Analysis III

FS 2012

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Dieser Begriff erlaubt es die Differential– und Integralrechnung auf viele Fragestellungen anzuwenden. Er beschreibt geometrische Gebilde, die lokal wie offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ aussehen, aber global auf sehr vielfältige Weise verklebt sein können. Entsprechend werden wir einerseits die lokale Differential– und Integrationsrechnung anwenden und weiterentwickeln und andererseits auf neue globale Fragestellungen stoßen.

1.1 Zusammenhängende Komponenten

Zunächst weiderholen wir die Begriffsbildung von metrischen Räumen.

Definition 1.1. *(Metrik auf einer Menge X) Eine Metrik (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung* $d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ *mit drei Eigenschaften*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *für alle* $x, y \in X$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Positivität).*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie).*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Beispiel 1.2. **(i)** *auf jeder Menge* X *definiert* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

die sogenannte diskrete Metrik.

(ii) *Auf* $\mathbb{R}$ *definiert* $d(x, y) = |x - y|$ *eine Metrik.*

(iii) *Auf* $\mathbb{C}$ *definiert* $d(x, y) = |x - y|$ *eine Metrik.*

(iv) *Auf jeder nicht leeren Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) definiert die Einschränkung von d auf $A \times A \to \mathbb{R}$ eine Metrik.*

(v) *Auf dem kartesischen Produkt zweier metrischer Räume definiert die Summe beider Metriken eine Metrik. Sie heißt Metrik des kartesischen Produktes.*

(vi) *Die Einschränkung der Metrik (ii) auf die Vereinigung der inversen der natürlichen Zahlen mit $\{0\}$ definiert eine Metrik auf $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$:*

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm} \quad d(\infty, n) = d(n, \infty) = \frac{1}{n} \quad d(\infty, \infty) = 0 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Definition 1.3. *(offener Ball, Umgebung, offene Menge) Ein offener Ball in (X, d) mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist die Menge $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $O \subset X$, die für ein $r > 0$ einen Ball $B(x, r)$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x, \epsilon) \subset O$.*

Beispiel 1.4. *In $\mathbb{R}$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus $(x - r, x + r)$. Im $\mathbb{R}^n$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus allen Punkten, deren euklidischer Abstand zu x kleiner ist als r.*

Alle offenen Bälle $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x. Für $y \in B(x, r)$ ist $d(x, y) < r$. Sei $z \in B(y, r - d(x, y))$. Dann gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$, also auch $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$. Deshalb sind die offenen Bälle tatsächlich offen.

Offenbar ist die beliebige Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Für zwei offene Mengen O und O' und $x \in O \cap O'$ gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ mit $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) \subset B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$, und $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen wieder offen.

Definition 1.5. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss) Die Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ eine Menge A ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.*

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Deshalb ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt.

Die Schnittmengen von den offenen Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) mit einer Teilmenge $A \subset X$ bilden dann die offenen Teilmengen des metrischen Unterraumes (A, d), und die Schnittmengen von abgeschlossenen Teilmengen von X mit A die abgeschloessene Teilmengen von (A, d).

Definition 1.6. *Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von X, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind, die leere Menge und der ganze Raum X sind. Er heißt lokal zusammenhängend, wenn für jedes $x \in X$ jede Umgebung von x eine zusammenhängende Umgebung von x enthält.*

Satz 1.7. *Eine Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall ist. Insbesondere ist also $\mathbb{R}$ sowohl zusammenhängend als auch lokal zusammenhängend.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann enthält A mit je zwei Punkten $a < b \in \mathbb{R}$ auch das Intervall $[a, b]$. Wenn nämlich $a < b$ zwei Elemente sind und $x \notin A$ für ein $x \in (a, b)$, dann sind die Teilmengen

$$(-\infty, x) \cap A = (-\infty, x] \cap A \text{ und } (x, \infty) \cap A = [x, \infty) \cap A$$

jeweils offen und abgeschlossen. Also ist dann A nicht zusammenhängend. Dann ist A eines der Intervalle $(\inf A, \sup A)$, $[\inf A, \sup A)$, $(\inf A, \sup A]$ und $[\inf A, \sup A]$.

Sei umgekehrt $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $I = A \cup B$ eine disjunkte Vereinigung von offenen und abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen A und B von I. Sei $a \in A$ und $b \in B$ mit $a < b$. Dann ist $[a, b]$ in I enthalten. Sei c das Supremum von $A \cap [a, b]$. Weil A abgeschlossen ist, folgt $c \in A$. Weil A offen ist, folgt aus $c \in A$ und $c \neq b$, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt in $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A$. Also ist das Supremum von $A \cap [a, b] > c$ im Widerspruch zur Definition von c. Also ist jedes Intervall zusammenhängend. **q.e.d.**

Satz 1.8. (i) *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ ein zusammenhängender Unterraum. Dann ist jede Menge B mit $A \subset B \subset \bar{A}$ zusammenhängend.*

(ii) *Eine beliebige Vereinigung von zusammenhängenden Teilmengen von X, deren Schnitt nicht leer ist, ist zusammenhängend.*

(iii) *Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zusammenhängenden Teilmengen von X, so dass*

$$A_{n+1} \cap A_n \neq \emptyset \qquad \textit{für alle} \qquad n \in \mathbb{N} \qquad \textit{gilt,}$$

dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ zusammenhängend.

(iv) *Das Bild eines zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhängend.*

(v) *Das kartesische Produkt zweier (topologischer) metrischer Räume ist genau dann (lokal) zusammenhängend, wenn beide (lokal) zusammenhängend sind.*

Beweis (i): Wenn B eine Vereinigung von zwei offenen disjunkten Teilmengen C und D ist, dann ist auch A eine disjunkte Vereinigung von $(A \cap C) \cup (A \cap D)$. Wenn C und D offen in B sind, dann sind auch $(A \cap C)$ und $(A \cap D)$ offen in A. Weil A dicht in B liegt, sind $(A \cap C)$ bzw. $(A \cap D)$ genau dann leer, wenn C bzw. D leer ist. Also ist A nicht zusammenhängend, wenn B nicht zusammenhängend ist. Daraus folgt (i).
(ii): Sei $x \in X$ im Schnitt einer Familie von zusammenhängenden Teilmengen und $A \cup B$ eine disjunkte Vereinigung der Vereinigung der Familie durch offene und abgeschlossene Mengen. Dann können wir $x \in A$ annehmen. Dann gibt es mindestens eine zusammenhängende Teilmenge C der Familie, so dass $B \cap C$ nicht leer ist. Dann ist auch $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ eine disjunkte Vereinigung durch offene und abgeschlossene Mengen. $C \cap A$ enthält x und $C \cap B$ ist nicht leer. Das steht im Widerspruch dazu, dass C zusammenhängend ist. Daraus folgt (ii).
(iii): Induktiv folgt aus (ii), dass $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ zusammenhängend ist, also (iii).
(iv): Das Urbild einer offenen und abgeschlossenen Menge ist wieder offen und abgeschlossen. Daraus folgt, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend ist.
(v): Weil die Projektionen $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ stetig und surjektiv sind, sind wegen (iv) auch X und Y zusammenhängend, wenn $X \times Y$ zusammenhängend sind. Für alle $(x, y) \in X \times Y$ bilden die Bilder der Umgebungen von (x, y) unter p_1 bzw. p_2 die Umgebung von x bzw. y. Deshalb sind X und Y auch lokal zusammenhängend, wenn $X \times Y$ lokal zusammenhängend ist. Wenn umgekehrt X und Y (lokal) zusammenhängend, dann sind für alle

$$(x, y) \in X \times Y \text{ auch } X \times \{y\} \text{ und } \{x\} \times Y$$

(lokal) zusammenhängend. Wegen (ii) ist dann

$$(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

zusammenhängend und enthält alle Punkte (z, y) mit $z \in X$. Wegen (ii) ist dann auch

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y))$$

zusammenhängend. Für lokal zusammenhängende X und Y folgt, dass jede Umgebung von $(x, y) \in X \times Y$ das kartesische Produkt von zusammenhängenden Umgebungen von x und y enthält, und damit auch eine zusammenhängende Umgebung. **q.e.d.**

Korollar 1.9. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend.* **q.e.d.**

Definition 1.10. *Sei X ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann ist wegen (ii) die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten, zusammenhängend. Diese Menge heißt zusammenhängende Komponente von x in X. Wegen (i) sind die zusammenhängenden Komponenten von X abgeschlossen. Offenbar sind zwei zusammenhängende Komponenten von X jeweils entweder gleich oder disjunkt. Deshalb ist jeder metrische Raum X eine disjunkte Vereinigung seiner zusammenhängenden Komponenten.*

Satz 1.11. *Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn die zusammenhängenden Komponenten von offenen Teilmengen wieder offen sind.*

Beweis: Sei (X, d) ein metrischer Raum, dessen zusammenhängende Komponenten von allen offenen Mengen offen sind. Dann enthält jede offene Umgebung von $x \in X$ eine offene zusammenhängende Komponente von x. Also ist (X, d) lokal zusammenhängend.

Sei jetzt (X, d) lokal zusammenhängend. Dann ist für jedes $x \in X$ die zusammenhängende Komponente von x in einer offenen Menge eine Umgebung von x. Also sind alle zusammenhängenden Komponenten in offenen Mengen offene, abgeschlossene und zusammenhängende Mengen. **q.e.d.**

Korollar 1.12. *Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Jeder separable lokal zusammenhängende metrische Raum X ist eine höchstens abzählbare disjunkte Vereinigung von zusammenhängenden offenen und abgeschlossenen Teilräumen.*

Beweis: Alle zusammenhängenden Komponenten eines lokal zusammenhängenden metrischen Raumes X sind offen und abgeschlossen. Deshalb enthält jede Komponente mindestens ein Element einer dichten Teilmenge. Also ist die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten eines separablen lokal zusammenhängenden metrischen Raumes X höchstens abzählbar. **q.e.d.**

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r > 0$ ist die Abbildung

$$B(0, r) \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{x}{r - \|x\|}$$

eine stetige Abbildung von $B(0, r)$ nach $\mathbb{R}^n$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \to B(0, r), \quad y \mapsto \frac{ry}{1 + \|y\|}$$

und damit auch stetig. Also sind $B(0, r)$ und $\mathbb{R}^n$ homöomorph (d.h. durch eine bijektive stetige Abbildung und stetige Umkehrabbildung verbunden). Deshalb ist im $\mathbb{R}^n$ jeder offene Ball zusammenhängend. Daraus wird folgen, dass alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten separable, lokal zusammenhängende und metrisierbare Räume sind, und deshalb höchstens abzählbare disjunkte Vereinigungen von offenen und abgeschlossenen zusammenhängenden Komponenten sind.

1.2 Karten und Atlanten

Ein topologischer Raum X ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie auf X, d.h. einer Teilmenge τ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X, deren Elemente wir offene Mengen von X nennen. Diese Teilmenge $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ erfüllt dabei 2 Bedingungen:

(i) Die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

(ii) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

Zusätzlich wird noch gefordert, dass sowohl die leere Menge als auch X offen sind. Die Topologie, die aus allen Teilmengen von X besteht, heißt diskrete Topologie. Für jeden metrischen Raum (X, d) ist eine Teilmenge $O \subset X$ genau dann offen, wenn sie eine Vereinigung von offenen Bällen ist. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem topologischen Raum X in einen topologischen Raum Y heißt stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Übungsaufgabe 1.13. *Zeige, dass für metrische Räume diese Definition von Stetigkeit mit der $\epsilon - \delta$–Definition übereinstimmt.*

Definition 1.14. *(Karte) Sei X ein topologischer Raum, dann heißt ein Homöomorphismus ϕ (also eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig ist) von einer offenen Teilmenge U von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Karte. U heißt der Definitionsbereich und n die Dimension der Karte.*

Wegen Brouwer's Satz über die Invarianz von Gebieten[1] ist das Bild einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ unter einer injektiven stetigen Abbildung nach $\mathbb{R}^n$ wieder offen. Deshalb ist eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $n > m$ nicht injektiv. Andernfalls ist die Verkettung von f mit der Einbettung $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, 0)$ auf die ersten m Komponenten von $\mathbb{R}^n$ ebenfalls stetig und injektiv. Das Bild einer offenen Menge unter $i \circ f$ ist als Teilmenge des Bildes von i nicht offen, im Widerspruch zu der Invarianz des Gebietes. Insbesondere existiert nur dann ein Homöomorphismus von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, wenn $n = m$ ist. Deshalb stimmen die Dimensionen zweier Karten, deren Definitionsbereiche nicht schnittfremd sind, überein. Das werden wir aber nicht zeigen und auch nicht benutzen. Zwei Karten ϕ_1 und ϕ_2 mit dem gleichen Definitionsbereich U werden verträglich genannt, wenn die Übergangsfunktionen $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ und $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})^{-1}$ unendlich oft differenzierbare Abbildungen sind. Weil die zweite Abbildung die Umkehrabbildung der ersten ist, folgt dann, dass die Ableitungen dieser Abbildungen an jeder Stelle von $\phi_1[U]$ bzw. $\phi_2[U]$

[1] Theorem IV 9 in "Dimension Theorey" von W. Hurewicz und H. Wallman, Princeton 1948.

bijektive lineare Abbildungen sind von $\mathbb{R}^{n_1}$ auf $\mathbb{R}^{n_2}$. Also stimmen die Dimensionen von zwei verträglichen Karten mit gleichem Definitionsbereich überein.

Zwei Karten ϕ_1 und ϕ_2 mit verschiedenen Definitionsbereichen U_1 bzw. U_2 heißen verträglich, wenn die beiden Einschränkungen von ϕ_1 und ϕ_2 auf $U_1 \cap U_2$, die offenbar zwei Karten mit gleichem Definitionsbereich sind, miteinander verträglich sind.

Definition 1.15. *(Atlas) Eine Familie von paarweise verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche den topologischen Raum X überdecken, heißt Atlas.*

Zwei Atlanten heißen miteinander verträglich, wenn die Vereinigung der Karten beider Atlanten wieder ein Atlas ist, also alle Karten zusammen paarweise miteinander verträglich sind. Weil eine Abbildung genau dann differenzierbar ist, wenn sie in allen Punkten differenzierbar ist, genügt es die Differenzierbarkeit auf einer offenen Überdeckung nachzuprüfen. Deshalb ist die Verträglichkeit von Atlanten eine Äquivalenzrelation. Ein gesättigter Atlas ist ein maximaler Atlas, der also alle mit diesem Atlas verträglichen Atlanten und damit auch alle mit ihm verträglichen Karten enthält. Jede Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten enthält offenbar genau einen gesättigten Atlas und jeder gesättigte Atlas definiert genau eine Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten, nämlich alle Atlanten, die in dem gesättigten Atlas enthalten sind.

Definition 1.16. *(Mannigfaltigkeit) Ein metrisierbarer separabler topologischer Raum X (d.h. ein topologischer Raum, dessen offene Mengen mit den offenen Mengen einer Metrik auf X übereinstimmen) zusammen mit einem Atlas heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Nicht jeder metrische Raum besitzt einen Atlas. Offenbar besitzt jeder Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, (oder eines topologischen Raumes mit einem Atlas) eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. So ist z.B.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

keine Mannigfaltigkeit, weil der Punkt $(0,0)$ keine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Das sieht man daran, dass alle ϵ–Bälle um $(0,0)$ ohne den Punkt $(0,0)$ 4 zusammenhängende Komponenten besitzen, also vier offene und abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\epsilon > 0$ hat aber $B(x,\epsilon) \setminus \{x\}$ genau eine zusammenhängende Komponente, wenn $n > 1$ ist und zwei, wenn $n = 1$. Wie wir gesehen haben, stimmen die Dimensionen von zwei verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche beide einen Punkt $x \in X$ enthalten überein. Die Dimension einer differenzierbare Mannigfaltigkeit X ist die Funktion, die jedem Punkt $x \in X$ die Dimension einer Karte aus dem Atlas zuordnet, deren Definitionsbereich x enthält. Offenbar besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung, auf der die Dimension der Mannigfaltigkeit konstant ist. Deshalb sind die Teilmengen von X, auf denen die Dimension gleich einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, offen. Wenn $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge ist, dann stimmen die Dimensionen von X an den Punkten $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ für große m mit der Dimension von X am Grenzwert von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ überein. Deshalb sind die Teilmengen von X, auf denen die Dimension gleich einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, auch abgeschlossen, und deshalb Vereinigungen von zusammenhängenden Komponenten von X. Insbesondere hat eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit nur eine Dimension. Eine nicht zusammenhängende differenzierbare Mannigafltigkeit kann mehrere Dimensionen haben.

