\}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir abkürzend $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$. Wir nennen $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolevräume und ihre Elemente Sobolevfunktionen.

Proposition 3.18. *$W^{k,p}(\Omega)$ und $W_0^{k,p}(\Omega)$ sind Banachräume, und für $p = 2$ sind $W^{k,2}(\Omega)$ und $W_0^{k,2}(\Omega)$ mit folgenden Skalarprodukt Hilberträume:*

$$\langle u, v \rangle := \sum_{|\gamma| \leq k} \int\limits_\Omega \partial^\gamma u \partial^\gamma \bar{v} \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis: Wir sehen, dass $W^{k,p}(\Omega)$ isometrisch $W^{k,p}(\Omega) \cong$

$$\left\{(u_\gamma)_{0\le|\gamma|\le k} \in L^p(\Omega)\times\ldots\times L^p(\Omega)\,\middle|\,\int u_0\partial^\gamma\varphi\,\mathrm{d}\mu = (-1)^{|\gamma|}\int u_\gamma\varphi\,\mathrm{d}\mu \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\right\}.$$

zu einem abgeschlossenen Unterraum von $L^p(\Omega)\times\ldots\times L^p(\Omega)$ ist und somit ein Banachraum. Damit ist auch $W_0^{k,p}(\Omega)$ als abgeschlossener Unteraum von $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum. Die Normen der oben definierten Skalarprodukte sind äquivalent zu den Normen von $W^{k,2}(\Omega)$ und $W_0^{k,2}(\Omega)$. Also sind diese Räume Hilberträume. **q.e.d.**

Folgende Proposition gibt eine Charakterisierung der Sobolevräume für $1 < p \le \infty$.

Proposition 3.19. *Für $1 < p \le \infty, k \in \mathbb{N}$ gilt $u \in W^{k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn $u \in L^p(\Omega)$ und für ein $M < \infty$, $|\gamma| \le k$, $q = \frac{p}{p-1}$ folgendes gilt ($\Leftrightarrow \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le C(n,k)M$):*

$$|\Lambda_\gamma u(\varphi)| \le M\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{mit } \Lambda_\gamma u : C_0^\infty(\Omega)\to\mathbb{R} \quad \Lambda_\gamma u(\varphi) := (-1)^{|\gamma|}\int_\Omega u\partial^\gamma\varphi\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: folgt aus der isometrischen Dualität $L^q(\Omega)' = L^p(\Omega)$ für $1 < p \le \infty$. **q.e.d.**

Proposition 3.20. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend, und $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla u = 0$. Dann ist fast überall $u \equiv \mathrm{const}$ auf Ω.*

Beweis: Wir betrachten $x_0 \in \Omega$ und $B(x_0, 2\varrho) \subseteq \Omega$. Für $\epsilon < \varrho$ ist die Faltung $u_\epsilon \in C^\infty(B(x_0,\varrho))$ und für $x \in B(x_0,\varrho)$ ist $\lambda_\epsilon(x - .) \in C_0^\infty(B(x_0,2\varrho)) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$. Dies ergibt

$$\nabla u_\epsilon(x) = \int \nabla\lambda_\epsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}^n y = \int \lambda_\epsilon(x-y)\nabla u(y)\,\mathrm{d}^n y = 0.$$

Daher ist $u_\epsilon \equiv \mathrm{const}$ auf $B(x_0,\varrho)$, und, da $u_\epsilon \to u$ in $L^1(B(x_0,\varrho))$, ist fast überall $u \equiv \mathrm{const}$ auf $B(x_0,\varrho)$. Da Ω zusammenhängend ist, folgt $u^{-1}[\{u(x_0)\}] = \Omega$. **q.e.d.**

Sobolevfunktionen können durch glatte Faltungen (3.10) lokal approximiert werden.

Proposition 3.21. *Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p < \infty$ gilt $u_\epsilon \to u$ in $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Ist $\mathrm{supp}(u) \Subset \Omega$ oder $\Omega = \mathbb{R}^n$, so existieren $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, also*

$$u \in W_0^{k,p}(\Omega), \qquad \text{wenn} \qquad \mathrm{supp}(u) \Subset \Omega,$$

und $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Ist schließlich $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty)$, so existieren $u_m \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$, d.h. $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) = \overline{C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})}$.

Beweis: Wir betrachten die in (3.10) definierte Faltung $u_\epsilon := \lambda_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für $x \in \Omega, \epsilon < d(x, \partial\Omega)$ ist $\lambda_\epsilon(x - .) \in C_0^\infty(\Omega)$, und wir sehen für $|\gamma| \leq k$

$$\begin{aligned} \partial^\gamma u_\epsilon(x) &= \int\limits_\Omega \partial^\gamma \lambda_\epsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \ = (-1)^{|\gamma|} \int\limits_\Omega \partial_y^\gamma \lambda_\epsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \\ &= \int\limits_\Omega \lambda_\epsilon(x-y)\partial^\gamma u(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n} y = (\partial^\gamma u)_\epsilon(x) \end{aligned}$$

im Sinne einer schwachen Ableitung. Da $\partial^\gamma u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt mit Proposition 3.15 $\partial^\gamma(u_\epsilon) = (\partial^\gamma u)_\epsilon \to \partial^\gamma u$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, also $u_\epsilon \to u$ in $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Ist $\mathrm{supp}(u) \Subset \Omega$ oder $\Omega = \mathbb{R}^n$, so gilt mit obiger Rechnung und Proposition 3.15 $u_\epsilon \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.

Im Fall $\mathrm{supp}(u) \Subset \Omega$ wissen wir weiter, dass $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, wenn $\epsilon < d(\mathrm{supp}(u), \partial\Omega)$.

Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ können wir mit obigem Argument $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Wir wählen $\eta_1 \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta_1 \equiv 1$ auf $B(0,1)$. Für $R \geq 1$ gilt dann

$$|\partial^l \eta_R| \leq C_l R^{-l} \chi_{B(0,2R)\setminus B(0,R)} \text{ für } l \in \mathbb{N} \qquad \text{mit} \qquad \eta_R(x) := \eta_1(\tfrac{x}{R}).$$

Wir setzen $u_R := \eta_R u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $|\gamma| \leq k$ im Grenzwert $R \to \infty$

$$\partial^\gamma u_R \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta \eta_R \partial^{\gamma-\beta} u \quad \|\partial^\gamma u_R - \eta_R \partial^\gamma u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,k) R^{-1} \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Da $\eta_R \partial^\gamma u \to \partial^\gamma u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ folgt $\partial^\gamma u_R \to \partial^\gamma u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, und $u_R \to u$ in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ wählen wir den Faltungskern in $\lambda \in C_0^\infty(B(0,1) \cap \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0))$. Für $x \in \mathbb{R}^n_+$ hängt die rechte Seite von (3.11) nur von den Werten von u auf $\mathbb{R}^n_+$ ab. Wegen $\|u_\epsilon|_{\mathbb{R}^n_+} - u|_{\mathbb{R}^n_+}\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ folgt auch dieser Fall. **q.e.d.**

Schwache Ableitungen können durch endliche Differenzen approximiert werden. Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $h \neq 0, l = 1, \ldots, n$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\partial_l^h u(x) := \frac{u(x + he_l) - u(x)}{h} \qquad \text{für} \qquad x \in \Omega \cap (\Omega - he_l). \tag{3.13}$$

Wenn wir $x + he_l$ durch x substituieren erhalten wir die diskrete partielle Integration:

$$\int \partial_l^h u\phi\,\mathrm{d}\mu = -\int u\partial_l^{-h}\phi\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für} \qquad u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ und } \phi \in C_0(\Omega).$$

Proposition 3.22. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, und $l = 1, \ldots, n$.*

Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega' \Subset \Omega$ und $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ gilt

$$\|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} \quad \textit{und} \quad \partial_l^h u \to \partial_l u \textit{ in } W^{k-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \textit{ für } h \to 0. \tag{3.14}$$

Gilt umgekehrt für $1 < p \leq \infty, u \in W^{k-1,p}(\Omega)$, $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ *und* $l = 1, \ldots, n$

$$\text{für alle } \Omega' \Subset \Omega \qquad \|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq C(\Omega'), \tag{3.15}$$

$$\text{so ist } u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) \text{ mit} \qquad \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq C(n, k, \Omega'). \tag{3.16}$$

Beweis: Für $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, $|\gamma| \leq k - 1$, $x \in \Omega' \Subset \Omega$ und $|h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ gilt

$$\partial^\gamma \partial_l^h u(x) = \frac{\partial^\gamma u(x + he_l) - \partial^\gamma u(x)}{h} = \int_0^1 \partial^\gamma \partial_l u(x + the_l)\,\mathrm{d}t$$

$$\|\partial^\gamma \partial_l^h u\|^p_{L^p(\Omega')} \leq \int_{\Omega'} \int_0^1 |\partial^\gamma \partial_l u(x + the_l)|^p \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x \leq \int_0^1 \int_\Omega |\partial^\gamma \partial_l u(y)|^p \,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\,\mathrm{d}t \leq \|\partial^\gamma \partial_l u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

wegen Jensens Ungleichung. Für glatte u folgen nacheinander beide Seiten von (3.14).

Für allgemeines u existiert nach Proposition 3.21 $u_m \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Mit $\Omega' \Subset \Omega'' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \Omega') < \delta\} \Subset \Omega$ und für $|h| < \delta < d(\Omega', \partial\Omega)$ gilt

$$\|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leftarrow \|\partial_l^h u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq \|\partial_l u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} \to \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')},$$

also (3.14) linke Seite. Die rechte Seite folgt im Grenzwert $m \to \infty$, weil folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h\to 0} \|\partial_l^h u - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \|\partial_l^h u_m - \partial_l u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} + \|\partial_l^h (u - u_m)\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} + \|\partial_l u_m - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \\
&\leq 2\|\partial_l u_m - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')}.
\end{aligned}$$

Umgekehrt folgt für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, $|\gamma| \leq k - 1$ und $0 < h < d(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega')$

$$\begin{aligned}
\left|\int u \partial_l \partial^\gamma \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \partial^\gamma u \partial_l \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leftarrow \left|\int \partial^\gamma u \partial_l^{-h} \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \partial^\gamma \partial_l^h u \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \\
\leq \|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega') \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

aus (3.15). Für $1 < p \leq \infty$ folgt mit Proposition 3.19 $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ und (3.16) aus

$$\left|\int u \partial^\gamma \varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \|u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.$$

q.e.d.

Bemerkung 3.23. *Für* $u \in W^{2,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$ *sehen wir durch zweimalige Anwendungen von* (3.14) *für* $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$, $0 < h < d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)$,

$$\|\partial_l^{-h} \partial^h u\|_{L^1(\Omega')} \leq \|\partial_l \partial_l^h u\|_{L^1(\Omega'')} \leq \|\partial_l^2 u\|_{L^1(\Omega)}$$

und $\partial_l^{-h} \partial_l^h u \to \partial_l^2 u$ *in* $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *durch Approximation mit Proposition 3.21.*

Für $p = \infty$ können wir $W^{1,\infty}$ mit Hölderräumen identifizieren.

Proposition 3.24. *Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ gilt $C^{k-1,1}(\Omega) \subseteq W^{k,\infty}(\Omega)$ und*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n) \operatorname{lip}_\Omega u \text{ für } u \in C^{0,1}(\Omega). \tag{3.17}$$

Ist $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ oder Ω konvex, so gilt $W^{k,\infty}(\Omega) \subseteq C^{k-1,1}(\Omega)$, und, falls Ω zusammenhängend ist, $\operatorname{lip}_\Omega u \leq C(\Omega, n)\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$ *für $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*

Beweis: Es genügt den Fall $k = 1$ zu beweisen. Für $u \in C^{0,1}(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $0 < h < d(\operatorname{supp}(\varphi), \partial(\Omega), l = 1, \ldots, n$ gilt mit diskreter partieller Integration

$$\left|\int u\partial_l\varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leftarrow \left|\int u\partial_l^h\varphi \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \partial_l^{-h}u\varphi \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \operatorname{lip}_\Omega u\|\varphi\|_{L^1(\Omega)}.$$

Dann folgt mit Proposition 3.19, dass $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und (3.17). Nun sei $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Zuerst betrachten wir $\Omega = B(0,1)$. Dann liegt die Faltung (3.10) $u_\epsilon = \lambda_\epsilon * u$ in $C^\infty(B(0, 1-\epsilon))$. Da $\lambda_\epsilon(x - .) \in C_0^\infty(B(0,1))$ für $x \in B(0, 1-\epsilon)$, folgt

$$\nabla u_\epsilon(x) = \int \nabla\lambda_\epsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y = \int \lambda_\epsilon(x-y)\nabla u(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y$$

$$\operatorname{lip}_{B(0,1-\epsilon)} u_\epsilon \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(0,1))}.$$

Wegen dem Satz von Arzela-Ascoli konvergiert $u_\epsilon \to u$ in $C(\overline{B(0, 1-\delta)})$ für $\delta > 0$ im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Dies ergibt $u \in C^{0,1}(B(0,1))$ und

$$\operatorname{lip}_{B(0,1)} u \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(0,1))}. \tag{3.18}$$

Für allgemeines Ω erhalten wir $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ existiert nach Lemma 3.13 für beliebige $x, y \in \Omega$ ein stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$, mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und (3.7). Gleiches gilt für konvexes Ω mit $C(\Omega) = 1$. Wir unterteilen $[0,1]$ in $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ mit

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < d(\gamma([0,1]), \partial\Omega) =: \delta \text{ für } i = 1, \ldots, N.$$

Dann folgt für $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \subseteq C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit (3.18)

$$|u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| \leq \operatorname{lip}_{B(\gamma(t_i),\delta))} u|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(\gamma(t_i),\delta))} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega}|x-y|.$$

Dies ergibt $u \in C^{0,1}(\Omega)$ und $\quad \operatorname{lip}_\Omega u \le C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Ist Ω nicht zusammenhängend, so ist $u \in C^{0,1}(\Omega')$ für alle Zusammenhangskomponenten Ω' von Ω. Da $\partial\Omega \in C^{0,1}$, gibt es nur endlich viele Zusammenhangskomponenten und diese haben positiven Abstand zueinander. Dies ergibt $u \in C^{0,1}(\Omega)$. **q.e.d.**

Wir stellen einige einfache Rechenregeln für Sobolevfunktionen zusammen.

Proposition 3.25. (Produktregel) *Es sei $u \in W^{1,p}(\Omega), v \in W^{1,q}(\Omega)$, $1 \le p,q,r \le \infty$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Dann ist $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ und*

$$\nabla(uv) = (\nabla u)v + u\nabla v. \tag{3.19}$$

Beweis: Zuerst betrachten wir $p,q < \infty$. Gemäß Proposition 3.21 existieren $u_m, v_m \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $u_m \to v$ in $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann folgt $u_m v_m \to uv$ aus $u_m v_m \in C^\infty(\Omega)$ mit der Hölderungleichung in $L^r_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\nabla(u_m v_m) = (\nabla u_m)v_m + u_m\nabla v_m \to (\nabla u)v + u\nabla v.$$

Damit folgt $uv \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und (3.19) in $L^r(\Omega)$. Da $uv \in L^r(\Omega)$, folgt $uv \in W^{1,r}(\Omega)$.

Ohne die Endlichkeitannahme an p,q erhalten wir für $r > 1$ zuerst $uv \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und anschließend $uv \in W^{1,r}(\Omega)$, da $uv \in L^r(\Omega)$ und $\nabla(uv) \in L^r(\Omega)$. Ist $r = 1$ und o.B.d.A. $p = \infty, q = 1$ so approximieren wir $u_m \to u$, $v_m \to v$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ durch glatte u_m, v_m. Für ein festes $l \in \mathbb{N}$ folgt $u_m v_l \to u v_l$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $m \to \infty$, und uv_l erfüllt (3.19). Dann folgt $uv_l \to uv$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $l \to \infty$ und (3.19), da $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.**q.e.d.**

Proposition 3.26. (Kettenregel) *Es sei $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \le p \le \infty$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u$.*

Beweis: Gemäß Proposition 3.21 exitieren $u_m \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $u_m \to u$, $\nabla u_m \to \nabla u$ punktweise fast überall. Es gilt $f(u_m) \in C^1(\Omega) \subseteq W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$|f(u_m) - f(u)| \le \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|u_m - u| \qquad f'(u_m)\nabla u_m \to f'(u)\nabla u$$

punktweise fast überall in Ω. Aus der Konvergenz in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt $f(u) \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u \in L^p(\Omega). \qquad \text{Mit} \qquad |f(u)| \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|u|,$$

wegen $f(0) = 0$, folgt $f(u) \in L^p(\Omega)$ und schließlich $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. **q.e.d.**

Proposition 3.27. *Für $u \in W^{1,1}(\Omega)$ ist $|u| \in W^{1,1}(\Omega)$ mit*

$$\nabla|u| = \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ 0 & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

Außerdem ist $\nabla u = 0$ fast überall auf $u^{-1}[\{0\}] \cap \Omega$.

Beweis: Mit Proposition 3.26 ist für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$

$$u_\epsilon := ((u+\theta\epsilon)^2+\epsilon^2)^{1/2} - \epsilon\sqrt{\theta^2+1} \in W^{1,1}(\Omega) \qquad \nabla u_\epsilon = \frac{u+\theta\epsilon}{((u+\theta\epsilon)^2+\epsilon^2)^{1/2}}\nabla u.$$

Im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ konvergiert $u_\epsilon \to |u|$ in $L^1(\Omega)$ und

$$\nabla u_\epsilon \to \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

punktweise fast überall in Ω und in $L^1(\Omega)$. Daraus folgt $|u| \in W^{1,1}(\Omega)$ und

$$\nabla |u| = \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}} & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

Da die schwache Ableitung wohldefiniert ist, ist obiger Ausdruck unabhängig von $\theta \in \mathbb{R}$, und somit ist $\nabla u = 0$ fast überall auf $u^{-1}[\{0\}]$. Dies ergibt die Behauptung. **q.e.d.**

Für Transformationen im Definitionsbereich haben wir folgende Proposition.

Proposition 3.28. *Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Psi : \Omega_1 \cong \Omega_2$ eine bi-lipschitzstetige Abbildung mit $\operatorname{lip}_{\Omega_1} \Psi \leq \Lambda$ und $\operatorname{lip}_{\Omega_2} \Psi^{-1} \leq \Lambda$. Für $1 \leq p \leq \infty$ folgt $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ aus $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$. Mit der schwachen Ableitung $D\Psi$ von $\Psi \in C^{0,1}(\Omega_1) \subseteq W^{1,\infty}(\Omega_1)$, die gemäße Proposition 3.24 existiert, gilt dann*

$$\nabla(u \circ \Psi) = ((\nabla u) \circ \Psi) \cdot D\Psi \quad \textit{mit} \quad \|u \circ \Psi\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C(\Lambda, n)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_2)}. \tag{3.20}$$

Beweis: Zuerst sei $u \in C^\infty(\Omega_2)$. Für $\Omega_1' \Subset \Omega_1$ konvergiert mit Proposition 3.15 die Faltung (3.10) $\Psi_\epsilon \to \Psi$ gleichmäßig auf Ω_1', $D\Psi_\epsilon \to D\Psi$ punktweise fast überall in Ω,

$$\|D\Psi_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega_1')} \leq \|D\Psi\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \Lambda.$$

Wählen wir $\Psi(\bar{\Omega}_1') \Subset \Omega_2' \Subset \Omega_2$, so gilt $\Psi_\epsilon(\Omega_1') \subseteq \Omega_2'$ für kleine ϵ. Dies ergibt $u \circ \Psi_\epsilon \in C^\infty(\Omega_1')$ und $u \circ \Psi_\epsilon \to u \circ \Psi$ gleichmäßig auf Ω_1' mit

$$\nabla(u \circ \Psi_\epsilon) = ((\nabla u) \circ \Psi_\epsilon) \cdot D\Psi_\epsilon \to ((\nabla u) \circ \Psi) \cdot D\Psi$$

in $L^1(\Omega_1')$, da die Konvergenz punktweise fast überall in Ω_1' und ∇u auf Ω_2' und $D\Psi_\epsilon$ auf Ω_1' beschränkt sind. Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,1}(\Omega_1')$ und die linke Gleichung von (3.20) Nun gilt für lebesguemeßbares $A \subseteq \Omega_2$

$$\mu(\Psi^{-1}(A)) \leq (\operatorname{lip}_{\Omega_2} \Psi^{-1})^n \mu(A) \qquad \text{also} \qquad \int_{\Omega_1} v \circ \Psi \, d\mu \leq \Lambda^n \int_{\Omega_2} v \, d\mu$$

für $v \in L^1(\Omega_2)$ mit $v \geq 0$. Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ und

$$\|u \circ \Psi\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C(\Lambda, n)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_2)}. \tag{3.21}$$

Ist schließlich $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$ so existieren mit Proposition 3.21 $u_m \in C^\infty(\Omega_2)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega_2)$ und punktweise fast überall. Aus (3.21) folgt, dass $u_m \circ \Psi$ in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega_1)$ konvergiert. Andererseits konvergiert $u_m \to u$ und $\nabla u_m \to \nabla u$ fast überall auf Ω_2, z.B. auf $\Omega_2 - N$ mit $\mu(N) = 0$. Da $\mu(\Psi^{-1}(N)) = 0$, da Ψ^{-1} lipschitzstetig ist, konvergiert $u_m \circ \Psi \to u \circ \Psi$ und $(\nabla u_m) \circ \Psi \to (\nabla u) \circ \Psi$ fast überall auf Ω_1. Daraus folgt $u \circ \Psi \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega_1)$, und die linke Gleichung von (3.20) aus der entsprechenden Gleichung für $u_m \in C^\infty(\Omega_2)$. Aus (3.21) für u_m folgt $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$ und (3.20). **q.e.d.**

Als nächstes setzen wir Funktionen über einen genügend glatten Rand hinweg fort.

Fortsetzungssatz 3.29. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{k-1,1}, k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert für jedes $\Omega' \Supset \Omega$ ein Fortsetzungsoperator $E : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}_0(\Omega')$ mit*

$$Eu|_\Omega = u \quad \text{und} \quad \|Eu\|_{W^{l,q}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', n, k)\|u\|_{W^{l,q}(\Omega)} \quad \forall\, 0 \leq l \leq k,\ 1 \leq q \leq p.$$

Beweis: Für $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ definieren wir einen Fortsetzungsoperator

$$E_0 : W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \qquad (E_0 u)(y, t) := \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i u(y, -it) \text{ für } t < 0,$$

wobei die σ_i so gewählt sind, dass $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i(-i)^m = 1$ für $m = 0, \ldots, k$ gilt. Damit folgt $E_0 u \in C^k_0(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ aus $u \in C^\infty_0(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Und mit Proposition 3.24 folgt auch $E_0 u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ aus $u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n_+)$ und

$$\|E_0 u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, k)\|u\|_{W^{k,p}}(\mathbb{R}^n_+).$$

Da $C^\infty_0(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ gemäß Proposition 3.21 in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$ dicht liegt bzw. mit Proposition 3.24 $C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n_+) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ gilt, setzt sich E_0 stetig auf $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ fort.

Da $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$ kompakt ist, können wir endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in \partial\Omega$ mit Umgebungen $x_j \in U_j \Subset \Omega'$ und bi $-C^{k-1,1}$-Abbildungen Ψ_j wählen, die nach einer Rotation

$$\begin{aligned}
&\Psi_j(y, t) := \lambda_j^{-1}((y, t - \varphi_j(y)) - x_j) \qquad \Psi_j^{-1}(y, t) := \lambda_j(y, t) + \phi_j(y) + x_j \quad \text{mit} \\
&\qquad \lambda_j > 0, \qquad \varphi_j \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^{n-1}) \qquad\qquad \text{und} \\
&\Psi_j : U_j \cong B(0, 1), \qquad \Psi_j(x_j) = 0, \qquad \Psi_j(U_j \cap \Omega) = B(0, 1) \cap \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}$$

und $\partial\Omega \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_N \Subset \Omega'$ erfüllen. Dazu wählen wir eine offene Teilmenge $U_0 \Subset \Omega$ mit $\bar{\Omega} \subseteq U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_N \Subset \Omega'$ und eine entsprechende Zerlegung der Eins

$$\eta_j \in C^\infty_0(U_j) \qquad 0 \leq \eta_j \leq 1 \qquad \text{für } j = 0, \ldots, N \qquad \text{mit } \sum_{j=0}^{N} \eta_j \equiv 1 \text{ auf } \bar{\Omega}. \tag{3.22}$$

Damit definieren wir für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ als $\qquad E_j u := E_0\left((\eta_j u) \circ \Psi_j^{-1}\right) \circ \Psi_j.$

Aus Propositionen 3.24 und 3.28 folgt $\Psi_j \in C^{k-1,1}(U_j) \subseteq W^{k,\infty}(U_j)$ und

$$E_j u \in W^{k,p}(\Omega') \qquad \text{mit} \qquad \|E_j u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C(\eta_j, \Psi_j, U_j, n, k)\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \tag{3.23}$$

Da $\operatorname{supp}(\eta_j) \Subset U_j$ folgt $\operatorname{supp}(E_j u) \Subset U_j \Subset \Omega'$ aus der Definiton von E_0, also $E_j u \in W_0^{k,p}(\Omega')$ aus der Proposition 3.21. Weiter gilt $E_j u|_\Omega = \eta_j u$. Schließlich setzen wir

$$Eu := \eta_0 u + \sum_{j=1}^N E_j u \in W_0^{k,p}(\Omega'),$$

Aus (3.22) und $E_j u|_\Omega = \eta_j u$ folgt $\quad E|_\Omega = \eta_0 u + \sum_{j=1}^N E_j u|_\Omega = \eta_0 u + \sum_{j=1}^n \eta_j u = u.$ **q.e.d.**

Damit können wir die Approximation aus Proposition 3.21 verschärfen.

Approximationssatz 3.30. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann existieren $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweis: Für ein $\Omega' \Supset \Omega$ betrachten wir den Fortsetzungsoperator aus Satz 3.29

$$E : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,p}(\Omega').$$

Wir wählen $v_m \in C_0^\infty(\Omega')$ mit $v_m \to Eu$ in $W^{k,p}(\Omega')$. Für $u_m := v_m|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ folgt

$$u_m = v_m|_\Omega \to Eu|_\Omega = u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 3.31. *Zeige mit den folgenden Aussagen, dass $f_1, \ldots, f_n \in C^{0,1}(\Omega)$ auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ den Divergenzsatz erfüllt.*

(i) *Für $f \in W_0^{1,\infty}(B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M, M))$ und $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\varrho))$ definieren wir*

$$\int\limits_{\{(y,\varphi(y))|y\in B^{n-1}(0,\varrho)\}} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{B^{n-1}(0,\varrho)} f(y,\varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi(y), -1)\,\mathrm{d}^{n-1}y.$$

Für $\partial\Omega \in C^1$ stimmt das entsprechende $\int_{\partial\Omega} f \cdot N \,\mathrm{d}\sigma$ mit Definition 1.5 überein.

(ii) *Zeige für $f_1, \ldots, f_n \in C_0^\infty(B^{n-1}(0,\varrho) \times (-M, M))$ und $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0,\varrho))$*

$$\int\limits_{B^{n-1}(0,\varrho)} \int\limits_{\varphi(y)}^{M} \nabla \cdot f(y,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^{n-1}y = \int\limits_{B^{n-1}(0,\varrho)} f(y,\varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi(y), -1)\,\mathrm{d}^{n-1}y.$$

Folgende Proposition stellt den Zusammenhang zwischen Randwerten und $W_0^{1,p}$ her.