Beispiel 1.17. **(i)** *Jeder höchstens abzählbare diskrete Raum ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* 0*. Umgekehrt ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* 0 *ein höchstens abzählbarer diskreter Raum.*

(ii) *Jeder endlichdimensionale Vektorraum besitzt einen gesättigten Atlas von differenzierbaren Karten. Damit wird jeder endlichdimensionale Vektorraum zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit von der gleichen Dimension wie der Vektorraum. Als Topologie benutzen wir dabei die Topologie einer der äquivalenten Normen des Vektorraumes.*

(iii) *Sei* $\mathbb{R}^{n+1}$ *der* $(n+1)$*–dimensionale Euklidische Raum mit dem Euklidischen Skalarprodukt und der entsprechenden Norm. Seien* $e_0, \ldots, e_n$ *die natürliche Basis von* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Unter der* n*–dimensionalen Sphäre verstehen wir die Teilmenge*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

Im folgenden werden wir sehen, dass S^n *auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Dann definieren wir die sogenannte stereographische Projektion:*

$$S^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n$$

Zunächst identifizieren wir den $\mathbb{R}^n$ *mit der Teilmenge*

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e_0\rangle = 0\} = \{0e_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dann bildet die stereographische Projektion jeden Punkt von $S^n \setminus \{e_0\}$ *(ohne den Nordpol) auf den Schnittpunkt der Geraden durch den Nordpol und den Punkt von* $S^n \setminus \{e_0\}$ *mit der Ebene* $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ab. Sei* $x \in S^n \setminus \{e_0\}$*. Dann besteht die Gerade* *durch den Nordpol und der Punkt x aus den Punkten $\{e_0 + t(x - e_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Der Schnittpunkt mit der Hyperebene*

$$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e_0 \rangle = 0\}$$

entspricht dem Punkt $y = e_0 + t(x - e_0)$ mit $\langle y, e_0 \rangle = 0$:

$$\langle e_0 + t(x - e_0), e_0 \rangle = 1 - t + t\langle x, e_0 \rangle = 0 >$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{1 - \langle x, e_0 \rangle} \text{ und } y = e_0 + \frac{x - e_0}{1 - \langle x, e_0 \rangle}.$$

Die Länge des Bildvektors ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \|y\| = \left\| e_0 + \frac{(x - e_0)}{1 - \langle x, e_0 \rangle} \right\| = \left\| \frac{x - e_0 \langle x.e_0 \rangle}{1 - \langle x, e_0 \rangle} \right\| &= \sqrt{\frac{\langle x - \langle x, e_0 \rangle e_0, x - \langle x, e_0 \rangle e_0 \rangle}{(1 - \langle x, e_0 \rangle)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - 2\langle x, e_0 \rangle^2 + \langle x, e_0 \rangle^2}{1 - \langle x, e_0 \rangle}} = \sqrt{\frac{1 + \langle x, e_0 \rangle}{1 - \langle x, e_0 \rangle}}. \end{aligned}$$

Also ist $\langle x, e_0 \rangle$ gegeben durch

$$\langle x, e_0 \rangle = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$$

und x ist gegeben durch

$$x = \langle x, e_0 \rangle e_0 + (1 - \langle x, e_0 \rangle) y \quad = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} e_0 + \frac{2y}{\|y\|^2 + 1} \quad = \frac{(\|y\|^2 - 1) e_0 + 2y}{\|y\|^2 + 1},$$

wobei wir $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen. Also ist die stereographische Projektion ein Homöomorphismus von $S^n \setminus \{e_0\}$ nach $\mathbb{R}^n$. Wenn wir S^n an der Hyperebene $\mathbb{R}^n$ spiegeln und dann die stereographische Projektion benutzen, erhalten wir einen Homöomorphismus $S^n \setminus \{-e_0\}$ nach $\mathbb{R}^n$

$$x \to y = -e_0 + \frac{x + e_0}{1 + \langle x, e_0 \rangle}$$

mit der Umkehrabbildung

$$x = \frac{\frac{1}{\|y\|^2} - 1}{\frac{1}{\|y\|^2} + 1} e_0 + \frac{2\frac{1}{\|y\|}}{\frac{1}{\|y\|^2} + 1} \frac{y}{\|y\|} = \frac{(1 - \|y\|^2) e_0 + 2y}{1 + \|y\|^2}$$

Auf $S^n \setminus \{e_0, -e_0\}$ *werden beide Karten durch die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, y \to \frac{y}{\|y\|^2}$$

in einander überführt. Weil diese Abbildung sogar analytisch ist, wird dadurch S^n *zu einer differenzierbaren (bzw. analytischen) Mannigfaltigkeit.*

(iv) *Sei* $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion, deren Gradient* ∇f *keine gemeinsamen Nullstellen mit* f *hat. Dann gibt es aufgrund der Voraussetzung an* f *für jedes Element* $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ *der Nullstellenmenge ein* $i \in \{0, \ldots, n\}$*, so dass* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$. *Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es dann eine genauso oft wie* f *stetig differenzierbare Funktion* g *von der Schnittmenge von* $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0\}$ *mit einer Umgebung von* x *nach* $\mathbb{R}$*, so dass die Schnittmenge der Nullstellenmenge von* f *mit der Umgebung von* x *gleich dem Graphen von* g *auf der Umgebung von* x *ist, also gleich der Menge* $z(y) = y + g(y)e_i$ *wobei* y *die Schnittmenge von* $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0\}$ *mit der Umgebung von* x *durchläuft. Die natürliche Projektion von der Umgebung von* x *auf diese Schnittmenge, die jedem* z *das* y *mit den gleichen Koordinaten, bis auf die* i*–te Koordinate, zuordnet (also* $y = z - \langle z, e_i \rangle e_i$*) ist offenbar glatt und die Umkehrabbildung von der Abbildung* $y \mapsto y + g(y)e_i$. *Deshalb ist die Schnittmenge der Nullstellenmenge von* f *mit der Umgebung von* x *diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von* $\mathbb{R}^n$. *Offenbar ist die Nullstellenmenge als Teilmenge des* $\mathbb{R}^{n+1}$ *ein metrischer Raum. Also ist die Nullstellenmenge eine* n*–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Mit der Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \|x\|^2 - 1$ *erhalten wir wieder dass die* n*–dimensionale Sphäre eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.*

Bemerkung 1.18. *Anstatt von den Übergangsfunktionen zu fordern, dass sie unendlich oft differenzierbar sind, kann man auch* r*mal–stetig differenzierbar, oder analytisch oder (für komplexe Mannigfaltigkeiten, bei denen wir* $\mathbb{R}^n$ *durch* $\mathbb{C}^n$ *ersetzen) holomorphe Übergangsfunktionen fordern. Dann entstehen* C^r *bzw. analytische, bzw. komplexe Mannigfaltigkeiten. Wenn wir nur stetige Übergangsfunktionen fordern, sprechen wir von topologischen Mannigfaltigkeiten. Ein gesättigter Atlas (bzw. eine Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten) wird auch differenzierbare Struktur genannt. Es gibt im Allgemeinen viele verschiedene Äquivalenzklassen von Atlanten. Aber die meisten dieser differenzierbaren Strukturen werden durch Homöomorphismen von* X *auf sich selber aufeinander abgebildet.*

Übungsaufgabe 1.19. *Gebe einen Homöomorphismus von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}$ *an, der die natürliche differenzierbare Struktur auf eine nicht verträgliche differenzierbare Struktur abbildet.*

Definition 1.20. *Zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten X und Y heißen diffeomorph, wenn es einen Homöomorphismus $\Phi : X \to Y$ gibt, der alle Karten des Atlas von Y auf Karten des Atlas von X abbildet.*

Die meisten nicht miteinander verträglichen differenzierbaren Strukturen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit sind also diffeomorph. Diese Relation auf dem Raum aller differenzierbaren Strukturen ist offenbar eine weitere Äquivalenzrelation, neben der Verträglichkeit von Atlanten. Für eine gegebene differenzierbare Mannigfaltigkeit stellt sich dann die Frage, wieviel verschiedene nicht zueinander diffeomorphe differenzierbare Strukturen sie besitzt. Für den Fall von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten lässt sich leicht zeigen, dass alle verschiedenen differenzierbaren Strukturen zueinander diffeomorph sind. Allgemein gilt, dass auf niedrigdimensionalen Mannigfaltigkeiten alle differenzierbaren Strukturen diffeomorph sind. Wenn die Dimension größer als vier ist, kann es verschiedene differenzierbare Strukturen geben. Im besonders schweren Fall der Dimension vier (z.B. $\mathbb{R}^4$) wurde durch eine von der Physik inspirierte Theorie von Donaldson in den achtziger Jahren gezeigt, dass es auch unendlich viele verschiedene nicht zueinander diffeomorphe differenzierbare Strukturen geben kann.

1.3 Differenzierbare Abbildungen

Definition 1.21. *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ p mal stetig differenzierbar (bzw. glatt), wenn für alle Karten ϕ und ψ von den Atlanten von X bzw. Y mit Definitionsbereichen U bzw. V, so dass $f[U]$ in V liegt die Abbildung*

$$\psi \circ f|_U \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \psi[V], u \mapsto \psi(f(\phi^{-1}(u)))$$

p mal stetig differenzierbar bzw. glatt ist.

Weil alle Karten der Atlanten von X und Y miteinander verträglich sind, reicht es die Differenzierbarkeit auf allen Karten von verträglichen Atlanten von X und Y nachzuprüfen. Eventuell muss man noch zu Einschränkungen von Karten auf Schnittmengen übergehen, um die Bedingung $f[U] \subset V$ zu erfüllen.

Damit können wir die Differentialrechnung von dem $\mathbb{R}^n$ auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir benutzen dabei immer lokal Karten und erhalten so Abbildungen von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^m$. Im Folgenden werden wir noch viele weitere Strukturen der Differentialrechnung auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ weiterentwickeln und mit Hilfe der Karten auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wichtig dabei ist, dass die entsprechenden Aussagen so formuliert werden, dass sie nicht von der Wahl der Karte aus dem Atlas abhängen.

Beispiel 1.22. *Im Folgenden werden wir $\mathbb{R}$ oder auch jeden endlichdimensionalen Vektorraum mit der differenzierbaren Struktur aus dem Beispiel (ii) ausstatten und als differenzierbare Mannigfaltigkeit ansehen. Also sind alle p mal stetig differenzierbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ wohldefiniert. Wir wollen diesen Raum $C^p(X,\mathbb{R})$ nennen. Weil die p mal differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ eine Algebra bilden, ist auch $C^p(X,\mathbb{R})$ bzw. $C^\infty(X,\mathbb{R})$ eine Algebra.*

Übungsaufgabe 1.23. *Zeige, dass zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten X und Y genau dann diffeomorph sind, wenn es eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ gibt, die bijektiv ist, und deren Umkehrabbildung auch glatt ist.*

Beispiel 1.24. **(i)** *Sei $\mathbb{R}^n$ der Euklidische n–dimensionale Raum mit dem Euklidischen Skalarprodukt. Dann ist die Abbildung*

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{2x}{1 - \|x\|^2}$$

ein Diffeomorphismus von $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. Sei nämlich $y = \frac{2x}{1-\|x\|^2}$. Dann gilt für $\|x\| < 1$ auch $\|x\|^2 > 0$. Also folgt $\|y\| = \frac{2\|x\|}{1-\|x\|^2}$ oder auch $\|y\|\|y\|^2 + 2\|x\| - \|y\| = 0$. Also gilt

$$\|x\| = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\|y\|^2}}{2\|y\|} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \|y\|^2}}{\|y\|}.$$

Wegen $0 \le \|x\| < 1$ folgt

$$\|x\| = \frac{\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1}{\|y\|}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x = \frac{y(1 - \|x\|^2)}{2} &= \frac{y}{2} \frac{\|y\|^2 - 1 + 2\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1 - \|y\|^2}{\|y\|^2} \\ &= y \frac{\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1}{(\sqrt{1 + \|y\|^2} + 1)(\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1)} \qquad = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2} + 1} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ wohldefiniert und das Bild liegt in $B(0,1)$. Die Abbildungen f und ihre Umkehrabbildung sind sogar analytische Abbildungen, also auch Diffeomorphismen von $B(0,1)$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ nach $B(0,1)$.

(ii) *Die Abbildung* $g : x \to \frac{x}{\|x\|^2}$ *ist offenbar eine Involution:*

$$\frac{\frac{x}{\|x\|^2}}{\|\frac{x}{\|x\|^2}\|^2} = \frac{x\|x\|^4}{\|x\|^2\|x\|^2} = x.$$

g ist also ein analytischer Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sie bildet das Äußere $\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| > 1\}$ der Einheitskugel auf $B(0,1) \setminus \{0\}$ ab. Zusammen mit der Abbildung f aus (i) ergibt sie einen analytischen Diffeomorphismus des Äußeren der Einheitskugel nach $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.4 Zerlegung der Eins

In diesem Abschnitt führen wir eine sogenannte Zerlegung der Eins ein. Das ist eine abzählbare Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nicht negativen glatten Funktionen mit Werten in dem Intervall $[0,1]$, deren Summe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$ gleich Eins ist. Diese Summe soll dabei immer lokal endlich sein, d.h. für jedes x einer gegebenen Mannigfaltigkeit, soll es eine Umgebung geben, auf der nur endlich viele der Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht verschwinden. Dadurch ist die Summe immer eine endliche Summe und deshalb auch ohne den Begriff des Grenzwertes wohldefiniert. Mithilfe einer solchen Zerlegung der Eins wollen wir die Funktionen bzw. Vektorfelder bzw. Differentialformen (diese werden später eingeführt) in Summen von Funktionen bzw. Vektorfeldern bzw. Differentialformen zerlegen, die nur innerhalb einer kleinen offenen Menge nicht verschwinden. Also sollen die einzelnen Funktionen der Zerlegung der Eins nur innerhalb von (kleinen) offenen Mengen nicht verschwinden.

Definition 1.25. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen $[0,1]$-wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X heißt Zerlegung der Eins, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) Lokale Endlichkeit *Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U, auf der alle bis auf endlich viele Funktionen der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verschwinden.*

(ii) *Für alle $x \in X$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$. Wegen (i) ist diese Summe immer endlich.*

In diesem Abschnitt beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.26. *(Existenz einer glatten Zerlegung der Eins) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine glatte Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X, so dass alle Funktionen f_n außerhalb einer kompakten Menge in einer offenen Menge $U_n \in \mathcal{U}$ der Übereckung verschwinden.*

Wenn zu einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine solche Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, dann gibt es offenbar eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen in $\mathcal{U}$, so dass jedes f_n außerhalb von U_n verschwindet. Wegen der Bedingung (ii) muss dann die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ sein. Insbesondere muss also jede offene Überdeckung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine abzählbare Teilüberdeckung besitzen. Um das einzusehen betrachten wir zunächst eine allgemeinere Klasse von topologischen Räumen.

Definition 1.27. *Ein topologischer Raum heißt lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine relativ kompakte Umgebung besitzt. Dabei heißt eine Menge relativkompakt, wenn ihr Abschluss kompakt ist.*

Wegen Heine-Borel sind alle endlichdimensionalen euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt. Deshalb ist auch jede differenzierbare Mannigfaltigkeit lokal kompakt. Also sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten auch lokal kompakte metrisierbare Räume.

Satz 1.28. *Für einen lokalkompakten metrischen Raum X ist folgendes äquivalent:*

(i) *Es gibt eine wachsende Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener relativ kompakter Teilmengen von X, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\bar{O}_n \subset O_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$.*

(ii) *X ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen.*

(iii) *X ist separabel.*

Beweis: Die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{O}_n$ der kompakten Mengen $(\bar{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (i) überdeckt X, deshalb folgt (ii) aus (i).

Jeder kompakte metrische Raum besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Überdeckung von Bällen mit Radius $1/n$. Die Menge aller Zentren dieser abzählbaren Menge von Bällen, liegt offenbar dicht in dem metrischen Raum. Deshalb ist jeder kompakte metrische Raum separabel. Die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen, die jeweils in den Mitgliedern einer abzählbaren Überdeckung von X dicht liegen, liegt dicht in ganz X. Deshalb ist eine abzählbare Vereinigung von separablen Räumen separabel und (iii) folgt aus (ii).

Sei X jetzt separabel. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die in X dicht liegt. Weil X lokalkompakt ist, besitzt jedes $x \in X$ eine relativ-kompakte offene Umgebung W_x. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $B(x, \frac{1}{N}) \subset W_x$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X dicht liegt, gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $x_M \in B(x, \frac{1}{2N})$. Wegen der Dreiecksungleichung liegt dann $B(x_M, \frac{1}{2N})$ in W_x und enthält x. Weil W_x relativ-kompakt ist, ist auch $B(x_M, \frac{1}{2N})$ relativ-kompakt. Also gibt es eine abzählbare Familie $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen relativ-kompakten Teilmengen von X, so dass jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus der Familie $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.(Eine solche Familie wird Basis der Topologie genannt).

Weil X lokalkompakt ist, gibt es für jedes $x \in X$ ein $r(x) > 0$, so dass $B(x, 2r(x))$ relativkompakt ist. Dann besitzt für jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{X \in A} B(x, r(x))$ eine endliche Teilüberdeckung. Die entsprechende endliche Vereinigung $B(x_1, 2r(x_1)) \cup \ldots \cup B(x_N, 2r(x_N))$ ist dann relativkompakt und enthält alle Bälle $B(x, r)$ mit $x \in A$ und $r \leq \min\{r(x_1), \ldots, r(x_N)\}$. Also gibt es für jede kompakte Teilmenge A von X ein $r > 0$, so dass $\bigcup_{x \in A} B(x, r)$ relativ kompakt ist.