Proposition 3.32. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, und $1 \le p < \infty$. Ein $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ gehört genau dann zu $W_0^{1,p}(\Omega)$, wenn u auf $\partial\Omega$ verschwindet.*

Beweis*: $(\Rightarrow)$: Es sei $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Falls $\sup_{\partial\Omega} |u| > 0$, so existiert $x_0 \in \partial\Omega$ mit einer Umgebung $U(x_0)$, so dass o.B.d.A. $u \ge \epsilon$ in $U(x_0)$, also $\min(u,\epsilon) = \epsilon$ in $U(x_0)$ gilt. Wegen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ exisitiert $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $u_m \to u$ und $\nabla u_m \to \nabla u$ punktweise fast überall. Es gilt $\min(u_m,\epsilon) \to \min(u,\epsilon)$ in $L^p(\Omega)$, und mit Proposition 3.27 gilt $\min(u_m,\epsilon) \in W^{1,p}(\Omega)$, $\nabla \min(u_m,\epsilon) \to \chi_{[u<\epsilon]}\nabla u$ punktweise fast überall, $\nabla \min(u_m,\epsilon)| \le |\nabla u_m|$, also $\min(u_m,\epsilon) \to \min(u,\epsilon)$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Für $\varphi \in C_0^1(U(x_0),\mathbb{R}^n)$ rechnen wir mit $\min(u_m,\epsilon) \in C_0^{0,1}(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} \epsilon\varphi \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \nabla \cdot ((\min(u,\epsilon)\varphi) \,\mathrm{d}\mu \leftarrow \int_\Omega \nabla \cdot ((\min(u_m,\epsilon)\varphi) \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Auf $\partial\Omega \in C^{0,1}$ gilt dies nicht für alle $\varphi \in C_0^1(U(x_0),\mathbb{R}^n)$. Also folgt $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$.
$(\Leftarrow)$: Es sei $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Für $u_\epsilon := \max(u,\epsilon) - \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ gilt $\mathrm{supp}(u_\epsilon) \Subset \Omega$, $u_\epsilon \to u_+$ in $L^p(\Omega)$, und mit Proposition 3.27 gilt weiter $u_\epsilon \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\nabla u_\epsilon = \chi_{[u>\epsilon]}\nabla u \to \chi_{[u>0]}\nabla u \text{ punktweise fast überall, und} \qquad |\nabla u_\epsilon| \le \chi_{[u>0]}|\nabla u|,$$

also $u_\epsilon + u_+$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Mit Proposition 3.21 ergibt sich $u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, also $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Genauso folgt $(-u)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und schließlich $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. **q.e.d.**

Dies legt folgende Definition nahe.

Definition 3.33. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ offen und $1 \le p < \infty$. Wir sagen $u \in W^{1,p}(\Omega)$ hat Nullrandwerte auf Γ in $W^{1,p}(\Omega)$, geschrieben $u = 0$ auf Γ, wenn $u\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für alle $\eta \in C_0^1(\Omega\cup\Gamma)$. Wir sagen $v \in W^{1,p}(\Omega)$ hat die gleichen Randwerte wie u, falls $u - v = 0$ auf Γ. Die Randwerte bleiben unter Konvergenz erhalten.*

Proposition 3.34*. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ offen $1 \le p < \infty$. Dann ist*

$$V := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma\} \subseteq W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{ein abgeschlossener Unterraum.}$$

Beweis*: Klarerweise ist V ein Unterraum. Nun sei $u_m \in V$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für $\eta \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma)$ gilt $\eta u_m \to \eta u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Da $\eta u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ abgeschlossen ist, folgt $\eta u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $u = 0$ auf Γ, also $u \in V$. **q.e.d.**

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $\Omega_\pm := \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \pm(0,\infty)$ und $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Approximationen können mit Erhaltung von Nullrandwerte durchgeführt werden.

Proposition 3.35*. *Sei $u \in W^{1,p}(B(0,1)_+), 1 \le p < \infty$ mit $u = 0$ auf $B(0,1)_0$. Dann existieren $u_m \in C^\infty(\overline{B(0,1)_+})$ mit $u_m = 0$ auf $B(0,1)_0$ und $u_m \to u$ in $W^{1,p}(B(0,1)_+)$.*

Beweis*: Wir setzen $u(y,t) = 0$ für $t < 0$ und $\Omega := B(0,1) \cup \mathbb{R}^n_-$. Nach Definition 3.33 gilt $u\eta \in W^{1,p}_0(B(0,1)_+)$ für $\eta \in C^1_0(\Omega)$. Durch Approximation mit $u_m \in C^\infty_0(B(0,1)_+)$ folgt

$$0 = \int_{B(0,1)_+} \nabla(u\eta)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u\nabla\eta\,\mathrm{d}\mu + \int_{B(0,1)_+} \nabla u\eta\,\mathrm{d}\mu,$$

also $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wir setzen $u_h(y,t) := u(y,t-h)$ für $h > 0$ und $(y,t) \in \Omega_h := \Omega + he_n$ und wählen h für gegebenes $\delta > 0$ so, dass $\|u_h - u\|_{W^{1,p}(B(0,1)_+)} < \delta$ gilt. Da $B(0,1)_+ \Subset \Omega_h$, konvergiert die Faltung $u_{h,\epsilon} \in C^\infty(\overline{B(0,1)_+})$ nach Proposition 3.21 $u_{h,\epsilon} \to u_h$ in $W^{1,p}(B(0,1)_+)$, also $\|u_{h,\epsilon} - u_h\|_{W^{1,p}(B(0,1)_+)} < \delta$ für ϵ hinreichend klein. Für $\epsilon < h$ gilt $u_{h,\epsilon} = 0$ auf $B(0,1)_0$. Wählen wir $\delta_m \downarrow 0$, so erhalten wir die gewünschte Folge. **q.e.d.**

Wir setzen eine Funktion $u : B(0,1)_+ \to \mathbb{R}$ folgendermaßen auf $B(0,1)$ fort:

$$E_{\pm,0}u(y,t) := \begin{cases} u(y,t) & \text{falls } t > 0, \\ \{\pm, 0\}u(y,-t) & \text{falls } t < 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Proposition 3.36*. *Für $u \in W^{1,p}(B(0,1)_+), 1 \le p < \infty$ gilt $E_+u \in W^{1,p}(B(0,1))$ und, falls $u = 0$ auf $B(0,1)_0$, gilt weiter $E_0u \in W^{1,p}(B(0,1))$ und $E_-u \in W^{1,p}(B(0,1))$.*

Beweis*: Mir Proposition 3.30 und 3.35 existieren $u_m \in C^\infty(\overline{B(0,1)_+})$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(B(0,1)_+)$, und, falls $u = 0$ auf $B(0,1)_0$, so gilt weiter $u_m = 0$ auf $B(0,1)_0$. Dies ergibt $E_{\pm,0}u_m \in C^{0,1}(B(0,1)) \subseteq W^{1,p}(B(0,1))$,

$$\|\nabla E_{\pm,0}u_m\|_{L^p(B(0,1))} \le 2^{1/p}\|\nabla u_m\|_{L^p(B(0,1)_+)} \le C$$

und $E_{\pm,0}u_m \to E_{\pm,0}u$ in $L^p(B(0,1))$. Daraus folgt $E_{\pm,0}u \in W^{1,p}(B(0,1))$. **q.e.d.**

Bei zwei schwachen Ableitungen übertragen sich Nullrandwerte auf Ableitungen.

Proposition 3.37*. *Für $u \in W^{2,p}(B(0,1)_+), 1 \le p < \infty$ mit $u = 0$ auf $B(0,1)_0$ gilt*

$$\partial_l u = 0 \text{ auf } B(0,1)_0 \qquad \text{für} \qquad l = 1, \ldots, n-1.$$

Beweis*: Für $0 < \delta < 1/2$ wählen wir $B(0,1-\delta)_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0,1)_+$ mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und betrachten den Fortsetzungsoperator $E : W^{2,p}(\Omega_0) \to W^{2,p}_0(\mathbb{R}^n)$ aus Satz 3.29. Mit Proposition 3.22 folgt $\partial^h_l Eu \to \partial_l Eu$ in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{1,p}(B(0,1-\delta)_+)$. Da $\partial^h_l Eu = \partial^h_l u$ in $B(0,1-2\delta)_+$ für $0 < |h| < \delta$, folgt $\partial^h_l u \to \partial_l u$ in $W^{1,p}(B(0,1-2\delta)_+)$. Nun gilt $\partial^h_l u = 0$ auf $B(0,1-2\delta)_0$, und die Behauptung folgt aus Proposition 3.34 **q.e.d.**

Wir setzen Funktionen mit zwei schwachen Ableitungen ungerade duch E_- fort.

Proposition 3.38*. *Für $u \in W^{2,p}(B(0,1)_+), 1 \le p > \infty$ mit $u = 0$ auf $B(0,1)_0$ gilt*

$$E_-u \in W^{2,p}(B(0,1)).$$

Beweis*: Proposition 3.36 und 3.37 ergeben $\partial_l(E_-u) = E_-(\partial_l u) \in W^{1,p}(B(0))$ für $l \neq n$ und $\partial_n(E_-u) = E_+(\partial_n u) \in W^{1,p}(B(0,1))$, also $E_-u \in W^{2,p}(B(0,1))$. **q.e.d.**

3.4 Einbettungsätze für Soboleväume

Wir beginnen mit dem Satz von Rellich.

Satz vom Rellich 3.39. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist folgende Einbettung kompakt:* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Beweis: Für $p = \infty$ folgt aus den Propositionen 3.10 und 3.24 die Kompaktheit von

$$W^{1,\infty}(\Omega) \cong C^{0,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Für $1 \leq p < \infty$ betrachten wir eine beschränkte Folge u_m in $W^{1,p}(\Omega)$. Mit dem Fortsetzungsoperator E aus Fortsetzungssatz 3.29 für $B(0,R) \Supset \Omega$ folgt $Eu_m \in W_0^{1,p}(B(0,R))$. Wir können also o.B.d.A. $u_m \in W_0^{1,p}(B(0,R))$ mit $\|u_m\|_{W^{1,p}(B(0,R)} \leq C$ annehmen.

Für die Faltung 3.10 $u_{m,\epsilon}$ eines u_m gilt wegen $\lambda_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\lambda(\frac{x}{\epsilon})$ und (3.8)

$$\begin{aligned} |u_{m,\epsilon}(x)| &= \left|\int \lambda_\epsilon(x-y)u_m(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\right| &&\leq \frac{\|\lambda\|_{L^\infty(B(0,1))}}{\epsilon^n}\|u_m\|_{L^1(B(0,R))} &&\leq \frac{C'}{\epsilon^n} \\ |\nabla u_{m,\epsilon}(x)| &= \left|\int \nabla\lambda_\epsilon(x-y)u_m(y)\,\mathrm{d}^\mathrm{n}y\right| &&\leq \frac{\|\nabla\lambda\|_{L^\infty(B(0,1))}}{\epsilon^{n+1}}\|u_m\|_{L^1(B(0,R))} &&\leq \frac{C''}{\epsilon^{n+1}}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Weiter gilt mit (3.12) $\|u - u_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sup\limits_{|h|<\epsilon} \|u(.+h) - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ und

$$\|u(.+h) - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int |u(x+h) - u(x)|^p\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x \leq \int \left(\int_0^1 |h\cdot\nabla u(x+th)|\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}^\mathrm{n}x$$

$$\leq \int\int_0^1 |h\cdot\nabla u(x+th)|^p\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x \leq |h|^p \int_0^1\int |\nabla u(x+th)|^p\,\mathrm{d}^\mathrm{n}x\,\mathrm{d}t = |h|^p\|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Zusammen ergibt dies

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.26}$$

Wegen (3.25) und dem Satz von Arzela-Ascoli können wir induktiv für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder u_m zu $m \geq j$ durch eine Teilfolge von $(u_m)_{m\geq j}$ ersetzen, so dass $u_{m,j} := u_{m,\epsilon_j}$ mit $\epsilon_j = \frac{1}{j}$ gleichmäßig auf $B(0,R)$ und somit in $L^p(B(0,R))$ konvergiert: $\limsup\limits_{m,l\to\infty} \|u_{m,j} - u_{l,j}\|_{L^p(B(0,R))} = 0$. Mit (3.26) folgt $\limsup\limits_{m,l\to\infty} \|u_m - u_l\|_{L^p(B(0,R))} \leq 2C\epsilon_j$. Der Grenzwert $j \to \infty$ zeigt, dass u_m in $L^p(B(0,R))$ eine Cauchyfolge ist. **q.e.d.**

Mit dem Satz von Rellich erhalten wir eine Poincaréungleichung.

Poincaréungleichung 3.40. *Es sei* $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ *offen, zusammenhängend mit* $\partial\Omega \in C^{0,1}, 1 \leq p \leq \infty$, *und* $M \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ *ein abgeschlossener Kegel, d.h. mit* $u \in M$ *folgt* $\lambda u \in M$ *für* $\lambda > 0$, *der außer* $0 \in M$ *keine Konstanten enthält. Dann gilt*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \textit{für ein } C > 0 \textit{ und für alle } u \in M.$$

Beweis: Angenommen die Gleichung ist falsch, dann existieren $u_m \in M$ mit

$$\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} < \tfrac{1}{m}\|u_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Nach Übergang zu $\frac{u_m}{\|u_m\|_{L^p(\Omega)}} \in M$ können wir weiter $\|u_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$ annehmen, und u_m ist beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach dem Satz von Rellich konvergiert für eine Teilfolge $u_m \to u$ in $L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Andererseits konvergiert wegen obiger Ungleichung $\nabla u_m \to 0$ in $L^p(\Omega)$ und daher $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Also ist $u \in M$ mit $\nabla u = 0$, und nach Proposition 3.20 ist $u \equiv \text{const}$, also nach der Vorraussetzung $u = 0$. Dies widerspricht $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$, und die Ungleichung ist bewiesen. **q.e.d.**

Die Kombination des Satzes von Rellich mit dem Lemma von Ehrling 3.3, ergibt das

Interpolationslemma für Sobolevräume 3.41. *Für* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$ *gilt*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|u\|^{1/2}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|D^2 u\|^{1/2}_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *und* $2 \leq p \leq \infty$ *gilt für* $0 < \epsilon < 1$

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon\|D^2 u\|_{L^p(\Omega)} + C(\Omega,n,p)\epsilon^{-1}\|u\|_{L^p(\Omega)}$$

Beweis: Sei Q_ϱ ein offener Würfel mit Seitenlänge ϱ. Die Einbettungen

$$W^{2,p}(Q_1) \hookrightarrow W^{1,p}(Q_1) \hookrightarrow L^p(Q_1)$$

sind wegen dem Satz von Rellich 3.39 kompakt. Mit dem Lemma von Ehrling 3.3 folgt

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} &\leq \tfrac{1}{2}\|u\|_{W^{2,p}(Q_1)} + \tfrac{1}{2}\tilde{C}(n,p)\|u\|_{L^p(Q_1)} \leq \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} + \tfrac{1}{2}\|D^2 u\|_{L^p(Q_1)} + \tfrac{1}{2}\tilde{C}(n,p)\|u\|_{L^p(Q_1)} \text{ für } u \in W^{2,p}(Q_1), \qquad \text{also}\end{aligned}$$

$$\|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} \leq D^2 u\|_{L^p(Q_1)} + \tilde{C}(n,p)\|u\|_{L^p(Q_1)}.$$

Für $\varrho > 0$ und $u \in W^{2,p}(Q_\varrho)$, reskalieren wir $v(x) := u(\varrho x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^p(Q_\varrho)} &= \varrho^{-1+\frac{n}{p}}\|\nabla v\|_{L^p(Q_1)} \leq \varrho^{-1+\frac{n}{p}}\|D^2 v\|_{L^p(Q_1)} + \tilde{C}(n,p)\varrho^{-1+\frac{n}{p}}\|u\|_{L^p(Q_1)} \\ &= \varrho\|D^2 u\|_{L^p(Q_\varrho)} + \tilde{C}(n,p)\varrho^{-1}\|u\|_{L^p(Q_\varrho)}.\end{aligned}$$

Wir überdecken $\mathbb{R}^n$ bis auf eine Nullmenge N durch abzählbar viele disjunkte Würfel der Seitenlänge ϱ: $\mathbb{R}^n \setminus N = \bigcup_{i=1}^\infty Q^i_\varrho$. Für $a, b \geq 0$ gilt $(\frac{a+b}{2})^p \leq \frac{a^p+b^p}{2} \leq \max^p\{a,b\} \leq (a+b)^p$ wegen der Konvexität von $x \to x^p$. Für $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq p < \infty$ folgt

$$\|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^\infty \|\nabla u\|^p_{L^p(Q^i_\varrho)} \leq 2^{p-1} \sum_{i=1}^\infty \Big(\varrho^p \|D^2 u\|^p_{L^p(Q^i_\varrho)} + \tilde{C}(n,p) \varrho^{-p} \|u\|^p_{L^p(Q^i_\varrho)} \Big)$$
$$= \tfrac{1}{2}(2\varrho\|D^2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^p + \tfrac{\tilde{C}(n,p)}{2}(\tfrac{2}{\varrho}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^p \leq \Big(2\varrho\|D^2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \tfrac{4\tilde{C}^{1/p}(n,p)}{2\varrho}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^p,$$

also $\quad \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varrho\|D^2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 4\tilde{C}^{1/p}(n,p)\varrho^{-1}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad$ für alle $\varrho > 0$. $\quad$ (3.27)

Für $p = \infty$ erhalten wir $\quad \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|\nabla u\|_{L^\infty(Q^i_\varrho)} \leq$

$$\leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \Big(\varrho\|D^2u\|_{L^\infty(Q^i_\varrho)} + C(n)\varrho^{-1}\|u\|_{L^\infty(Q^i_\varrho)} \Big) = \varrho\|D^2u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C(n)\varrho^{-1}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

also wieder (3.27). Für $\epsilon > 0$ setzen wir $\quad \varrho := \sqrt{\dfrac{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon}{\|D^2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon}} > 0 \quad$ und erhalten

$$\|\nabla u\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)(\|D^2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon)(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon)$$

aus (3.27). Im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$ folgt die erste Behauptung.

Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$ und $1 \leq p \leq \infty$ betrachten wir den Fortsetzungsoperator $E : W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{2,p}_0(\mathbb{R}^n)$ aus Satz 3.29 und erhalten für $u \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|Eu\|^{1/2}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|D^2Eu\|^{1/2}_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C(\Omega,n,p)\|u\|^{1/2}_{L^p(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \epsilon\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} + C'(\Omega,n,p)\epsilon^{-1}\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq \epsilon\|D^2u\|_{L^p(\Omega)} + \epsilon\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + C''(\Omega,n,p)\epsilon^{-1}\|u\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

also nach Absorption des Termes $\epsilon\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ die Behauptung. **q.e.d.**

Wir zeigen jetzt, dass Sobolevfunktionen höhere Integrabilität besitzen.

Sobolevungleichung 3.42. *Es sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < n$. Dann gilt*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{für } p^* := \tfrac{np}{n-p} \qquad \text{d.h. } 1 - \tfrac{n}{p} = -\tfrac{n}{p^*}.$$

Beweis: Zuerst sei $p = 1, p^* = \frac{n}{n-1}$ und $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}t_i, \qquad \text{also}$$

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_i \qquad \text{und}$$

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \Big(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_i \Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Nun integrieren wir bezüglich x_1. Dies ergibt mit (3.9) $\int\limits_{\mathbb{R}} |u(x_1,\ldots,x_n)|^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}x_1 \leq$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t_1,x_2,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_i\right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t_1,x_2,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1,\ldots,t_i,\ldots,x_n)|\,\mathrm{d}t_i\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Sukzessive Integration über $x_2,\ldots,x_n$ ergibt $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{n}{n-1}}$, also

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.28}$$

Für $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ gibt es nach Proposition 3.21 $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ mit $u_j \to u$ in $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Mit (3.28) folgt daraus

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_j|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.29}$$

Im Fall $1 < p < n$ setzen wir $v = |u|^\gamma$ für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\gamma > 1$. Mit (3.29) gilt

$$\|u\|^\gamma_{L^{\frac{n\gamma}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\,\mathrm{d}\mu \leq \gamma \|u\|^{\gamma-1}_{L^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Wir wählen γ so, dass $\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{p(\gamma-1)}{p-1}$ bzw. $\frac{p-1}{p}\gamma = \frac{n-1}{n}(\gamma-1)$, also $\left(\frac{p-1}{p} - \frac{n-1}{n}\right)\gamma = -\frac{n-1}{n}$ und $\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}} = \frac{np}{n-p} = p^*$. Dies ergibt $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
Für allgemeine $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt dies mit Proposition 3.21 wie oben. **q.e.d.**

Soboleveinbettungssatz 3.43. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, und $1 \leq p, q < \infty$ sind folgende Einbettungen stetig und bei strikten Ungleichungen kompakt:*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega) \qquad \textit{für} \qquad k \geq l \qquad \textit{und} \qquad k - \tfrac{n}{p} \geq l - \tfrac{n}{q}. \tag{3.30}$$

Beweis: Zuerst betrachten wir den Spezialfall $k = 1, l = 0, 1 \leq p < n, 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$. Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt mit dem Fortsetzungsoperator E aus Satz 3.29,

$$Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

und mit der Sobolevungleichung 3.42 und

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|\nabla Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega,n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Aus $-\frac{n}{p^*} = 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$ folgt $1 \leq q \leq p^*$. Wegen (3.8) ist $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ stetig. Gilt die strikte Ungleichung in (3.30), also $1 \leq q < p^*$, und ist u_m beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$, so ist u_m nach dem Gezeigten beschränkt in $L^{p^*}(\Omega)$, und nach dem Satz von Rellich 3.39 konvergiert eine Teilfolge u_m in $L^p(\Omega)$ gegen u. Für $1 \leq q \leq p$ folgt der Spezialfall aus (3.8). Für $p < q < p^*$ und $M > 0$ folgt $\limsup_{m\to\infty} \|u_m - u\|^q_{L^q(\Omega)} =$

$$= \limsup_{m\to\infty} \left(\|(u_m - u)\chi_{[|u_m-u|\leq M]}\|^q_{L^q(\Omega)} + \|(u_m - u)\chi_{[|u_m-u|>M]}\|^q_{L^q(\Omega)} \right)$$

$$\leq M^{q-p} \limsup_{m\to\infty} \|u_m - u\|^p_{L^p(\Omega)} + M^{-p^*(1-\frac{q}{p^*})} \limsup_{m\to\infty} \|u_m - u\|^{q+p^*(1-\frac{q}{p^*})}_{L^{p^*}(\Omega)} \leq M^{q-p^*}(2C)^{p^*},$$

weil $|u_m - u|^q \leq M^{q-p}|u_m - u|^p$ auf $[|u_m - u| \leq M]$ gilt, und wegen (3.8) zusammen mit $\mu([|u_m - u| > M])M^{p^*} \leq \|u_m - u\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)}$. Im Grenzwert $M \to \infty$ folgt der Spezialfall.

Die allgemeine Aussage beweisen wir mit Induktion in $k - l \in \mathbb{N}_0$. Für $k = l$ gilt $1 \leq q \leq p$ und die Aussage folgt mit (3.8) aus der Stetigkeit von $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Nun sei $k = l + 1$. Dann gilt $1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$. Da $q < \infty$, gilt $-\frac{n}{q} < 0$, und wir können o.B.d.A. $1 \leq p < n$ annehmen. Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $|\gamma| \leq l$ ist $\partial^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega)$, und

$$\|\partial^\gamma u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p)\|\partial^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p)\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

folgt aus dem Gezeigtem. Dann ist $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$ stetig. Für strikte Ungleichheit in (3.30) und u_m beschränkt in $W^{k,p}(\Omega)$ ist $\partial^\gamma u_m$ für $|\gamma| \leq l$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$. Mit dem Spezialfall konvergiert eine Teilfolge $\partial^\gamma u_m$ in $L^q(\Omega)$, also u_m in $W^{l,q}(\Omega)$.

Schließlich sei $k \geq l + 2$. Ist $p \geq n$, so gilt $k - \frac{n}{p} > (k - 1) - \frac{n}{n} \geq l > l - \frac{n}{q}$ und per Induktion ist die folgende Einbettung kompakt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega).$$

Ist $1 \leq p < n$, so gilt $\quad k - \frac{n}{p} = (k - 1) - \frac{n}{p^*} \geq l - \frac{n}{q}, \qquad (3.31)$

und per Induktion ist die Einbettung $\quad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega) \qquad (3.32)$

stetig. Ist die Ungleichung in (3.30) strikt, dann auch in (3.31), und per Induktion ist die zweite Einbettung in (3.32) kompakt, also auch die Einbettung (3.30). **q.e.d.**

Bemerkung 3.44. *Im kritischen Fall $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{\infty} := 0$, also $p = n$, gilt für $n \geq 2$ $W^{1,n}(\Omega) \not\subseteq L^\infty(\Omega)$. Dazu betrachten wir auf $B(0, 1)$*

$$u(x) := \ln(1 + |\ln |x||).$$

Klarerweise gilt $u \notin L^\infty(B(0, 1))$. Weiter gilt $u \in W^{1,n}(B(0, 1))$ für $n \geq 2$ wegen

$$|\nabla u(x)| = \frac{1}{|x|(1 + |\ln |x||)} \quad \|\nabla u\|^n_{L^n(B(0,1))} = \int_0^1 \frac{n\omega_n r^{n-1}\,\mathrm{d}r}{r^n(1 - \ln r)^n} = \int_0^\infty \frac{n\omega_n\,\mathrm{d}t}{(1 + t)^n} = \frac{n\omega_n}{n - 1}.$$

Nun betten wir Sobolevräumen in Hölderräume ein. Dazu folgende Abschätzung:

Lemma 3.45. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ konvex, $S \subseteq \Omega$ meßbar mit $\mu(S) > 0$ und $u \in W^{1,1}(\Omega)$ gilt*

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{\operatorname{diam}^n(\Omega)}{n \cdot \mu(S)} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \text{ a.e. in } \Omega \text{ mit } \quad u_S = \frac{1}{\mu(S)} \int_S u \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis: Sei $d = \operatorname{diam} \Omega$. Mit Approximation von u durch glatte Funktionen wie in Proposition 3.21 erhalten wir fast überall auf $x \neq y \in \Omega$ mit $\omega = \frac{y-x}{|y-x|}$

$$u(x) - u(y) = -\int_0^{|x-y|} \nabla u(x + r\omega)\omega \,\mathrm{d}r.$$

Integration von y über S ergibt $\quad \mu(S)|u(x) - u_S| \leq \int_S \int_0^{|x-y|} |\nabla u(x+r\omega)| \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y$

$$\leq \int_{B(x,d)} \int_0^d |\nabla u(x+r\omega)| \chi_\Omega(x+r\omega) \,\mathrm{d}r \mathrm{d}^\mathrm{n} y = \int_0^d \int_0^d \int_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x+r\omega)| \chi_\Omega(x+r\omega) \mathrm{d}\omega s^{n-1} \mathrm{d}s \mathrm{d}r$$

$$= \frac{d^n}{n} \int_0^d \int_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x+r\omega)| \chi_\Omega(x+r\omega) \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}r = \frac{d^n}{n} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Nun kommen wir zum Einbettunbgssatz in Hölderräume.

Satz von Morrey 3.46. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $k > l \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq \infty$ und $0 < \alpha < 1$ sind folgende Einbettungen stetig und bei strikter Ungleichung kompakt:*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega) \qquad \text{mit} \qquad k - \tfrac{n}{p} \geq l + \alpha. \tag{3.33}$$

Beweis: Die Kompaktheit der Einbettungen ergibt sich sofort aus der Stetigkeit der Einbettungen und Proposition 3.10: Gilt in (3.33) die strikte Ungleichung, so wählen wir $0 < \beta < 1$ mit $k - \frac{n}{p} > l + \beta > l + \alpha$, und erhalten die stetige Einbettungen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta} \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega).$$

Nach Proposition 3.10 ist die zweite Einbettung kompakt, also auch die Gesamteinbettung. Daher genügt es die Stetigkeit der Einbettungen zu beweisen.

Zuerst betrachten wir den Spezialfall $k = 1, l = 0, 1 - \frac{n}{p} = \alpha \in (0,1)$. Mit dem Fortsetzungsoperator E aus Satz 3.29 gilt für $B(0,R) \Supset \Omega$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$Eu \in W_0^{1,p}(B(0,R)) \qquad \|Eu\|_{W^{1,p}(B(0,R))} \leq C(\Omega, n, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Zum Beweis der Stetigkeit der Einbettung im Spezialfall genügt es folgendes zu zeigen:

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \text{ für alle } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.34}$$

Im Spezialfall gilt $n < p < \infty$ und deshalb $1 < q < \frac{n}{n-1}$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es folgt

$$\||x - \cdot|^{1-n}\|_{L^q(B(0,1))} \leq \left(\int_{B(0,2)} |y|^{q(1-n)} \,\mathrm{d}^n y\right)^{1/q} \leq C(n,p) \quad \text{für alle} \quad x \in B(0,1).$$

Mit Lemma 3.45 und der Hölderungleichung folgt für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\operatorname*{osc}_{B(0,1)} u := \sup_{x,y \in B(0,1)} u(x) - u(y) \leq 2\|u - u_{B(0,1)}\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B(0,1))}. \tag{3.35}$$

Durch Reskalieren $v(x) := u(z + \varrho x)$ erhalten wir für alle $B(z,\varrho) \subseteq \mathbb{R}^n$ wegen $1 - \frac{n}{p} = \alpha$

$$\operatorname*{osc}_{B(z,\varrho)} u := \sup_{x,y \in B(z,\varrho)} u(x) - u(y) = \operatorname*{osc}_{B(0,1)} v \leq C(n,p)\|\nabla v\|_{L^p(B(0,1)} = C(n,p)\varrho^\alpha\|\nabla u\|_{L^p(B(z,\varrho)},$$

Daraus folgt für $x \neq y \in \mathbb{R}^n$, $\varrho := \frac{|x-y|}{2}$, $z := \frac{x+y}{2}$, $x, y \in \overline{B(z,\varrho)}$, dass

$$|u(x) - u(y)| \leq \operatorname*{osc}_{B(z,\varrho)} u \leq C(n,p)\varrho^\alpha\|\nabla u\|_{L^p(B(z,\varrho))} \quad \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\, u \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Schließlich folgt aus (3.35) für beliebiges $B_1 = B(z,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq$

$$\leq \|u - u_{B_1}\|_{L^\infty(B_1)} + |u_{B_1}| \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B_1)} + C(n)\|u\|_{L^1(B_1)} \leq C'(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(B_1)}.$$

Damit ist (3.34) und der Spezialfall bewiesen.

Wenn $1 - \frac{n}{p} \geq \alpha$, ist für $\bar{\alpha} := 1 - \frac{n}{p} \in (0,1)$ die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\bar{\alpha}}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$$

mit dem eben Gezeigten und Proposition 3.10 stetig.

Die allgemeine Aussage beweisen wir mit Induktion in $k - l \in \mathbb{N}$. Für $k = l + 1$ gilt $1 - \frac{n}{p} \geq \alpha$. Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $|\gamma| \leq l$ gilt $\partial^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega)$, und wegen dem Gezeigten

$$\|\partial^\gamma u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p)\|\partial^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p)\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Also ist die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$ stetig.

Für $k \geq l + 2$ und $n \leq p$ gilt $k - \frac{n}{p} \geq (k-1) > l + \alpha$. Für großes $\bar{p} < \infty$ ist

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,\bar{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

wegen Satz 3.43 und durch Induktion eine kompakte Einbettung.

Für $k \geq l + 2$ und $1 \leq p < n$ gilt $k - \frac{n}{p} = (k-1) - \frac{n}{p^*} \geq l + \alpha$, und die Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

ist durch Induktion und mit dem Satz 3.43 stetig. **q.e.d.**

Kapitel 4

Apriori Abschätzungen für lineare Differentialgleichungen

4.1 Schwache Lösungen

Auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet $W_0^{1,2}(\Omega)^* \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ den Dualraum aller Distributionen, die sich stetig auf $W_0^{1,2}(\Omega) \supset C_0^\infty(\Omega)$ fortsetzen lassen. Dazu gehören alle Distributionen der Form $f + \nabla \cdot g$ mit $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Omega)^n$:

$$\langle f + \nabla \cdot g, v\rangle := \int_\Omega \left(fv - \sum\nolimits_{i=1}^n g_i \partial_i v \right) \mathrm{d}\mu \text{ für } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Definition 4.1. *Ein elliptischer Differentialoperator in Divergenzform auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist*

$$Lu := \sum\nolimits_{i=1}^n \left(\sum\nolimits_{j=1}^n \partial_i (a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_i \partial_i u \right) + du \qquad \textit{mit} \tag{4.1}$$

$$\sum\nolimits_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \qquad \textit{fast überall auf } x \in \Omega \textit{ und für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

$$\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda \tag{4.3}$$

für ein $1 < \Lambda < \infty$. Für $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ heißt $u \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von $Lu \leq f$ bzw. $Lu \geq f$, falls $-\mathcal{L}(u,v) \leq$ bzw. $\geq \langle f, v\rangle$ für alle $0 \leq v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt, mit

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \left(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u + b_i u \right) \partial_i v - \left(\sum\nolimits_{i=1}^n c_i \partial_i u + du \right) v \right) \mathrm{d}\mu.$$

$\mathcal{L}$ ist eine stetige Bilinearform auf $W_0^{1,2}(\Omega)$, da mit (4.3) folgendes gilt:

$$|\mathcal{L}(u,v)| \leq C(n)\Lambda \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{4.4}$$

Aus (4.2) und (4.3) folgt für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ die Gardingungleichung

$$\mathcal{L}(u,u) \geq \Lambda^{-1}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C(n)\Lambda\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} - \Lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq$$
$$\geq \tfrac{1}{2\Lambda}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C(n,\Lambda)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \tfrac{1}{4\Lambda}\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - C'(n,\Lambda)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad (4.5)$$

Wir erweitern das schwache Maximumprinzip 2.18 auf Operatoren in Divergenzform.

Schwaches Maximumprinzip 4.2. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (4.1)-(4.3) in Ω erfüllt und es gelte*

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n b_i\partial_i v - dv\Big)\,\mathrm{d}\mu \geq 0 \qquad \textit{für alle} \qquad 0 \leq v \in W^{1,1}_0(\Omega). \quad (4.6)$$

Dann gilt für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu \geq 0$

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid (u_+ - t)_+ \in W^{1,2}_0(\Omega)\}.$$

Beweis: Für $u \in W^{1,2}(\Omega), v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ gilt $uv \in W^{1,1}_0(\Omega)$ und (3.19). Dann folgt

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u\partial_i v - (c_i+b_i)\partial_i uv\Big)\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \Big(-\sum_{i=1}^n b_i\partial_i(uv) + duv\Big)\,\mathrm{d}\mu \leq 0$$

für alle $v \geq 0$ mit $uv \geq 0$ aus $Lu \geq 0$. Für $M := \sup_{\partial\Omega} u_+$ und $M \leq t$ erfüllt $v_t := (u-t)_+ = (u_+ - t)_+ \in W^{1,2}_0(\Omega)$ wegen Proposition 3.27 diese Bedingungen mit

$$\nabla v_t = \begin{cases} \nabla u & \text{fast überall auf } [u > t], \\ 0 & \text{fast überall auf } [u \leq t]. \end{cases}$$

Im Spezialfall $c_i + b_i = 0$ folgt $\nabla v_M \equiv 0$ und mit Proposition 3.32 $v_M \equiv 0$:

$$0 \leq \Lambda^{-1}\int_\Omega |\nabla v_M|^2\,\mathrm{d}\mu = \Lambda^{-1}\int_{[u>M]} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j u\partial_i v_M\,\mathrm{d}\mu \leq 0.$$

Falls die Behauptung im allgemeinen Fall nicht gilt, folgt für $M \leq t < \sup_\Omega u$ aus (4.3)

$$\Lambda^{-1}\int_\Omega |\nabla v_t|^2\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j u\partial_i v_t\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^n (c_i+b_i)\partial_i uv_t\,\mathrm{d}\mu \leq 2\Lambda\int_\Omega v_t|\nabla v_t|\,\mathrm{d}\mu$$
$$\leq 2\Lambda\|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega)}\|v_t\|_{L^2(\Gamma_t)} \text{ mit } \Gamma_t := [\nabla v_t \neq 0] = [\nabla u \neq 0] \cap [u > t].$$

Mit der Soboleveinbettung $W^{1,2}_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für ein $2 < q < \infty$, siehe Satz 3.43, und der Poincaréungleichung 3.40, da $v_t \in W^{1,2}_0(\Omega)$, erhalten wir für $\delta := \frac{1}{2} - \frac{1}{q} > 0$

$$\|v_t\|_{L^2(\Gamma_t)} \leq \mu^\delta(\Gamma_t)\|v_t\|_{L^q(\Omega)} \leq \mu^\delta(\Gamma_t)C(\Omega,n)\|v_t\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C'(\Omega,n)\mu^\delta(\Gamma_t)\|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega)}.$$

Falls $\nabla v_t \not\equiv 0$ folgt $\|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\Lambda^2 \|v_t\|_{L^2(\Gamma_t)}$ aus der vorletzten Ungleichung und $C\Lambda^{-\frac{2}{\delta}} \leq \mu(\Gamma_t)$ für alle $M < t < \sup_\Omega u$ aus der letzten. Für $t \nearrow \sup_\Omega u \leq \infty$ folgt $0 < \mu([\nabla u \neq 0] \cap [u = \sup_\Omega u])$. Wegen $u \in L^2(\Omega)$ gilt $\mu(u = \infty) = 0$, und es folgt zuerst $0 \leq M \leq \sup_\Omega u < +\infty$. Zweitens widerspricht das Proposition 3.27, gemäß der $\nabla u = 0$ fast überall auf $[u = \tau]$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen.**q.e.d.**

Also hat das Dirichletproblems unter der Bedingung (4.6) höchstens eine Lösung.

Existenz von schwachen Lösungen des Dirichletproblems 4.3. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein elliptischer Operator in Divergenzform, der auf Ω (4.1)–(4.3) und (4.6) erfüllt, $f \in W^{1,2}_0(\Omega)^*$ und $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ mit $u - \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Sie erfüllt die folgende Ungleichung:*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(n, L)(\|f\|_{W^{1,2}_0(\Omega)^*} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}).$$

Ist für eine Familie $\{L_m\}_{m\in M}$ solcher Operatoren $\{a_{i,j,m}, c_{i,m} \mid 1 \leq i, j \leq n, m \in M\}$ in $L^1(\Omega)$ kompakt, so existieren gleichmäßige obere Schranken $C(n, L_m) \leq C(n, \Lambda, K)$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar mit Satz 4.2. Als Distribution ist $Lu = f$ auf Ω äquivalent zu $L(u - \varphi) = \tilde{f}$, wobei $\tilde{f} \in W^{1,2}_0(\Omega)^*$ für $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ definiert ist durch

$$\langle \tilde{f}, v\rangle := \langle f, v\rangle + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j\varphi\partial_i v + b_i\varphi\partial_i v - c_i\partial_i\varphi v\right) - d\varphi v\right) \mathrm{d}\mu.$$

Deshalb können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wegen (4.4) definiert folgende Gleichung

$$\langle -Lu, v\rangle =: \mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u\partial_i v + b_i u\partial_i v - c_i\partial_i uv\right) - duv\right) \mathrm{d}\mu,$$

einen linearen Operator $L : W^{1,2}_0(\Omega) \to W^{1,2}_0(\Omega)^* \cong W^{1,2}_0(\Omega)$. Genauso definiert

$$\langle Ku, v\rangle := \int_\Omega uv \, \mathrm{d}\mu.$$

einen kompakten Operator $K : W^{1,2}_0(\Omega) \to W^{1,2}_0(\Omega)^* \cong W^{1,2}_0(\Omega)$, da $W^{1,2}_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ wegen dem Satz von Rellich 3.39 kompakt ist. Mit der Gardingungleichung (4.5) gilt

$$\langle(-L + C(n, \Lambda)K)u, u\rangle \geq c_0(\Lambda)\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \text{für alle} \qquad u \in W^{1,2}_0(\Omega).$$

Wegen dem Satz von Lax und Milgram 3.1 ist $-L + C(n, \Lambda)K$ ein Isomorphismus. Da L nach Satz 4.2 injektiv ist und K kompakt ist, ist L mit Lemma 3.4 auch ein Isomorphismus. Folglich existiert eine Lösung $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ von $Lu = f$. Weiter gilt

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \|L^{-1}\| \cdot \|f\|_{W^{1,2}_0(\Omega)^*}.$$

Die gleichmäßige Abschätzung von $C(n, L_n)$ folgt aus dem nächsten Lemma. **q.e.d.**

Lemma 4.4. *Seien $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und L_m, L elliptische Differentialoperatoren, die (4.1)–(4.3) auf Ω erfüllen. Konvergieren $a_{ij,m} \to a_{ij}$ und $c_{i,m} \to c_i$ fast überall auf Ω und $b_{i,m} \to b_i$ und $d_m \to d$ schwach in $L^2(\Omega)$, und erfüllt L (4.6), so existiert $C < \infty$ mit*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\|L_m u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \quad \textit{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega) \textit{ und für hinreichend großes } m.$$

Beweis: Angenommen, das Lemma ist falsch. Dann existieren $u_m \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\|f_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \leq \tfrac{1}{m}\|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \text{und} \qquad f_m := L_m u_m$$

Wir setzen $\|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$. In $W_0^{1,2}(\Omega)^*$ konvergiert $f_m \to 0$ stark. Mit (4.5) folgt

$$c_0(\Lambda)\|u_m\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - C(n,\Lambda)\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \langle -L_m u_m, u_m\rangle \leq \|f_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}\|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$
$$\text{also} \qquad \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(n,\Lambda)(\|f_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|u_m\|_{L^2(\Omega)}) \leq 2C(n,\Lambda)\|u_m\|_{L^2(\Omega)}$$

für $m \geq 2C(n,\Lambda)$. Wegen dem Satz von Rellich 3.39 konvergiert eine Teilfolge $u_m \to u$ stark in $L^2(\Omega)$, wegen dem Satz[1] von Banach und Alaoglu schwach in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Wegen Lebesgues beschränkter Konvergenz konvergieren $a_{ij,m} \to a_{ij}$ und $c_{i,m} \to c_i$ stark in $L^2(\Omega)$. Das Skalarprodukt von stark konvergenten mit schwach konvergenten Folgen in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Für $v \in C_0^1(\Omega)$ folgt $Lu = 0$ aus $\quad 0 \leftarrow \langle f_m, v\rangle = \langle L_m u_m, v\rangle =$

$$= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(-\sum_{j=1}^n a_{ij,m}\partial_j u_m \partial_i v - b_{i,m}u_m\partial_i v + c_{i,m}\partial_i u_m v\right) + d_m u_m v\right) \mathrm{d}\mu \to \langle Lu, v\rangle$$

schwach auf Ω. Da L (4.6) in Ω erfüllt, ergibt das Schwache Maximumprinzip 4.2 $u = 0$. Dies widerspricht $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leftarrow \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$, da $u_m \to u$ stark in $L^2(\Omega)$. **q.e.d.**

Eine innere Apriori Abschätzung ist die Caccioppoliungleichung.

Caccioppoliungleichung 4.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ und L erfülle (4.1)–(4.3) auf Ω. Auf $\Omega' \Subset \Omega$ erfüllt jede schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega')} \leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n)(\|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.7}$$

Beweis: Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\eta \equiv 1$ auf Ω' und $0 \leq \eta \leq 1$ und setzen $v := u\eta^2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann folgt gemäß Definition 4.1 und mit (4.2)

$$\int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i v \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{i=1}^n (-b_i u\partial_i v + c_i\partial_i u) + v + duv\right) \mathrm{d}\mu - \langle f, v\rangle, \quad \text{also}$$

[1] $\overline{B(0,R)} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ ist schwach folgenkompakt (Theorem III.3.7 in Werner:“Funktionalanalysis”).

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u\partial_i u\cdot\eta^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\le -\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u\partial_i\eta 2\eta u + b_i u\partial_i u\eta^2 + b_i u^2\partial_i\eta 2\eta - c_i\partial_i u u\eta^2\right) - du^2\eta^2\right)\mathrm{d}\mu + \\
&\qquad + \|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}\|u\eta^2\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le \\
&\le C(\Lambda,n)\int_\Omega \left(|\nabla u|\cdot|u|\cdot|\nabla\eta|\cdot|\eta| + |\nabla u|\cdot|u|\eta^2\,\mathrm{d}\mu + u^2\left(|\nabla\eta||\eta|+\eta^2\right)\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{4\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2\,\mathrm{d}\mu + C'(\Lambda,n)\int_\Omega u^2\eta^2|\nabla\eta|^2\,\mathrm{d}\mu + C'(\Lambda,n)\|f\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}\,\mathrm{d}\mu \le \\
&\le \frac{1}{2\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2\,\mathrm{d}\mu + C(\Lambda,\eta,n)(\|f\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned}
$$

wobei wir wiederholt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung angewandt haben. Wir absorbieren den ersten Term der rechten Seite und erhalten wegen $\eta|_{\Omega'} \equiv 1$ (4.7). **q.e.d.**

Höhere Regularität der Koeffizienten von L und von f überträgt sich auf die Lösung.

Satz von Friedrichs im Inneren 4.6. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^2(\Omega)$ und L erfülle*

$$(4.1)\text{–}(4.3) \text{ auf } \Omega \qquad \text{und} \qquad \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \le \Lambda \text{ und } \|b_i\|_{C^{0,1}(\Omega)} \le \Lambda. \tag{4.8}$$

Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω gilt dann für $k = 0$

$$u \in W^{k+2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \le C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \text{ für } \Omega' \Subset \Omega. \tag{4.9}$$

Die schwachen Ableitungen von u erfüllen fast überall auf Ω $Lu = f$ d.h.

$$\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u + \sum\nolimits_{i=1}^n \left(\sum\nolimits_{j=1}^n \partial_j a_{ij} + b_i + c_i\right)\partial_i u + \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i b_i + d\right) u = f. \tag{4.10}$$

Beweis: Wir vereinfachen $Lu = f$ zu $L_0 u = \hat{f}$, mit einem L_0 das (4.8) erfüllt:

$$
\begin{aligned}
L_0 u := \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) &= -\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i(b_i u) - \sum\nolimits_{i=1}^n c_i\partial_i u - du + f \\
&= -\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i b_i u - \sum\nolimits_{i=1}^n (b_i + c_i)\partial_i u - du + f =: \hat{f} \in L^2(\Omega).
\end{aligned}
$$

Für $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$ folgt mit der Caccioppoliungleichung (4.7)

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\Omega''')} \le C(\Omega,\Omega''',\Lambda,n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.11}$$

Für $\Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$ und $0 < |h|$ so klein, dass $\{x \mid d(x, \Omega'') < |h|\} \Subset \Omega'''$ gilt, liegt der Differenzenquotient (3.13) $\partial_l^h u \in W^{1,2}(\Omega'')$. Für $v \in W_0^{1,2}(\Omega'')$ berechnen wir

$$\langle -L_0(\partial_l^h u), v\rangle = \mathcal{L}_0(\partial_l^h u, v) = \int_{\Omega''} \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j \partial_l^h u \partial_i v \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega''} \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_l^h \partial_j u \partial_i v \, \mathrm{d}\mu$$
$$= -\int\limits_\Omega \sum_{ij} \partial_j u \partial_l^{-h}(a_{ij}\partial_i v)\, \mathrm{d}\mu = -\int\limits_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i \partial_l^{-h} v \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega \sum_{ij} \partial_l^{-h} a_{ij} \partial_j u \partial_i v(.-he_l)\, \mathrm{d}\mu$$
$$= \int_{\Omega'''} \hat{f} \partial_l^{-h} v \, \mathrm{d}\mu - \int_{\Omega''} \sum\nolimits_{ij} \partial_l^h a_{ij} \partial_j u(.+he_l)\partial_i v \, \mathrm{d}\mu =: \langle -f_l^h, v\rangle. \tag{4.12}$$

mit diskreter partieller Integration und $L_0 u = \hat{f}$. Wegen Proposition 3.22 (3.14) gilt $\|\partial_l^{-h} v\|_{L^2(\Omega''')} \le \|\nabla v\|_{L^2(\Omega'')}$ und $f_l^h \in W_0^{1,2}(\Omega'')^*$. Aus (4.7) und (4.11) folgt

$$\begin{aligned}\|f_l^h\|_{W_0^{1,2}(\Omega'')^*} &\le C(n)(\|\hat{f}\|_{L^2(\Omega''')} + \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega''')})\\ &\le C(\Lambda, n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned} \tag{4.13}$$

(4.12) besagt $L_0(\partial_l^h u) = f_l^h$ schwach auf Ω''. Mit (3.14) und (4.7) folgt $\|\partial_l^h u\|_{W^{1,2}(\Omega')} \le$
$$\le C(\Omega'', \Omega', \Lambda, n)(\|f_l^h\|_{W_0^{1,2}(\Omega'')^*} + \|\partial_l^h u\|_{L^2(\Omega'')}) \le C(\Omega, \Omega', \Lambda, n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Mit Proposition 3.22 (3.16) folgt (4.9) mit $k = 0$, da $\partial_l^h u \to \partial_l u$ stark in $L^2(\Omega')$ nach Proposition 3.24 (3.14). Da $a_{ij}, b_i \in C^{0,1}(\Omega) \subseteq W^{1,2}(\Omega)$ und $\nabla u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, folgt mit der Produktregel Proposition 3.25 $a_{ij}\partial_j u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $b_i u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla(a_{ij}\partial_j u) = (\nabla a_{ij})\partial_j u + a_{ij}\partial_j \nabla u$ und $\nabla(b_i u) = (\nabla b_i)u + b_i \nabla u$. Für $v \in C_0^1(\Omega)$ folgt
$$\begin{aligned}-\int_\Omega fv \, \mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Big(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i u v\Big) - duv\Big)\, \mathrm{d}\mu\\ &= \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Big(\sum\nolimits_{j=1}^n -\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) - c_i \partial_i u\Big) - du\Big)\, v \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$
Da $v \in C_0^1(\Omega)$ beliebig war, folgt die letzte Aussage (4.10). **q.e.d.**

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne wieder $\Omega_\pm := \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \pm(0, \infty)$ und $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Caccioppoliungleichung am Rand 4.7. *Sei* $f \in W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*$, $\varphi \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ *und* L *erfülle* (4.1)–(4.3) *auf* $B(0,2)_+$. *Für eine schwache Lösung* $u \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ *von* $Lu = f$ *auf* $B(0,2)_+$ *mit* $u = \varphi$ *auf* $B(0,2)_0$ *gemäß Definition 3.33 gilt dann*

$$\|u\|_{W^{1,2}(B(0,1)_+)} \le C(\Lambda, n)(\|f\|_{W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}).$$

Beweis: Wegen $\|L\varphi\|_{W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*} \le C(n)\Lambda\|\varphi\|_{W^{1,2}(B(0,2)_+)}$ genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und $0 \le \eta \le 1$ und setzen $v := u\eta^2 \in W_0^{1,2}(B(0,2)_+)$ mit Definition 3.33, da $u = 0$ auf $B(0,2)_0$. Der Rest des Beweises verläuft wie der Beweis der Caccioppoliungleichung 4.5. **q.e.d.**

Globaler Satz von Friedrichs 4.8. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ und L erfülle (4.8) auf Ω. Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω mit $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt dann fast überall auf Ω (4.10) und für $k = 0$*

$$u \in W^{k+2,2}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.14)$$

Beweis: Aus dem Satz von Friedrichs im Inneren 4.6 folgt $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und (4.10). Wegen $\|L\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C(n)\Lambda\|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)}$ genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Wegen $\partial\Omega \in C^{1,1}$ gibt es für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und einen $C^{1,1}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ mit $\Psi(x_0) = 0$ und $\Psi(U(x_0) \cap \Omega) = B(0,2)_+$. Wir definieren

$$\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{1,2}(B(0,2)_+) \cap W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(B(0,2)_+).$$

Aus Proposition 3.28 und $\Psi \in C^{1,1}(U(x_0))$ folgt $\partial_j u = ((\partial_l \tilde{u}) \circ \Psi)\, \partial_j \Psi_l$. Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$, gilt $\tilde{u} = 0$ auf $B(0,2)_0$. Für $\tilde{v} \in C_0^1(B(0,2)_+)$ ist $v := \tilde{v} \circ \Psi \in C_0^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega f v \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i u v\right) - duv\right) \mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega \sum_{ijkl} a_{ij}\partial_j\Psi_l\partial_i\Psi_k(\partial_l\tilde{u}\circ\Psi)(\partial_k\tilde{v}\circ\Psi)\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \sum_{ik} b_i\partial_i\Psi_k(\tilde{u}\circ\Psi)(\partial_k\tilde{v}\circ\Psi)\,\mathrm{d}\mu - \\
&\quad - \int_\Omega \sum_{ik} c_i\partial_i\Psi_k(\partial_k\tilde{u}\circ\Psi)(\tilde{v}\circ\Psi)\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega d(\tilde{u}\circ\Psi)(\tilde{v}\circ\Psi)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{B(0,2)_+} \left(\sum_k \left(\sum_l \tilde{a}_{kl}\partial_l\tilde{u}\partial_k\tilde{v} + \tilde{b}_k\tilde{u}\partial_k\tilde{v} - \tilde{c}_k\partial_k\tilde{v}\right) - \tilde{d}\tilde{u}\tilde{v}\right)\mathrm{d}\mu = -\int_{B(0,2)_+} \tilde{f}\tilde{v}\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

also $\quad \tilde{L}\tilde{u} := \sum_k \left(\partial_k\left(\sum_l \tilde{a}_{kl}\partial_l\tilde{u} + \tilde{b}_k\tilde{u}\right) + \tilde{c}_k\partial_k\tilde{u}\right) + \tilde{d}\tilde{u} = \tilde{f}$ auf $B(0,2)_+$ mit