Jetzt definieren wir induktiv eine Folge $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von X, die die Bedingung (i) erfüllt. O_1 sei gleich V_1 und für jedes $n \geq 1$ sei $O_{n+1} = V_{n+1} \cup \bigcup_{x \in \bar{O}_n} B(x, r)$, wobei r so gewählt ist, dass $\bigcup_{x \in \bar{O}_n} B(x, r)$ relativkompakt ist. Weil $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = X$ gilt auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = X$ und nach Konstruktion sind alle $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relativkompakt. Also folgt (i) aus (iii). **q.e.d.**

Lemma 1.29. *Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gibt es eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Karten mit Definitionsbereichen $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass*

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ϕ_n ein Diffeomorphismus von U_n auf einen Ball $B(0, r_n) \subset \mathbb{R}^m$ mit Radius $r_n > 0$.*

(ii) $(\phi_n^{-1}[B(0, \frac{r_n}{2})])_{n \in \mathbb{N}}$ *ist eine offene Überdeckung von X.*

(iii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist U_n in einer offenen Menge von $\mathcal{U}$ enthalten.*

(iv) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind alle Elemente von $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bis auf endlich viele schnittfremd mit U_n.*

Beweis: Für jeden Punkt $x \in X$ der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gibt es offenbar eine Karte ϕ_x, deren Definitionsbereich x enthält und ein Mitglied der offenen Überdeckung, das auch x enthält. Indem wir die Karten $(\phi_x)_{x \in X}$ auf kleine offene Umgebungen von x einschränken, erhalten wir Karten $(\phi_x)_{x \in X}$, die sowohl (i) als auch (iii) erfüllen. Also gibt es für jede Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X und Karten $(\phi_x)_{x \in X}$, die (i) und (iii) erfüllen.

Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein separabler metrisierbarer Raum. Deshalb gibt es eine Folge $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Mengen, die (i) aus dem vorangehenden Satz erfüllt. Wir definieren jetzt eine Folge von Überdeckungen $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $X_n = O_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ indem wir die Mitglieder von $\mathcal{U}$ mit der Menge $O_{n+1} \setminus \bar{O}_{n-2}$ schneiden und zu diesen Mengen noch O_{n-1} hinzufügen. Hierbei setzen wir $O_0 = O_{-1} = \emptyset$. Also besitzen für alle $n \in \mathbb{N}$ die kompakten Teilmengen $\bar{O}_n \setminus O_{n-1} \subset X_n$ von X_n Überdeckungen durch die Urbilder der offenen Bälle mit den halben Radien von den Karten. Diese Karten erfüllen dann bezüglich der Überdeckungen $\mathcal{U}_n$ die Bedingungen (i) und (iii). In $X_1 = O_2$ besitzt dann $\bar{O}_1$ eine endliche Teilüberdeckung durch Urbilder solcher offenen Bälle mit den halben

Radien von den entsprechenden Karten. In $X_2 = O_3$ besitzt dann $\bar{O}_2 \setminus O_1$ eine endliche Teilüberdeckung durch Urbilder solcher offenen Bälle mit den halben Radien der entsprechenden Karten. Und für alle $n > 2$ ist $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ eine kompakte Teilmenge von X_n und besitzt eine solche endliche Teilüberdeckung durch Urbilder von offenen Bällen mit den halben Radien der entsprechenden Karten. Alle diese abzählbar vielen endlichen Teilüberdeckungen zusammen erfüllen offenbar (i)-(iii). Aufgrund der Konstruktion sind die Definitionsbereiche der Karten der Teilüberdeckungen von $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ und $\bar{O}_m \setminus O_{m-1}$ schnittfremd, wenn $|n-m| > 1$. Deshalb erfüllen alle diese Karten zusammen auch die Bedingung (iv). **q.e.d.**

Beweis der Existenz der Zerlegung der Eins: Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann ist die reelle Funktion $f_{a,b}: \quad \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto f_{a,b}(x)$ mit

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq a \\ \exp(\frac{1}{x-b} \exp(\frac{1}{a-x})) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{für } b \leq x \end{cases}$$

eine glatte Funktion. Für alle $r > 0$ ist dann die Funktion $g_r(x) = f_{r/2,2r/3}(\|x\|)$ eine glatte Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$, die außerhalb von $B(0, 2r/3)$ verschwindet und auf $B(0, r/2)$ gleich 1 ist. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $\phi_n : U_n \to B(0, r_n)$ die Folge von Karten, die (i) aus dem vorangehenden Lemma erfüllt. Dann setzen wir die Funktion $h_n = g_{r_n} \circ \phi_n$ zu einer glatten Funktion auf X fort, indem wir sie außerhalb des Definitionsbereichs U_n der Karte ϕ_n gleich Null setzen. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die beiden Funktionen h_n und $1 - h_n$ eine Zerlegung der Eins auf X. Jetzt können wir eine Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den gewünschten Eigenschaften definieren:

$$f_n = h_n \prod_{l=1}^{n-1} (1 - h_l) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_1 + \ldots + f_n + \prod_{l=1}^{n} (1 - h_l) = 1.$$

Wegen der Bedingung (iv) sind auf einer Umgebung von jedem Punkt $x \in X$ nur endlich viele Funktionen h_n ungleich Null. Deshalb erfüllt diese Folge die Bedingung der lokalen Endlichkeit. Umgekehrt ist wegen (ii) in der Umgebung jedes Punktes mindestens eine Funktion $(1 - h_n)$ gleich Null. Deshalb ist die Summe $\sum f_n$ aller f_n überall gleich Eins. Wegen der Bedingung (iii) verschwindet jedes Element der Zerlegung der Eins außerhalb einer offenen Menge von $\mathcal{U}$. **q.e.d.**

Zum Abschluss können wir noch alle Elemente einer solchen Zerlegung der Eins, die außerhalb derselben offenen Menge in $\mathcal{U}$ verschwinden, zu einer Funktion aufsummieren. Das ist wegen der lokalen Endlichkeit offenbar möglich. Dadurch können wir erreichen, dass die abzählbare Familie der Funktionen der Zerlegung der Eins durch eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ durchnummeriert wird.

Korollar 1.30. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $A \subset X$ eine Teilmenge und g eine reelle Funktion auf A. Gibt es für jedes $x \in \bar{A}$ im Abschluss von A eine offene Umgebung V_x von x in X und eine glatte Funktion f_x auf V_x, die auf $V_x \cap A$ mit g übereinstimmt, dann gibt es für jede offene Menge U, die $\bar{A}$ enthält eine glatte Funktion f auf X, die auf A mit g übereinstimmt, und außerhalb von U verschwindet.*

Beweis: Wir schränken für alle $x \in A$ die Menge V_x und die Funktion f_x auf $V_x \cap U$ ein. Für alle $x \in X \setminus \bar{A}$ sei V_x eine offene Umgebung von x in $X \setminus A$ und $f_x = 0$ auf dieser Menge. Die offene Überdeckung $(V_x)_{x \in X}$ von X besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit entsprechenden Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einer entsprechenden Zerlegung der Eins $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Funktion $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n f_n$ leistet das Gewünschte. **q.e.d.**

Der Kürze halber wollen wir Funktionen g, die die Bedingungen des Korollars erfüllen unendlich oft differenzierbar nennen. Analog werden r mal stetig differenzierbare Funktionen auf Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten definiert.

1.5 Tangentialraum

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Tangentialvektoren auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. In jedem Punkt des $\mathbb{R}^n$ können wir den Raum aller infinitesimalen Richtungen von differenzierbaren Funktionen von reellen Intervallen in den $\mathbb{R}^n$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Durch die Karten des Atlases können wir das auch für differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Um diese Tangentialvektoren, die die infinitesimalen Richtungen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit beschreiben, aber so einzuführen, dass ihre Definition nicht von der Wahl der Karte abhängen, definieren wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der Abbildungen zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.31. *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $x \in X$ ein Punkt. Außerdem seien f_1 und f_2 zwei auf einer offenen Umgebung von x stetige und in x differenzierbare Abbildungen nach Y. Wir sagen, dass sich die beiden Abbildungen f_1 und f_2 in dem Punkt x berühren, wenn $f_1(x) = f_2(x) = y$ und bezüglich einer Karte ϕ von X im Punkt x und einer Karte ψ von Y im Punkt y die Ableitung von $\psi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$ und $\psi \circ f_2 \circ \phi^{-1}$ im Punkt $\phi(x)$ als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ übereinstimmen.*

Wegen der Kettenregel ist diese Aussage unabhängig von den Karten ϕ und ψ von X bzw. Y in den Punkten x bzw. y. Aus der Definition folgt auch sofort, dass diese Relation eine Äquivalenzration zwischen solchen Abbildungen ist.

Definition 1.32. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Die Menge der Äquivalenzklassen aller stetigen im Punkt 0 differenzierbaren und sich dort berührenden Abbildungen von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach X, die 0 auf x abbilden, heißt Tangentialraum von X im Punkt x und wird mit T_xX bezeichnet. Seine Elemente heißen Tangentialvektoren im Punkt x.*

Für alle $w, v \in \mathbb{R}^m$ ist die Abbildung $t \mapsto w + vt$ unendlich oft differenzierbar und hat an der Stelle Null die Ableitung $t \mapsto tv$. Außerdem gibt es für jede einmal stetig differenzierbare Abbildung von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach $\mathbb{R}^m$, die im Punkt 0 auf w abgebildet wird, genau ein $v \in \mathbb{R}^m$, so dass die Abbildung die dem (w, v) entsprechende obige Abbildung im Punkt 0 berührt. Dadurch können wir den Tangentialraum von $\mathbb{R}^m$ im Punkt $w \in \mathbb{R}^m$ mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^m$ identifizieren. Jede differenzierbare Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^n$ von einer offenen Teilmenge W des $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$ bildet die infinitesimalen Richtungen von $\mathbb{R}^m$ im Punkt $w \in W$ durch die Ableitung $f'(w)$ auf die infinitesimalen Richtungen von $\mathbb{R}^n$ im Punkt $f(w)$ ab. Dadurch induziert f die Abbildung

$$f'(w) : \quad T_x\mathbb{R}^m \to T_{f(w)}\mathbb{R}^n.$$

Weil die Ableitung eine lineare Abbildung ist, ist diese Abbildung eine lineare Abbildung von dem Vektorraum $\mathbb{R}^m$ in den Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Das wollen wir auf differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten übertragen.

Beispiel 1.33. *Wir hatten schon gesehen, dass sich für alle $x \in \mathbb{R}^m$ der Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^m$ auf natürliche Weise mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren lässt. Wenn allgemeiner V ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum ist, dann ist für alle $w, v \in V$ die Abbildung $t \mapsto w + tv$ unendlich oft differenzierbar, und die Ableitung ist gegeben durch $t \mapsto tv$. Jede differenzierbare Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to V, t \mapsto v(t)$, die 0 auf w abbildet, berührt offenbar genau die den Vektoren w und $v = \frac{dv(t)}{dt}|_{t=0}$ entsprechende obige Abbildung. Dadurch wird der Tangentialraum T_wV auf natürliche Weise mit V identifiziert.*

Definition 1.34. *Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann bildet die Verknüpfung mit f jede differenzierbare Abbildung von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach X auf eine differenzierbare Abbildung von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach Y ab. Dabei werden sich in $0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ berührende Abbildungen auf sich in $0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ berührende Abbildungen abgebildet. Deshalb induziert die Abbildung f eine Abbildung vom Tangentialraum T_xX von X an der Stelle $x \in X$ in den Tangentialraum $T_{f(x)}Y$*

von Y an der Stelle $y = f(x) \in Y$. Diese Abbildung wird mit $T_x(f)$ bezeichnet. Die Vereinigung aller dieser Abbildungen wird mit $T(f)$ bezeichnet:

$$T(f) : TX = \bigcup_{x \in X} T_x X \to TY = \bigcup_{y \in Y} T_y Y.$$

Satz 1.35. **(i)** *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Dann induziert jede Karte ϕ um $x \in X$ eine bijektive Abbildung $T_x(\phi)$ von $T_x X$ auf den Vektorraum $T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m$. Dieser Isomorphismus induziert auf $T_x X$ eine Vektorraumstruktur über $\mathbb{R}$, die nicht von der Karte ϕ abhängt.*

(ii) *Sei $f : X \to Y$ eine im Punkt $x \in X$ differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y. Dann ist die folgende Abbildung linear:*

$$T_x(f) : \quad T_x X \to T_{f(x)} Y.$$

(iii) *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ (stetig) differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann ist $g \circ f$ (stetig) differenzierbar und es gilt für alle $x \in X$*

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}(g) \circ T_x(f).$$

(iv) *Eine differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist genau dann lokal konstant, wenn $T_x(f) = 0$ für alle $x \in X$.*

(v) *Zwei differenzierbare Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten berühren sich genau dann, im Punkt $x \in X$, wenn gilt $f(x) = g(x)$ und $T_x(f) = T_x(g)$.*

Beweis: Weil die Ableitung einer differenzierbaren Abbildung von einer offenen Menge des $\mathbb{R}^m$ in eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist, folgt

(i) daraus, dass jede Karte ein Diffeomorphismus ist.

(ii) aus der Definition und der Kettenregel.

(iii) folgt aus der Kettenregel für stetig differenzierbare Abbildungen zwischen offenen Mengen von endlichdimensionalen euklidischen Räumen.

(iv) folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(v) folgt daraus, dass wir im $\mathbb{R}^n$ die Tangentialvektoren mit den Elementen des $\mathbb{R}^n$ identifizieren können, der Definition von sich berührenden Abbildungen und (ii). Denn durch diese Identifikation wird für differenzierbare Abbildungen f von einer offenen Menge des $\mathbb{R}^m$ in eine offenen Menge des $\mathbb{R}^m$ die Tangentialabbildung $T_x(f)$ mit der Ableitung von f im Punkt x identifiziert. Insbesondere wird durch jede Karte um einen Punkt $x \in X$ der Tangentialraum T_xX von X im Punkt x mit dem entsprechenden Vektorraum $\mathbb{R}^n$ identifiziert. **q.e.d.**

Wir können jetzt den Satz der inversen Funktion umformulieren.

Satz 1.36. *Sei $f : X \to Y$ eine r mal ($r \geq 1$ oder gleich undendlich) stetig differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y. Wenn $T_x(f)$ im Punkt $x \in X$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen $U \ni x$ und $V \ni f(x)$, so dass die Einschränkung von f auf U ein Homöomorphismus ist von U auf V. Außerdem ist die Umkehrabbildung dieser Einschränkung r mal stetig (unendlich oft) differenzierbar.* **q.e.d.**

Definition 1.37. *Der Rang einer differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten an der Stelle $x \in X$ ist der Rang der linearen Abbildung $T_x(f)$ von T_xX nach $T_{f(x)}Y$.*

Die Abbildung f heißt Immersion, wenn $\mathrm{Rang}(T_x(f)) = \dim T_xX$ für alle $x \in X$ gilt. Die Abbildung f heißt Submersion, wenn $\mathrm{Rang}(T_x(f)) = \dim T_{f(x)}Y$ für alle $x \in X$ gilt.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass für eine lineare Abbildung $A : V \to W$ zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen folgendes gilt:

$$\mathrm{Rang}(A) = \dim V \Leftrightarrow A \text{ ist injektiv} .$$

$$\mathrm{Rang}(A) = \dim W \Leftrightarrow A \text{ ist surjektiv} .$$

Deshalb sind die Immersionen also die Abbildungen, deren Ableitungen $T_x(f)$ für alle $x \in X$ injektiv sind, und die Submersionen die Abbildungen, deren Ableitungen $T_x(f)$ für alle $x \in X$ surjektiv sind. Insbesondere sind alle Diffeomorphismen sowohl Immersionen als auch Submersionen. Aber nicht alle glatten Abbildungen f, die sowohl Immersionen als auch Submersionen sind, sind auch Diffeomorphismen.

Beispiel 1.38. *Sei*

$$f : \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto (\cos(x), \sin(x)).$$

Dann ist f offenbar unendlich oft differenzierbar. Für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ist $f(x) \neq (1, 0)$. Die Komposition von f mit der stereographischen Projektion ist also gleich

$$x \mapsto y \text{ mit } y = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Die Ableitung dieser Abbildung ist

$$y' = \frac{\cos(x)(1-\cos(x)) - \sin^2(x)}{(1-\cos(x))^2} = \frac{\cos(x) - \cos^2(x) - \sin^2(x)}{(1-\cos(x))^2} = \frac{\cos(x) - 1}{(1-\cos(x))^2} =$$
$$= \frac{1}{1-\cos(x)}.$$

Also ist diese Abbildung für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ sowohl eine Immersion als auch eine Submersion. Für $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ gilt $f(x) \neq (-1, x)$. Dann ist die Komposition von f mit der gespiegelten stereographischen Projektion gleich

$$x \mapsto y \text{ mit } y = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}.$$

Für die Ableitung gilt

$$y' = \frac{\cos(x)(1+\cos(x)) + \sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{\cos(x) + 1}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1}{1+\cos(x)}$$

Also ist f eine Immersion und eine Submersion, aber kein Diffeomorphismus, weil f nicht injektiv ist. f ist zwar lokal ein Diffeomorphismus, aber nicht global.

Wegen dem Satz der inversen Funktion können wir für jede Immersion $f : X \to Y$ und jedes $x \in X$ Umgebungen U von x und V von $f(x)$ finden, so dass V diffeomorph ist zu dem kartesischen Produkt von U mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim T_{f(x)}Y - \dim T_xX$. Dadurch wird f mit einer Einbettung von U nach V identifiziert. Lokal ist also jede Immersion injektiv, aber nicht global.

Analog können wir auch wegen dem Satz der impliziten Funktion für jede Submersion $f : X \to Y$ und jedes $x \in X$ Umgebungen U von x und V von $f(x)$ finden, so dass U diffeomorph ist zu dem kartesischen Produkt von V mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim T_xX - \dim T_{f(x)}Y$. Dadurch wird f mit der natürlichen Projektion von U nach V identifiziert. Lokal ist also jede Submersion surjektiv, aber nicht global.