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{kl} &:= \sum_{ij}(a_{ij}\partial_j\Psi_l\partial_i\Psi_k)\circ\Psi^{-1}|\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{a}_{kl}\|_{C^{0,1}(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi)\max_{ij}\|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \\
\tilde{b}_k &:= \sum_i (b_i\partial_i\Psi_k)\circ\Psi^{-1}\cdot|\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{b}_k\|_{C^{0,1}(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi)\max_i\|b_i\|_{C^{0,1}(\Omega)} \\
\tilde{c}_k &:= \sum_i (c_i\partial_i\Psi_k)\circ\Psi^{-1}\cdot|\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{c}_k\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi)\max_i\|c_i\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (4.15) \\
\tilde{d} &:= d\circ\Psi^{-1}\cdot|\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{d}\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi)\|d\|_{L^\infty(\Omega)} \\
\tilde{f} &:= f\circ\Psi^{-1}\cdot|\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{f}\|_{L^2(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi)\|f\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Für alle $y = \Psi(x)$ gilt dann mit (4.2) für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\sum_{kl}\tilde{a}_{kl}(y)\xi_k\xi_l &= \sum_{ijkl} a_{ij}(x)\partial_i\Psi_k(x)\xi_k\partial_j\Psi_l(x)\xi_l\cdot|\det(D\Psi^{-1}(y))| \\
&\geq \Lambda^{-1}\sum_i\left|\sum_k \partial_i\Psi_k(x)\xi_k\right|^2\cdot|\det(D\Psi^{-1}(y))| \geq c_0(\Psi,\Lambda)|\xi|^2,
\end{aligned}$$

da Ψ ein Diffeomorphismus ist, also $D\Psi(x)$ invertierbar ist. Also erfüllen $\tilde{L}$ und $\tilde{u}$ alle Bedingungen des Satzes in $B(0,2)_+$ mit geeignetem $\tilde{\Lambda} = C(\Psi, \Lambda)$. Wie im Beweis von Satz 4.6 vereinfachen wir dies zu $\tilde{L}_0\tilde{u} := \sum_{kl} \partial_k(\tilde{a}_{kl}\partial_l\tilde{u}) = \hat{f}$ schwach auf $B(0,2)_+$ mit

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} &\leq C(\Psi,\Lambda)(\|\hat{f}\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|\tilde{u}\|_{W^{1,2}(B(0,\frac{3}{2})_+)}) \leq \\ &\leq C(\Psi,\Lambda)(\|\tilde{f}\|_{L^2(B(0,2)_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2)_+)}) \leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei wir die Caccioppoliungleichung am Rand 4.7 verwendet haben. Für $0 < |h| < \frac{1}{4}$, $l = 1, \ldots, n-1$ ist $\partial_l^h\tilde{u} \in W^{1,2}(B(0,\frac{5}{4})_+)$ mit $\partial_l^h\tilde{u} = 0$ auf $B(0,\frac{5}{4})_0$. Mit (4.12) gilt

$$\tilde{L}_0(\partial_l^h\tilde{u}) = \tilde{f}_l^h \qquad \text{schwach auf} \qquad B(0,\tfrac{5}{4})_+.$$

Mit der Caccioppoliungleichung am Rand 4.7, (4.13) und (4.16) folgt

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_l^h\|_{W_0^{1,2}(B(0,\frac{5}{4})_+)^*} &\leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \\ \|\partial_l^h\tilde{u}\|_{W^{1,2}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Da $\partial_l^h\tilde{u} \to \partial_l\tilde{u}$ stark in $L^2_{\text{loc}}(B(0,1)_+)$, folgt $\partial_l\tilde{u} \in W^{1,2}(B(0,1)_+)$ und, da wir $\tilde{u} \in W^{2,2}_{\text{loc}}(B(0,2)_+)$ bereits wissen, folgt $\partial_k\partial_l\tilde{u} \in L^2(B(0,1)_+)$ und zunächst

$$\|\partial_k\partial_l\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \qquad \text{für} \qquad (k,l) \neq (n,n).$$

Mit (4.10) aus Satz 4.6 angewandt auf $\tilde{L}_0\tilde{u} = \hat{f}$ erhalten wir für die verbleibenden

$$\partial_n^2\tilde{u} = \tilde{a}_{nn}^{-1}\left(-\sum\nolimits_{(k,l)\neq(n,n)} \tilde{a}_{kl}\partial_k\partial_l\tilde{u} - \sum\nolimits_{k,l=1}^n \partial_k\tilde{a}_{kl}\partial_l\tilde{u} + \hat{f}\right) \text{ in } B(0,2)_+,$$

also mit (4.2) und der Caccioppoliungleichung am Rand 4.7 ebenfalls

$$\|\partial_n^2\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Es folgt $\tilde{u} \in W^{2,2}(B(0,1)_+)$ und für $V(x_0) := \Psi^{-1}(B(0,1))$ der Anteil von (4.14) in $W^{2,2}(V(x_0) \cap \Omega)$ aus Proposition 3.28 mit der Konstanten $C(\Psi,\Lambda)$. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in \partial\Omega$ und $\delta > 0$ mit

$$\partial\Omega \subseteq \{x \mid d(x,\partial\Omega) < 2\delta\} \subseteq V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_N).$$

aus Satz 4.6 (4.9) für $\Omega' := \{x \in \Omega \mid d(x,\partial\Omega) > \delta\} \Subset \Omega$ folgt (4.14) für $k = 0$. **q.e.d.**

Aus dem Sätzen von Friedrichs 4.6 und 4.8 ergibt sich folgender Regularitätssatz.

Satz 4.9. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$, $f \in W^{k,2}(\Omega)$ und L erfülle für ein $1 \leq \Lambda < \infty$* (4.1),(4.2) *und $\|a_{ij}\|_{C^{k,1}(\Omega)} \leq \Lambda$, $\|b_i\|_{C^{k,1}(\Omega)} \leq \Lambda$, $\|c_i\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda$ und $\|d\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda$. Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω folgt* (4.9)

Falls $\partial\Omega \in C^{k+1,1}$ und $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$, so folgt (4.14).

Beweis: Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Für $k = 0$ mit $C^{-1,1}(\Omega)$ ersetzt durch $L^\infty(\Omega)$ sind dies die Aussagen der Sätze von Friedrichs, Sätze 4.6 und 4.8.

Wenn die obige Aussage für $0, \ldots, k-1$ gilt, dann folgt $u \in W^{k+1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\text{für } \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega \quad \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')} \leq C(\Omega, \Omega'', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \tag{4.17}$$

$$\text{bzw. } u \in W^{k+1,2}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.18}$$

Wie im Beweis von Satz 4.6 vereinfachen wir die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} L_0 u : &= \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = -\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i(b_i u) - \sum\nolimits_{i=1}^n c_i \partial_i u - du + f \\ &= -\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i b_i u - \sum\nolimits_{i=1}^n (b_i + c_i)\partial_i u - du + f =: \hat{f} \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{W^{k,2}(\Omega'')} &\leq C(\Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega'')} + \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')}) \\ &\leq C(\Omega, \Omega'', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \qquad \text{für } \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\text{bzw. } \hat{f} \in W^{k,2}(\Omega) \text{ mit} \quad \|\hat{f}\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.20}$$

Wegen $a_{ij} \in C^{k,1}(\Omega) \subseteq W^{k+1,\infty}(\Omega)$ und $u \in W^{k+1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt mit der Produktregel Proposition 3.25 $a_{ij}\partial_j u \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\partial_l a_{ij}\partial_j u \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für $v \in C^\infty_0(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_l u \partial_i v \,\mathrm{d}\mu = -\int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i\partial_l v \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} \partial_l a_{ij}\partial_j u \partial_i v \,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_\Omega \hat{f}\partial_l v \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right) v \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \left(-\partial_l \hat{f} + \sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right) v \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

$$\text{Dies ergibt} \qquad L_0(\partial_l u) = \partial_l \hat{f} - \sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right) =: \bar{f}_l \text{ schwach auf } \Omega. \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt} \quad &\left\|\sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} \leq \sum\nolimits_i \left\|\sum\nolimits_j \partial_l a_{ij}\partial_j u\right\|_{W^{k,2}(\Omega'')} \leq \\ &\leq C(n, \Lambda)\|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')} \leq C(\Omega, \Omega'', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

mit (4.17). Aus (4.17) für $k-1$ folgt $\partial_l u \in W^{k+1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ also $u \in W^{k+2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, und aus (4.17), (4.19) und (4.21) schließlich (4.9): $\|\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(\Omega')} \leq$

$$\begin{aligned} &\leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, k)\left(\|\partial_l \hat{f}\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} + \left\|\sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} + \|\partial_l u\|_{L^2(\Omega'')}\right) \\ &\leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Im Fall mit Rand können wir den Rand mit einem $C^{k+1,1}$-Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und, da $\|v\|_{W^{k+2,2}(V)} \sim \|v \circ \Psi^{-1}\|_{W^{k+2,2}(\Psi(V))}$ mit einer von Ψ und n abhängigen Konstanten, genügt es lokal $\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+$ zu betrachten. Aus (4.18) folgt

$$\begin{aligned}\left\|\sum\nolimits_{ij} \partial_i \left(\partial_l a_{ij} \partial_j u\right)\right\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} \leq \left\|\sum\nolimits_{ij} \partial_l a_{ij} \partial_j u\right\|_{W^{k,2}(\Omega)} &\leq C(n,\Lambda)\|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)} \\ &\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),\end{aligned}$$

Mit (4.20) und (4.21) folgt $L_0(\partial_l u) = \bar{f}_l$ schwach auf $B(0,2)_+$ für $l = 1\ldots,n$ mit

$$\|\bar{f}_l\|_{W^{k-1,2}(B(0,2)_+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.22}$$

Wir wählen $B(0,\frac{4}{3})_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0,\frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und $\eta \in C_0^\infty(B(0,\frac{4}{3}))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$. Mit Proposition 3.37 und Definition 3.33 folgt $\eta\partial_l u \in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ für $l = 1,\ldots,n-1$ und aus $L_0(\partial_l u) = \bar{f}_l$, $u \in W^{k+2,2}_{\mathrm{loc}}(B(0,2)_+)$ und $a_{ij} \in C^{k,1}(B(0,2)_+)$,

$$\begin{aligned}L_0(\eta\partial_l u) &= \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j(\eta\partial_l u)) = \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\eta\partial_j\partial_l u) + \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) \\ &= \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j\partial_l u)\eta + \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_l u\partial_i\eta + \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) \\ &= \bar{f}_l\eta + \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_l u\partial_i\eta + \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u) := \bar{f}_{l,\eta} \text{ schwach in } B(0,2)_+, \\ \text{wobei} \qquad & \|\bar{f}_{l,\eta}\|_{W^{k-1,2}(B(0,2)_+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

wegen (4.18) und (4.22). Mit (4.18) folgt $\eta\partial_l u \in W^{k+1,2}(\Omega_0)$ für $k-1$ und

$$\begin{aligned}\|\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(B(0,1)_+)} \leq \|\eta\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(\Omega_0)} &\leq C(\Lambda,n,k)\|\bar{f}_{l,\eta}\|_{W^{k-1,2}(\Omega_0)} + \|\eta\partial_l u\|_{L^2(\Omega_0)}) \\ &\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \qquad \text{also zunächst} \\ \|\partial_i\partial_j u\|_{W^{k,2}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für} \quad (i,j) \neq (n,n),\end{aligned}$$

da wir $u \in W^{k+2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ bereits wissen. Wie am Ende von Beweis von Satz 4.8, erhalten wir mit (4.10) aus Satz 4.6 angewandt auf $L_0 u = \hat{f}$ für die verbleibenden

$$\partial_n^2 u = a_{nn}^{-1}\left(-\sum\nolimits_{(i,j)\neq(n,n)} a_{ij}\partial_i\partial_j u - \sum\nolimits_{i,j=1}^n \partial_i a_{ij}\partial_j u + \hat{f}\right) \qquad \text{auf } B(0,2)_+,$$

also mit (4.2), (4.20) und (4.18) ebenfalls

$$\|\partial_n^2 u\|_{W^{k,2}(B(0,1)_+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Es folgt $u \in W^{k+2,2}(B(0,1)_+)$ zuerst lokal

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(B(0,1)_+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

und dann mit endlich vielen Bällen $\supset \partial\Omega$ und (4.9) $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ mit (4.14). **q.e.d.**

Für glatte Daten sind auch die Lösungen glatt.

Korollar 4.10. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und L erfülle* (4.1) *und* (4.2) *auf Ω mit glatten Koeffizienten. Dann gilt $u \in C^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$. Ist weiter $\partial\Omega \in C^\infty$ und $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ für ein $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, so gilt $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Beweis: Aus Satz 4.9 folgt $u \in W^{k,2}_{\text{loc}}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Morrey 3.46 ergibt sich $u \in C^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. Im Fall mit Rand folgt aus Satz 4.9 $u \in W^{k,2}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Wieder ergibt der Satz von Morrey 3.46 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. **q.e.d.**

4.2 Schauderabschätzungen

Wir betrachten einen elliptischen Differentialoperator L (2.3) in Nicht-Divergenzform auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen für $u \in C^2(\Omega)$. Dabei seien $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $b_ij \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ und $c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ für ein $0 < \alpha < 1$, kurz $L \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, und es gelte für ein $1 \leq \Lambda < \infty$

$$\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \tag{4.23}$$

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.24}$$

Innere Schauderabschätzung 4.11. *Ein elliptisches L in Nicht-Divergenzform* (2.3) *erfülle* (4.23) *und* (4.24). *Dann gilt für $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2))$*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))} \right).$$

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zuerst $L = \triangle$ auf $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4.12. *Für $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 < \alpha < 1$ und $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u < \infty$ gilt*

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u \leq C(n,\alpha)\, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u.$$

Beweis[2]**:** Angenommen die Aussage ist falsch, d.h. es existiert kein $C(n,\alpha) < \infty$. Dann existiert eine Folge $u_m \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u_m < \frac{1}{m}\, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u_m < \infty.$$

Ersetzen wir u_m durch $\lambda_m u_m$ mit geeignetem $\lambda_m > 0$, so können wir $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u_m = 1$ annehmen. Dann existiert ein Multiindex γ mit $|\gamma| = 2$ und ein $i \in 1, \ldots, n$, so dass für eine Teilfolge jeweils für ein $x_m \in \mathbb{R}^n$ und $h_m > 0$ folgendes gilt:

$$\frac{|\partial^\gamma u_m(x_m + h_m e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)|}{h_m^\alpha} \geq \frac{1}{2n}\, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \partial^\gamma u_m \geq \frac{1}{2n^3} > 0.$$

[2]siehe Theorem 1 in L.Simon:"Schauder estimates by scaling", Calc. of var. and Par. Diff. Eq. 5.

Reskalieren wir $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha} u_m(x_m + h_m x)$ so bleiben die bisherigen Annahmen unverändert. Also können wir o.B.d.A. zusätzlich folgendes annehmen:

$$|\partial^\gamma u_m(e_i) - \partial^\gamma u_m(0)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

Das Substrahieren eines beliebigen Polynoms höchstens zweiten Grades läßt diese und die bisherigen Annahmen unverändert. Zusätzlich können wir also folgendes annehmen:

$$u_m(0) = 0 \qquad \nabla u_m(0) = 0 \qquad D^2 u_m(0) = 0.$$

Aus $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m = 1$ und dem Mittelwertsatz folgt

$$\|D^2 u_m|_{L^\infty(B(0,R))} \leq R^\alpha \quad \|\nabla u_m\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n) R^{1+\alpha} \quad \|u_m\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n) R^{2+\alpha}.$$

Mit $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m = 1$ folgt $\qquad \|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,R))} \leq C(n, \alpha, R)$.
Damit konvergiert für eine weitere Teilfolge $u_m \to u$ stark in $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Aus allen diesen Bedingungen folgt $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u = 0$, also $\triangle u \equiv \text{const}$ in $\mathbb{R}^n$ und

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u \leq 1 \qquad \partial^\gamma u(e_i) \neq \partial^\gamma u(0) \qquad D^2 u(0) = 0 \qquad \|u\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n) R^{2+\alpha}.$$

Daraus folgt $\triangle u = 0$. Auf $x \in B(0,R)$ ergibt Korollar 2.12 wegen $\partial B(x,R) \subseteq \overline{B(0,2R)}$

$$\|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n, |\gamma|) R^{-|\gamma|+2+\alpha} \qquad \text{für beliebige Multiindices } \gamma.$$

Für $|\gamma| \geq 3$ und $R \to \infty$ folgt $D^3 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$, und u ist ein quadratisches Polynom. Insbesondere ist $D^2 u$ konstant. Dies widerspricht $\partial^\gamma u(e_i) \neq \partial^\gamma u(0)$, da $|\gamma| = 2$. **q.e.d.**

Betrachtet man eine lineare Transformation, so erhält man folgende Proposition:

Proposition 4.13. *Es sei* $1 \leq \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$\sum\nolimits_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \Lambda^{-1} |\xi|^2 \textit{ für } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad |a_{ij}| \leq \Lambda.$$

Für $0 < \alpha < 1$ *und* $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u < \infty$ *gilt dann*

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u \leq C(\Lambda, n, \alpha)\, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij} \partial_i \partial_j u \right).$$

Beweis: Da $\partial_i \partial_j u$ symmetrisch in i, j ist, können wir $a_{ij} = a_{ji}$ annehmen. Dann ist $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit und $\Lambda^{-1} I \leq A \leq C(n) \Lambda I$. Die positive Wurzel $B = (b_{ij})$ von A erfüllt $A = B^2$, $B^t = B$ und $\Lambda^{-1/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \leq B \leq C(n) \Lambda^{1/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Setzen wir $\tilde{u}(x) := u(Bx)$, so ist $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_k \tilde{u}(x) = \sum\nolimits_i \partial_i u(Bx) b_{ik} \quad \partial_k \partial_l \tilde{u}(x) = \sum\nolimits_{ij} \partial_i \partial_j u(Bx) b_{ik} b_{jl} \quad \triangle \tilde{u}(x) = \sum\nolimits_{ij} a_{ij} \partial_i \partial_j u(Bx)$$

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle\tilde{u} \leq C(n)\Lambda^{\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u\right) < \infty$$
$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2\tilde{u} \leq C(n)\Lambda^{1+\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u < \infty \quad \text{höl}_{\mathbb{R}^n\alpha} D^2 u \leq C(n)\Lambda^{1+\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2\tilde{u}.$$

Also erfüllt $\tilde{u}$ die Voraussetzungen von Proposition 4.12 und die Poposition folgt aus

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2\tilde{u} \leq C(n,\alpha)\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle\tilde{u}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Wir beweisen zuerst folgende schwächere Version von Satz 4.11.

Proposition 4.14. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.11 gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).$$

Beweis: Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und betrachten zunächst alle $0 < \varrho < 1/2$. Für $x_0 \in \overline{B(0,1)}$ gilt $B := B(x_0, 2\varrho) \subseteq B(0,2)$, und wir setzen

$$\eta_{x_0,\varrho}(x) := \eta\left(\tfrac{x-x_0}{\varrho}\right) \qquad\qquad v := u\eta_{x_0,\varrho} \in C_0^{2,\alpha}(B).$$

Es gilt $v = u$ auf $B(x_0,\varrho)$. Aus der Proposition 4.13 folgt mit (4.23) und (4.24)

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda,n,\alpha)\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j v\right).$$

Wir schreiben
$$\sum\nolimits_{ij} a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j v - \sum\nolimits_{ij}\left(a_{ij}\partial_i\partial_j v - (a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v\right)$$
$$= Lv - \sum\nolimits_i b_i\partial_i v - cv - \sum\nolimits_{ij}(a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v.$$

Dann ergibt sich aus obiger Abschätzung, Proposition 3.9 und (3.4) $\quad \text{höl}_{B,\alpha} D^2 v \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\Big(\text{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \text{höl}_{B,\alpha}\Big(\sum\nolimits_{ij}(a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v\Big) + \text{höl}_{B,\alpha}\Big(\sum\nolimits_i b_i\partial_i v + cv\Big)\Big)\\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\max_{ij}\Big(\|a_{ij} - a_{ij}(x_0)\|_{L^\infty(B)}\text{höl}_{B,\alpha}(D^2 v) + \text{höl}_{B,\alpha}(a_{ij} - a_{ij}(x_0))\|D^2 v\|_{L^\infty(B)}\Big) +\\
&\qquad + C(\Lambda,n,\alpha)\left(\text{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \left(\max_i \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\right)\|v\|_{C^{1,\alpha}(B)}\right)\\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\varrho^\alpha\,\text{höl}_{B,\alpha}(D^2 v) + \text{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B)}\right).
\end{aligned}$$

Wir absorbieren für hinreichend kleines $\varrho = \varrho(\Lambda,n,\alpha)$ den ersten Term und erhalten

$$\text{höl}_{B,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\text{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B)}\right).$$

Schließlich rechnen wir und schätzen ab

$$\begin{aligned}
\|v\|_{C^2(B)} &\leq C\|u\|_{C^2(B(0,2))}\|\eta_{x_0,\varrho}\|_{C^2(B)} \leq C(\varrho)\|u\|_{C^2(B(0,2))} \leq C(\Lambda,n,\alpha)\|u\|_{C^2(B(0,2))}\\
Lv &= \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j(u\eta_{x_0,\varrho}) + \sum\nolimits_i b_i\partial_i(u\eta_{x_0,\varrho}) + cu\eta_{x_0,\varrho}\\
&= Lu\cdot\eta_{x_0,\varrho} + \sum\nolimits_{ij}(a_{ij}\partial_i u\partial_j\eta_{x_0,\varrho} + \partial_j u\partial_i\eta_{x_0,\varrho} + ua_{ij}\partial_i\partial_j\eta_{x_0,\varrho} + ub_i\partial_i\eta_{x_0,\varrho}\\
\text{höl}_{B,\alpha}(Lv) &\leq C\|Lu,\nabla u,u\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\|1,a_{ij},b_i,c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\|\eta_{x_0,\varrho}\|_{C^{2,\alpha}(B)}\\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^{1,\alpha}(B(0,2))}\right).
\end{aligned}$$

Zusammen mit $v|_{B(x_0,\varrho)} = u|_{B(x_0,\varrho)}$ ergeben ergeben alle diese Abschätzungen

$$\text{höl}_{B(x_0,\varrho),\alpha} D^2u \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).$$

Da $x_0 \in B(0,1)$ beliebig war und $\varrho = \varrho(\Lambda,n,\alpha)$, folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned}
\text{höl}_{B(0,1),\alpha} D^2u &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right)\\
\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} &\leq \text{höl}_{B(0,1),\alpha} D^2u + C(n)\|u\|_{C^2(B(0,2))}\\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Beweis von Satz 4.11: Sei $S := |D^2u|^{(n/2+2)}_{0,B(0,2)} := \sup_{x\in B(0,2)} d(x,\partial B(0,2))^{n/2+2}|D^2u(x)|$ mit $S<\infty$ wegen $u\in C^{2,\alpha}(B(0,2))$. Für $x_0\in B(0,2)$ sei $\varrho := \frac{1}{3}d(x_0,\partial B(0,2)) < 1$, also $B(x_0,2\varrho)\subseteq B(0,2)$ und $d(x,\partial B(0,2))\geq\varrho$ für alle $x\in B(x_0,2\varrho)$. Wir reskalieren folgendermaßen für $x\in B(0,2)$ und erhalten mit (4.23) und $\varrho\leq 1$

$$\tilde{u}(x) := u(x_0+\varrho x) \quad \tilde{a}_{ij}(x) := a_{ij}(x_0+\varrho x) \quad \tilde{b}_i(x) := \varrho b_i(x_0+\varrho x) \quad \tilde{c} := \varrho^2 c(x_0+\varrho x)$$

$$\begin{aligned}
Lu(x_0+\varrho x) &= \left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum\nolimits_i b_i\partial_i u + cu\right)(x_0+\varrho x)\\
&= \left(\varrho^{-2}\sum\nolimits_{ij}\tilde{a}_{ij}\partial_i\partial_j\tilde{u} + \varrho^{-1}\sum\nolimits_i \tilde{b}_i\varrho^{-1}\partial_i\tilde{u} + \varrho^{-2}\tilde{c}\tilde{u}\right)(x) = \varrho^{-2}\tilde{L}\tilde{u}(x) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} &= \varrho^2\|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} \qquad \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))} \leq \varrho^{-n/2}\|u\|_{L^2(B(0,2))}\\
\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} &= \varrho^{n/2+2}\|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0,2\varrho))} \leq S\\
\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} &= \varrho^2\|Lu\|_{L^\infty(B(x_0,2\varrho))} + \varrho^{2+\alpha}\,\text{höl}_{B(x_0,2\varrho),\alpha}(Lu) \leq \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\\
\|\tilde{a}_{ij},\tilde{b}_i,\tilde{c}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} &\leq \|a_{ij},b_i,c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} \leq \Lambda.
\end{aligned}$$

Insbesondere erfüllt $\tilde{L}$ (2.3), (4.23) und(4.24) auf $B(0,2)$. Wegen Proposition 3.12 erfüllen folgende Abbildungen die Vorrausetzungen von dem Lemma von Ehrling 3.3: $C^2(B(0,2))\to C^1(B(0,2))\hookrightarrow L^2(B(0,2))$ und $C^{2,\alpha}(B(0,1))\to C^2(B(0,1))\hookrightarrow L^2(B(0,1))$.

Mit $\|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))} = \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|\tilde{u}\|_{C^1(B(0,2))}$ absorbieren wir in der entsprechenden ersten Interpolationsungleichung den Term $\|\tilde{u}\|_{C^1(B(0,2))}$ und erhalten für $0 < \epsilon < 1$

$$\|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))} = \|\tilde{u}\|_{C^1(B(0,2))} + \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} \leq C(n)(\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))})$$
$$\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,1))} \leq \epsilon\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} + C(n,\alpha,\epsilon)\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))}.$$

Zusammen ergeben alle diese Abschätzungen mit Proposition 4.14 wegen $\varrho \leq 1$

$$\begin{aligned}
d(x_0, \partial B(0,2))^{n/2+2}|D^2u(x_0)| &\leq (3\varrho)^{n/2+2}\|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} = 3^{n/2+2}\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} \\
&\leq \epsilon\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))} \\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon\varrho^{n/2}\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))}\right) + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))} \\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \epsilon\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))}\right) + C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))} \\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))}\right) + C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon S.
\end{aligned}$$

Das Supremum der linken Seite über $x_0 \in B(0,2)$ ergibt für kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda,n,\alpha)$

$$S \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))}\right).$$

Wir reskalieren und überdecken $B(0,1)$ durch kleine Bälle. Aus Proposition 4.14 folgt mit der obigen ersten Interpolationsungleichung auf $B(0,\frac{3}{2})$ anstatt $B(0,2)$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2}))} + \|u\|_{C^2(B(0,\frac{3}{2}))}\right) \\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2}))} + \|u\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2}))} + \|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2}))}\right).
\end{aligned}$$

Aus $\|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2}))} \leq 2^{n/2+2}S$ folgt dann die Behauptung. **q.e.d.**

Für die Existenz klassischer Lösungen brauchen wir Abschätzungen am Rand.

Schauderabschätzungen am Rand 4.15. *Ein elliptisches L (2.3) erfülle (4.23) und (4.24) auf $B(0,2)_+ \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $u, \varphi \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $u = \varphi$ auf $B(0,2)_0$*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda,n,\alpha)(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}).$$

Aus Proposition 3.9 folgt $\|L\varphi\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} \leq C(\Lambda,n,\alpha)\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)}$. Also können wir o.B.d.A. $\varphi = 0$ setzen. Zuerst betrachten wir wieder $L = \triangle$ auf $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$.

Proposition 4.16. *Für $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $0 < \alpha < 1$, $u|_{\mathbb{R}^n_0} = 0$ und $\mathrm{höl}_{\mathbb{R},\alpha^n_+}(D^2u) < \infty$ gilt*

$$\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u) \leq C(n,\alpha)\,\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(\triangle u).$$

Beweis[3]**:** Falls die Aussage ist falsch, dann existiert eine Folge $u_m \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit

$$u_m|_{\mathbb{R}^n_0} = 0 \qquad \text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(\triangle u_m) < m^{-1}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u_m) < \infty.$$

Wir renormieren $\text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u_m) = 1$. Wieder existiert ein Multiindex γ mit $|\gamma| = 2$ und $i \in \{1,\ldots,n\}$, so dass für eine Teilfolge und geeignete $x_m \in \mathbb{R}^n$ und $h_m > 0$ folgendes gilt

$$\frac{|\partial^\gamma u_m(x_m + h_m e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)|}{h_m^\alpha} \geq \frac{1}{2n}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\,\partial^\gamma u_m \geq \frac{1}{2n^3} > 0.$$

Nach einer Translation um einen Vektor aus $\mathbb{R}^n_0$ können wir $|x_m| = \langle x_m, e_n\rangle$ annehmen. Wir unterscheiden zwischen $\lim\limits_{m\to\infty} h_m^{-1}\langle x_m, e_n\rangle = +\infty$ und $\lim\inf\limits_{m\to\infty} h_m^{-1}|x_m| < +\infty$:

Im Fall $\lim\limits_{m\to\infty} h_m^{-1}\langle x_m, e_n\rangle = \infty$ reskalieren wir durch $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha} u_m(x_m + h_m x)$. Nach Subtraktion eines Polynoms vom Grad höchstens zwei konvergiert eine Teilfolge $u_m \to u$ in $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, was wie in Proposition 4.12 zum Widerspruch führt.

Im zweiten Fall $\lim\inf\limits_{m\to\infty} h_m^{-1}|x_m| < \infty$ reskalieren wir $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha} u_m(h_m x)$. Dadurch bleiben alle bisherigen Annahmen unverändert, und wir können o.B.d.A.

$$|\partial^\gamma u_m(x_m + e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

annehmen. Nach Übergang zu einer Telfolge konvergiert x_m gegen $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Bei Subtraktion der Taylorpolynome

$$P_m(x) := u_m(0) + \nabla u_m(0)\cdot x + \tfrac{1}{2}x^t D^2 u_m(0) x$$

bleiben alle Annahmen unverändert, und wir können O.B.d.A.

$$u_m(0) = 0 \qquad \nabla u_m(0) = 0 \qquad D^2 u_m(0) = 0.$$

annehmen. Aus $\text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u_m) = 1$ und dem Mittelwertsatz folgt

$$\|D^2 u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq R^\alpha \quad \|\nabla u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n) R^{1+\alpha} \quad \|u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n) R^{2+\alpha}.$$

also $\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,R)_+)} \leq C(n,\alpha,R)$.. Damit konvergiert in $C^2_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ eine weitere Teilfolge $u_m \to u$. Aus diesen Annahmen folgt $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit

$$\begin{array}{ccc} u|_{\mathbb{R}^n_0} = 0 & \triangle u \equiv \text{const} & \text{höl}_{\overline{\mathbb{R}^n_+},\alpha}(D^2 u) \leq 1 \\ \partial^\gamma u(x_0 + e_i) \neq \partial^\gamma u(x_0) & D^2 u(0) = 0 & \|u\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n) R^{2+\alpha}. \end{array}$$

[3] siehe Theorem 4 in L.Simon: "Schauder estimates by scaling", Calc. of var. and Par. Diff. Eq. 5.

Wegen den mittleren Bedingungen ist u harmonisch auf $\mathbb{R}^n_+$. Wegen der ersten gilt $\partial_l^2 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n_0$ für $l = 1, \ldots, n-1$, also $\partial_n^2 u = -\sum_{l=1}^{n-1} \partial_l^2 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n_0$. Setzen wir $u(y,t) := -u(y,-t)$ für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $t \le 0$, so sehen wir zuerst $u \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Weiter ist $\partial_l \partial_n u$ stetig für $l = 1, \ldots, n-1$, und dasselbe gilt für $1 \le l, k \le n-1$ oder $(l,k) = (n,n)$, da $\partial_l \partial_k u(y,0) = 0$ für diese l, k. Somit ist $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, also $\triangle u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$. Mit Korollar 2.12 folgt $\|D^k u\|_{L^\infty(B(0,R))} \le C(n,k) R^{-|k|+2+\alpha}$ für beliebige Multiindizes k. Für $|k| \ge 3$ und $R \to \infty$ folgt $D^3 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$, und u ist ein quadratisches Polynom. Insbesondere ist $D^2 u$ konstant, also $D^2 u \equiv D^2 u(0) \equiv 0$. Dies widerspricht $\partial^\gamma u(x_0 + e_i) \neq \partial^\gamma u(x_0)$ wegen $|\gamma| = 2$. Damit ist die Proposition bewiesen. **q.e.d.**

Wie bei den inneren Abschätzungen folgt

Proposition 4.17. *Es sei* $1 \le \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mit*

$$\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j \ge \Lambda^{-1} |\xi|^2 \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad\qquad |a_{ij}| \le \Lambda.$$

Für $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *mit* $0 < \alpha < 1$ *und* $u|_{\mathbb{R}^n_+} = 0$ *und* $\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u) < \infty$ *gilt dann*

$$\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u) \le C(\Lambda, n, \alpha)\, \mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}(a_{ij} \partial_i \partial_j u). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Wieder beweisen wir zuerst eine schwächere Version von Satz 4.15

Proposition 4.18. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.15 für* L *auf* $B(0,2)_+$ *gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \le C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)} \right).$$

Beweis: Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und $0 < \varrho < 1/2$ klein, wie unten beschrieben. Für $x_0 \in \overline{B(0,1)_+}$ gilt $B := B(x_0, 2\varrho) \subseteq B(0,2)$, und wie im Beweis von Proposition 4.14 definieren wir

$$\begin{aligned}
\eta_{x_0,\varrho} &\in C_0^\infty(B) && \text{mit} && \eta_{x_0,\varrho}(x) := \eta\left(\tfrac{x - x_0}{\varrho}\right) \\
v &\in C^{2,\alpha}(B_+) && \text{mit} && v := u \cdot \eta_{x_0,\varrho} \in C_0^{2,\alpha}(B_+ \cup B_0) \\
\operatorname{supp} v &\subseteq B_+ \cup B_0 && && v|_{B_0} = 0 \qquad v|_{B(x_0,\varrho)_+} = u|_{B(x_0,\varrho)_+}.
\end{aligned}$$

Aus (4.23),(4.24) und $v|_{B_0} = 0$ folgt mit Proposition 4.17

$$\mathrm{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \le C(\Lambda, n, \alpha)\, \mathrm{höl}_{B_+,\alpha} \left(\sum_{ij} a_{ij}(x_0) \partial_i \partial_j v \right).$$

Daraus ergibt sich dann wie im Beweis von Proposition 4.14

$$\mathrm{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \le C(\Lambda, n, \alpha) \varrho^\alpha\, \mathrm{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v + C(\Lambda, n, \alpha) \left(\mathrm{höl}_{B_+,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B_+)} \right).$$

Wählen wir $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$ klein genug, so erhalten wir

$$\text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\text{höl}_{B_+,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B_+)}\right).$$

Wie im Beweis von Proposition 4.14 ergibt sich daraus mit $v|_{B(x_0,\varrho)_+} = u|_{B(x_0,\varrho)_+}$

$$\text{höl}_{B(x_0,\varrho),\alpha}(D^2 u) \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right).$$

Da $x_0 \in \overline{B(0,1)_+}$ beliebig war und $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$, erhalten wir schließlich

$$\text{höl}_{B(0,1)_+,\alpha} D^2 u \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right)$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq \text{höl}_{B(0,1)_+,\alpha}(D^2 u) + C(n)\|u\|_{C^2(B(0,2)_+)} \leq \\ &\leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right).\end{aligned}$$

q.e.d.

Beweis von Satz 4.15: Analog zum Beweis von Satz 4.11 setzen wir

$$S := |D^2 u|^{(n/2+2)}_{0,B(0,2)_0} := \sup_{x \in B(0,2)_+} d(x, \partial B(0,2))^{n/2+2} |D^2 u(x)|$$

Wegen $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ gilt $S < \infty$. Für $x_0 \in B(0,2)_+$ setzen wir

$$\varrho := \begin{cases} \frac{1}{8} d(x_0, \partial B(0,2)) \\ \frac{1}{4}(x_0, \partial B(0,2)) \end{cases} \quad \text{und } x_0' := \begin{cases} x_0 & \text{falls } x_{0,n} \geq \frac{1}{4} d(x_0, \partial B(0,2)) \\ x_0 - x_{0,n} e_n & \text{falls } x_{0,n} < \frac{1}{4} d(x_0, \partial B(0,2)). \end{cases}$$

In beiden Fällen gilt

$$\begin{array}{cc} x_0 \in B(x_0', \varrho)_+ & B(x_0', 2\varrho) \subseteq B(0,2) \\ d(y, \partial B(0,2)) \geq \varrho \text{ für alle } y \in B(x_0', 2\varrho) & d(x_0, \partial B(0,2)) \leq 8\varrho. \end{array}$$

Außerdem gilt im ersten Fall $B(x_0', 2\varrho) \subseteq \mathbb{R}^n_+$ und im zweiten Fall $x_0' \in \mathbb{R}^n_0$. Wir reskalieren $\tilde{u}(y) := u(\varrho y)$, für $y \in B(y_0', 2)_+$ mit $y_0' = \varrho^{-1} x_0'$ und erhalten wie in (4.25)

$$Lu(\varrho y) = \varrho^{-2} \tilde{L} \tilde{u}(y) \text{ für } y \in B(y_0', 2)_+$$

mit geeignetem $\tilde{L}$. Sei jetzt $B := B(y_0', 2) = B(\varrho^{-1} x_0', 2)$. Wegen Proposition 3.12 erfüllen folgende Abbildungen die Vorrausetzungen von dem Lemma von Ehrling 3.3:

$$C^2(B_+) \to C^1(B_+) \hookrightarrow L^2(B_+) \text{ und } C^{2,\alpha}(B(y_0', 1)_+) \to C^2(B(y_0', 1)_+) \hookrightarrow L^2(B(y_0', 1)_+).$$

Wir absorbieren in der entsprechenden ersten Interpolationsungleichung wieder den Term $\|\tilde{u}\|_{C^1(B_+)}$ mit $\|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)} = \|D^2 \tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{C^1(B_+)}$ und erhalten für $0 < \epsilon < 1$

$$\|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)} \leq C(n)\left(\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B_+)}\right)$$
$$\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(y_0',1)_+)} \leq \epsilon\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(y_0',1)_+)} + C(n,\alpha,\epsilon)\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)}.$$

Mit den Propositionen 4.14 und 4.18 ergibt dies wegen $\varrho \leq 1$ wieder

$$\begin{aligned}
d(x_0\partial B(0,2))^{n/2+2}|D^2u(x_0)| &\leq (8\varrho)^{n/2+2}\|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0',\varrho)_+)} = 8^{n/2+2}\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(y_0',1)_+)}\\
&\leq \epsilon\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(y_0',1)_+)} + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)}\\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon\varrho^{n/2}\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)}\right) + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)}\\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_+)} + \epsilon\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)}\right) + C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B_+)}\\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}\right) + C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon S.
\end{aligned}$$

Das Supremum der linken Seite über $x_0 \in B(0,2)_+$ ergibt für kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda,n,\alpha)$

$$S \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}\right).$$

Wir reskalieren und überdecken $B(0,1)$ durch kleine Bälle. Aus Proposition 4.18 folgt zusammen mit der obigen ersten Interpolationsungleichung auf $B(0,\frac{3}{2})_+$ anstatt B_+

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,\frac{3}{2})_+)}\right)\\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2})_+)}\right).
\end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung aus $\|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2})_+)} \leq 2^{n/2+2}S$. **q.e.d.**

Mit der Proposition 4.14 und 4.18 beweisen wir schließlich

Globale Schauder Abschätzungen 4.19. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ und L (2.3) erfülle (4.23)–(4.24). Dann gilt für $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Beweis: Wie oben bemerkt, genügt es, $\varphi = 0$ zu betrachten. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ beliebig. Wegen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und einen $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ mit $\Psi(x_0) = 0$ und $\Psi(U(x_0) \cap \Omega) = B(0,2)_+$. Wir definieren $\tilde{u} = u \circ \Psi^{-1} \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$. Wegen $u|_{\partial\Omega} = 0$ gilt $\tilde{u}|_{B(0,2)_0} = 0$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
Lu &= \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum\nolimits_i b_i\partial_i u + cu =\\
&= \sum\nolimits_{ijkl} a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l(\partial_k\partial_l\tilde{u})\circ\Psi + \sum\nolimits_{ik}\left(\sum\nolimits_j a_{ij}\partial_i\partial_j\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k\right)\partial_k\tilde{u}\circ\Psi + c\cdot(\tilde{u}\circ\Psi).
\end{aligned}$$

Dann erfüllt $\tilde{L}$ mit $\tilde{L}\tilde{u} := (Lu) \circ \Psi^{-1} = \sum_{kl} \tilde{a}_{kl}\partial_k\partial_l\tilde{u} + \sum_k \tilde{b}_k\partial_k\tilde{u} + \tilde{c}\tilde{u}$ und

$$\tilde{a}_{kl} := \sum_{ij}(a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l)\circ\Psi^{-1} \quad \tilde{b}_k := \sum_i\Big(\sum_j a_{ij}\partial_i\partial_j\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k\Big)\circ\Psi^{-1} \quad \tilde{c} := c\circ\Psi^{-1}$$

$$\sum_{kl} \tilde{a}_{kl}(y)\xi_k\xi_l \geq c_0(\Psi,\Lambda,n)|\xi|^2 \qquad \text{für alle} \qquad y \in B(0,2)_+ \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\max\left\{\|\tilde{a}_{kl}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}, \|\tilde{b}_k\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}, \|\tilde{c}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}\right\} \leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha).$$

Mit $V(x_0) := \Psi^{-1}(B(0,1))$ erhalten wir aus Proposition 4.18 $\|u\|_{C^{2,\alpha}(V(x_0)\cap\Omega)} \leq$

$$\begin{aligned}&\leq C(\Psi,n,\alpha)\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha)\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right)\\ &\leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right). \qquad (4.26)\end{aligned}$$

Nun betrachten wir $x_0 \in \Omega$. Dann existiert $\varrho_{x_0} > 0$ mit $B(x_0, 2\varrho_{x_0}) \subseteq \Omega$ und aus Proposition 4.14 folgt nach Reskalieren von $V(x_0) = B(x_0, \varrho_{x_0})$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(V(x_0))} \leq C(\Lambda,\varrho_{x_0},n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^2(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right). \qquad (4.27)$$

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1,\ldots,x_N \in \bar{\Omega}$ mit

$$\bar{\Omega} \subseteq V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_N).$$

Aus (4.26) und (4.27) folgt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right).$$

Die Behauptung folgt nun für hinreichend kleine ϵ aus der Interpolationsungleichung

$$\|u\|_{C^2(\Omega)} \leq \epsilon\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + C(\Omega,\epsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

die aus dem Lemma von Ehrling 3.3 und der Proposition 3.10 folgt. **q.e.d.**

Aus den globalen Schauder-Abschätzungen ergibt sich zusammen mit der höheren Regularität aus der L^2-Theorie die Lösbarkeit des Dirichletproblems.

Existenz von klassischen Lösungen des Dirichletproblems 4.20. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ und L (2.3) erfülle (4.23)–(4.24) mit $c \leq 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ des Dirichletproblems*

$$Lu = f \text{ auf } \Omega \qquad \text{mit} \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \qquad \text{und diese erfüllt}$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha)\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\right). \qquad (4.28)$$

Beweis: Wieder genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Die Eindeutigkeit der Lösung in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ folgt aus dem Maximumprinzip Korollar 2.18 mit $c \leq 0$.

Zuerst beweisen wir die Abschätzung (4.28) für $C^{2,\alpha}$-Lösungen des Dirichletproblems. Angenommen (4.28) gilt nicht, dann existieren L_m (2.3), die (4.23)–(4.24) erfüllen mit $c_m \leq 0$, $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $f_m \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $u_m|_{\partial\Omega} = 0$ und

$$\|f_m\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \tfrac{1}{m}\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}.$$

Andererseits folgt aus Satz 4.19 durch absorbieren für $m \geq 2C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)$

$$\begin{aligned}\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)\left(\|f_m\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u_m\|_{C^0(\Omega)}\right)\\ &< C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)\left(\tfrac{1}{m}\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \|u_m\|_{C^0(\Omega)}\right) < 2C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)\|u_m\|_{C^0(\Omega)}.\end{aligned}$$

Wir nehmen o.B.d.A. $\|u_m\|_{C^0(\Omega)} = 1$ an. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann

$$u_m \to u \text{ stark in } C^2(\bar\Omega) \qquad L_m \to L \text{ stark in } C^0(\bar\Omega) \qquad f_m \to 0 \text{ stark in } C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Es folgt $Lu = 0$ auf Ω mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Wegen $0 \geq c_m \to c$ folgt aus dem Maximumprinzip Korollar 2.18 $u = 0$ im Wiederspruch zu $\|u\|_{C^0(\Omega)} \leftarrow \|u_m\|_{C^0(\Omega)} = 1$. Also gilt (4.28).

Zum Beweis der Existenzaussage wählen wir glatte L_m (2.3) mit $c_m \leq 0$, die (4.23)–(4.24) erfüllen und in $C^0(\bar\Omega)$ gegen L konvergieren. Dazu wählen wir glatte beschränkte f_m, die in $C^0(\bar\Omega)$ gegen f konvergieren. Gibt es Lösungen u_m der entsprechenden Dirichletprobleme, dann sind diese wegen (4.28) beschränkt in $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Somit konvergiert eine Teilfolge u_m in $C^2(\bar\Omega)$ gegen ein $u \in C^2(\bar\Omega)$ mit $Lu = f$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Also genügt es die Existenz für glatte $L \in C^\infty(\bar\Omega)$ und $f \in C^\infty(\bar\Omega)$ zu beweisen. Solche L können wir mit glatten Koeffizienten in Divergenzform (4.1) schreiben. Wegen $c \leq 0$ erfüllt L die Bedingung (4.6) des Maximumprinzip Satz 4.2, und nach Satz 4.3 existiert eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $L_d u = f$ auf Ω mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Aus $L, f \in C^\infty(\bar\Omega)$ folgt $u \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $Lu = f$ auf Ω aus Korollar 4.10. Ist darüberhinaus $\partial\Omega \in C^\infty$, so folgt auch $u \in C^\infty(\bar\Omega)$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Dann ist u eine klassische Lösung.

Unter den Voraussetzungen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ des Satzes müssen wir $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ zeigen. Bzw., da wir $u \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ schon wissen, dass $u \in C^{2,\alpha}(V(x_0) \cap \Omega)$ für alle $x_0 \in \partial\Omega$ auf einer Umgebung $V(x_0)$ gilt. Wegen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ können wir $\partial\Omega$ mit dem $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ in einer Umgebung $U(x_0)$ glattbiegen, und $\tilde u := u \circ \Psi^{-1} \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ erfüllt $\tilde u|_{B(0,2)_0} = 0$. Setzen wir gemäß (4.15)

$$\begin{aligned}\tilde a_{kl} &:= \sum\nolimits_{ij} (a_{ij}\partial_j\Psi_l\partial_i\Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det D\Psi^{-1}| & \tilde c &:= c \circ \Psi^{-1}|\det D\Psi^{-1}|\\ \tilde b_k &:= \sum\nolimits_i \left(\left(b_i - \sum\nolimits_j \partial_j a_{ji}\right)\partial_i\Psi_k\right) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det D\Psi^{-1}| & \tilde f &:= f \circ \Psi^{-1}|\det D\Psi^{-1}|\end{aligned}$$

$$\tilde L_d \tilde u := \sum\nolimits_{ij} \partial_i\left(\tilde a_{ij}\partial_j\tilde u\right) + \sum\nolimits_i \tilde b_i\partial_i\tilde u + \tilde c\tilde u, \quad \tilde L_d \in C^{1,\alpha}(B(0,2)_+), \quad \tilde f \in C^{1,\alpha}(B(0,2)_+),$$

so transformiert sich $L_d u = f$ auf $B(0,2)_+$ zu $\tilde{L}_d\tilde{u} = \tilde{f}$. Wir zeigen $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)$. Dafür wählen wir $\tilde{L}_{d,m}, \tilde{f}_m \in C^\infty(\overline{B(0,2)_+})$ mit $\tilde{c}_m \leq 0$ die in $C^1(B(0,2)_+$ gegen L bzw. f konvergieren und in $C^{1,\alpha}(B(0,2)_+)$ beschränkt sind. Weiter wählen wir $B(0,\frac{4}{3})_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0,\frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und mit Proposition 3.35 $\tilde{\varphi}_m \in C^\infty(\overline{B(0,2)_+})$ mit $\tilde{\varphi}|_{B(0,2)_0} = 0$, die in $W^{1,2}(B(0,2)_+)$ stark gegen $\tilde{u}$ konvergieren. Wegen Satz 4.3 existieren schwache Lösungen $\tilde{u}_m \in W^{1,2}(\Omega_0)$ von $\tilde{L}_{d,m}\tilde{u}_m = \tilde{f}$ auf Ω_0 mit $\tilde{u}_m|_{\partial\Omega_0} = \tilde{\varphi}_m|_{\partial\Omega_0}$ und

$$\|\tilde{u}_m\|_{W^{1,2}(\Omega_0)} \leq C\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\tilde{\varphi}_m\|_{W^{1,2}(\Omega_0)}\right)$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten $C < \infty$. Die rechte Seite bleibt imGrenzwert $m \to \infty$ beschränkt, und somit konvergiert für eine Teilfolge $\tilde{u}_m \to \bar{u}$ schwach in $W^{1,2}(\Omega_0)$. Es folgt, dass $\bar{u}$ eine schwache Lösung von $\tilde{L}_d\bar{u} = \tilde{f}$ auf Ω_0 mit $\bar{u}|_{\partial\Omega_0} = \tilde{u}_{\partial\Omega_0}$ ist, und wegen $\tilde{c} \leq 0$ folgt mit dem Maximumprinzip Satz 4.2 $\bar{u} = \tilde{u}$, also dass $\tilde{u}_m$ in $W^{1,2}(\Omega_0)$ schwach gegen $\tilde{u}$ konvergiert. Aus $\tilde{L}_{d,m}, \tilde{f}_m, \tilde{\varphi}_m \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$ und $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ folgt mit Korollar 4.10 $\tilde{u}_m \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$ und $\tilde{L}_m\tilde{u}_m = \tilde{f}_m$ auf Ω_0, wobei $\tilde{L}_m$ der ausdifferenzierte Nicht-Divergenzform Operator von $\tilde{L}_{d,m}$ ist. Die Koeffizienten von $L_{d,m}$ sind beschränkt in $C^{1,\alpha}(B(0,2)_+)$ und die von $\tilde{L}_m$ in $C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)$. Aus Satz 4.15 folgt

$$\|\tilde{u}_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C\left(\|\tilde{f}_m\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{4}{3})_+)} + \|\tilde{u}_m\|_{L^2(B(0,\frac{4}{3})_+)}\right)$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten $C < \infty$, da $\tilde{u}_m|_{B(0,\frac{4}{3})_0} = \tilde{\varphi}_m|_{B(0,\frac{4}{3})_0} = 0$. Aufgrund der Konstruktion bleibt die rechte Seite im Grenzwert $m \to \infty$ beschränkt. Also folgt $\tilde{u} \in C^{2\alpha}(B(0,2)_+)$ aus der Konvergenz $\tilde{u}_m \to \tilde{u}$. **q.e.d.**

Schließlich zeigen wir, dass C^2-Lösungen so regulär sind, wie die Daten.

Satz 4.21. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$ und L (2.3) erfülle (4.23) und für $k \geq 0$*

$$\|a_{ij}\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda. \tag{4.29}$$

Für $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ und eine Lösung $u \in C^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω gilt dann für $\Omega' \Subset \Omega$

$$u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega')} \leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,\alpha,k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right) \tag{4.30}$$

Aus $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ und $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ mit $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ folgt

$$u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha,k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right). \tag{4.31}$$

Beweis: Wir betrachten konzentrische Bälle $B' \Subset B \Subset \Omega$ und wählen $\varphi_m \in C^\infty(\bar{B})$ mit $\varphi_m \to u$ stark in $C^2(\bar{B})$. Mit Satz 4.20 existiert $u_m \in C^{2,\alpha}(B)$ mit

$$L_0 u_m = \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u_m + \sum\nolimits_i b_i\partial_i u_m = f - cu =: \tilde{f} \in C^{0,\alpha}(B) \quad u_m|_{\partial B} = \varphi_m|_{\partial B}.$$

Da $L_0(u_m - u) = 0$ in B, folgt mit dem Maximumprinzip Korollar 2.18

$$\|u_m - u\|_{L^\infty(B)} \le \|u_m - u\|_{L^\infty(\partial B)} \le \|\varphi_m - u\|_{L^\infty(B)} \to 0,$$

also dass u_m in $C^0(\bar{B})$ stark gegen u konvergiert. Mit Satz 4.11 folgt

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B')} \le C(\Lambda, B, B', n, \alpha, k) \left(\|\tilde{f}\|_{C^{0,\alpha}(B)} + \|u_m\|_{C^0(B)}\right).$$

Wegen der Konvergenz von u_m ist die rechte Seite im Grenzwert $m \to \infty$ beschränkt. Es folgt $u \in C^{2,\alpha}(B')$, also (4.30) für $k = 0$ aus Satz 4.11.

Nun sei $k \ge 1$ und (4.30) für $0, \ldots, k-1$ bewiesen. Dann folgt $u \in C^{k+1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Wir wählen $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$. Für die endliche Differenz $\partial^h_l u$ (3.13), $l = 1, \ldots, n$, $0 < |h| < d(\Omega'', \partial\Omega''')$, und $\bar{u}(x) := u(x + he_l)$ gilt

$$L(\partial^h_l u) = \partial^h_l f - \sum\nolimits_{ij} (\partial^h_l a_{ij}) \partial_i \partial_j \bar{u} - \sum\nolimits_i (\partial^h_l b_i) \partial_i \bar{u} - (\partial^h_l c)\bar{u} =: f^h_l \quad \text{auf } \Omega''. \tag{4.32}$$

Für $v \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ gilt auf $x \in \Omega''$ $\quad \|\partial^h_l v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} \le \|\partial_l v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega''')}$ $\quad$ wegen

$$\partial^h_l v(x) = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} v(x + the_l)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \partial_l v(x + the_l)\,\mathrm{d}t.$$

Daraus folgt mit (4.29) $\qquad \|f^h_l\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} \le \|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + C(n)\Lambda\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega''')}$.