Wir nennen glatte Abbildungen, die sowohl Immersionen als auch Submersionen sind, lokale Diffeomorphismen. Dann sind alle bijektiven lokalen Diffeomorphismen auch globale Diffeomorphismen. Insbesondere sind verträgliche Karten Diffeomorphismen von offenen Teilmengen der Mannigfaltigkeit auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Wir können jetzt einige Begriffe der Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. So heißt ein Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren (reellen) Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ kritischer Punkt, wenn $T_x(f) = 0$ gilt. Allgemeiner nennen wir einen Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kritischen Punkt, wenn

$T_x(f) = 0$. Lokale Extremwerte von reellen Funktionen sind entweder lokale Minima oder lokale Maxima. Alle lokalen Extremwerte von differenzierbaren reellen Funktionen sind auch kritische Punkte.

Wir führen jetzt eine zweite Charakterisierung der Elemente des Tangentialraumes ein. Für eine differenzierbare Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to X, t \mapsto x(t)$ in die differenzierbare Mannigfaltigkeit X, die 0 auf den Punkt $x \in X$ abbildet definiert die Komposition mit jeder glatten reellen Funktion $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ eine differenzierbare reelle Funktion auf $(-\epsilon, \epsilon)$. Offenbar hängt die Ableitung von dieser Komposition an der Stelle $t = 0$ nur von der Äquivalenzklasse der Abbildung $t \mapsto x(t)$ bezüglich der Äquivalenzrelation des sich im Punkt x Berührens und der Funktion f ab. Dadurch definiert jedes $v \in T_xX$ eine Abbildung

$$D_v : \quad C^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Sie ist linear über $\mathbb{R}$ und erfüllt die Leibnizregel, d.h. es gilt für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$

$$D_v(f \circ g) = f(x) \cdot D_v(g) + D_v(f)g(x).$$

Satz 1.39. *(von Hadamard und Bohenblust) Sei $D : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto D(f)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung die für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ die Relation $D(fg) = f(x)D(g) + D(f)g(x)$ erfüllt mit $x \in X$, dann gibt es genau ein $v \in T_xX$ mit $D = D_v$.*

Beweis: Wegen der Leibnizregel definiert jedes $v \in T_xX$ eine solche Derivation D_v. Sei jetzt umgekehrt D eine beliebige Derivation, die obige Eigenschaften hat. Aus $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$ folgt, $D(1) = 0$. Deshalb stimmen für alle $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ die Werte $D(f)$ mit $D(f - f(x)1)$ überein. Die Funktion $f - f(x)1$ ist offenbar eine glatte Funktion in $C^\infty(X, \mathbb{R})$, die bei x verschwindet. Umgekehrt folgt $D(fg) = 0$ aus $f(x) = 0 = g(x)$. Also verschwindet D auf allen Produkten von glatten Funktionen, die bei x verschwinden. Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine verträgliche Karte, die x auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet. Dann sind $\phi_1 \ldots, \phi_n$ glatte Funktionen von einer Umgebung von x nach $\mathbb{R}$, die $\phi_1(x) = 0, \ldots, \phi_n(x) = 0$ erfüllen. Durch eine geeignete Zerlegung der Eins können wir diese Funktionen zu glatten Funktionen auf ganz X fortsetzen, ohne dass sie ihre Werte auf einer Umgebung von x verändern. Wir nennen diese Fortsetzungen weiterhin $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ definiert

$$(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n, t \to (tD(\phi_1), \ldots, tD(\phi_n))$$

eine Abbildung in den Wertebereich der Karte ϕ. Die Verkettung mit ϕ^{-1} ist eine glatte Abbildung $v : (-\epsilon, \epsilon) \to X, t \mapsto x(t)$ mit $x(0) = x$. Die entsprechende Äquivalenzklasse wollen wir auch $v \in T_xX$ nennen. Wir zeigen jetzt $D(f) = D_v(f)$ für alle $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$.

Dazu zeigen wir zuerst, dass $D(f)$ nur von den Werten von f auf einer Umgebung von x abhängt. Sei also $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ und $g = f|_U \circ \phi^{-1}$ die entsprechende Funktion auf dem Wertebereich der Karte ϕ. Dann ist g eine glatte Funktion auf einer offenen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $B(0,r)$ ein Ball im Wertebereich der Karte ϕ. Die Funktion $h = g_r \circ \phi$ aus dem letzten Abschnitt setzt sich zu einer glatten Funktion auf X fort, die außerhalb des Definitionsbereichs der Karte ϕ verschwindet, und in einer Umgebung von x gleich Eins ist. Dann bilden die Funktionen $(1-h)^2$ und $1-(1-h)^2 = h(2-h)$ eine Zerlegung der Eins. Für jedes $f \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ ist $f(1-h)^2 = f(1-h)\cdot(1-h)$ das Produkt zweier Funktionen, die bei x verschwinden. Deshalb gilt $D(f(1-h)^2) = 0$, und damit auch $D(f) = D(fh(2-h))$. Also stimmt D auf allen solchen Funktionen überein, die auf einer beliebig kleinen Umgebung von x übereinstimmen (man spricht dann auch von dem Funktionskeim in x). Insbesondere hängt $D(f)$ nur von g ab.

Als zweites zerlegen wir die Differenz $f - f(x)$ auf einer Umgebung von x in eine Summe von Produkten von $\phi_1, \ldots, \phi_n$ mit glatten Funktionen. Für alle $y \in B(0,r)$ gilt

$$g(y) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(ty)dt = \int_0^1 y \cdot \nabla g(ty)dt = y \cdot \int_0^1 \nabla g(ty)dt.$$

Deshalb ist die Funktion $g - g(0)$ eine Summe von Produkten der Komponenten des Koordinatenvektors y mit glatten Funktionen, die bei $y = 0$ mit den entsprechenden partiellen Ableitungen von g an der Stelle 0 übereinstimmen. Dann ist auch $f - f(x)$ auf einer Umgebung von x eine Summe von $\phi_1, \ldots, \phi_n$ mit glatten Funktionen.

Die Abbildung zu der Äquivalenzklasse v ist so gewählt, dass $\phi_i \circ v$ gleich $t \mapsto tD(\phi_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Deshalb stimmt D_v auf den Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ mit D übereinstimmt. Wegen der Derivationseigenschaft ist dann D eindeutig durch die Werte $D(\phi_1), \ldots, D(\phi_n)$ festgelegt und stimmt deshalb mit D_v überein. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir die Definition des Tangentialraumes nochmal zusammenfassen. Für jeden Vektorraum V ist der Tangentialraum an jedem Punkt $v \in V$ auf natürliche Weise isomorph zu dem Vektorraum V. Insbesondere ist der Tangentialraum von jedem reellen Intervall in jedem Punkt des Intervalls isomorph zu $\mathbb{R}$. Weil differenzierbare Abbildungen sich hochheben lassen zu Abbildungen zwischen den Tangentialräumen, konnten wir den Tangentialraum dadurch unabhängig von den Karten einführen, indem wir die Tangentialvektoren als die Bilder von Tangentialvektoren von offenen Intervallen $(-\epsilon, \epsilon)$ unter differenzierbaren Abbildungen von den offenen Intervallen in die differenzierbare Mannigfaltigkeit definiert haben. Jeder solche Tangentialvektor definiert durch die Richtungsableitung eine Derivation auf den glatten Funktionen. Umgekehrt ist jede Derivation auf den glatten Funktionen von dieser Form, so dass wir die Derivationen mit den Tangentialvektoren identifizieren können.

Im übernächsten Abschnitt werden wir auch $TX = \bigcup_{x \in X} T_x$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit machen, so dass für glatte Abbildungen f zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten auch $T(f)$ eine glatte Abbildung ist.

1.6 Produkte von Mannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten

Nachdem wir die Objekte und die Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt haben, werden wir jetzt zwei Möglichkeiten kennenlernen, wie wir aus differenzierbaren Mannigfaltigkeiten neue differenzierbare Mannigfaltigkeiten bilden können; nämlich einerseits das kartesische Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten, und andererseits Untermannigfaltigkeiten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das kartesische Produkt erhält man ohne weitere Schwierigkeiten, indem wir erst die topologischen Räume, dann die Karten und schließlich die Atlanten des kartesischen Produktes aus den entsprechenden topologischen Räumen, Karten und Atlanten der beiden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bilden. Dagegen ist die Einführung von Untermannigfaltigkeiten relativ kompliziert. Natürlich ist jede offene Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Aber Untermannigfaltigkeiten von niederer Dimension sind nicht so einfach zu beschreiben. Hier benutzen wir den Satz der inversen Funktion.

Das kartesische Produkt von zwei separablen metrisierbaren Räumen X und Y ist wieder separabler metrisierbarer Raum $X \times Y$. Wenn ϕ und ψ Karten sind von X bzw. Y mit Definitionsbereichen U und V, dann ist

$$\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (x, y) \to (\phi(x), \psi(y))$$

eine Karte von $X \times Y$. Wenn diese Karten Atlanten von X bzw. Y durchlaufen, erhalten wir einen Atlas von $X \times Y$.

Definition 1.40. *Das kartesische Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y ist auf natürliche Weise wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $X \times Y$, so dass die beiden folgenden natürlichen Projektionen glatte Abbildungen sind:*

$$p_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x \quad p_2 : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$$

Diese beiden Projektionen sind dann offenbar beide surjektive Submersionen. Umgekehrt ist für jedes $y \in Y$ die Abbildung $X \to X \times Y, \quad x \mapsto (x, y)$ eine injektive Immersion. Analog ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $Y \to X \times Y, \quad y \mapsto (x, y)$ eine injektive Immersion. Durch diese beiden Abbildungen können wir sowohl X als auch Y als abgeschlossenen topologischen Unterraum von $X \times Y$ auffassen. Wir wollen jetzt X bzw. Y als differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$ auffassen.

Definition 1.41. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine Immersion. Ist f ein Homöomorphismus auf $f[X]$ als topologischen (metrischen) Unterraum von Y, dann heißt f Einbettung und $f[X]$ Untermannigfaltigkeit von Y.*

Wenn $f : X \to Y$ eine injektive Immersion ist, reicht es nicht noch zusätzlich zu fordern, dass das Bild $f[X]$ abgeschlossen ist in Y, damit f eine Einbettung ist.

Beispiel 1.42. *Sei*

$$f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^2, t \to \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{t(t^2-1)}{t^2+1}\right)$$

Dann ist f offenbar eine injektive Immersion und das Bild ist sogar abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$. Aber wegen $\lim\limits_{t\to 1} f(t) = f(-1)$ ist f kein Homöomorphismus auf das Bild als topologischen Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

Um solche topologischen Unterräume X einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y zu charakterisieren, die differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind, zeigen wir zunächst den sogenannten Rangsatz.

Satz 1.43. *Sei $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f : X \to Y$ eine l-mal stetig differenzierbare Abbildung von der offenen Menge $X \subset \mathbb{R}^m$ in die offenen Menge $Y \subset \mathbb{R}^n$. Dann besitzt jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung, auf der der Rang von f nicht kleiner als bei x_0 ist.*

Ist der Rang auf einer Umgebung von x_0 konstant, dann gibt es auf offenen Umgebungen U von x_0 und V von $f(x_0)$ l-mal stetig differenzierbare Karten ϕ und ψ mit $\phi(x_0) = 0 = \psi(f(x_0))$ und l-mal stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen, so dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ mit der Einschränkung der linearen Abbildung $f'(x_0)$ auf $\phi[U]$ übereinstimmt.

Beweis: Sei r der Rang von f bei x_0. dann gibt es r linear unabhängige Vektoren $x_1 \ldots, x_r \in \mathbb{R}^m$, die durch $f'(x_0)$ auf linear unabhängige Vektoren von $\mathbb{R}^n$ abgebildet werden. Dann gibt es r Komponenten von $\mathbb{R}^n$, so dass die Determinante der $r \times r$ Matrix, dieser Komponenten der Vektoren $f'(x_0)x_1, \ldots, f'(x_0)x_r$ nicht verschwindet. Die Determinante der Matrix dieser Komponenten der Vektoren $f'(x)x_1, \ldots, f'(x)x_r$ hängt stetig von x ab. Deshalb gibt es eine Umgebung, auf der diese Determinante nicht verschwindet. Dort ist der Rang von $f'(x)$ dann nicht kleiner als r.

Sei jetzt der Rang auf einer Umgebung von x_0 konstant gleich r. Wir wählen invertierbare lineare Abbildungen $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ und $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so dass $C \circ f'(x_0) \circ B$ gleich der Abbildung $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ mit $(x, \tilde{x}) \mapsto (x, 0)$ ist, und ersetzen $x \mapsto f(x)$ durch $x \mapsto C \circ f(x_0 + Bx)$. Dadurch wird $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0)$ zu $(x, \tilde{x}) \mapsto (x, 0)$. Die ersten r Koponenten von f fassen wir zu $\hat{f}$ und die letzten $n - r$ Komponenten zu $\tilde{f}$ zusammen. Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es $B(0, R) \subset \mathbb{R}^r$ und $B(0\tilde{R}) \subset \mathbb{R}^{m-r}$ und eine l-mal stetig differenzierbare Abbildung

$$g : B(0, R) \times B(0, \tilde{R}) \to W \subset \mathbb{R}^r, \text{ mit } \hat{f}(g(x, \tilde{x}), \tilde{x}) = x \text{ für } (x, \tilde{x}) \in B(0, R) \times B(0, \tilde{R}).$$

Bei 0 entspricht die Ableitungen von g der $r \times m$-Matrix $(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}, 0)$. Dann erfüllt

$$\Phi : B(0,R) \times B(0,\tilde{R}) \to W \times B(0,\tilde{R}), \quad (x,\tilde{x}) \mapsto (g(x,\tilde{x}),\tilde{x}) \quad \hat{f}(\Phi(x,\tilde{x})) = x$$

auf $(x,\tilde{x}) \in B(0,R) \times B(0,\tilde{R})$. Bei 0 hat Φ die Ableitung $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$. Wegen dem Satz der inversen Funktion besitzt Φ für hinreichend kleines R und $\tilde{R}$ eine l-mal stetig differenzierbare Umkehrabbildung. Für hinreichend kleine R, $\tilde{R}$ und W sind $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r$ auf $W \times B(0,\tilde{R})$ linear unabhängig, und $\nabla f_{r+1}, \ldots, \nabla f_n$ wegen dem konstanten Rang Linearkombinationen von $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r$. Für $x \in B(0,R)$ ist $\hat{f}$ und damit auch $\tilde{f}$ auf $\Phi[\{x\} \times B(0,\tilde{R})]$ konstant. Auf einer geeigneten Umgebung V von $0 \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ hat die folgende l-mal stetig differenzierbare Abbildung die Umkehrabbildung:

$$\psi : (y,\tilde{y}) \mapsto (y, \tilde{y} - \tilde{f}(\Phi(y,0))) \qquad \psi^{-1} : (y,\tilde{y}) \mapsto (y, \tilde{y} + \tilde{f}(\Phi(y,0))).$$

Dann gilt $\psi(f(\Phi(x,\tilde{x}))) = (x,0)$ für alle $x \in B(0,R)$ und $\tilde{x} = 0$ und wegen der Konstanz von $\tilde{f}$ auf $\Phi[\{x\} \times B(0,\tilde{R})]$ auch für alle $\tilde{x} \in B(0,\tilde{R})$. **q.e.d.**

Korollar 1.44. *Sei $X \subset Y$ ein topologischer Unterraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann besitzt X genau dann die Struktur einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von Y, wenn es für jedes $x \in X$ eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Umgebung von x in Y gibt, die x auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet, und die Einschränkung $\phi|_{U\cap X}$ von ϕ auf die offene Umgebung $U \cap X$ von x in X ein Homöomorphismus ist auf die Schnittmenge von dem Bild $\phi[U]$ von ϕ mit einem linearen Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Hierbei ist n die Dimension der Karte.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die angegebene Bedingung hinreichend dafür ist, dass X eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist. Die Einschränkung einer solchen Karte ϕ um $x \in X$ auf $U \cap X$ ist offenbar eine Karte von X um den Punkt x, weil die Schnittmenge einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit einem Unterraum von $\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des linearen Unterraumes ist. Zwei solche Karten, deren Definitionsbereiche beide den Punkt x enthalten, bilden beide eine offene Umgebung von x in X jeweils auf eine offene Teilmenge eines linearen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ab. Die entsprechenden Übergangsfunktionen sind dann Homöomorphismen von einer offenen Teilmenge des einen Unterraumes auf eine offene Teilmenge des anderen Unterraumes. Weil die Karten von Y miteinander verträglich sind, sind dann auch diese Karten von X miteinander verträglich. Hier benutzen wir, dass jede differenzierbare Abbildung auch partiell differenzierbar ist. Deshalb ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ ist eine glatte Abbildung, deren Rang für alle $x \in X$ mit der Dimension von T_xX übereinstimmt. Also ist X eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit.

Wenn umgekehrt $f : Z \to Y$ eine Immersion und ein Homöomorphismus auf einem topologischen Unterraum $X = f[Z] \subset Y$ ist, dann hat f auf jeder Zusammenhangskomponenten von Z konstanten Rang. Wegen Satz 1.43 liegt dann jedes $x \in X$ im

Definitionsbereich U einer Karte ϕ der Dimension n von Y mit $\phi(x) = 0$, das die Schnittmenge $U \cap X$ auf $\phi[U] \cap T(\phi \circ f)[T_{f^{-1}(x)}Z] \subset T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ abbildet. Damit haben wir gezeigt, dass es für jede Untermannigfaltigkeit X von Y einen Atlas gibt, der die Bedingungen des Lemmas erfüllt. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir noch den Satz der impliziten Funktion umformulieren.

Korollar 1.45. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit lokal konstantem Rang. Dann ist für jedes $y \in f[X]$ das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit von X. Sie hat in $x \in f^{-1}[\{y\}]$ die Dimension*

$$\dim T_xX - \mathrm{Rang}(T_x(f)).$$

Beweis: Wegen Satz 1.43 liegt jedes $x \in X$ im Definbitionsbereich U einer Karte ϕ von X der Dimension n mit $\phi(x) = 0$, die $U \cap f^{-1}[\{f(x)\}]$ in einen linearen Unterrraum $\phi[U] \cap T_x(\phi)[\mathrm{Kern}(T_x(f))] \subset \mathbb{R}^n$ abbildet. Dieser Kern hat die Dimension $\dim T_xX - \mathrm{Rang}(T_x(f))$. Dann folgt die Aussage aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

Insbesondere sind die Niveaumengen von Submersionen Untermannigfaltigkeiten.

Korollar 1.46. *Seien X, Y und Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$ zwei glatte Abbildungen, von denen mindestens eine eine Submersion ist. Dann ist das Faserprodukt*

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

eine Untermannigfaltigkeiten von $X \times Y$ der Dimension

$$\dim T_{(x,y)}X \times_Z Y = \dim T_xX + \dim T_yY - \dim T_{f(x)}Z = \dim T_xX + \dim T_yY - \dim T_{g(y)}Z.$$

Beweis: Seien $(x, y) \in X \times_Z Y$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von Z auf einer offenen Umgebung U von $z = f(x) = g(y)$. Dann ist die Abbildung

$$\phi \circ f \circ p_1 - \phi \circ g \circ p_2 : f^{-1}[U] \times g^{-1}[U] \to \mathbb{R}^n, (u, v) \mapsto \phi(f(u)) - \phi(g(v))$$

eine Submersion, weil entweder $\phi \circ f$ oder $\phi \circ g$ eine Submersion ist. Das Urbild der $0 \in \mathbb{R}^n$ dieser Abbildung ist wegen Korollar 1.45 eine Untermannigfaltigkeit von $f^{-1}[U] \times g^{-1}[U]$. Weil ϕ injektiv ist, ist $\phi(f(u)) = \phi(g(v))$ äquivalent zu $f(u) = g(v)$. Also ist diese Untermannigfaltigkeit gleich $f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U]$. Damit sind auf diesem Teilraum $f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U] \subset f^{-1}[U] \times g^{-1}[U] \subset X \times Y$ die Bedingungen im Korollar 1.44 erfüllt. Weil dies für alle $(x, y) \in X \times_Z Y$ gilt, sind diese Bedingungen auf ganz $X \times_Z Y$ erfüllt. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Beispiel 1.47. **(i)** *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist die Diagonale von $X \times X$ das Faserprodukt $X \times_X X$ bezüglich zwei Kopien der Abbildungen $\mathbb{1}_X : X \to X$. Diese Abbildungen sind Diffeomorphismen, so dass die Diagonale $X \times_X X$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von X ist. Die Abbildung $X \to X \times X, x \mapsto (x, x)$ ist offenbar einen Diffeomorphismus von X auf $X \times_X X$.*

(ii) *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung. Dann ist der Graph von f das Faserprodukt $X \times_Y Y$ der beiden Abbildungen $f : X \to Y$ und $\mathbb{1}_Y : Y \to Y$. Weil die zweite ein Diffeomorphismus ist, ist $X \times_Y Y$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$. Die Abbildung $\mathbb{1}_X \times f$ induziert offenbar einen Diffeomorphismus von $X \times_X X$ auf $X \times_Y Y$.*

1.7 Tangentialbündel

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Vereinigung aller Tangentialräume $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ wieder zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit der Vektorraumstruktur zu machen. Dazu führen wir zunächst den Begriff des Faserbündels ein.

Definition 1.48. *Ein differenzierbares Faserbündel ist ein Tripel (X, B, π), wobei X und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind und π eine surjektive glatte Abbildung von X nach B, die die folgende Bedingung (der sogenannten lokalen Trivialität) erfüllt.*

Lokale Trivialität: *Zu jedem $b \in B$ gibt es eine offene Umgebung U von b in B und eine differenzierbare Mannigfaltigkeit F mit einem Diffeomorphismus $\phi : F \times U \to \pi^{-1}[U]$, so dass die Abbildung $\pi \circ \phi$ mit der natürlichen Projektion $p_2 : F \times U \to U$ übereinstimmt.*

Weil die natürliche Projektion p_2 von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $F \times U$ nach U immer eine Submersion ist, ist dann auch π eine Submersion. Man nennt X den Faserraum, B seine Basis und π die Projektion des Faserbündels. Wegen der lokalen Trivialität sind alle Urbilder $\pi^{-1}[\{b\}]$ für alle b in einer Umgebung eines $b_0 \in B$ zueinander diffeomorph. Diese Urbilder werden Fasern genannt. Sind alle Fasern zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit F diffeomorph, so wird das Faserbündel auch Faserraum vom Fasertyp F genannt. Aus der lokalen Trivialität folgt, dass die Menge aller $b \in B$ mit Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$, die zu einer Faser $\pi^{-1}[\{b_0\}]$ diffeomorph sind, offen sind. Aus der lokalen Trivialität folgt auch, dass sie auch den Grenzwert von konvergenten Folgen in ihnen enthalten. Deshalb sind diese Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen. Also sind die Einschränkungen eines Faserbündels auf das entsprechende Faserbündel $(\pi^{-1}[C], C, \pi|_{\pi^{-1}[C]})$ über einer zusammenhängenden Komponente C von B Faserbündel von einem bestimmten Fasertyp.

Definition 1.49. *Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Ein $\mathbb{K}$–Vektorraumbündel ist ein Faserbündel (E, B, π), so dass jede Faser $\pi^{-1}[\{b\}]$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist, und die lokale Trivialisierungen ϕ für jedes $b \in B$ Vektorraumisomorphismen von $\{b\} \times F$ nach $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind.*

Beispiel 1.50. *Sei V ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und π die natürliche Projektion von $V \times X$ auf X. Dann ist $(V \times X, X, \pi)$ ein Vektorraumbündel über X. Dieses Vektorraumbündel wird trivial genannt.*

Die lokale Trivialität besagt genau, dass jedes Vektorraumbündel lokal ein triviales Vektorraumbündel ist. Deshalb können wir jedes Vektorraumbündel aus solchen trivialen Vektorraumbündeln zusammenkleben.

Beispiel 1.51. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und F ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Sei $\mathcal{L}(F)$ der normierte Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von F nach F. Er enthält als offene Teilmenge die Gruppe $GL(F)$ aller stetigen und stetig invertierbaren linearen Abbildungen von F nach F. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Wir wollen die trivialen Vektorraumbündel $(F \times U)_{U\in\mathcal{U}}$ zu einem Vektorraumbündel über X verkleben. Für nicht schnittfremde Paare $(U, V) \in \mathcal{U}\times\mathcal{U}$ sei $\phi_{V,U}$ eine glatte Funktion von $U \cap V$ nach $GL(F)$. Sie definiert folgende glatte Abbildung:*

$$F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V), (f, x) \mapsto (\phi_{V,U}(x)f, x).$$

Weil $\phi_{V,U}(x)$ für jedes $x \in U \cap V$ invertierbar ist, ist die Umkehrabbildung gleich

$$F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V), (f, x) \mapsto (\phi^{-1}_{V,U}(x)f, x).$$

Also sind diese Abbildungen Diffeomorphismen. Weil $\phi_{V,U}(x)$ und $\phi^{-1}_{V,U}(x)$ für alle $x \in U \cap V$ linear sind, sind diese Diffeomorphismen sogar Isomorphismen von Vektorraumbündeln. Damit diese Isomorphismen die trivialen Vektorraumbündel $(F \times U)_{U\in\mathcal{U}}$ auf eindeutige Weise zu einem Vektorraumbündel über X verklebt, müssen für alle $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$ die drei trivialen Vektorraumbündel $F \times U, F \times V$ und $F \times W$ auf $U \cap V \cap W$ eindeutig miteinander identifiziert werden. Deshalb fordern wir:

Kozykelbedingung: *Für alle nicht schnittfremden Tripel $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$ gilt*

$$\phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x) = \phi_{W,U}(x) \quad \text{für alle } x \in U \cap V \cap W.$$

Wenn wir $U = V = W$ setzen erhalten wir

$$\phi_{U,U}(x) = \mathbb{1}_F \text{ für alle } x \in U.$$

Wenn wir $U = W$ *setzen erhalten wir*

$$\phi_{U,V}(x)\phi_{V,U}(x) = \mathbb{1}_F \text{ für alle } x \in U \cap V.$$

$$\Leftrightarrow \phi_{U,V}(x) = \phi_{V,U}^{-1}(x) \text{ für alle } x \in U \cap V.$$

Auf dem Raum $\bigcup_{U\in\mathcal{U}}(F \times U)$ *führen wir folgende Relation ein:*

$$(e,x) \in F \times U \sim (f,y) \in F \times V \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = x \text{ und } \phi_{V,U}(x)e = f.$$

Wir zeigen jetzt, dass diese Relation wegen der Kozykelbedingung eine Äquivalenzrelation ist. Wegen $\phi_{U,U}(x) = \mathbb{1}_U$ *ist die Relation reflexiv. Wegen* $\phi_{U,V}(x) = \phi_{V,U}^{-1}(x)$ *ist* $\phi_{V,U}(x)e = f$ *äquivalent zu* $\phi_{U,V}(x)f = e$*. Deshalb ist die Relation* $\sim$ *symmetrisch. Weil für alle* $x \in U \cap V \cap W$ *gilt* $\phi_{W,U}(x) = \phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x)$*, folgt aus* $(e,x) \in F \times U \sim (f,y) \in F \times V$ *und* $(f,y) \in F \times v \sim (g,z) \in F \times W$ *auch* $z = y = x \in U \cap V \cap W$ *und* $\phi_{W,U}(x)e = \phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x)e = \phi_{W,V}(x)f = g$*. Also ist die Relation* $\sim$ *auch transitiv.*

Sei E *die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir versehen jetzt* E *mit einer Metrik. Wegen Lemma 1.29 besitzt jede offene Überdeckung von* X *eine abzählbare Verfeinerung* $\mathcal{U}$ *(d.h. eine offene Überdeckung deren offene Mengen jeweils in einer der offenen Mengen der ursprünglichen Überdeckung enthalten sind), von denen jeweils nur endlich viele offene Mengen in* $\mathcal{U}$ *mit einer offenen Menge* $U \in \mathcal{U}$ *nicht schnittfremd sind. Deshalb können wir annehmen, dass* $\mathcal{U}$ *eine solche Überdeckung ist. Wir wählen eine Metrik auf* X*, die die Topologie von* X *induziert. Dann sind für alle* $U \in \mathcal{U}$ *die kartesischen Produkte* $F \times U$ *metrische Räume. Für alle* $U \in \mathcal{U}$ *sei*

$$d_U : \bigcup_{U\in\mathcal{U}} F \times U \times \bigcup_{U\in\mathcal{U}} F \times U \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto d_U(u,v) = \begin{cases} \frac{d(u,v)}{1+d(u,v)} & \text{falls } u,v \in F \times U \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} F \times U$ *mit* $d = \inf\limits_{U\in\mathcal{U}} d_U$ *ein separabler metrischer Raum. Wegen der Eigenschaft von* $\mathcal{U}$*, sind von den Abbildungen* $(d_U)_{U\in\mathcal{U}}$ *auf allen Äquivalenzklassen jeweils nur endlich viele ungleich Eins. Deshalb definiert auf der Menge* E *der Äquivalenzklassen das Infimum der Abstände zwischen den Elementen der Äquivalenzklassen eine Metrik. Die Projektionen* $p_2 : F \times U \to U$ *der trivialen Vektorraumbündel* $F \times U$ *induzieren eine Abbildung* $\pi : E \to X$*. Alle Fasern* $(\pi^{-1}[\{x\}])_{x\in X}$ *dieser Abbildung sind offenbar homöomorph zu* F*. Weil für alle* $x \in U \cap V$ *die Werte* $\phi_{V,U}(x)$ *der Übergangsfunktionen lineare Abbildungen sind, sind diese Fasern sogar als topologische Vektorräume isomorph zu* F*. Der separable metrische Raum* E *besitzt außerdem eine eindeutige differenzierbare Struktur, so dass für alle* $U \in \mathcal{U}$*, die natürliche Abbildung* $F \times U \to \pi^{-1}[U]$ *ein Diffeomorphismus ist. Damit ist* (E,X,π) *ein Vektorraumbündel.*

Satz 1.52. **(i)** *Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* X *ist* $TX = \bigcup_{x\in X} T_xX$ *ein reelles Vektorraumbündel über* X*. Es heißt Tangentialbündel von* X*.*

(ii) *Sei $f : X \to Y$ eine r mal (stetig) differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y. Dann definiert $T(f) : TX \to TY$ eine $(r-1)$ mal (stetig) differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit TX auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit TY, so dass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{T(f)} & TY \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(iii) *Seien X, Y und Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen. Dann gilt $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.*

(iv) *Die Tangentiale Abbildung $T(\mathbb{1}_X)$ der identischen Abbildung $\mathbb{1}_X$ von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist die identische Abbildung von TX.*

Beweis: Auf allen zusammenhängenden Komponenten sind die Dimensionen der Tangentialräume gleich einer natürlichen Zahl. Wegen Korollar 1.12 ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine höchstens abzählbare Vereinigung von offenen zusammenhängenden Komponenten. Deshalb können wir uns im Folgenden auf zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten X der Dimension n beschränken.

Die Tangentialräume vom $\mathbb{R}^n$ bilden ein triviales Vektorraumbündel:

$$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ mit } \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (v, w) \mapsto w.$$

Dies folgt aus der Identifikation des Tangentialraumes $T_w\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ im Punkt $w \in \mathbb{R}$ mit dem Raum aller infinitesimalen Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$, die wir schon zur Einführung der Vektorraumstruktur auf T_xX benutzt haben. Sei $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ ein Atlas von X mit den Definitionsbereichen $(U \in \mathcal{U})$. Diese Karten $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ induzieren bijektive Abbildungen

$$T(\phi_U) : TU \to T\phi_U[U] \subset T\mathbb{R}^n,$$

die faserweise, also für alle $x \in U$ Vektorraumisomorphismen

$$T_x(\phi_U) : T_xU \to T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

induzieren. Indem wir die Tangentialbündel von $\phi_U[U]$ mit dem trivialen Bündel

$$T\phi_U[U] = \mathbb{R}^n \times \phi_U[U] \subset T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

identifizieren, und dann die Kartenwechsel

$$\phi_V\phi_U^{-1} : \phi_U[U \cap V] \to \phi_V[U \cap V]$$

benutzen, können wir diese trivialen Vektorraumbündel zu einem Vektorraumbündel über X verkleben. Die entsprechenden Abbildungen

$$U \cap V \to GL(\mathbb{R}^n)$$

sind dann gegeben durch die Ableitungen der Übergangsfunktionen

$$(\phi_V \circ \phi_U^{-1})' \circ \phi_U : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^n).$$

Wenn die Definitionsbereiche U und V der beiden Karten ϕ_U und ϕ_V nicht schnittfremd sind, müssen die Dimensionen der Karten übereinstimmen, so dass $(\phi_V \circ \phi_U^{-1})'$ Werte in $GL(\mathbb{R}^n)$ annimmt. Für $U, V, W \in \mathcal{U}$ gilt

$$(\phi_W \circ \phi_U^{-1})(y) = (\phi_W \circ \phi_V^{-1}) \circ (\phi_V \circ \phi_U^{-1})(y) \text{ für alle } y \in \phi_U[U \cap V \cap W].$$

Daraus folgt mit der Kettenregel

$$(\phi_W \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) = (\phi_W \circ \phi_V^{-1})'(\phi_V(x)) \cdot (\phi_V \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) \text{ für alle } x \in U \cap V \cap W.$$

Also ist die Kozykelbedingung erfüllt und alle trivialen Vektorraumbündel $(\mathbb{R}^n \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ definieren durch diese Kozykel ein Vektorraumbündel über X. Für jede Karte

$$\phi_U : U \to \phi_U[U] \subset \mathbb{R}^n$$

erhalten wir bijektive Abbildungen

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_U^{-1}) \circ T(\phi_U) : TU \to T\phi_U[U] \simeq \mathbb{R}^n \times \phi_U[U] \to \mathbb{R}^n \times U.$$

Dadurch erhalten wir eine bijektive Abbildung von TX in das durch die Kozykel definierte Vektorraumbündel über X. Diese Abbildungen sind gerade so definiert, dass sie mit den Äquivalenzrelation, aus deren Äquivalenzklassen das verklebte Vektorraumbündel besteht, verträglich ist: Auf $T(U \cap V)$ gilt nämlich

$$((\phi_V \circ \phi_U^{-1})' \circ \phi_U \times \mathbb{1}_{U \cap V}) \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_U^{-1}) \circ T(\phi_U) = (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_V^{-1}) \circ T(\phi_V)$$

weil für alle $x \in U \cap V$ gilt

$$T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) \circ T_x(\phi_U) = T_x(\phi_V)$$

und $T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1})$ durch die Identifikation von

$$T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \text{ und } T_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

mit der Abbildung $(\phi_V \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) \in GL(\mathbb{R}^n)$ identifiziert wird. Damit ist (i) gezeigt.