Aus (4.30) für $k-1$ und (4.32) folgt

$$\begin{aligned}
\|\partial^h_l u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega')} &\le C(\Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|\partial^h_l f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} + \|\partial^h_l u\|_{C^0(\Omega'')}\right) \\
&\le C(\Omega''', \Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega''')}\right) \\
&\le C(\Omega''', \Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\partial^h_l u \to \partial_l u$ in $C^0(\Omega')$. Dann folgt $\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und (4.30).

Im Fall mit Rand können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wir biegen den Rand glatt zu $\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+$. Durch Reskalieren $c \mapsto \varrho x$ transformieren sich die Koeffizienten

$$\tilde{a}_{ij}(x) := a_{ij}(\varrho x) \qquad \tilde{b}_i(x) := \varrho b_i(\varrho x) \qquad \tilde{c}(x) := \varrho^2 c(\varrho x) \qquad \tilde{f}(x) := \varrho^2 f(\varrho x)$$

von L und f. Daher können wir annehmen, dass L (2.3) die Voraussetzung (4.23) mit Λ ersetzt durch geeignetes Λ_0 erfüllt und $\|c\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} \le \epsilon$ für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gilt, das wir erst später festlegen. Weiter sei $B(0, \frac{4}{3})_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0, \frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und φ_m eine Folge in $C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $\varphi_m|_{B(0,2)_0} = 0$, die in $C^0(\overline{B(0,2)_+})$ stark gegen u konvergiert. Wir suchen dazu Lösungen $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ von $Lu_m = f$ auf Ω_0 mit $u_m|_{\partial\Omega_0} = \varphi_m|_{\partial\Omega_0}$. Wir betrachten die stetigen linearen Abbildungen L, L_0 :

$C^{2,\alpha,0}(\Omega_0) := \{v \in C^{2,\alpha}(\Omega_0) \mid v = 0 \text{ auf } \partial\Omega_0\} \to C^{0,\alpha}(\Omega_0)$. Mit dem Satz 4.20 ist L_0 ein Isomorphismus, und $L - L_0$ ist kompakt. Wählen wir $\epsilon > 0$ so klein, dass $c_0 := 1 - C(\Omega_0, \Lambda_0)\epsilon > 0$ in Korollar 2.24 gilt, so folgt mit Korollar 2.24, dass L injektiv ist und mit Lemma 3.4, dass L ein Isomorphismus ist. Damit existiert $u_m - \varphi_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ mit $L(u_m - \varphi_m) = f$ und $u_m - \varphi_m = 0$ auf $\partial\Omega_0$, also sind $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ solche Lösungen. Mit Hopfs Maximumprinzip 2.21 folgt wegen $c_0 := 1 - C(\Omega_0(\Lambda_0)\epsilon > 0$,

$$\|u_m - u\|_{C^0(\overline{\Omega_0})} \le c_0^{-1}\|u_m - u\|_{C^0(\partial\Omega_0)} \le c_0^{-1}\|\varphi_m - u\|_{C^0(\overline{B(0,2)_+})} \to 0.$$

Also konvergiert u_m in $C^0(\overline{\Omega_0})$ stark gegen u. Mit Satz 4.15 folgt

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \le C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{4}{3})_+)} + \|u_m\|_{C^0(B(0,\frac{4}{3})_+)}\right).$$

Wegen der Konvergenz von u_m ist die rechte Seite im Grenzwert $m \to \infty$ beschränkt, und es folgt $u \in C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)$. Überdecken wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt (4.31) für $k = 0$ aus Satz 4.19.

Nun sei $k \ge 1$ und (4.31) für $0, \dots, k-1$ bewiesen. Daher gilt $u \in C^{k+2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ und

$$u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega)} \le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right). \tag{4.33}$$

Weiter gilt $\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\text{loc}}(B(0,2)_+) \cap C^{k,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $\partial_l u|_{B(0,2)_0} = 0$ für $l = 1, \dots, n-1$ wegen $u|_{B(0,2)_0} = 0$. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,\frac{4}{3})), \eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&\text{für} \qquad v := \eta\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega_0) \cap C^{k,\alpha}(\Omega_0) \qquad \text{und} \quad v|_{\partial\Omega_0} = 0\\
&\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j v = \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j(\eta\partial_l u) =\\
&\qquad = \sum\nolimits_{ij} (\eta a_i\partial_i\partial_j\partial_l u + a_{ij}(\partial_i\eta\partial_j\partial_l u + \partial_j\eta\partial_i\partial_l u) + a_{ij}\partial_l u\partial_i\partial_j\eta) =\\
&\qquad =: \sum\nolimits_{ij} \eta a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_l u + R_l \qquad \text{mit} \qquad \|R_l\|_{C^{k-1,\alpha}(B(0,2)_+)} \le\\
&\le C(\Lambda, n, \alpha, k)\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,2)_+)} \le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

wobei wir (4.33) verwendet haben. Aus $Lu = f$ folgt auf $B(0,2)_+$ wieder mit (4.33)

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_l u &= \sum\nolimits_{ij} (\partial_l(a_{ij}\partial_i\partial_j u) - (\partial_l a_{ij})\partial_i\partial_j u)\\
&= \partial_l\left(f - \sum\nolimits_i b_i\partial_i u - cu\right) - \sum\nolimits_{ij}(\partial_l a_{ij})\partial_i\partial_j u =: \hat{f}\\
\|\hat{f}\|_{C^{k-1,\alpha}(B(0,2)_+)} &\le C(\Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,2)_+)}\right)\\
&\le C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Wenden wir (4.31) für $k-1$ auf v in Ω_0 an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\partial_l u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq \|v\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega_0)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha,k)\left(\|a_{ij}\partial_i\partial_j v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega_0)} + \|v\|_{C^0(\Omega_0)}\right)\\ &\leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha,k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Da $l = 1,\ldots,n-1$ und $u \in C^{k+2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ folgt wegen $Lu = f$, (4.23) und (4.33)

$$\begin{aligned}\|\partial_i\partial_j u\|_{C^{k,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha,k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right) && \text{für } i,j \neq (n,n)\\ \partial_n^2 u &= a_{nn}^{-1}\left(-\sum\nolimits_{(i,j)\neq(n.n)} a_{ij}\partial_i\partial_j u - \sum\nolimits_{i=1}^n b_i\partial_i u - cu + f\right) && \text{auf } B(0,2)_+\\ \|\partial_n^2 u\|_{C^{k,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha,k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right)\\ \|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha,k)\left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Überdecken wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt mit (4.30) auch (4.31). **q.e.d.**

4.3 Calderon-Zygmundabschätzungen

Wir betrachten wieder elliptische Differentialoperatoren in Nicht-Divergenzform (2.3) auf offenen Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ für $u \in W^{2,1}(\Omega)$ mit meßbaren Koeffizienten

$$a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R} \quad a_{ij}(x) \text{ symmetrisch und positiv definit fast überall auf } \Omega \tag{4.34}$$

$$\mathcal{D} := \det a_{ij} > 0 \qquad \mathcal{D}^* := \mathcal{D}^{\frac{1}{n}}. \tag{4.35}$$

Für meßbares f heißt $u \in W^{2,1}(\Omega)$ eine starke Lösung von $Lu \geq (\leq) f$ auf Ω, falls diese Ungleichung nach Einsetzen der schwachen Ableitungen fast überall in Ω erfüllt ist. Wir beginnen mit einem weiteren Maximumprinzip. Dabei benutzen wir die sogenannte obere Kontaktmenge einer auf Ω definierten Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\Gamma_v^+ := \Gamma_v^+(\Omega) := \{x \in \Omega \mid \exists b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } v(y) \leq v(x) + b\cdot(y-x) \quad \forall y \in \Omega\}$$

Diese Menge besteht aus allen $x \in \Omega$, so dass $\{(y,z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid v(y) \leq z\}$ in $(x, v(x))$ eine ganze Hyperebene von $\mathbb{R}^{n+1}$ enthält, d.h. v unterhalb einer Hyperebene verläuft. Wenn v in $x \in \Gamma_v^+$ zweimal differenzierbar ist, dann folgt $b = \nabla v(x)$ und $D^2 v(x) \leq 0$.

Alexandroff'sches Maximumprinzip 4.22. *Sei L ein Differentialoperator in Nicht-Divergenzform (2.3), der (4.34)-(4.35) auf $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen erfüllt. Weiter sei*

$$\|b/\mathcal{D}^*\|_{L^n(\Omega)} \leq \Lambda, \qquad c \leq 0. \tag{4.36}$$

Für $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $Lu \geq f$ fast überall in $\Omega \cap [u > 0]$ und $f/\mathcal{D}^* \in L^2(\Omega)$ gilt

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + C(\Lambda, n)\operatorname{diam}\Omega \|f_-/\mathcal{D}^*\|_{L^2(\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0])}. \tag{4.37}$$

Zuerst geben wir eine nützliche Stetigkeitseigenschaft der Kontaktmenge an.

Proposition 4.23. *Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit offener Überdeckung $\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ mit $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1}$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}, u_m : \Omega_m \to \mathbb{R}, u_m \to u$ punktweise in Ω. Dann gilt*

$$\limsup_{m\to\infty} \chi_{\Gamma^+_{u_m}(\Omega_m)} \leq \chi_{\Gamma^+_u(\Omega)}. \tag{4.38}$$

Beweis: Sei $x \in \Gamma^+_{u_m}(\Omega_m)$ für eine Teilfolge $m \to \infty$ und ein $b_m \in \mathbb{R}^n$ mit

$$u_m(y) \leq u_m(x) + b_m \cdot (y - x) \text{ für alle } y \in \Omega_m.$$

Ein Ball $B(x, 2\varrho_x) \Subset \Omega$ liegt für große m in Ω_m. Falls b_m für eine Teilfolge divergiert, so konvergiert für eine weitere Teilfolge $b_m/|b_m| \to \nu \in \partial B(0,1)$, insbesondere $(b_m/|b_m|)\nu \to |\nu|^2 = 1$, und $b_m \cdot \nu \to \infty$. Für $y = x - \varrho_x\nu \in B(x, \varrho_x) \subseteq \Omega_m$ folgt

$$-\infty < u(y) \leftarrow u_m(y) \leq u_m(x) + b_m \cdot (y - x) = u_m(x) - \varrho b_m \cdot \nu \to -\infty,$$

also ein Widerspruch. Daher konvergiert für eine Teilfolge $b_m \to b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$u(y) \leq u(x) + b \cdot (y - x) \text{ für alle } y \in \Omega,$$

also $x \in \Gamma^+_u(\Omega)$, und (4.38) folgt. **q.e.d.**

Den Beweis des Alexandroff'schen Maximumprinzips beginnen wir mit

Proposition 4.24. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gilt*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + \frac{\operatorname{diam}\Omega}{\omega_n^{\frac{1}{n}}} \left(\int_{\Gamma^+_{u_+} \cap [u>0]} |\det D^2 u| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis: Indem wir u durch $u - \sup_{\partial\Omega} u$ ersetzen, können wir $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ annehmen. Wegen dem Satz von Sard[4] wird $[\det D^2 u = 0]$ durch ∇u auf eine Nullmenge abgebildet. Mit Jacobis Transformation von Maßen berechen wir das Lebesguesmaß

$$\mu(\nabla u(\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0])) \leq \int_{\Gamma^+_{u_+} \cap [u>0]} |\det D^2 u| \,\mathrm{d}\mu. \tag{4.39}$$

Wir können $M := \sup_{\Omega} u > 0$ annehmen, also $M = u(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega$. Sei

$$l(y) := u(x_0) + b \cdot (y - x_0) = u_+(x_0) + b \cdot (y - x_0).$$

[4] John W. Milnore: "Topology from the Differentiable Viewpoint" Kapitel 2.

Für $0 < |b| < M/\operatorname{diam}\Omega$ gilt dann $l > 0 = u_+$ auf $\partial\Omega$. Dann gibt es ein $x \in \Omega$ mit

$$\sup_{\partial\Omega}(u_+ - l) < 0 = (u_+ - l)(x_0) \leq \sup_{\Omega}(u_+ - l) = (u_+ - l)(x)$$

Daraus folgt $u_+(x) - b \cdot x \geq u_+(y) - b \cdot y$ für alle $y \in \Omega$, also $x \in \Gamma^+_{u_+}$. Für $u(x) > 0$ ist u_+ bei x differenzierbar mit $b = \nabla u_+(x) = \nabla u(x)$. Weil $y := x - tb$ für ein $t > 0$ in $\partial\Omega$ liegt, folgt $u_+(x) \geq u_+(y) + b \cdot (x - y) = tb^2 > 0$, also $u(x) = u_+(x) > 0$. Dann folgt

$$B(0, M/\operatorname{diam}\Omega) \setminus \{0\} \subseteq \nabla u(\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0]) \tag{4.40}$$

und die Proposition aus $\omega_n \left(\frac{M}{\operatorname{diam}\Omega}\right)^n \leq \mu(\nabla u(\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0]))$ und (4.39). **q.e.d.**

Proposition 4.25. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, einen Differentialoperator in Nicht-Divergenzform (2.3), der (4.34) und (4.35) auf Ω erfüllt und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gilt*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + \frac{\operatorname{diam}\Omega}{n\omega_n^{\frac{1}{n}}} \left\| \frac{\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+} \cap [u>0])}$$

Beweis: Indem wir u durch $u - \sup_{\partial\Omega} u$ ersetzen, nehmen wir wieder $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ an. Für symmetrische Matrizen $A, B \geq 0$ und die positive Wurzel S von B, d.h.

$$S \geq 0 \quad \text{symmetrisch mit} \qquad B = S^2$$

gilt mit der Ungleichung zwischen geometrischen and arithmetischen Mittelwerten

$$\det A \cdot \det B = \det S^T AS \leq \left(\frac{tr(S^T AS)}{n}\right)^n = \left(\frac{tr(AB)}{n}\right)^n.$$

Mit $A = (a_{ij}) \geq 0$ und $-B = D^2 u$ folgt die Porposition mit Proposition 4.24 aus

$$|\det D^2 u| \leq \mathcal{D}^{-1} \left(\frac{-\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u}{n}\right)^n \quad \text{auf } \Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0] \subseteq \Gamma^+_u. \qquad \textbf{q.e.d.} \tag{4.41}$$

Beweis von Satz 4.22: Sei zuerst $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Es genügt $\sup_\Omega u > \sup_{\partial\Omega} u_+$ zu betrachten. Für $\mu > 0$ gilt auf $\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0] \subseteq \Gamma^+_u$ mit der Hölderungleichung

$$0 \leq -\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u \leq \sum\nolimits_i b_i\partial_i u + cu - f \leq |b||\nabla u| + f_- \leq \|(|b|, \tfrac{f_-}{\mu})\|_n \|(|\nabla u|, \mu)\|_{\frac{n}{n-1}}$$

$$\text{mit} \quad \|(a,b)\|_q := \begin{cases} (|a|^q + |b|^q)^{1/q} & \text{für } 1 \leq q < \infty, \\ \max\{|a|, |b|\} & \text{für } q = \infty. \end{cases}$$

Damit erhalten wir auf $\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0]$

$$-g^{\frac{1}{n}}(\nabla u)\frac{\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u}{n\mathcal{D}^*} \le \frac{(|b|^n + \mu^{-n} f_-^n)^{\frac{1}{n}}}{n\mathcal{D}^*} \qquad \text{mit} \quad g(p) := \|(p,\mu)\|^{-n}_{\frac{n}{n-1}}.$$

Für $\tilde{M} := (\operatorname{diam}\Omega)^{-1}(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u_+) > 0$, folgt wie in (4.40) die Relation

$$B(0,\tilde{M}) \setminus \{0\} \subseteq \nabla u(\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0]).$$

$$\ln\left(\frac{\tilde{M}^n}{\mu^n} + 1\right) = n\int_0^{\tilde{M}} \frac{r^{n-1}}{r^n + \mu^n}\,\mathrm{d}r \le \frac{2^{n-1}}{\omega_n} \int\limits_{B(0,\tilde{M})} g \quad (\text{wegen } 2^{n-1}g(p) \ge \tfrac{1}{|p|^n + \mu^n})$$

$$\le \frac{2^{n-1}}{\omega_n} \int\limits_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} g \le \frac{2^{n-1}}{\omega_n} \int\limits_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} g(\nabla u)\cdot|\det D^2 u| \text{ (Satz von Sard und Jacobis Transformation)}$$

$$\le \frac{2^{n-1}}{\omega_n} \int_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} g(\nabla u)\left(\frac{-\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u}{n\mathcal{D}^*}\right)^n \le \frac{2^{n-1}}{n^n\omega_n}\int_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} \frac{|b|^n + \mu^{-n} f_-^n}{\mathcal{D}}$$

mit (4.41). Im Grenzwert $\mu \downarrow \|f_-/\mathcal{D}^*\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0])}$ erhalten wir durch Exponenzieren

$$\tilde{M} \le \left(\exp\left(\frac{2^{n-1}}{n^n\omega_n}\left(1 + \int_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} \frac{|b|^n}{\mathcal{D}}\right)\right) - 1\right)^{\frac{1}{n}} \left\|\frac{f_-}{\mathcal{D}^*}\right\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0])}.$$

Da $\tilde{M} = (\operatorname{diam}\Omega)^{-1}(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u_+)$ folgt (4.37) für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Im allgemeine Fall $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \Omega^0(\bar{\Omega})$ nehmen wir zuerst folgendes an:

$$\|a_{ij}/\mathcal{D}^*\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \qquad\qquad \|b_i/\mathcal{D}^*\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty. \tag{4.42}$$

Wir wählen $u_m \in C^2(\Omega)$ mit $u_m \to u$ stark in $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, d.h. $u_m \to u$ stark in $W^{2,n}(\Omega')$ und $u_m \to u$ stark in $C^0(\bar{\Omega}')$ für $\Omega' \Subset \Omega$. Indem wir u_m durch $u_m - \|u_m - u\|_{L^\infty(\Omega')}$ ersetzen können wir o.B.d.A. $u_m \le u$ auf Ω' annehmen. Dann folgt

$$\begin{aligned} Lu_m &= Lu + \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i(u_m - u) + \sum\nolimits_i b_i\partial_i(u_m - u) + c(u_m - u) \\ &\ge f_- + \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i(u_m - u) + \sum\nolimits_i b_i\partial_i(u_m - u), \end{aligned}$$

da $c \le 0$. Dann folgt mit (4.37), (4.42) und $f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ für $u_m \in C^2(\bar{\Omega}')$

$$\sup_{\Omega'} u = \lim_{m\to\infty} \sup_{\Omega'} u_m \le \limsup_{m\to\infty} \sup_{\partial\Omega'} u_{m,+} + C(\Lambda,n)\operatorname{diam}\Omega' \cdot$$

$$\limsup_{m\to\infty}\left(\left\|\frac{f_-}{\mathcal{D}^*}\right\|_{L^n(\Gamma^+_{u_{m,+}}\cap[u_m>0])} + \left\|\sum\nolimits_{ij}\frac{a_{ij}}{\mathcal{D}^*}\partial_j\partial_i(u_m - u) + \sum\nolimits_i \frac{b_i}{\mathcal{D}^*}\partial_i(u_m - u)\right\|_{L^n(\Omega')}\right)$$

$$\le \sup_{\partial\Omega'} u_+ + C(\Lambda,n)\operatorname{diam}\Omega'\|(f_-/\mathcal{D}^*)\limsup_{m\to\infty}\chi_{(\Gamma^+_{u_{m,+}}\cap[u_m>0])}\|_{L^n(\Omega')},$$

mit Kontaktmengen $\Gamma^+_{u_{m,+}} = \Gamma^+_{u_{m,+}}(\Omega')$. Aus $u_m \le u$ folgt $[u_m > 0] \cap \Omega' \subseteq [u > 0]$ und

$$\limsup_{m\to\infty} \chi_{(\Gamma^+_{u_{m,+}} \cap [u_m > 0])} \le \chi_{(\Gamma^+_{u_+} \cap [u>0])}.$$

aus (4.38). Dies ergibt (4.37) für u auf $\Omega' \Subset \Omega$ unter der Annahme (4.42).

Für L mit $b_i/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ definieren wir und folgern daraus im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$

$$\begin{aligned}
&L_\epsilon := L + \epsilon(\sigma_n + |b|)\Delta \quad \text{mit} && \operatorname{spec}(a_{ij}) = \{0 < \sigma_1 \le \ldots \le \sigma_n < \infty\} \\
&a^\epsilon_{ij} = a_{ij} + \epsilon(\sigma_n + |b|)\delta_{ij} \quad \text{mit} && \operatorname{spec}(a^\epsilon_{ij}) = \{\sigma_l + \epsilon(\sigma_n + |b|) \mid l = 1, \ldots, n\} \\
&\mathcal{D}^* \le \mathcal{D}^*_\epsilon \quad \text{und} && \epsilon(\sigma_n + |b|)\mathbb{1} \le (a^\epsilon_{ij}) \le ((1+\epsilon)\sigma_n + \epsilon|b|)\mathbb{1}.
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\epsilon(\sigma_n + |b|)}{\mathcal{D}^*_\epsilon}\right)^n \le \frac{\epsilon^n(\sigma_n + |b|)^n}{\epsilon^{n-1}(\sigma_n + |b|)^{n-1}(\sigma_n + \epsilon(\sigma_n + |b|))} = \frac{\epsilon(\sigma_n + |b|)}{\sigma_n + \epsilon(\sigma_n + |b|)},$$

$$\text{also} \quad 1 \ge \frac{\epsilon(\sigma_n + |b|)}{\mathcal{D}^*_\epsilon} \to 0 \quad \text{fast überall auf } \Omega. \tag{4.43}$$

Also erfüllt L_ϵ (4.42). Aus (4.37) für $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ und L_ϵ folgt mit $\mathcal{D}^* \le \mathcal{D}^*_\epsilon$

$$\sup_{\Omega'} u \le \sup_{\partial\Omega'} u_+ + C(\Lambda, n) \operatorname{diam} \Omega' \left(\left\| \frac{f_-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}(\Omega') \cap [u>0])} + \left\| \frac{\epsilon(\sigma + |b|)}{\mathcal{D}^*_\epsilon} \Delta u \right\|_{L^n(\Omega')} \right).$$

Der letzte Term konvergiert für $\epsilon \to 0$ mit dem Satz von Lebesgue, $\Delta u \in L^n(\Omega')$ und (4.43) gegen 0. Für $\Omega' \Subset \Omega$ folgt (4.37). Schließlich wählen wir $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1} \Subset \Omega$ mit $\Omega = \cup_{m=1}^\infty \Omega_m$ und erhalten (4.37) auf Ω wegen $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ und (4.38)

$$\begin{aligned}
\sup_\Omega u = \lim_{m\to\infty} \sup_{\Omega_m} u &\le \limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{\partial\Omega_m} u_+ + C(\Lambda, n) \operatorname{diam} \Omega_m \| f_-/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}(\Omega_m) \cap [u>0])} \right) \\
&\le \sup_{\partial\Omega} u_+ + C(\Lambda, n) \operatorname{diam} \Omega \| f_-/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}(\Omega) \cap [u>0])}.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Aus dem Alexandroff'schen Maximumprinzip folgt folgender Eindeutigkeitssatz.

Satz 4.26. *Für einen elliptischen Differentialoperator L (2.3) in Nicht-Differgenzform, der (4.34)-(4.36) auf $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen erfüllt, f meßbar in Ω und $\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$, hat $Lu = f$ auf Ω und $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ höchstens eine starke Lösung $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.* **q.e.d.**

Beispiel 4.27. *Satz 4.26 bleibt nicht richtig für starke Lösungen in $W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ für $p < n$, wie folgendes Beispiel zeigt. Für $0 < \lambda < 1$ und $n \ge 2$ hat das Dirichletproblem*

$$\Delta u + \left(\tfrac{n-1}{1-\lambda} - 1\right) \sum\nolimits_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2} \partial_j \partial_i u = 0 \ \textit{in}\ B(0,1) \qquad u = 0 \ \textit{auf}\ \partial B(0,1)$$

die Lösungen $u(x) \equiv 0$ und $v(x) = 1 - |x|^\lambda$. Für $p < \frac{n}{2-\lambda}$ gilt $v \in W^{2,p}(B(0,1))$. Approximieren wir v durch $v_m \in C^\infty(\overline{B(0,1)})$ mit $v_m \to v$ in $W^{2,p}(B(0,1))$ wie in Proposition 3.30, so folgt $W^{2,p}(B(0,1)) \hookrightarrow C^0(\overline{B(0,1)})$ für $p > n/2$ aus Satz 3.46

$$v_m(0) \to v(0) = 1, \qquad \sup_{\partial B(0,1)} v_m \to \sup_{\partial B(0,1)} v = 0, \qquad a_{ij}\partial_j\partial_i v_m \to a_{ij}\partial_j\partial_i v = 0$$

stark in $L^p(B(0,1))$ mit $a_{ij}(x) := \delta_{ij} + (\frac{n-1}{1-\lambda} - 1)x_1x_j/|x|^2$ Dies zeigt, dass (4.37) für $p < n$ selbst für $u \in C^\infty(\bar\Omega)$ im allgemeinen nicht gilt.

Schließlich erhalten wir folgendes starke Maximumprinzip.

Satz 4.28. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform (2.3) auf offenem und zusammenhängendem $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $1 \le \Lambda < \infty$ mit*

$$\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \Lambda \qquad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \le \Lambda \qquad \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \le \Lambda \tag{4.44}$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \sum\nolimits_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.45}$$

Weiter sei $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ eine Lösung von $Lu \ge 0$ auf Ω mit $c \le 0$ bzw. $c = 0$. Nimmt u ein inneres nichtnegatives bzw. beliebiges Maximum auf Ω an, so ist u konstant.

Beweis: Für $u \in C^2(\Omega)$ folgen wir dem Beweis des Hopf'schen Maximumprinzip 2.21, wobei wir das Alexandroff'sche Maximumprinzip 4.22 anstatt Korollar 2.18 verwenden.

Nehmen wir an, dass der Satz im allgemeinen Fall falsch ist, so nimmt u sein Maximum $M = \sup_\Omega u$ in Ω an, ohne konstant zu sein. Dann existieren konzentrische Bälle o.B.d.A. mit 0 als Zentrum $B(0,\varrho) \Subset B(0,R) \Subset \Omega$ mit

$$u < M \text{ auf } \overline{B(0,\varrho)}, \qquad u(x_0) = M \text{ für ein } x_0 \in B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)}.$$

Für $\alpha > 0$ setzen wir $v(x) := e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$. Wir rechnen, da $c \le 0$ und mit (4.45),

$$\begin{aligned} Lv(x) &= e^{-\alpha|x|^2}\left(4\alpha^2\sum\nolimits_{ij} a_{ij}x_ix_j - 2\alpha\sum\nolimits_i (a_{ii} + b_ix_i)\right) + cv \\ &\ge e^{-\alpha|x|^2}\left(4\alpha^2\Lambda^{-1}|x|^2 - 2\alpha\left(\sum\nolimits_i a_{ii} + |b||x|\right) + c\right) \ge 0 \text{ auf } B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)} \end{aligned}$$

für groß genuge α, da $a_{ii}, b, c \in L^\infty(\Omega)$. Da $c \le 0$ und $M \ge 0$ oder $c = 0$, gilt $L(M - u - \epsilon v) \le 0$ auf $B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)}$ für $\epsilon > 0$. Auf $\partial B(0,R)$ gilt $M - u \ge 0$, und $v = 0$. Weiter gilt $\inf_{\partial B(0,\varrho)}(M - u) > 0$, also $M - u - \epsilon v > 0$ auf $\partial B(0,\varrho)$ für kleine ϵ.