Aufgrund der Konstruktion des Tangentialbündels in (i) genügt es (ii) in einer Karte nachzuprüfen. Sei also ϕ eine Karte von X um $x \in X$ und ψ eine Karte von Y in $f(x)$. Dann ist die Tangentialabbildung $T_x(f)$ als Abbildung von

$$T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n \text{ nach } T_{\psi(f(x))}\mathbb{R}^n \quad \text{gegeben durch} \quad (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)).$$

Hierbei ist n die Dimension von ϕ und m die Dimension von ψ. Weil also $T(f)$ durch die Ableitung von f bestimmt ist, ist $T(f)$ einmal weniger als f differenzierbar.

(iii) folgt aus Satz 1.35 (iii).

(iv) folgt daraus, dass die Ableitung der identischen Abbildung $1\!\!1_{\mathbb{R}^n}$ des $\mathbb{R}^n$ (oder eines beliebigen normierten Vektorraumes) an jeder Stelle gleich der identischen Abbildung des $\mathbb{R}^n$ (des normierten Vektorraumes) ist. **q.e.d.**

Definition 1.53. *Sei (X, B, π) ein differenzierbares Faserbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Sei $U \subset B$ eine offene Teilmenge von B. Dann heißt eine p mal (stetig) differenzierbare Abbildung $f : U \to X$, so dass die Komposition von f mit π gleich der identischen Abbildung von U ist, ein p mal (stetig) differenzierbarer Schnitt von dem Faserbündel (X, B, π) (oder auch nur X) über U. Wenn $U = B$ wird f auch globaler Schnitt genannt.*

Nicht jedes Faserbündel besitzt auch globale Schnitte, aber wegen der lokalen Trivialität besitzt jedes Faserbündel lokale Schnitte. Jedes Vektorraumbündel (E, B, π) besitzt immer den globalen Nullschnitt, der jedem $b \in B$ die eindeutige Null aus der Faser $\pi^{-1}[\{b\}]$ zuordnet. Die Menge aller dieser Nullen bildet wegen der lokalen Trivialität eine Untermannigfaltigkeit von E, die offenbar diffeomorph ist zu B.

Lemma 1.54. *Sei F ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann ist E genau dann als Vektorraumbündel isomorph zu dem trivialen Bündel $(F \times B, B, \pi)$, wenn E n globale glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ besitzt, deren Werte in allen Fasern $(\pi^{-1}[\{b\}])_{b \in B}$ linear unabhängig sind.*

Beweis: Wenn $\phi : F \times B \to E$ ein Diffeomorphismus ist, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} F \times B & \xrightarrow{\phi} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{1\!\!1_B} & B \end{array}$$

und ϕ faserweise ein Vektorraumisomorphismus ist, dann wird jedes Element $e \in F$ durch die Abbildung

$$f : B \to \{e\} \times B \xrightarrow{\phi} E$$

zu einem globalen Schnitt von E. Insbesondere induziert jede Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von F durch ϕ globale glatte holomorphe Schnitte $f_1, \ldots, f_n$, die faserweise alle linear unabhängig sind.

Jede Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von F induziert einen Isomorphismus von den topologischen Vektorräumen F und $\mathbb{K}^n$. Deshalb genügt es umgekehrt zu zeigen, dass glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ von E, die faserweise linear unabhängig sind, einen Isomorphismus des Vektorraumbündels E mit dem trivialen Vektorraumbündel $\mathbb{K}^n \times B \simeq F \times B$ induzieren. Weil die Werte von den Schnitten $f_1, \ldots, f_n$ in allen Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ mit $b \in B$ eine Basis der Faser bilden, induzieren sie eine bijektive, faserweise lineare Abbildung f von E nach $\mathbb{K}^n \times B$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^n \times B \\ \pi \downarrow & & p_2 \downarrow \\ B & \xrightarrow{\mathbb{1}_B} & B \end{array}$$

Weil die Schnitte alle glatt sind, ist diese Abbildung f sogar ein Diffeomorphismus und damit auch ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraumbündel E und dem trivialen Vektorraumbündel $\mathbb{K}^n \times B$. **q.e.d.**

Satz 1.55. **(i)** *Sei B eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann sind alle Fasern $(\pi^{-1}[\{b\}])$ eines Vektorraumbündels (E, B, π) über B als topologische Vektorräume isomorph, d.h. (E, B, π) ist von einem bestimmten Fasertyp.*

(ii) *Sei F ein topologischer Vektorraum und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von B und Kozykel ϕ, d.h. für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ glatte Abbildungen $\phi_{V.U} : U \cap V \to GL(F)$, die die Kozykelbedingung erfüllen, so dass das entsprechende Vektorraumbündel isomorph ist zu (E, B, π).*

Beweis: (i) Wegen der lokalen Trivialität gibt es für jedes $b \in B$ eine offene Umgebung U von b, auf der alle Fasern $(\pi^{-1}[\{b'\}])_{b' \in U}$ als topologische Vektorräume isomorph sind zu $\pi^{-1}[\{b\}]$. Also sind die Teilmengen von B, auf denen die Fasern als topologische Vektorräume isomorph sind, offen. Wenn $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einer solchen Teilmenge ist, dann gibt es eine Umgebung von dem Grenzwert, auf der die Fasern als topologische Vektorräume isomorph sind. Deshalb sind diese Teilmengen auch abgeschlossen. Wenn B zusammenhängend ist, dann ist für alle $b \in B$ die Teilmenge, auf denen alle Fasern als topologische Vektorräume isomorph zu $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind, gleich B.
(ii) Wegen der lokalen Trivialität gibt es für jedes Vektorraumbündel vom Fasertyp F eine Überdeckung $\mathcal{U}$, und für alle $U \in \mathcal{U}$ Diffeomorphismen $\phi_U : F \times U \to \pi^{-1}[U]$, so

dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}[U] \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U \end{array}$$

und ϕ_U faserweise Isomorphismen der topologischen Vektorräume F und $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind für alle $b \in U$. Für alle $(U,V) \in \mathcal{U}^2$ definieren die Einschränkungen der Diffeomorphismen ϕ_U und ϕ_V auf $F \times (U \cap V)$ folgenden Diffeomorphismus

$$\phi_V^{-1}\big|_{\pi^{-1}[U \cap V]} \circ \phi_U\big|_{F \times (U \cap V)} : \quad F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V).$$

Weil dieser Diffeomorphismus faserweise ein Element von $GL(F)$ definiert, ist er beschrieben durch eine glatte Abbildung

$$\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(V).$$

Weil für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$ gilt $\quad \phi_W^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_U|_{F \times (U \cap V \cap W)} =$

$$= \phi_W^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_V|_{F \times (U \cap V \cap W)} \circ \phi_V^{-1}|_{\pi^{-1}[U \cap V \cap W]} \circ \phi_U|_{F \times (U \cap V \cap W)}$$

erfüllen diese Abbildungen alle zusammen die Kozykelbedingung. Wir haben diese Kozykel $(\phi_{V,U})_{(U.V) \in \mathcal{U}^2}$ gerade so definiert, dass alle Trivialisierungen $(\phi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ zusammen einen Diffeomorphismus induzieren, von dem Vektorraumbündel (E, B, π) auf das durch den Kozykel definierte Vektorraumbündel über B: Es gilt nämlich für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ und alle $x \in U \cap V$

$$\phi_V^{-1}|_{\pi^{-1}[\{x\}]} = (\phi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}|_{\pi^{-1}[\{x\}]}$$

Dieser Diffeomorphismus bildet die Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ von E auf die entsprechende Faser des induzierten Vektorraumbündel über dem gleichen Punkt $b \in U \cap V$ ab und ist faserweise ein Isomorphismus von topologischen Vektorräumen. Deshalb definiert er einen Isomorphismus des Vektorraumbündels (E, B, π) mit dem durch die Kozykel $(\phi_{V,U})_{(V,U) \in \mathcal{U}^2}$ induzierten Vektorraumbündel. **q.e.d.**

1.8 Operationen auf Vektorraumbündeln

Definition 1.56. *Seien (E, B, π) und (E', B', π') zwei Vektorraumbündel über $\mathbb{K}$. Dann ist ein Morphismus zwischen diesen beiden Vektorraumbündeln definiert als zwei glatte Abbildungen $f : B \to B'$ und $g : E \to E'$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

und die Abbildung g faserweise eine lineare Abbildung von $\pi^{-1}[\{b\}]$ nach $\pi'^{-1}[\{f(b)\}]$ ist, d.h. die Einschränkungen von g auf alle Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ mit $b \in B$ sind lineare Abbildungen in die Fasern $\pi'^{-1}[\{f(b)\}]$. Sind f und g Diffeomorphismen, so heißt der Morphismus auch Isomorphismus der Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B', π'). Dann bilden die Umkehrabbildungen auch einen Morphismus, weil die Umkehrabbildung jeder bijektiven linearen Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen wieder linear ist.

Beispiel 1.57. **(i)** *Wir hatten schon gesehen, dass jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X einen Isomorphismus $T(\phi) : TU \to T\phi[U]$ der entsprechenden Tangentialbündel induziert.*

(ii) *Jede glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten induziert zusammen mit $T(f) : TX \to TY$ einen Morphismus der entsprechenden Tangentialbündel.*

(iii) *Sei F ein n–dimensionaler normierter Vektorraum und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann ist (E, B, π) genau dann isomorph zu dem trivialen Vektorraumbündel $(F \times B, B, \pi)$, wenn das Vektorraumbündel (E, B, π) n glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ besitzt, die über jeder Faser linear unabhängig sind. Weil nämlich für jeden Diffeomorphismus $f : B \to B$ die Abbildung*

$$\mathbb{1}_F \times f : F \times B \to F \times B$$

offenbar ein Isomorphismus des trivialen Vektorraumbündels $(F \times B, B, \pi)$ mit sich selber ist, besitzt jedes Vektorraumbündel genau dann einen Isomorphismus der Form (g, f) auf das triviale Bündel $(F \times B, B, p_2)$, wenn es einen Isomorphismus der Form $(g, \mathbb{1}_B)$ besitzt. Also folgt die Aussage aus Lemma 1.54.

Mithilfe der linearen Algebra und der Analysis können wir aus zwei (endlichdimensionalen) normierten Vektorräumen V und W die normierten Vektorräume des kartesischen Produktes $V \times W$ und der linearen stetigen Abbildungen von V nach W : $\mathcal{L}(V, W)$ bilden. Wir werden jetzt diese Operationen auf alle Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ und $\pi'^{-1}[\{b\}]$ zweier Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π') über der gleichen Basis B anwenden und dadurch zwei neue Vektorraumbündel

$$(E \oplus E', B, \pi \oplus \pi') \text{ bzw. } \qquad (\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi'')$$

einführen. Wir errinnern daran, dass die direkte Summe $\oplus$ von Vektorräumen mit dem kartesischen Produkt übereinstimmt.

Satz 1.58. *Seien (E, B, π) und $(E', B; \pi')$ zwei Vektorraumbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Dann gibt es zwei Vektorraumbündel*

$$(E \oplus E', B, \pi \oplus \pi') \text{ und } (\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi''),$$

deren Fasern

$$(\pi \oplus \pi')^{-1}[\{x\}] \text{ und } \pi''^{-1}[\{x\}]$$

für alle $x \in B$ als topologische Vektorräume isomorph sind zu

$$E_x \times E'_x \text{ bzw. } \quad \mathcal{L}(E_x, E'_x) \text{ mit } \quad E_x = \pi^{-1}[\{x\}] \text{ und } \quad E'_x = \pi'^{-1}[\{x\}].$$

Beweis: Es genügt die Aussage auf jeder zusammenhängenden Komponente von B zu zeigen. Wegen Satz 1.55 genügt es dann die Aussage für Vektorraumbündel zu zeigen, die durch eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von B und für alle $U, V \in \mathcal{U}$ Kozykel $\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F)$ induziert werden. Seien F und F' zwei normierte Vektorräume. Dann sind die beiden folgenden Abbildungen analytische Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{aligned}
\times :&\quad GL(F) \times GL(F') \to GL(F \times F'), && (A, B) \mapsto A \times B \text{ mit}\\
A \times B :&\quad F \times F' \to F \times F', && A \times B)(f \times f') = Af \times Bf'.\\
\Pi :&\quad GL(F) \times GL(F') \to GL(\mathcal{L}(F, F')), && (A, B) \mapsto \Pi(A, B) \text{ mit}\\
\Pi(A, B) :&\quad \mathcal{L}(F, F') \to \mathcal{L}(F, F'), && C \mapsto B \circ C \circ A^{-1}
\end{aligned}$$

Seien jetzt (E, B, π) und (E', B, π) zwei Vektorraumbündel vom Fasertyp F bzw. F' mit topologischen Vektorräumen F und F'. Dann gibt es sicherlich eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von B, so dass für alle $U \in \mathcal{U}$ die Vektorraumbündel $\pi^{-1}[U]$ und $\pi'^{-1}[U]$ über U isomorph sind zu $F \times U$ bzw. $F' \times U$. Wegen Satz 1.55 werden dann die beiden Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π) induziert durch Kozykel

$$\begin{aligned}
\phi_{V,U} &: U \cap V \to GL(F) && \text{für alle } (U, V) \in \mathcal{U}^2\\
\psi_{V,U} &: U \cap V \to GL(F') && \text{für alle } (U, V) \in \mathcal{U}^2.
\end{aligned}$$

Weil diese beiden Kozykel die Kozykelbedingung erfüllen, erfüllen auch die Kozykel

$$\begin{aligned}
\phi_{V,U} \times \psi_{V,U} &: U \cap V \to GL(F \times F') && \text{für alle } (U, V) \in \mathcal{U}^2\\
\Pi(\phi_{V,U}, \psi_{V,U}) &: U \cap V \to GL(\mathcal{L}(F, F')) && \text{für alle } (U, V) \in \mathcal{U}^2
\end{aligned}$$

die Kozykelbedingung und induzieren zwei Vektorraumbündel $E \oplus E'$ bzw. $\mathrm{Hom}(E, E')$ vom Fasertyp $F \times F'$ bzw. $\mathcal{L}(F, F')$ auf B. Wir zeigen jetzt, dass die Fasern dieser Vektorraumbündel $E \oplus E'$ bzw. $\mathrm{Hom}(E, E')$ über allen Punkten $x \in B$ isomorph sind zu $E_x \times E'_x$ bzw. $\mathcal{L}(E_x, E'_x)$. Seien also für alle $U \in \mathcal{U}$ die lokalen Trivialisierungen von E und E' gegeben durch Isomorphismen von Vektorraumbündeln

$$\phi_U : F \times U \to \pi^{-1}[U] \text{ und } \psi_U : F' \times U \to \pi'^{-1}[U]$$

so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}[U] \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} F' \times U & \xrightarrow{\psi_U} & \pi'^{-1}[U] \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U \end{array}$$

Für alle $U \in \mathcal{U}$ ist die Abbildung

$$F \times F' \times U \to \bigcup_{x \in U} E_x \times E'_x, \quad (f, f', x) \mapsto (\phi_U(f, x), \psi_U(f', x))$$

eine bijektive Abbildung von dem trivialen Vektorraumbündel $F \times F' \times U$ über U mit Faser $F \times F'$ auf die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in U} E_x \times E'_x$ der kartesischen Produkte der Fasern von E und E' über $x \in U$. Für alle $x \in U \cap V$ mit $U, V \in \mathcal{U}$ gilt

$$\phi_V^{-1}\big|_{E_x} = (\phi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}\big|_{E_x} \qquad \psi_V^{-1}\big|_{E'_x} = (\psi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \psi_U^{-1}\big|_{E'_x}.$$

Also sind diese Abbildungen verträglich mit der Äquivalenzrelation des von den Kozykeln $(\phi_{V,U} \times \psi_{V.U})_{(U,V) \in \mathcal{U}}$ definierten Vektorraumbündels $E \oplus E'$. Dann sind die Fasern des Vektorraumbündels $\mathrm{Hom}(E, E')$ isomorph zu $E_x \times E'_x$.

Analog ist für alle $U \in \mathcal{U}$ die Abbildung

$$\mathcal{L}(F, F') \times U \to \bigcup_{x \in U} \mathcal{L}(E_x, E'_x), \ (C, x) \mapsto \psi_U|_{F' \times \{x\}} \circ (C \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}\big|_{E_x}$$

eine bijektive Abbildung von dem trivialen Vektorraumbündel $\mathcal{L}(F \times F') \times U$ über U mit Faser $\mathcal{L}(F, F')$ in die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in U} \mathcal{L}(E_x, E'_x)$ aller linearen Abbildungen von der Faser E_x von E in die Faser E'_x von E' über $x \in U$. Für alle $x \in U \cap V$ mit $U, V \in \mathcal{U}$ gilt

$$\phi_V^{-1}\big|_{E_x} = (\phi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}\big|_{E_x} \qquad \psi_V^{-1}\big|_{E'_x} = (\psi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \psi_U^{-1}\big|_{E'_x}.$$

Deshalb sind diese Abbildungen verträglich mit der Äquivalenzrelation des von dem Kozykel $(\Pi(\phi_{V,U}, \psi_{V,U}))_{(U,V) \in \mathcal{U}^2}$ induzierten Vektorraumbündels $\mathrm{Hom}(E, E')$. Also bestehen die Fasern von $\mathrm{Hom}(E, E')$ für alle $x \in B$ aus $\mathcal{L}(E_x, E'_x)$. **q.e.d.**

Das Vektorraumbündel $E \oplus E'$ wird Withney Summe der beiden Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π') genannt. Diese Whitney Summe können wir auch definieren durch das Faserprodukt $E \times_B E'$ als die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E \times E', B \times B, \pi \times \pi')$ auf die Diagonale von $B \times B$. Wegen der lokalen Trivialität ist die Projektion jedes Faserbündels eine Submersion. Also ist wegen Korollar 1.46 das Faserprodukt $E \times_B E'$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $E \times E'$.

Beispiel 1.59. **(i)** *Das duale Bündel E' eines $\mathbb{K}$–Vektorraumbündels (E, B, π) ist definiert als das Bündel aller Homomorphismen von dem Bündel E in das triviale $\mathbb{K}$–Linearbündel über B. So ist z.B. für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X das Kotangentialbündel das duale Bündel $T'X$ des Tangentialbündel (TX, X, π).*

(ii) *Seien V und W zwei endlichdimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weil alle endlichdimensionalen Vektorräume auf natürliche Weise isomorph sind zu ihren Bidualräumen, können wir das Tensorprodukt $V \otimes W$ identifizieren mit $\mathcal{L}(V', W)$. Deshalb definieren wir das Tensorprodukt zweier Vektorraumbündel (E, B, π) und (F, B, π) vom Fasertyp V bzw. W als das Vektorraumbündel $E \otimes F = \mathrm{Hom}(E', F)$, der Homomorphismen von dem dualen Bündel E' von E in das Vektorraumündel F. Hierbei ist das duale Bündel E' definiert als das Bündel aller Homomorphismen von E in das triviale Bündel $(\mathbb{K} \times B, B, p_2)$ über B.*

Definition 1.60. *Seien X und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten und (E, B, π) ein Vektorraumbündel über B. Wegen der lokalen Trivialität ist die Projektion jedes Faserbündels eine surjektive Submersion. Wegen Korollar 1.46 ist das Faserprodukt $E \times_B X$ der beiden Abbildungen $\pi : E \to B$ und $f : X \to B$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $E \times X$ und das Faserprodukt $B \times_B X$ der beiden Abbildungen $\mathbb{1}_B : B \to B$ und $f : X \to B$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $B \times X$. Die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E \times X, B \times X, \pi \times \mathbb{1}_X)$ auf die Untermannigfaltigkeit $B \times_B X$ definiert dann das Vektorraumbündel $f^*(E) = (E \times_B X, B \times_B X, \pi')$. Es wird inverses Bild des Vektorraumbündels (E, B, π) unter der Abbildung f genannt.*

Die Einschränkung der Abbildung $f \times \mathbb{1}_X : X \times X \to B \times X$ auf die Diagonale $X \simeq X \times_X X$ ist eine bijektive Abbildung auf $B \times_B X$. Deshalb ist $B \times_B X$ natürlicherweise diffeomorph zu X. Dadurch wird das Bündel $f^*(E)$ zu einem Bündel über X.

Satz 1.61. *Seien (E, B, π) und (E', B', π') zwei Vektorraumbündel. Dann induziert jeder glatte Morphismus (g, f) von dem Vektorraumbündel (E', B', π') auf das Vektorraumbündel (E, B, π) einen Morphismus $(h, \mathbb{1}_{B'})$ von (E', B', π') auf das inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) unter der Abbildung f.*

Beweis: Offenbar ist $(g \times \mathbb{1}_{B'}, f \times \mathbb{1}_{B'})$ ein Morphismus des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Vektorraumbündel $(E \times B', B \times B', \pi \times \mathbb{1}_{B'})$. Das Faserprodukt $E' \times_{B'} B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\pi' : E' \to B'$ und $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$ ist die

Einschränkung des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Faserprodukt $B' \times_{B'} B'$ bezüglich zwei glatten Abbildungen $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$ als Untermannigfaltigkeit von $B' \times B'$. Die zweite Untermannigfaltigkeit ist die Diagonale von $B' \times B'$, und die erste Untermannigfaltigkeit ist das inverse Bild $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ des Vektorraumbündels (E', B', π') unter der Abbildung $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$. Seien $p_{E'} : E' \times B' \to E'$ und $p_{B'} : B' \times B' \to B'$ die beiden Projektionen auf den ersten Faktor der kartesischen Produkte. Dann ist $(p_{E'}, p_{B'})$ ein Morphismus des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Vektorraumbündel (E', B', π'). Er induziert einen Isomorphismus des inversen Bildes $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ des Vektorraumbündels (E', B', π') mit dem Vektorraumbündel (E', B', π').

Das Faserprodukt $E \times_B B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\pi : E \to B$ und $f : B' \to B$ ist die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E \times B', B \times B', \pi \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Faserprodukt $B \times_B B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\mathbb{1}_B : B \to B$ und $f : B' \to B$ als Untermannigfaltigkeit von $B \times B'$. Es ist das inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) bezüglich der glatten Abbildung f. Weil die Abbildung $f \times \mathbb{1}_{B'}$ offenbar die Diagonale $B' \times_{B'} B'$ von $B' \times B'$ auf die Untermannigfaltigkeit $B \times_B B'$ abbildet, wird durch den Morphismus $(g \times \mathbb{1}_{B'}, f \times \mathbb{1}_{B'})$ das Vektorraumbündel $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ auf das Vektorraumbündel $f^*(E)$ abgebildet. Weil $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ als Vektorraumbündel isomorph ist zu (E', B', π') erhalten wir einen Morphismus von (E', B', π') auf des inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) unter der Abbildung f. **q.e.d.**

Kapitel 2

Vektorfelder

2.1 Vektorfelder und Integralkurven

Definition 2.1. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt eine Abbildung $F : X \to TX$ mit $\pi \circ F = \mathbb{1}_X$ Vektorfeld von X. Den Raum aller Vektorfelder auf X bezeichnen wir mit $\mathrm{Vec}(X)$. Für $r \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $\mathrm{Vec}^r(X)$ den Raum aller r mal stetig differenzierbaren Vektorfelder und $\mathrm{Vec}^\infty(X)$ den Raum aller glatten Vektorfelder.*

Satz 2.2. *Sei $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann definiert jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ für alle $p = 0, \ldots, r$ eine lineare Derivation*

$$\theta_F : \quad C^{p+1}(X, \mathbb{R}) \to C^p(X, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \theta_F(f \cdot g) = f \cdot \theta_F(g) + \theta_F(f) \cdot g.$$

Umgekehrt gibt es für jede lineare Derivation

$$\theta : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to C^r(X, \mathbb{R}) \text{ mit } \theta(fg) = f\,\theta(g) + \theta(f)g \text{ ein } F \in \mathrm{Vec}^r(X) \text{ mit } \theta = \theta_F\,.$$

Beweis: Wegen Satz 1.39 definiert jedes Vektorfeld eine Abbildung von $C^\infty(X, \mathbb{R})$ in die reellen Funktionen auf X, die linear ist und eine Derivation ist. Wir zeigen jetzt, dass für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ die Derivation θ_F sogar $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ abbildet. Wenn wir mit einer Karte ϕ dem Vektorfeld F eine r mal stetig differenzierbare Abbildung von dem Definitionsbereich $U \subset X$ der Karte nach $\mathbb{R}^n$ zuordnen, dann gilt

$$\theta_F(f)(x) = T_x(\phi)(F(x)) \cdot \nabla(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Hierbei ist $T(\phi) \circ F|_U$ die Abbildung $U \xrightarrow{F|_U} TU \xrightarrow{T(\phi)} T\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n \times U$. Dann bildet $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ offenbar $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ ab. Aus $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ folgt für alle $p = 0, \ldots, r$ auch $F \in \mathrm{Vec}^p(X)$, so dass θ_F auch $C^{p+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^p(X, \mathbb{R})$ abbildet.

Umgekehrt ist F genau dann r mal stetig differenzierbar, wenn θ_F $C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ abbildet. **q.e.d.**

Korollar 2.3. *Seien $F \in \mathrm{Vec}^p(X)$ und $G \in \mathrm{Vec}^q(X)$ zwei Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $[F, G] \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit*

$$r = \min\{p-1, q-1\} \quad \text{und} \quad \theta_{[F,G]} = \theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F\,.$$

Beweis: Offenbar ist $\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F$ eine lineare Abbildung von $C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ auch eine Derivation. Für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
(\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(f \cdot g) &= \theta_F(\theta_G(f \cdot g)) - \theta_G(\theta_F(f \cdot g)) \\
&= \theta_F(f\,\theta_G(g) + \theta_G(f)g) \qquad\qquad - \theta_G(f\,\theta_F(g) + \theta_F(f)g) \\
&= f\,\theta_F(\theta_G(g)) + \theta_F(f)\,\theta_G(g) \qquad + \theta_G(f)\,\theta_F(g) + \theta_F(\theta_G(f))g \\
&\quad - f\,\theta_G(\theta_F(g)) - \theta_G(f)\,\theta_F(g) \qquad - \theta_F(f)\,\theta_G(g) - \theta_G(\theta_F(f))g \\
&= f\,\theta_F(\theta_G(g)) + \theta_F(\theta_G(f))g \qquad - f\,\theta_G(\theta_F(g)) - \theta_G(\theta_F(f))g \\
&= f \cdot (\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(g) \qquad + (\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(f) \cdot g.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

Das Tangentialbündel eines endlichdimensionalen normierten Vektorraumes V ist auf natürliche Weise isomorph zu $TV \simeq V \times V$ insbesondere ist das Tangentialbündel eines offenen Intervalls I auf natürliche Weise isomorph zu $\mathbb{R} \times I$. Deshalb enthält der Tangentialraum T_xI für alle $x \in I$ außer der Null noch ein ausgezeichnetes Element, das $(1, x) \in \mathbb{R} \times I \simeq TI$ entspricht.

Definition 2.4. *Eine Integralkurve x eines Vektorfeldes $F \in \mathrm{Vec}(X)$, ist eine differenzierbare Abbildung $x : I \to X, t \mapsto x(t)$ von einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach X, so dass für alle $t \in I$ das Element $(1, t) \in \mathbb{R} \times I \simeq TI$ durch $T_t(x)$ auf $F(x(t)) \in T_{x(t)}X$ abgebildet wird. Wenn $t_0 \in I$ und $x(t_0) = x_0 \in X$ gilt, dann heißt x Integralkurve von F mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$.*

Wir werden jetzt zeigen, dass jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ für jedes $x_0 \in X$ genau eine Integralkurve mit Anfangswert x_0 besitzt. Diese Aussage ist eine Umformulierung der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.5. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt:*

(i) *(Existenz von Integralkurven) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung*

$$x : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to X, \quad t \mapsto x(t) \ \text{mit} \quad x(t_0) = x_0,$$

die eine Integralkurve von F mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist.

(ii) *(Eindeutigkeit von Integralkurven) Seien x und y zwei Integralkurven von F auf offenen Intervallen I bzw. J. Wenn $t_0 \in I \cap J$ und $x(t_0) = y(t_0)$ gilt, dann stimmen $x(t)$ und $y(t)$ für alle $t \in I \cap J$ überein.*

Wir werden diese Existenz und Eindeutigkeit mit Hilfe von Karten von X um dem Punkt x_0 bzw. $x(t_0)$ aus der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen folgern.

Satz 2.6. *(Picard–Lindelöf) Sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine lipschitzstetige Abbildung auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt*

(i) *(Lokale Existenz) Es gibt ein $\epsilon > 0$ und eine differenzierbare Abbildung x von $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ nach $\mathbb{R}^n$, die das folgende Anfangswertproblem löst:*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ und } \quad x(t_0) = x_0.$$

(ii) *(Eindeutigkeit) Seien x und y zwei differenzierbare Abbildungen von den offenen Intervallen I bzw. J nach $\mathbb{R}^n$, die beide t_0 enthalten. Wenn x und y beide dieses Anfangswertproblem lösen, dann gilt $x(t) = y(t)$ für alle $t \in I \cap J$.*

Beweis: Wegen der Lipschitzstetigkeit gibt es ein $L > 0$, so dass für alle $(t, y), (t, z) \in U$ auch $\|f(t, y) - f(t, z)\| \le L\|y - z\|$ gilt. Sei $\delta > 0$ so gewählt, dass U das kartesische Produkt $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$ der beiden abgeschlossenen δ–Bälle um t_0 und x_0 enthält. Dann gilt für alle $(s, y) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$ auch $\|f(s, y)\| \le \|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta$. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : x \mapsto F(x) \text{ mit } F(x)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(x_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Wenn $\epsilon \le \delta$ und $\epsilon\,(\|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta) \le \delta$, dann bildet sie wegen dem Schrankensatz $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $x, y \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ gilt dann

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \le \epsilon L\|x - y\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als

$$\epsilon \le \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta}\right\} \le \frac{1}{2L}.$$

Dann definiert die Abbildung F eine Lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L \le 1/2$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ mit $x(t_0) = x_0$. Also löst x dieses Anfangswertproblem auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Wenn umgekehrt x auf einer Umgebung von t_0 dieses Anfangswertproblem löst, dann ist x stetig differenzierbar. Deshalb ist die Ableitung von $F(x)-x$ gleich Null, und beide Funktionen $F(x)$ und x sind bei $t = t_0$ gleich x_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf einer Umgebung von t_0 aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Dann ist die Menge aller Punkte, an denen zwei Lösungen x und y dieses Anfangswertproblems übereinstimmen offen, und wegen der Stetigkeit von solchen Lösungen auch abgeschlossen. Weil die Schnittmenge von zwei Intervallen wieder ein Intervall und damit zusammenhängend ist, stimmen zwei solche Lösungen x und y dann auf der Schnittmenge $I \cap J$ überein. **q.e.d.**

Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven:

(i) Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um $x_0 \in X$. Dann definiert

$$f = p_1 \circ T(\phi) \circ F|_U \circ \phi^{-1} : \quad \phi[U] \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{F|_U} TU \xrightarrow{T(\phi)} T\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n \times \phi[U] \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^n$$

eine einmal stetige differenzierbare Abbildung. Wegen dem Schrankensatz gibt es ein $r > 0$, so dass die Einschränkung auf $\overline{B(\phi(x_0), r)} \subset \phi[U]$ Lipschitz–stetig ist mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Dann folgt aus dem Satz von Picard–Lindelöf, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt und eine eindeutige Lösung

$$\tilde{x} : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \phi[U], \tilde{x} \mapsto \tilde{x}(t)$$

des Anfangswertproblems

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(\tilde{x}(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \tilde{x}(t_0) = \phi(x_0).$$

Die Abbildung $x = \phi^{-1} \circ \tilde{x}$ ist dann eine Integralkurve von F.

(ii) Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wieder eine Karte in $x_0 = x(t_0) = y(t_0)$. Dann definieren $\tilde{x} = \phi \circ x$ und $\tilde{y} = \phi \circ y$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(\tilde{x}(t)) \text{ für alle } t \text{ in einer Umgebung von } t_0 \text{ mit } \quad \tilde{x}(t_0) = \phi(x_0).$$

Also gilt $\tilde{x} = \tilde{y}$ auf einer Umgebung von t_0. Weil ϕ injektiv ist folgt $x(t) = y(t)$ auf einer Umgebung von t_0. Daraus folgt, dass die Menge aller $\{t \in I \cap J | x(t) = y(t)\}$ offen ist und abgeschlossen wegen der Stetigkeit von x und y. Weil I und J Intervalle sind und $t_0 \in I \cap J$ ist $I \cap J$ ein nicht leeres Intervall und damit zusammenhängend. Also gilt $x(t) = y(t)$ für alle $t \in I \cap J$. **q.e.d.**

Satz 2.7. *Sei $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es eine eindeutige Integralkurve $x : I \to X$ von F mit $x(0) = x_0$, so dass jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(0) = x_0$ eine Einschränkung von x auf ein Teilintervall J von I ist, das 0 enthält. Allgemeiner ist jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(t_0) = x_0$ von der Form:*

$$y(t - t_0) = x(t) \text{ für alle } t - t_0 \in J, \text{ wobei } \{t \in \mathbb{R} | t - t_0 \in J\} \subset I.$$

Beweis: Sei I die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Integralkurven x von F mit $x(0) = x_0$. Wegen der Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven gibt es dann eine eindeutige Integralkurve x auf I mit $x(0) = x_0$, so dass jede Integralkurve von F mit $y(0) = x_0$ durch Einschränken der Integralkurve x auf ein Teilintervall von I entsteht. Offenbar ist für jede Integralkurve y von F mit $y(t_0) = x_0$ die Abbildung

$$\{t \in \mathbb{R} \mid t - t_0 \in J\} \to X, \quad t \mapsto z(t) = y(t - t_0)$$

eine Integralkurve von F mit $z(0) = x_0$. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

2.2 Flüsse und Vektorfelder

Wir wollen jetzt alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times X$ nach X zusammensetzen.

Definition 2.8. *Sei X ein topologischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $\psi : W \to X$ mit folgenden Eigenschaften heißt lokaler Fluss auf X:*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*

(ii) *Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \psi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt*

$$\psi(t, \psi(s, x)) = \psi(t + s, x).$$

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\psi(0, x) = x$.*

Lemma 2.9. *Sei $\psi : W \to X$ ein stetiger lokaler Fluss auf dem topologischen Raum X. Dann gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge V_t offen. Für alle $x \in V_t$ ist auch $\psi(t, x) \in V_{-t}$ und die Abbildung*

$$\psi(t, \cdot) : \quad V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \psi(t, x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\psi(-t, \cdot)$.