Aus dem Alexandroff'schen Maximumprinzip 4.22, folgt $M - u - \epsilon v \ge 0$ auf $B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)} \ni x_0$ im Wiederspruch zu $(M - u - \epsilon v)(x_0) = -\epsilon v(x_0) < 0$. **q.e.d.**

Wir bereiten jetzt die Calderon-Zygmundabschätzungen vor. Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, und es gelte der Divergenzsatz für Ω. Für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt die erste Green'sche Formel.

$$\int_\Omega \nabla \cdot (v\nabla u) = \int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \nabla u) = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot N \,\mathrm{d}\sigma.$$

Durch Antisymmetrisieren von u und v erhält man die zweite Green'sche Formel

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u - u\nabla v) \cdot N \,\mathrm{d}\sigma.$$

Die Laplacegleichung hat auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die radial symmetrische Lösung r^{2-n} für $n \geq 3$ und $\ln r$ für $n = 2$. Durch Normierung erhalten wir die Fundamentallösung von Δ:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{für } n = 2. \end{cases} \tag{4.46}$$

Der Name begründet sich mit folgenden Rechnungen. Für $x \neq 0$ und $k \geq 1$ gilt

$$\nabla\Gamma(x) = \frac{x|x|^{-n}}{n\omega_n} \quad \partial_i\partial_j\Gamma(x) = \frac{\delta_{ij}|x|^2 - nx_ix_j|x|^{-n-2}}{n\omega_n} \quad |D^k\Gamma(x)| \leq \frac{C_{n,k}}{|x|^{n+k-2}}. \tag{4.47}$$

Für $x \in \Omega$ und $v(y) := \Gamma(y - x)$ können wir die zweite Green'sche Formel nicht auf Ω anwenden, da v bei x singulär ist. Stattdessen wenden wir sie auf $\Omega \setminus \overline{B(x, \varrho)}$ an:

$$\int_{\Omega\setminus B(x,\varrho)} \Gamma(y-x)\Delta u(y) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u - u\nabla v) \cdot N \,\mathrm{d}\sigma - \int_{\partial B(x,\varrho)} (v\nabla u - u\nabla v) \cdot N \,\mathrm{d}\sigma.$$

Im Grenzwert $\varrho \to 0$ erhalten wir für $x \in \Omega$ die Green'sche Darstellungsformel

$$\left|\int_{\partial B(x,\varrho)} v\nabla u \cdot N \,\mathrm{d}\sigma\right| = \left|\Gamma(\varrho) \int_{\partial B(x,\varrho)} \nabla u \cdot N \,\mathrm{d}\sigma\right| \leq n\omega_n\varrho^{n-1}\Gamma(\varrho) \sup_{B(x,\varrho)} |\nabla u| \to 0$$

$$\int_{\partial B(x,\varrho)} u\nabla v \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = \Gamma'(\varrho) \int_{\partial B(x,\varrho)} u \,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n\omega_n\varrho^{n-1}} \int_{\partial B(x,\varrho)} u \,\mathrm{d}\sigma \to u(x)$$

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} (u(y)\nabla\Gamma(y-x) + \Gamma(y-x)\nabla u(y)) \cdot N \,\mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y. \tag{4.48}$$

Lemma 4.29. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{diam}\Omega \leq d$, $1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ und $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ ist das Newtonpotenial eine stetige lineare Abbildung*

$$N : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad (Nf)(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \quad \text{mit} \quad \|N\| \leq C(d, n, p, q).$$

Für $f \in C^1_0(\Omega)$ gilt außerdem $Nf \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta Nf = f$ auf Ω.

Beweis: Für $x \in \Omega, \operatorname{diam}\Omega \le d$, $n \ge 2$ und für $1 \le r < \frac{n}{n-2}$ bzw. $1 \le r < \infty$ gilt

$$\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \le C_{n,r} \int_{B(0,d)} |y|^{r(2-n)} \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \le C(d,n,r) < \infty \qquad \text{für } n \ge 3$$
$$\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \le \int_{B(0,d)} (\ln|y|)^r \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \le C(d,r) < \infty \qquad \text{für } n = 2.$$

Für $p > \frac{n}{2}$ folgt $|Nf(x)| \le \|\Gamma(x-.)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)} \le C(d,n,p)\|f\|_{L^p(\Omega)}$ und $N : L^p(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ ist stetig mit $\|N\| \le C(d,n,p)$. Nun sei $1 \le p \le \frac{n}{2}$, $p \le q < \infty$ und $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$. Für $\frac{1}{q} =: \frac{1}{p} - (1 - \frac{1}{r})$, also $0 \le 1 - \frac{1}{r} < \frac{2}{n}$ und $1 \le r < \frac{n}{n-2}$ folgt

$$\|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)} \le C(d,n,r) = C(d,n,p,q) \qquad \text{für } x \in \Omega.$$

Mit $\frac{p-1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{r-1}{r} = 1$, $r\frac{p-1}{p} + \frac{r}{q} = 1$ und $\frac{p}{q} + p\frac{r-1}{r} = 1$ folgt aus der Hölderungleichung

$$\begin{aligned}
|Nf(x)| &\le \int_\Omega |\Gamma(x-y)|^{r\frac{p-1}{p}} |\Gamma(x-y)|^{\frac{r}{q}} |f(y)|^{\frac{p}{q}} |f(y)|^{p\frac{r-1}{r}} \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \\
&\le \|\Gamma^{r\frac{p-1}{p}}(x-.)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \left(\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r |f(y)|^p \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \right)^{\frac{1}{q}} \|f^{p\frac{r-1}{r}}\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)} \\
&= \|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)}^{r\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r |f(y)|^p \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{p\frac{r-1}{r}} \\
\|Nf\|_{L^q(\Omega)} &\le \sup_{x\in\Omega} \|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)}^{r\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega \int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r |f(y)|^p \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \,\mathrm{d}^\mathrm{n} x \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{p\frac{r-1}{r}} \\
&\le \sup_{x\in\Omega} \|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)}^{r\frac{p-1}{p}+\frac{r}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}+p\frac{r-1}{r}} \le C(d,n,p,q)\|f\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Für $f \in C_0^1(\Omega) \subset C_0^1(\mathbb{R}^n)$ folgt $Nf \in C^2(\Omega)$ mit $\nabla\Gamma = \frac{x}{n\omega_n|x|^n} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ aus

$$\begin{aligned}
\nabla Nf(x) &= \int_\Omega \nabla\Gamma(x-y) f(y) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Gamma(z) f(x-z) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} z \qquad z = x-y \\
\partial_i \nabla Nf(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Gamma(z) \partial_i f(x-z) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} z = \int_\Omega \nabla\Gamma(x-y) \partial_i f(y) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \qquad y = x-z.
\end{aligned}$$

Wir wählen $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega' \Subset \Omega$ mit $\partial\Omega' \in C^{0,1}$. Für $\varrho \downarrow 0$ konvergiert $\|\nabla\Gamma\|_{L^1(B(0,\varrho))} \to 0$. Aus $\Delta\Gamma = 0$ auf $\Omega \setminus \{x\}$ und dem Divergenzsatz folgt wie im Beweis von (4.48)

$$\begin{aligned}
\Delta Nf(x) &= \int_{\Omega'} \nabla\Gamma(x-y) \cdot \nabla f(y) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y = \lim_{\varrho\downarrow 0} \int_{\Omega' \setminus B(x,\varrho)} \nabla\Gamma(x-y) \cdot \nabla f(y) \,\mathrm{d}^\mathrm{n} y \\
&= -\lim_{\varrho\downarrow 0} \int_{\partial B(x,\varrho)} \nabla\Gamma(x-y) f(y) \cdot N \,\mathrm{d}\sigma(y) = f(x). \qquad \textbf{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Wir kommen zu den Calderon-Zygmundabschätzungen, die für $1 < p < \infty$ die $W^{2,p}$-Norm einer starken Lösung von $Lu = f$ durch die L^p-Norm von f und schwächerem Normen von u abschätzt. Wieder betrachten wir zuerst Δ auf dem $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.30. *Für $1 < p < \infty$ und $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C(n,p)\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.*

Beweis: $n = 1$ ist trivial. Für $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit Proposition 3.21 eine Folge $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $u_m \to u$ stark in $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Gilt die Abschätzung für u_m, so folgt sie für u. Also genügt es $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})^n$ zu betrachten. Wegen der Green'schen Darstellungsformel (4.48) ist $u = N\Delta u$ das Newtonpotenial seines Laplace, und die Abschätzung folgt aus der folgenden Calderon-Zygmundungleichung für das Newtonpotential.**q.e.d.**

Spezialfall der Calderon-Zygmundungleichung 4.31. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \ge 2$ und $1 < p < \infty$. Dann erfüllt für $f \in L^p(\Omega)$ das Newtonpotential $Nf \in W^{2,p}(\Omega)$ mit*

$$\|D^2(Nf)\|_{L^p(\Omega)} \le C(n,p)\|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad \textit{mit } (Nf)(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y. \tag{4.49}$$

Beweis: Sei zuerst $p = 2$. Für $f \in C_0^\infty(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $u := Nf \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und mit Lemma 4.29 gilt $\Delta u = f$. Für $R > R_0$ mit $\Omega \subseteq B(0, R_0)$, gilt mit dem Divergenzsatz

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} |D^2 u|^2 &= \int_{B(0,R)} \sum\nolimits_{i,j} |\partial_j \partial_i u|^2 = -\int_{B(0,R)} \nabla u \cdot \nabla\Delta u + \int_{\partial B(0,R)} \sum\nolimits_i \partial_i u \nabla \partial_i u \cdot N\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{B(0,R)} \Delta u \Delta u - \int_{\partial B(0,R)} \nabla u \Delta u \cdot N\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\partial B(0,R)} \sum\nolimits_i \partial_i u \nabla \partial_i u \cdot N\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{B(0,R)} f^2 + \int_{\partial B(0,R)} \sum\nolimits_i \partial_i u \nabla \partial_i u \cdot N\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

da $f = \Delta u = 0$ auf $\partial B(0,R)$. Mit den dritten Abschätzungen in (4.47) folgt

$$|D^k u(x)| \le \int_\Omega |D^k \Gamma(x-y)| \cdot |f(y)|\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \le \frac{C_n \|f\|_{L^1(\Omega)}}{(|x| - R_0)^{n+k-2}} \quad \text{für } |x| > R_0, k = 1, 2.$$

Für $f \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt folgende Abschätzung und damit auch (4.49) für $C(n,2) = 1$:

$$\left| \int_{\partial B(0,R)} \sum\nolimits_i \partial_i u \nabla \partial_i u \cdot N\,\mathrm{d}\sigma \right| \le \frac{\omega_n R^{n-1} C_n^2 \|f\|^2_{L^1(\Omega)}}{(R-R_0)^{n-1}(R-R_0)^n} \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

Für $f \in L^2(\Omega)$, wählen wir $f_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $f_m \to f \in L^2(\Omega)$ Mit Lemma 4.29 ist $N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ stetig, also $Nf_m \to Nf$ in $L^2(\Omega)$. Aus dem eben Bewiesenen folgt

$$\limsup_{m\to\infty} \|D^2(Nf_m)\|_{L^2(\Omega)} \le \limsup_{m\to\infty} \|f_m\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dies ergibt $Nf \in W^{2,2}(\Omega)$ und (4.49) für f. Damit ist (4.49) für $p = 2$ bewiesen.

Für feste $1 \le i, j \le n$ erhalten wir den stetigen, linearen Operator

$$\partial_j\partial_i N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \qquad (\partial_j\partial_i N)f := \partial_j\partial_i(Nf).$$

Aus (4.49) für $p = 2$ mit $C(n, 2) = 1$ folgt für $t > 0$

$$\mu(|\partial_j\partial_i Nf| > t)t^2 \le \int_{[|\partial_j\partial_i Nf| \ge t]} |f|^p \le \int_\Omega |f|^2 \qquad \mu(|\partial_j\partial_i Nf| > t) \le \frac{\|f\|^2_{L^2(\Omega)}}{t^2}. \tag{4.50}$$

Als nächsten zeigen wir

$$\mu(|\partial_j\partial_i Nf| > t) \le \frac{C_n\|f\|_{L^1(\Omega)}}{t} \text{ für } t > 0 \tag{4.51}$$

Wir setzen f auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ durch 0 fort, fixieren $t > 0$ und wählen $R > 0$ mit

$$\Omega \subseteq Q_0 := [-R, R]^n, \qquad \|f\|_{L^1(\Omega)} \le t\mu(Q_0). \tag{4.52}$$

Wir zerlegen den Würfel Q_0 gemäß Calderon-Zygmund, d.h. wir halbieren die Seiten von Q_0 und zerlegen Q_0 in 2^n kongruente Unterwürfel Q. Für sie gilt entweder

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f| \le t \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f| > t.$$

Die ersten werden weiter unterteilt. Die zweiten fassen wir sukzessiv zu einer Familie $\{Q_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ von Unterwürfeln zusammen, deren Innere paarweise disjunkt sind. Jedes Q_l ist in einem eindeutigen Vorgängerwürfel $\tilde{Q}_l$ doppelter Seitenlänge enthalten, der

$$\frac{1}{\mu(\tilde{Q}_l)}\int_{\tilde{Q}_l} |f| \le t \qquad t < \frac{1}{\mu(Q_l)}\int_{Q_l} |f| \le 2^n t. \tag{4.53}$$

erfüllt, weil $\mu(\tilde{Q}_l) = 2^n\mu(Q_l)$ gilt. Wir setzen $A := Q_0 \setminus \cup_{l\in\mathbb{N}} Q_l$, und sehen, dass für jedes $x \in A$ eine Folge $Q_{x,l}$ von Unterwürfeln mit beliebig kleiner Seitenlänge und

$$\frac{1}{\mu(Q_{x,l})}\int_{Q_{x,l}} |f| \le t$$

existiert. Da fast alle x Lebesguepunkte[5] von f sind, d.h. $f(x) = \lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x,\varrho))}\int_{B(x,\varrho)} f$, folgt $|f| \le t$ fast überall auf A. Wir zerlegen $f = g + h$ mit $h := f - g$ und folgern

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ \frac{1}{\mu(Q_l)}\int_{Q_l} f & \text{für } x \in Q_l, l \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad |g| \le 2^n t \text{ fast überall auf } Q_0 \tag{4.54}$$

$$h = 0 \text{ auf } A \qquad \int_{Q_l} h = 0 \text{ für } l \in \mathbb{N} \qquad \int_{Q_l} |g| = \left|\int_{Q_l} f\right| \le \int_{Q_l} |f|$$

$$\|h\|_{L^1(Q_0)} \le \|f\|_{L^1(Q_0\setminus A)} + \|g\|_{L^1(Q_0\setminus A)} \le 2\|f\|_{L^1(\Omega)} \quad \|g\|_{L^1(Q_0)} \le \|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.55}$$

[5] In E.Stein:"Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions" Kapitel I §1.8.

Da $\partial_j\partial_i N$ linear ist, gilt $\qquad |\partial_j\partial_i Nf| \leq |\partial_j\partial_i Ng| + |\partial_j\partial_i Nh| \qquad$ und

$$\mu(|\partial_j\partial_i Nf| > t) \leq \mu(|\partial_j\partial_i Ng| > \tfrac{t}{2}) + \mu(|\partial_j\partial_i Nh| > |\tfrac{t}{2}). \tag{4.56}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite sehen wir mit (4.50), (4.54) und (4.55)

$$\mu\left(|\partial_j\partial_i Ng| > \tfrac{t}{2}\right) \leq \frac{4\|g\|^2_{L^2(Q_0)}}{t^2} \leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^1(Q_0)}}{t} \leq \frac{C_n\|f\|_{L^1(\Omega)}}{t}. \tag{4.57}$$

Zur Abschätzung des zweiten Terms schreiben wir $h = \sum_{l=1}^\infty h_l$ mit $h_l := h \cdot \chi_{Q_l}$, da $h = 0$ auf A mit (4.54). Für $x \notin Q_l$ und das Zentrum $\bar{y}$ von $Q_l = \bar{y} + [-\varrho, \varrho]^n$ folgt

$$\partial_j\partial_i Nh_l(x) = \int_{Q_l} \partial_j\partial_i\Gamma(x-y)h_l(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y = \int_{Q_l} \left(\partial_j\partial_i\Gamma(x-y) - \partial_j\partial_i\Gamma(x-\bar{y})\right) h_l(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y$$

$$|\partial_j\partial_i Nh_l(x)| \leq C_n\sqrt{n}\varrho \cdot d(x, Q_l)^{-n-1} \int_{Q_l} |h_l| \text{ wegen } |D^3\Gamma(x)| \leq C_n|x|^{-n-1} \text{ für } x \neq 0.$$

Da $d(x, Q_l) \geq |x-\bar{y}| - \sqrt{n}\varrho \geq \frac{1}{2}|x-\bar{y}|$ für $x \notin B(\bar{y}, 2\sqrt{n}\varrho) =: B_l$ ergibt sich

$$\int_{Q_0 \setminus B_l} |\partial_j\partial_i Nh_l| \leq \int_{\mathbb{R}^n - B_l} C_n\varrho|x-\bar{y}|^{-n-1}\left(\int_{Q_l}|h_l|\right)\mathrm{d}x \leq C_n\int_{Q_l}|h_l|.$$

Setzen wir $A^* := Q_0 \setminus \cup_{l\in\mathbb{N}} B_l$, so erhalten wir mit Summation und (4.55)

$$\int_{A^*} |\partial_j\partial_i Nh| \leq C_n\|f\|_{L^1(\Omega)} \qquad \mu([|\partial_j\partial_i Nh| > \tfrac{t}{2}] \cap A^*) \leq \frac{C_n\|f\|_{L^1(\Omega)}}{t}. \tag{4.58}$$

Andererseits gilt wegen der zweiten Ungleichung in (4.53)

$$\mu(Q_0 \setminus A^*) \leq \sum_{l=1}^\infty \mu(B_l) \leq C_n\sum_{l=1}^\infty \mu(Q_l) \leq \frac{C_n}{t}\sum_{l=1}^\infty \int_{Q_l}|f| \leq \frac{C_n\|f\|_{L^1(\Omega)}}{t}. \tag{4.59}$$

Dann folgt (4.51) aus (4.56), (4.57), (4.58) und (4.59). Wir wenden den Marcinkiewiczinterpolationsssatz 4.32 an. Für $1 < p < 2$ ist dann wegen (4.50) und (4.51)

$$\partial_j\partial_i N := L^p(\Omega) \to L^p(\Omega), \qquad \text{mit} \qquad \|\partial_j\partial_i N\| \leq C(n,p)$$

stetig. Für $2 < p < \infty$, $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt mit (4.49) für $q = \frac{p}{p-1} \in (1,2)$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \partial_j\partial_i(Nf)g\right| &= \left|\int_\Omega (N\partial_j\partial_i f)g\right| = \left|\int_\Omega \partial_j\partial_i fNg\right| = \left|\int_\Omega f\partial_j\partial_i(Ng)\right| \\ &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|\partial_j\partial_i Ng\|_{L^q(\Omega)} \leq C(n,q)\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\|\partial_j\partial_i Nf\|_{L^p(\Omega)} \leq C(n,p)\|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{also} \qquad \|\partial_j\partial_i N\| \leq C(n,p).$$

Mit Lemma 4.29 folgt (4.49) durch Approximation. **q.e.d.**

Marcinkiewiczinterpolationssatz 4.32. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, $1 \le q < p \le \infty$ und T eine subadditive Abbildung von $L^q(\Omega) + L^p(\Omega)$ in die meßbaren Funktionen auf Ω mit*

$$|T(f_1 + f_2)| \le |Tf_1| + |Tf_2| \ \textit{(subadditiv)} \quad \mu(|Tf| > t) \le \left(\frac{T_q \|f\|_{L^q(\Omega)}}{t}\right)^q$$

$$\mu(|Tf| > t) \le \left(\frac{T_p \|f\|_{L^p(\Omega)}}{t}\right)^p \textit{für } p < \infty \qquad \|Tf\|_{L^\infty(\Omega)} \le T_\infty \|Tf\|_{L^\infty(\Omega)} \textit{ für } p = \infty$$

und $t > 0$. Dann gilt für $f \in L^r(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ mit $q < r < p$ und $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{p}$

$$\|Tf\|_{L^r(\Omega)} \le C(p,q,r) T_q^\alpha T_p^{1-\alpha} \|f\|_{L^r(\Omega)} \tag{4.60}$$

Beweis: Für $f \in L^r(\Omega) \subseteq L^q(\Omega) + L^p(\Omega)$ und $s > 0$ zerlegen wir

$$f = f_1 + f_2 \qquad f_1 := f \cdot \chi_{[|f|>s]} \qquad f_2 := f \cdot \chi_{[|f|\le s]}.$$

Es gilt $|Tf| \le |Tf_1| + |Tf_2|$, also für $p < \infty$

$$\mu(|Tf| > t) \le \mu(|Tf_1| > \tfrac{t}{2}) + \mu(|Tf_2| > \tfrac{t}{2}) \le \left(\frac{2T_q \|f_1\|_{L^q(\Omega)}}{t}\right)^q + \left(\frac{2T_p \|f_2\|_{L^p(\Omega)}}{t}\right)^p.$$

Für $s = \frac{t}{A}$ mit einem später zu wählendem $A > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |Tf|^r = r \int_0^\infty t^{r-1} \mu(|Tf| > t)\,\mathrm{d}t \le \\
&\quad \le r(2T_q)^q \int_0^\infty t^{r-1-q} \left(\int_{[|f|>t/A]} |f|^q\right) \mathrm{d}t + r(2T_p)^p \int_0^\infty t^{r-1-p} \left(\int_{[|f\le t/A]} |f|^p\right) \mathrm{d}t \\
&= r(2T_q)^q A^{r-q} \int_0^\infty \tau^{r-1-q} \left(\int_{[|f|>\tau]} |f|^q\right) \mathrm{d}\tau + r(2T_p)^p A^{r-p} \int_0^\infty \tau^{r-1-p} \left(\int_{[|f|\le\tau]} |f|^p\right) \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Mit $$\int_0^\infty \tau^{r-1-q} \left(\int_{[|f|>\tau]} |f|^p\right) \mathrm{d}\tau = \int_\Omega |f|^q \int_0^{|f|} \tau^{r-1-q}\,\mathrm{d}\tau = \tfrac{1}{r-q} \int_\Omega |f|^r$$

und $$\int_0^\infty \tau^{r-1-p} \left(\int_{[|f|>\tau]} |f|^p\right) \mathrm{d}\tau = \int_\Omega |f|^p \int_{|f|}^\infty \tau^{r-1-p}\,\mathrm{d}\tau = \tfrac{1}{p-r} \int_\Omega |f|^r$$

folgt $$\int_\Omega |Tf|^r \le \left(\tfrac{r}{r-q}(2T_q)^q A^{r-q} + \tfrac{r}{p-r}(2T_p)^p A^{r-p}\right) \int_\Omega |f|^r. \tag{4.61}$$

Ist $p = \infty$, so gilt $|Tf_2| \le T_\infty s$ und für $s = \frac{t}{2T_\infty}$

$$\mu(|Tf| > t) \le \mu(|Tf_1| > \tfrac{t}{2}) \le \left(\frac{2T_q \|f_1\|_{L^q(\Omega)}}{t}\right)^q.$$

Für $p<\infty$ wählen wir $A = 2T_q^{-\frac{q}{p-q}} T_p^{\frac{p}{p-q}}$, während für $p=\infty$ und $A = 2T_\infty$ der zweite Term in (4.61) wegfällt. In beiden Fällen folgt (4.60) aus

$$\|Tf\|_{L^r(\Omega)} \leq 2\left(\frac{r}{r-q}+\frac{r}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}} T_q^\alpha T_p^{1-\alpha}\|f\|_{L^r(\Omega)} \quad \text{mit } C(p,q,r) = 2\left(\frac{r}{r-q}+\frac{r}{p-r}\right)^{1/r} \textbf{.q.e.d.}$$

Die Differentialoperatoren L (2.3) sollen neben (4.44)-(4.45) folgendes erfüllen:

$$\text{es gibt } 0<\epsilon,\varrho<1 \qquad \operatorname*{osc}_{B(x,\varrho)\cap\Omega} a_{ij} < \epsilon \qquad \text{für alle } x\in\Omega. \tag{4.62}$$

Bemerkung 4.33. *Für $a_{ij}\in C(\bar\Omega)$ ist für alle $\epsilon>0$ (4.62) mit einem $\varrho>0$ erfüllt. Eine Vorgabe solcher $\varrho>0$ für alle hinreichend kleinen $\epsilon>0$ heißt Stetigkeitsmodul.*

Für $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ bezeichne wieder $\Omega_\pm := \Omega\cap\mathbb{R}^{n-1}\times\pm(0,\infty)$ und $\Omega_0 = \Omega\cap\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$.

Calderon-Zygmundabschätzungen 4.34. *Sei $1<p<\infty$, und L ein Differentialoperator in Nicht-Divergenzform* (2.3)*, der auf $B(0,2)$ bzw. $B(0,2)_+$* (4.44)-(4.45) *und*(4.62) *mit genügend kleinem $\epsilon=\epsilon(\Lambda,n,p)>0$ erfüllt. Dann erfüllt jede Lösung $u\in W^{2,p}(B(0,2))$ von $Lu=f$ auf $B(0,2)$ mit $f\in L^p(B(0,2))$ folgende Abschätzung:*

$$\|u\|_{W^{2,p}(B(0,1))} \leq C(\Lambda,n,p,\varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2))}+\|u\|_{L^p(B(0,2))}). \tag{4.63}$$

Für $\varphi\in W^{2,p}(B(0,2)_+)$ und $f\in L^p(B(0,2)_+)$ erfüllt jede Lösung $u\in W^{2,p}(B(0,2)_+)$

$$Lu = f \text{ auf } B(0,2)_+ \qquad\qquad u=\varphi \text{ auf } B(0,2)_0$$

$$\|u\|_{W^{2,p}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda,n,p,\varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)}+\|\varphi\|_{W^{2,p}(B(0,2)_+)}+\|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}). \tag{4.64}$$

Beweis: O.B.d.A. gilt $\varrho<1$. Für $x_0\in B(0,1)$ ist $B(x_0,\varrho)\subseteq B(0,2)$. Für $v\in W^{2,p}(B(x_0,\varrho))$ betrachten wir $L_0v := \sum_{ij} a_{ij}(x_0)\partial_j\partial_i v$. Für $v\in W^{2,p}_0(B(x_0,\varrho))\subseteq W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt aus Lemma 4.30 nach Anwendung einer linearen Transformation

$$\begin{aligned}
&\|D^2v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \leq C(\Lambda,n,p)\|L_0v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}\\
&\leq C(\Lambda,n,p)\left(\left\|\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i v\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + \left\|\sum\nolimits_{ij} a_{ij}-a_{ij}(x_0))\partial_j\partial_i v\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}\right)\\
&\leq C(\Lambda,n,p)\left\|\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i v\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + C(\Lambda,n,p)\operatorname*{osc}_{B(x_0,\varrho)}\left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\right)\|D^2v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}.
\end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\epsilon=\epsilon(\Lambda,n,p)$ folgt durch Absorption

$$\|D^2v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \leq C(\Lambda,n,p)\left\|\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i v\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}.$$

Für $0 < \sigma < 1$, $\sigma' = \frac{1+\sigma}{2}$ erhalten wir für $v := u\eta \in W_0^{2,p}(B(x_0,\varrho))$ mit einer Wahl

$$\eta \in C_0^\infty(B(x_0,\sigma'\varrho)) \quad \eta \equiv 1 \text{ auf } B(x_0,\sigma\varrho) \quad |D^k\eta| \le C_n((1-\sigma)\varrho)^{-k} \text{ für } k = 0,1,2.$$

$$\begin{aligned}
&\|D^2u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} \le \|D^2v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \\
&\le C(\Lambda,n,p)\left\|\sum\nolimits_{ij}(a_{ij}\eta\partial_j\partial_i u + 2a_{ij}\partial_i u\partial_j\eta + ua_{ij}\partial_j\partial_i\eta)\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \\
&\le C(\Lambda,n,p)\bigg(\|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + \frac{1}{(1-\sigma)\varrho}\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,\sigma'\varrho))} + \frac{1}{(1-\sigma)^2\varrho^2}\|u\|_{L^p(B(x_0,\sigma'\varrho))}\bigg).
\end{aligned}$$

Mit folgenden Abkürzungen schreiben wir das um zu

$$\begin{aligned}
S_k &:= \sup_{0<\sigma<1}(1-\sigma)^k\varrho^k\|D^ku\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} \quad k = 0,1,2 \\
S_2 &\le C(\Lambda,n,p)\left(\varrho^2\|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + S_1 + S_0\right). \qquad (4.65)
\end{aligned}$$

Für $\frac{1}{2} < \sigma < 1, 0 < \delta < 1$ gilt mit dem Interpolationslemma 3.41 mit $\epsilon = \delta(1-\sigma) < 1$

$$\begin{aligned}
(1-\sigma)\varrho\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} &\le \delta\sigma(1-\sigma)^2\varrho^2\|D^2u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} + C(n,p)\delta^{-1}\sigma^{-1}\|u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} \\
&\le \delta S_2 + C(n,p)\delta^{-1}S_0
\end{aligned}$$

nach Reslkalieren mit $\sigma\varrho$. Wir bilden das Supremum über $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ und erhalten

$$S_1 \le 2\sup_{\frac{1}{2}<\sigma<1}(1-\sigma)\varrho\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} \le 2\delta S_2 + C(n,p)\delta^{-1}S_0.$$

Dies setzen wir mit kleinem $\delta = \delta(\Lambda,n,p)$ in (4.65) ein und wählen $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
S_2 &\le C(\Lambda,n,p)(\varrho^2\|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + \|u\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}) \\
\|D^2u\|_{L^p(B(x_0,\frac{\varrho}{2}))} &\le C(\Lambda,n,p)(\|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + \varrho^{-2}\|u\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}).
\end{aligned}$$

Überdecken wir $B(0,1)$ mit endlich vielen Bällen $B(x_0,\frac{\varrho}{2})$ mit $x_0 \in B(0,1)$, so folgt

$$\|D^2u\|_{L^p(B(0,1))} \le C(\Lambda,n,p,\varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2))} + \|u\|_{L^p(B(0,2))}).$$

Schließlich folgt (4.63) aus dem Interpolationslemma 3.41.

Im Fall mit Rand können wir wegen folgender Abschätzung wieder $\varphi = 0$ annehmen:

$$\|L\varphi\|_{L^p(B(0,2)_+)} \le C(\Lambda,n,p)\|\varphi\|_{W^{2,p}(B(0,2)_+)}.$$

Zuerst nehmen wir $\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} \leq \epsilon$ an, und setzen u mit E_- (3.24) ungerade auf $B(0,2)$ fort, d.h. für $(y,t) \in B(0,2)_-$ sei

$$\begin{aligned} u(y,t) &:= -u(y,-t) \qquad\qquad f(y,t) := f(y,-t) \\ a_{ij} &:= (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor + \lfloor \frac{j}{n} \rfloor} a_{ij}(y,-t) \quad b_i(y,t) := (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor} b_i(y,-t) \quad c(y,t) := c(y,-t). \end{aligned}$$

Mit Proposition 3.38 sehen wir $u \in W^{2,p}(B(0,2))$, L erfüllt (4.44)-(4.45) auf $B(0,2)$

$$\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(0,2))} \leq \epsilon \qquad \|f\|_{L^p(B(0,2))} \leq 2^{1/p} \|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} \qquad Lu = f.$$

Mit dem bereits bewiesenen Resultat folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,p}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Lambda, n, p)(\|f\|_{L^p(B(0,2))} + \|u\|_{L^p(B(0,2))}) \\ &\leq C(\Lambda, n, p)(\|f\|_{L^p(B(0,2))} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall wählen wir mit (4.62) für alle $x_0 \in B(0,1)_0$ ein symmetrisches (a^0_{ij}) mit $\|a_{ij} - a^0_{ij}\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} \leq \epsilon$. Nach einem affinen Parameterwechsel transformiert sich L zu $\tilde{L}$ und (a^0_{ij}) zu (δ_{ij}) mit $\|\tilde{a}_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(x_0,c_0(\Lambda)_\varrho))} \leq C(\Lambda)\epsilon$. Mit dem bereits Bewiesenen erhalten wir schließlich mit einer endlichen Überdeckung

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,p}(B(x_0,c_0(\Lambda)_\varrho)_+)} &\leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}) \\ \|u\|_{W^{2,p}(B(0,1) \cap \{0 < x_n < c_0(\Lambda)\varrho\})} &\leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}) \end{aligned}$$

und insgesamt mit (4.63) auch (4.64)

$$\|u\|_{W^{2,p}(B(0,1) \cap \{x_n > c_0(\Lambda)\varrho\})} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Globale Calderon-Zygmundabschätzungen 4.35. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $1 < p < \infty$, und L ein Differentialoperator in Nicht-Divergenzform* (2.3)*, der auf Ω* (4.44)-(4.45) *und* (4.62) *mit genügend kleinem $\epsilon = \epsilon(\Omega, \Lambda, n, p) > 0$ erfüllt. Für $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ und $f \in L^p(\Omega)$ erfüllt eine Lösung $u \in W^{2,p}(\Omega)$ des Dirchletproblems*

$$\begin{gathered} Lu = f \text{ fast überall in } \Omega \qquad\qquad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega \\ \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \end{gathered} \tag{4.66}$$

Beweis: Wir können $\varphi = 0$ annehmen. Wir betrachten $x_0 \in \partial\Omega$. Da $\partial\Omega \in C^{1,1}$, können wir $\partial\Omega$ in einer Umgebung $U(x_0)$ mit einem $C^{1,1}$-Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und $\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{2,p}(B(0,2)_+)$ erfüllt $\tilde{u} = 0$ auf $B(0,2)_0$. Wir betrachten wie im Beweis von Satz 4.19 den Differentialioperator $\tilde{L}$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{kl} &:= \Big(\sum\nolimits_{ij} a_{ij} \partial_i \Psi_k \partial_l \Psi_l\Big) \circ \Psi^{-1} \qquad \tilde{b}_k := \Big(\sum\nolimits_{ij} a_{ij} \partial_j \partial_i \Psi_k + \sum\nolimits_i b_i \partial_i \Psi_k\Big) \circ \Psi^{-1} \\ \tilde{c} &:= c \circ \Psi^{-1} \in L^\infty(B(0,2)_+) \qquad \tilde{f} := f \circ \Psi^{-1} \in L^p(B(0,2)_+) \end{aligned}$$

so gilt $\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f}$ auf $B(0,2)_+$. Weiter erfüllt $\tilde{f}$ (4.44)-(4.45) und (4.62) mit $\Lambda, \varrho, \epsilon$ ersetzt durch $C(\Lambda, \Psi, n), c_0(\Psi)\varrho, C_0(\Psi, \Lambda)\epsilon$. Setzen wir $V(x_0) := \Psi^{-1}(B(0,1))$, so erhalten wir aus den Calderon-Zygmundabschätzungen (4.63) folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{2,p}(V(x_0)\cap\Omega)} &\leq C(\Psi, n, p)\|\tilde{u}\|_{W^{2,p}(B(0,1)_+)}\\ &\leq C(\Psi, \Lambda, n, p, \varrho)(\|\tilde{f}\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^p(B(0,2)_+)})\\ &\leq C(\Psi, \Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Genauso erhalten wir den Satz 4.34 für jedes $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $V(x_0) \subseteq \Omega$ mit

$$\|u\|_{W^{2,p}(V(x_0))} \leq C(\Lambda, d(x_0, \partial\Omega), n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}).$$

Indem wir die kompakte Menge $\bar{\Omega} \subseteq V(x_0)\cup\ldots\cup V(x_N)$ mit endlich vielen $x_1, \ldots, x_N \in \bar{\Omega}$ überdecken folgt (4.66) aus diesen beiden Abschätzungen. **q.e.d.**

Die Eindeutigkeit von starken Lösungen aus $W^{2,p}$ für das Dirichletproblem mit $c \leq 0$ folgt für $p \geq n$ aus dem Eindeutigkeitsatz 4.26, bzw. dem Alexandroff'schen Maximumprinzip 4.22. Für $1 < p < n$ brauchen wir zuerst ein Regularitätsresultat.

Satz 4.36. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 < p, q < \infty$, und L ein Differentialoperator in Nicht-Divergenzform* (2.3)*, der auf Ω* (4.44)-(4.45) *und* (4.62) *mit $\epsilon = \epsilon(\Lambda, n, p, q) > 0$ erfüllt. Eine starke Lösung $u \in W^{2,q}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω mit $f \in L^p(\Omega)$ liegt in $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Gilt darüberhinaus $\partial\Omega \in C^{1,1}$,* (4.62) *mit $\epsilon = \epsilon(\Omega, \Lambda, n, p, q) > 0$ und $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ mit $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, so liegt die Lösung sogar in $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Beweis: Es genügt $p > q$ zu betrachten. Wir betrachten $x_0 \in \Omega$ und $B(x_0, \varrho_0) \Subset \Omega$ mit $0 < \varrho_0 < \varrho$, also existiert mit (4.62) ein symmetrisches $(a^0_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\|a_{ij} - a^0_{ij}\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} \leq \epsilon.$$

Für ein $\eta \in C^\infty_0(B(x_0, \varrho_0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(x_0, \frac{\varrho_0}{2})$ und $v := u\eta \in W^{2,q}_0(B(x_0, \varrho))$ gilt

$$\begin{aligned}L_0 v &:= \sum\nolimits_{ij} a^0_{ij}\partial_j\partial_i v = \sum\nolimits_{ij}(a^0_{ij} - a_{ij})\partial_j\partial_i v + g \text{ auf } \mathbb{R}^n \quad \text{mit}\\ g &:= \eta f - \sum\nolimits_i \eta b_i\partial_i u - \eta c u + \sum\nolimits_{ij}(2a_{ij}\partial_i u\partial_j\eta + u a_{ij}\partial_j\partial_i\eta).\end{aligned}$$

Mit dem Soboleveinbettungssatz 3.43 folgt $u \in W^{1,\frac{nq}{n-1}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $g \in L^r(B(x_0, \varrho_0))$ für $r := \min\{p, \frac{nq}{n-1}\} \in (q, p)$. Mit einer linearen Transformation ist o.B.d.A.

$$a^0_{ij} = \delta_{ij} \qquad v \in W^{2,q}_0(B_{C(\Lambda)}) \qquad \|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B_{C(\Lambda)}} \leq C(\Lambda)\epsilon. \tag{4.67}$$

Aufgrund der Definition von L_0, der Green'schen Darstellungsformel (4.48), Approximation und der Stetigkeit des Newtonpotentials N aus Lemma 4.29 löst v

$$v = Tv + Ng \quad \text{mit} \qquad Tw := N\left(\sum\nolimits_{ij}(\delta_{ij} - a_{ij})\partial_j\partial_i w\right). \tag{4.68}$$

Aus dem Spezialfall der Calderon-Zygmundungleichung 4.31 folgt $Ng \in W^{2,r}(B_{C(\Lambda)}) \subseteq W^{2,q}(B_{C(\Lambda)})$ und die Stetigkeit von $T : W^{2,s}(B_{C(\Lambda)}) \to W^{2,s}(B_{C(\Lambda)})$. Mit (4.67) folgt

$$\begin{aligned}\|Tw\|_{W^{2,s}(B_{C(\Lambda)})} &\leq \|N\|_{\mathcal{L}(L^s(B_{C(\Lambda)}),W^{2,s}(B_{C(\Lambda)}))}\|(a_{ij} - \delta_{ij})\partial_j\partial_i w\|_{L^s(B_{C(\Lambda)})}\\ &\leq C(\Lambda, n, s)\|(a_{ij} - \delta_{ij}\partial_j\partial_i w\|_{L^s(B_{C(\Lambda)})} \leq C(\Lambda, n, p, q)\epsilon\|w\|_{W^{2,s}(B_{C(\Lambda)})}.\end{aligned}$$

Deshalb ist T für hinreichend kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda, n, p, q)$ eine Kontraktion, $\|T\| \leq \frac{1}{2}$. Wegen dem Banachschen Fixpunktsatz und $Ng \in W^{2,r}(B_{C(\Lambda)}) \subseteq W^{2,q}(B_{C(\Lambda)})$ hat (4.68) für $s = q, r$ jeweils einen eindeutigen Fixpunkt v_s in $W^{2,s}(B_{C(\Lambda)})$. Wegen $v \in W^{2,q}(B_{C(\Lambda)})$ gilt dann $v = v_q$. Wegen $v_r \in W^{2,r}(B_{C(\Lambda)}) \subseteq W^{2,q}(B_{C(\Lambda)})$ gilt auch $v = v_q = v_r \in W^{2,r}(B_{C(\Lambda)})$. Iterieren wir dies mit $r_l := \min\{p, \left(\frac{n}{n-1}\right)^l q\}$ endlich oft bis $r_N = p$, so folgt $u \in W^{2,p}(B(x_0, \frac{\varrho_0}{2}))$ und $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Wegen $\partial\Omega \in C^{1,1}$ können wir im Fall mit Rand für $x_0 \in \partial\Omega$ lokal folgendes annehmen:

$$\begin{aligned}\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+ \qquad & \|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} \leq \epsilon \qquad \varphi = 0\\ Lu = f \text{ in } B(0,2)_+ \qquad & u = 0 \text{ auf } B(0,2)_0.\end{aligned}$$

Wir setzen u mit E_- (3.24) ungerade auf $B(0,2)$ fort, d.h. für $(y,t) \in B(0,2)_-$ sei

$$\begin{aligned}u(y,t) &:= -u(y,-t) & f(y,t) &:= f(y,-t)\\ a_{ij}(y,t) &:= (-1)^{\lfloor\frac{i}{n}\rfloor + \lfloor\frac{j}{n}\rfloor}a_{ij}(y,-t) & b_i(y,t) &:= (-1)^{\lfloor\frac{i}{n}\rfloor}b_i(y,-t) \quad c(y,t) := c(y,-t).\end{aligned}$$

Mit Proposition 3.38 sehen wir $u \in W^{2,q}(B(0,2))$, L erfüllt (4.44)-(4.45) in $B(0,2)$, $\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(0,2))} \leq \epsilon$ und $f \in L^p(B(0,2))$ mit $Lu = f$. Mit dem bereits bewiesenen Resultat folgt $u \in W^{2,p}(B(0,1))$, also $u \in W^{2,p}(\Omega)$. **q.e.d.**

Mit den globalen Calderon-Zygmundabschätzungen zeigen wir nun die

Existenz starker Lösungen für das Dirichletproblem 4.37. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}, 1 < p < \infty$, und L ein elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform (2.3), der auf Ω (4.44)-(4.45) erfüllt mit $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ und $c \leq 0$. Dann existiert für $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ und $f \in L^p(\Omega)$ genau eine starke Lösung $u \in W^{2,p}(\Omega)$ des Dirichletproblems $Lu = f$ fast überall auf Ω mit $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Diese erfüllt*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, p, \omega)(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}) \text{ mit Stetigkeitsmodul } \omega. \tag{4.69}$$

Beweis: Die Differenz $u := u_2 - u_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ zweier Lösungen $u_1, u_2 \in W^{2,p}(\Omega)$ löst das Dirichletproblem zu $f = 0$ und $\varphi = 0$. Mit Satz 4.36 und Bemerkung 4.37 folgt $u \in W^{2,n}(\Omega)$, und mit Einbettungssatz in Hölderräume, Satz 3.46, $u \in C^0(\bar{\Omega})$ und mit Proposition 3.32 $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Da $c \leq 0$, folgt mit dem Einbettungssatz Satz 4.26, dass $u = 0$, also $u_1 = u_2$, und es gibt höchstens eine Lösung des Dirichletproblems.

Zur Existenz können wir $\varphi = 0$ annehmen. Zuerst zeigen wir (4.69). Angenommen (4.69) git nicht, so gibt es L_m (2.3), die (4.44)-(4.45) erfüllen und einen Stetigkeitsmodul ω für $a_{ij,m}$ und $u_m \in W^{2,p}(\Omega)$ mit $u_m = 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\|L_m u_m\|_{L^p(\Omega)} < \tfrac{1}{m}\|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

Mit den globalen Calderon-Zygmundabschätzungen 4.35, folgt

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega)(\|L_m u_m\|_{L^p(\Omega)} + \|u_m\|_{L^p(\Omega)}) \\ \|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega)\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \text{ für } m \geq 2C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega). \end{aligned}$$

Nehmen wir zusätzlich $\|u_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$ an, so folgt $\|L_m u_m\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, und u_m ist beschränkt in $W^{2,p}(\Omega)$. Für eine Teilfolge $m \to \infty$ konvergiert $u_m \to u$ schwach in $W^{2,p}(\Omega)$, stark in $W^{1,p}(\Omega)$, insbesondere $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Da $a_{ij,m}$ einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul haben, konvergiert $a_{ij,m} \to a_{ij}$ stark in $C^0(\bar{\Omega})$, $b_{i,m} \to b_i$ und $c_m \to c$ schwach in $L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q \leq \infty$ und eine weitere Teilfolge $m \to \infty$. Damit erfüllt L (2.3) mit Koeffizienten a_{ij}, b_i, c (4.44)-(4.45), und $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$.

Aus $\|L_m u_m\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ folgt $Lu = 0$ fast überall in Ω, und mit dem Eindeutigkeitsresultat folgt $u = 0$ im Widerspruch zu $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$, und somit ist (4.69) bewiesen.

Zur Existenz nehmen wir zuerst $L, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ an und schreiben in Divergenzform

$$L_d v = \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j v) + \sum\nolimits_i \Big(b_i - \sum\nolimits_j \partial_j a_{ji}\Big)\partial_i v + cv = \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i v + \sum\nolimits_i b_i \partial_i v + cv = Lv.$$

Da $c \leq 0$ existiert mit dem Satz 4.3 eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $L_d u = f$ auf Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Für $f \in L^2(\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^{1,1}$ folgt $u \in W^{2,2}(\Omega)$ aus dem Satz von Friedrichs 4.8. Wegen (4.10) ist u eine starke Lösung des Dirichletproblems. Für $f \in L^p(\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^{1,1}$ folgt $u \in W^{2,p}(\Omega)$ aus Satz 4.36.

Allgemeines L, f approximieren wir mit $L_m, f_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $a_{ij,m} \to a_{ij}$ stark in $C^0(\bar{\Omega})$, $b_{i,m} \to b_i$ und $c_m \to c$ schwach in $L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$, $f_m \to f$ schwach in $L^p(\Omega)$, und L_m erfüllt (4.44)-(4.45) für 2Λ, und $a_{ij,m}, a_{ij}$ haben einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul ω_0. Dann existiert wie gezeigt eine Lösung $u_m \in W^{2,p}(\Omega)$ mit

$$L_m u_m = f_m \text{ auf } \Omega \quad u_m = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad \|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega_0)\|f_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für eine Teilfolge $m \to \infty$ konvergiert $u_m \to u$ schwach in $W^{2,p}(\Omega)$, stark in $W^{1,p}(\Omega)$, und $L_m u_m \to L_u$ schwach in $L^p(\Omega)$, da $a_{ij,m} \to a_{ij}$ stark in $C^0(\bar{\Omega})$. Daraus folgt $Lu = f$ fast überall in Ω, und $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ist eine starke Lösung des Dirichletproblems.**q.e.d.**

Schließlich zeigen wir, dass starke Lösungen so regulär sind wie die Daten.

Satz 4.38. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 < p < \infty$, und L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der* (2.3), (4.45) *auf Ω erfüllt, $k \geq 1$ und*

$$\|a_{ij}\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad f \in W^{k,p}(\Omega). \tag{4.70}$$

Für eine starke Lösung von $Lu = f$ in $u \in W^{2,q}(\Omega)$ für $1 < q < \infty$ folgt $u \in W^{k+2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \qquad \text{für } \Omega' \Subset \Omega. \tag{4.71}$$

Ist $\partial\Omega \in C^{k+1,1}$ und $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ mit $\varphi \in W^{k+2,p}(\Omega)$, so gilt $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \tag{4.72}$$

Beweis: Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Für $k = 0$ mit $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ und (4.44) anstatt (4.70) folgt die Regularitätsaussage aus Satz 4.36, und die Abschätzungen aus den Calderon-Zygmundabschätzungen 4.34, 4.35 und der Bemerkung 4.37

Wir nehmen an, dass obige Aussage für $0, \ldots, k-1$ bereits gelten. Wir erhalten im Fall ohne Rand $u \in W^{k+1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und im Fall mit Rand $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega''')} \leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \text{ für } \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega, \tag{4.73}$$
$$\|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \tag{4.74}$$

Dabei beachten wir, dass der Stetigkeitsmodul von a_{ij} für $k = 0$ durch die Annahme $\|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq \Lambda$ gegeben ist. Wie im Beweis von Satz 4.9 vereinfachen wir die Differentialgleichung im Fall mit und ohne Rand mit $\hat{f} \in W^{k,p}(\Omega)$ zu

$$L_0 u := \sum_{ij} a_{ij} \partial_j \partial_i u = f - \sum_i b_i \partial_i u - cu =: \hat{f} \text{ fast überall in } \Omega \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{W^{k,p}(\Omega''')} &\leq C(\Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega''')} + \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega''')}) \\ &\leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \\ |\hat{f}\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned} \tag{4.76}$$

Für die endliche Differenz $\partial_l^h u$, siehe (3.13), $l = 1, \ldots, n, 0 < |h| < d(\Omega'', \partial\Omega''')$, und $\bar{u}(x) := u(x + he_l)$ gilt mit(4.70), (4.73) und (4.75)

$$L(\partial_l^h u) = \partial_l^h \hat{f} - \sum_{ij} (\partial_l^h a_{ij}) \partial_j \partial_i \bar{u} =: f_l^h \text{ fast überall in } \Omega''.$$

$$\begin{aligned} \|f_l^h\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} &\leq \|\hat{f}\|_{W^{k,p}(\Omega''')} + C_n \|\partial_l^h a_{ij}\|_{W^{k-1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega''')} \\ &\leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned}$$

Mit (4.71) für $k-1$ und (4.73) folgt $\partial_l^h u \in W^{k+1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega'')$ mit

$$\begin{aligned}\|\partial_l^h u\|_{W^{k+1,p}(\Omega')} &\le C(\Omega'',\Omega',\Lambda,n,p,k)(\|f_l^h\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} + \|\partial_l^h u\|_{L^p(\Omega'')})\\ &\le C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}).\end{aligned}$$

Da wir $u \in W^{k+1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ bereits wissen, konvergiert $\partial_l^h u \to \partial_l u$ stark in $W^{k,p}(\Omega')$ für $h \to 0$. Daraus folgt $\partial_l u \in W^{k+1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, also $u \in W^{k+2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, und (4.71) für k.

Im Fall mit Rand können wir den Rand mit einem $C^{k+1,1}$-Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und, da $\|v\|_{W^{k+2,p}(V)} \sim \|v \circ \Psi^{-1}\|_{W^{k+2,p}(\Psi(V))}$ mit einer von Ψ, n, p und k abhängigen Konstanten, genügt es lokal $\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+$ zu betrachten.

Da wir $u \in W^{k+2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap W^{k+1,p}(\Omega)$ bereits wissen, folgt aus (4.75),(4.74) und (4.76)

$$L_0(\partial_l u) = \partial_l \hat{f} - \sum\nolimits_{ij} (\partial_l a_{ij})\partial_j\partial_i u =: f_l \text{ für } l = 1,\ldots,n \text{ fast überall in } B(0,2)_+ \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned}\|f_l\|_{W^{k-1,p}(B(0,2)_+} &\le \|\hat{f}\|_{W^{k,p}(\Omega)} + C_n(\|\partial_l a_{ij}\|_{W^{k-1,\infty}(\Omega)}\|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}\\ &\le C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}. \qquad (4.78)\end{aligned}$$

Wir wählen $B(0,\frac{4}{3})_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0,\frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und $\eta \in C_0^\infty(B(0,\frac{4}{3}))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$. Mit Proposition 3.37 und Definition 3.33 folgt $\eta\partial_l u \in W^{1,p}_0(\Omega_0)$ für $l = 1,\ldots,n-1$ und mit (4.77) fast überall in $B(0,2)_+$

$$L_0(\eta\partial_l u) = \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i(\eta\partial_l u) = \eta f_l + \sum\nolimits_{ij}(2a_{ij}\partial_i\eta\partial - jlu + a_{ij}\partial_j\partial_i\eta\partial_l u) =: f_{l,\eta},$$

wegen $u \in W^{k+2,p}_{\mathrm{loc}}(B(0,2)_+)$ und $a_{ij} \in C^{k-1,1}(B(0,2)_+) = W^{k,\infty}(B(0,2)_+)$. Dabei gilt

$$\|f_{l,\eta}\|_{W^{k-1,p}(B(0,2)_+)} \le C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|_f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)})$$

mit (4.74) und (4.78). Aus (4.77) folgt mit (4.72) $\eta\partial_l u \in W^{k+1,p}(\Omega_0)$ für $k-1$ und

$$\begin{aligned}\|\partial_l u\|_{W^{k+1,p}(B(0,1)_+)} &\le \|\eta\partial_l u\|_{W^{k+1,p}(\Omega_0)}\\ &\le C(\Lambda,n,p,k)(\|f_{l,\eta}\|_{W^{k-1,p}(\Omega_0)} + \|\eta\partial_l u\|_{L^p(\Omega_0)})\\ &\le C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}),\end{aligned}$$

$$\|\partial_i\partial_j u\|_{W^{k,p}(B(0,1)_+)} \le C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \text{ für } (i,j) \ne (n,n), \quad (4.79)$$

da wir $u \in W^{k+2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ bereits wissen. Zuletzt erhalten wir aus (4.75)

$$\partial_n^2 u = a_{nn}^{-1}\left(-\sum\nolimits_{(i,j)\ne(n,n)} a_{ij}\partial_j\partial_i u + \hat{f}\right) \text{ in } B(0,2)_+,$$

also mit (4.45), (4.76) und (4.79) nacheinander schließlich $u \in W^{k+2,p}(B(0,1)_+)$ mit

$$\begin{aligned}\|\partial_n^2 u\|_{W^{k,p}(B(0,1)_+)} &\le C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)})\\ \|u\|_{W^{k+2,p}(B(0,1)_+)} &\le C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}).\end{aligned}$$

Überdecken wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt (4.72) aus (4.71). **q.e.d.**