(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\psi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis: Für alle $(t_0, x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Aus der Bedingung (i) folgt $W \supset \{(s, x) \mid s \in [0, t]\} = \{(t + s, x) \mid s \in [-t, 0]\}$. Für jedes $s \in [-t, 0]$ gibt es ein $\epsilon_s > 0$ und eine offene Umgebung $U_s \subset X$ von $\psi(t + s, x)$ mit $(-\epsilon_s, \epsilon_s) \times U_s \subset W$. Die offene Überdeckung $(U_s)_{s \in [-t,0]}$ der kompakten Menge $\{\psi(t + s, x) \mid s \in [-t, 0]\}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Sei $\epsilon > 0$ das Minimum der entsprechenden $(\epsilon_s)_{s \in [0,1]}$. Aus der Bedingung (ii) folgt für alle $s \in [-t, 0]$

$$(r, \psi(t+s, x)), (t+s+r, x) \in W \text{ und } \psi(r, \psi(t+s, x)) = \psi(t+s+r, x) \text{ für alle } r \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Wegen der Bedingung (ii) folgt $(s+r, \psi(t, x)), (t+s+r, x) \in W$ und $\psi(s+r, \psi(t, x)) = \psi(t+s+r, x)$ aus $(s, \psi(t, x)) \in W$ und $(r, \psi(t+s, x)) \in W$. Induktiv folgt $(s, \psi(t, x)) \in W$ und $\psi(s, \psi(t, x)) = \psi(t+s, x)$ für alle $s \in [-t, 0]$. Also liegt $\psi(t, x)$ in V_{-t} und $\psi(-t, \cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\psi(t, \cdot)$. Dann sind $\psi(t, \cdot)$ und $\psi(-t, \cdot)$ Homöomorphismen.

Danach folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 2.10. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann definiert für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $r \in \mathbb{N}$ die Vereinigung aller maximalen Integralkurven aus dem Satz 2.5 einen r mal stetig differenzierbaren Fluss ψ_F auf X. Die partielle Ableitung von ψ_F nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar.*

Umgekehrt gibt es für jeden r mal stetig differenzierbaren Fluss ψ auf X, dessen partielle Ableitung nach t auch r mal stetig differenzierbar ist, ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $\psi = \psi_F$.

Wir beweisen diesen Satz wieder mit Hilfe eines Satzes über Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.11. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und U eine offene Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine r mal stetig differenzierbare Abbildung mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine offene Umgebung W von x_0 in U, ein $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times W \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in W$ die Funktion*

$$x : \quad (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto g(t, y)$$

die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad x(t_0) = y.$$

Die partielle Ableitung von g nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar.

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil U eine offene Umgebung von x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $\overline{B(x_0, \delta)}$ enthält. Wegen Heine–Borel ist $\overline{B(x_0, \delta)}$ kompakt. Weil f stetig differenzierbar ist, gibt es dann eine obere Schranke $L > 0$ an die Ableitungen von f auf $\overline{B(x_0, \delta)}$. Wegen dem Schrankensatz ist dann f Lipschitz–stetig auf $\overline{B(x_0, \delta)}$ mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2\|f(x_0)\| + 2L\delta}$ analog gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf. Sei I das abgeschlossene Intervall $I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ und V die offene Umgebung $V = B(x_0, \delta/2)$ von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wieder ist für alle $y \in V$ die Abbildung

$$F_y : C(I, \overline{B(x_0, \delta)}) \to C(I, \overline{B(x_0, \delta)}),\ x \mapsto F_y(x) \text{ mit } \ F_y(x)(t) = y + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

von dem vollständigen metrischen Raum $C(I, \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante $\epsilon L < 1/2$. Wegen der Ungleichung $\delta/2 + \epsilon(\|f(x_0)\| + 2L\delta) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$ liegen die Bilder aller Abbildungen $(F_y)_{y \in V}$ sogar in der offenen Teilmenge $C(I, B(x_0, \delta))$ des Banachraumes $C(I, \mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Deshalb liegen die entsprechenden Fixpunkte in dieser offenen Teilmenge. Für alle $y \in V$ ist die Ableitung der Abbildung $x \mapsto F_y(x)$, als Abbildung der offenen Teilmenge $C(I, B(x_0, \delta))$ von $C(I, \mathbb{R}^n)$ auf sich selber gegeben durch

$$\begin{aligned} F'_y(x) : \qquad & C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n), \qquad && z \mapsto F'_y(x)(z) \\ \text{mit} \qquad & F'_y(x)(z)(t) = \int_{t_0}^{t} f'(x(s))(z(s))ds. \end{aligned}$$

Weil die Ableitungen $f'(s, x(s))$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $F'_y(x)$ beschränkt durch $L\epsilon < 1/2$. Deshalb konvergiert für alle $y \in V$ und alle $x \in C(I, B(x_0, \delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C(I,\mathbb{R}^n)} - F'_y(x)\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(F'_y(x)\right)^l$$

in $\mathcal{L}(C(I, \mathbb{R}^n))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C(I,\mathbb{R}^n)} - F'_y(x)$. Offenbar ist für alle y und $z \in V$ die punktweise Differenz der entsprechenden Abbildungen eine konstante Abbildung in $C(I, \mathbb{R}^n)$:

$$F_y(x) - F_z(x) = y - z.$$

Deshalb ist für jedes $x \in C(I, B(x_0, \delta))$ die Abbildung $y \mapsto F_y(x)$ eine glatte Abbildung von V nach $C(I, \mathbb{R}^n)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C(I, B(x_0, \delta)) \to C(I, \mathbb{R}^n), \quad (y, x) \mapsto \left(\mathbb{1}_{C(I,B(x_0,\delta))} - F_y\right)(x) = x - F_y(x)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $x \in C(I, B(x_0, \delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen F_y. Dann folgt aus dem Satz der impliziten Funktion, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $x_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen F_y gibt. Diese Abbildung ist außerdem genauso oft stetig differenzierbar, wie G. An den expliziten Formeln für die ersten partiellen Ableitungen von F_y erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f stetig sind. Also ist G genauso oft wie f stetig differenzierbar. Für alle $y \in W$ ist dann $g(y)$ die eindeutig Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } \quad x(t_0) = y.$$

Alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung r von der Abbildung

$$(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times W \to \mathbb{R}, \quad (y, t) \mapsto g(y)(t)$$

sind stetig. Deshalb ist diese Abbildung auch r mal stetig differenzierbar. Weil sie eine Lösung des obigen Anfangswertproblems ist, ist die partielle Ableitung nach t sogar auch r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Beweis von Satz 2.10: Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei W_F die Vereinigung in $\mathbb{R} \times X$ aller kartesischen Produkte der Definitionsbereiche der eindeutigen maximalen Integralkurven aus Satz 2.7 mit Anfangswert $x(0) = x \in X$ mit den Mengen $\{x\}$. Sei $\psi_F : W_F \to X$ für jedes $x \in X$ definiert durch die entsprechende Integralkurve. Wenn $(s, x) \in W_F$ und $(t, \psi_F(s, x)) \in W_F$ liegt, dann stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $x(0) = x$ und $x(s) = \psi_F(s, x)$ wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge der Definitionsbereich überein. Also bilden sie zusammen eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t + s$ enthält, und $x(0) = x$, $x(s) = \psi_F(s, x)$ und $x(t + s) = \psi_F(t, \psi_F(s, x))$ erfüllt. Also folgt

$$(t + s, x) \in W_F \text{ und } \psi_F(t + s, x) = \psi_F(t, \psi_F(s, x)).$$

Weil im Beweis der Existenz des Anfangswertproblems im Satz von Picard–Lindelöf das Intervall, auf dem die die Lösung definiert ist, nur von δ, L und $\|f(x_0)\|$ abhängt, enthält W_F für alle $x \in X$ eine offene Umgebung von $(0, x) \in \mathbb{R} \times X$. Dann enthält

W_F für alle $(s,x) \in W_F$ mit einer offenen Umgebung um $(0, \psi_F(s,x))$ auch eine offene Umgebung von (s,x). Also ist W_F offen.

Wir zeigen jetzt, dass ψ_F r mal stetig differenzierbar ist. Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von X auf einer Umgebung von $x \in X$ und $V = (\mathbb{R} \times U) \cap \psi_F^{-1}[U]$. Dann parametrisiert

$$\phi \circ \psi_F|_V \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \phi^{-1}) : \quad (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \phi)\,[V] \to \phi[U], \quad (t,y) \to (\phi \circ \psi_F)(t, \phi^{-1}(y))$$

für alle $y \in \phi[U]$ die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ mit } \quad x(0) = y$$

mit der Funktion

$$f : \phi[U] \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto f(y) = T_{\phi^{-1}(y)}(\phi)(F(\phi(y))).$$

Diese Abbildung $\phi \circ \psi_F|_V \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \phi^{-1})$ ist wegen dem vorangehenden Satz r mal stetig differenzierbar, und die partielle Ableitung nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar. Dann ist ψ_F auch r mal stetig differenzierbar, und die partielle Ableitung von ψ_F nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar. Also ist ψ_F ein Fluss mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei jetzt $\psi : W \to X$ ein r mal stetig differenzierbarer Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t auch r mal stetig differenzierbar ist. Wegen der Bedingung (ii) gilt für alle $(t,x) \in W$ und $(s, \psi(t,x)) \in W$ und jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um $\psi(t,x)$ und $\psi(t+s,x)$

$$\frac{\partial \phi(\psi(t+s,x))}{\partial t} = \frac{\partial \phi(\psi(t+s,x))}{\partial s} = \frac{\partial \phi(\psi(s,\psi(t,x)))}{\partial s}.$$

Mit $s = 0$ folgt, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t}$ an der Stelle (t,x) gleich der partiellen Ableitung von $\frac{\partial \psi(s,\psi(t,x))}{\partial s}$ an der Stelle $(0, \psi(t,x))$ ist. Sei also $F \in \mathrm{Vec}(X)$ das Vektorfeld von X, das jedem $x \in X$ das Element in T_xX zuordnet, auf das die Abbildung

$$T_{(0,x)}(\psi) : T_{(0,x)}W \to T_xX$$

das Element $(1,0) \in \mathbb{R} \times T_xX \simeq T_{(0,x)}W$ abbildet. Weil die partielle Ableitung von ψ nach t r mal stetig differenzierbar ist, ist F r mal stetig differenzierbar. Dann ist für jedes $x \in X$, die Abbildung $t \mapsto \psi(t,x)$ eine Integralkurve des Vektorfeldes F. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass ψ eine Einschränkung von ψ_F auf eine offene Teilmenge des entsprechenden Definitionsbereiches W_F ist. **q.e.d.**

Aus Lemma 2.9 und Satz 2.10 folgt

Korollar 2.12. *Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit $r \in \mathbb{N}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X | (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \psi_F(t,x)$ ist ein r mal stetig differenzierbarer Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit Umkehrabbildung $x \mapsto \psi_F(-t,x)$. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 2.13. **(i)** *Ein lokaler Fluss $\psi : W \to X$ auf einem topologischen Raum X heißt globaler Fluss, wenn $W = \mathbb{R} \times X$ ist.*

(ii) *Ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss ψ_F ein globaler Fluss ist.*

Satz 2.14. **(i)** *Auf einem kompakten topologischen Raum X sind alle lokalen Flüsse auch globale Flüsse.*

(ii) *Alle Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X sind vollständig.*

Beweis: (i) Wegen Lemma 2.9 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von $x \in X$, so dass der Definitionsbereich W die Menge $(-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Das Minimum der entsprechenden ϵ_x nennen wir wieder $\epsilon > 0$. Dann folgt aus der Bedingung (i) des Flusses, dass für jedes $(t,x) \in W$ die Menge W auch die Menge $\{(t+s,x) \in \mathbb{R} \times X | s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ enthält. Weil W die Menge $\{(0,x) | x \in X\}$ enthält, folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W auch die Menge

$$(-(l+1)\epsilon, (l+1)\epsilon) \times X = \{(t+s,x) \in \mathbb{R} \times X \mid (t,x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

enthält. Also ist W gleich $\mathbb{R} \times X$.

(ii) folgt aus (i) und Satz 2.10 **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis nur benutzt, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der Definitionsbereich W des Flusses ψ von F die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 2.15. **(i)** *Ein lokaler Fluss auf einem topologischen Raum ist genau dann ein globaler Fluss, wenn W eine Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält mit $\epsilon > 0$.*

(ii) *Ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist genau dann vollständig, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die Integralkurven von F mit Anfangswert $x(0) = x$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.* **q.e.d.**

Korollar 2.16. **(i)** *Ein globaler stetiger Fluss auf dem topologischen Raum X definiert durch*
$$\psi(\cdot,\cdot): \quad \mathbb{R} \to C(X,X), \quad t \mapsto \psi(t,\cdot)$$
einen Homomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt definieren alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X, die als Abbildungen von $\mathbb{R} \times X$ nach X stetig sind, einen globalen stetigen Fluss.

(ii) *Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein vollständiges Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dann definiert der entsprechende Fluss $\psi_F : \mathbb{R} \times X \to X$ einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der r mal stetig differenzierbaren Homöomorphismen von X.*

Umgekehrt definieren alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der r mal stetig differenzierbaren Homöomorphismen von X, die als Abbildung ψ von $\mathbb{R} \times X$ r mal stetig differenzierbar sind mit r mal stetig differenzierbarer partieller Ableitung nach $t \in \mathbb{R}$, ein vollständiges Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $\psi = \psi_F$. **q.e.d.**

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_t = X$. Die Bedingung (ii) besagt genau, dass $t \mapsto \psi(t,\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 2.9.

(ii) folgt aus (i) und und Satz 2.10. **q.e.d.**

2.3 Die Lie–Ableitung

Definition 2.17. *Sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y und $F \in \mathrm{Vec}^r(Y)$ ein Vektorfeld auf Y. Dann definiert*
$$T(\Phi^{-1}) \circ F \circ \Phi : X \to TX$$
ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld von X. Dasselbe gilt auch, wenn Φ ein Homöomorphismus ist, so dass Φ und Φ^{-1} $(r+1)$ mal stetig differenzierbar sind.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass alle Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ lokale Homöomorphismen von V_t nach V_{-t} definieren. Wegen Korollar 2.12 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind. Dann ist für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Abbildung $\psi_F(t,\cdot) : x \mapsto \psi_F(t,x)$ ein stetig differenzierbarer Homöomorphismus von einer offenen Umgebung von x auf eine offene Umgebung von x.

Definition 2.18. *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ zwei Vektorfelder auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Sei ψ_F der entsprechende Fluss des Vektorfeldes F. Wir definieren die Lie–Ableitung des Vektorfeldes E nach dem Vektorfeld F an der Stelle x:*

$$(\theta_F\, E)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot)) \circ E(\psi_F(t,x))$$

Dabei ist zu beachten, dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ der Tangentialvektor $E(\psi_F(t,x))$ in $T_{\psi_F(t,x)}X$ liegt und

$T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))$ den Raum $T_{\psi_F(t,x)}X$ nach $T_{\psi_F(-t,\psi_F(t,x))}X = T_xX$ abbildet.

Deshalb liegen die Werte von $T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot)) \circ E(\psi_F(t,x))$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ in dem topologischen Vektorraum T_xX, so dass die Ableitung wohldefiniert ist, und ein Element von T_xX ist. Dadurch wird $\theta_F\, E$ zu einem stetigen Vektorfeld auf X.

Satz 2.19. *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ stetig differenzierbare Vektorfelder auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Dann gilt*

$$\theta_F\, E = [F, E].$$

Beweis: Im Beweis von Satz1.39 haben wir gesehen, dass jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ eine Derivation θ_F von $C^2(X, \mathbb{R})$ nach $C^1(X, \mathbb{R})$ definiert. Diese Derivation ist in jeder Karte gegeben durch die Richtungsableitungen längs des Vektorfeldes. Deshalb genügt es zu zeigen, dass die Ableitung nach t der Familie von Derivationen von den Vektorfeldern $T(\psi(-t,\cdot)) \circ E \circ \psi(t,\cdot)$ an der Stellte $t = 0$ gleich der Derivation des Vektorfeldes $[F, E]$ ist. Sei $\Phi : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann sind

$$\Phi^* : \quad C(Y, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R}), \quad f \mapsto g = f \circ \Phi$$

und

$$\left(\Phi^{-1}\right)^* : \quad C(X, \mathbb{R}) \to C(Y, \mathbb{R}), \quad g \mapsto f = g \circ \Phi^{-1}$$

Algebrahomomorphismen, die voneinander die Umkehrabbildungen sind. Wenn Φ differenzierbar ist gilt für alle $E \in \mathrm{Vec}^1(Y)$

$$\theta_{T(\Phi^{-1})\circ E\circ\Phi} \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \theta_E \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_{T(\Phi^{-1})\circ E\circ\Phi} = \Phi^* \circ \theta_E \circ \left(\Phi^{-1}\right)^*.$$

Daraus folgt

$$\theta_{\theta_F\, E} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi^*(t,\cdot) \circ \theta_E \circ \psi^*(-t,\cdot).$$

Lemma 2.20. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld auf X und $\psi_F : W_F \to X$ der entsprechende Fluss. Dann ist für jede r mal stetig differenzierbare Funktion $f \in C^r(X, \mathbb{R})$ die Funktion $f \circ \psi_F$ eine r stetig differenzierbare Funktion auf W_F. Die Ableitung von $\psi_F^*(t, \cdot)(f) = f \circ \psi_F(t, \cdot)$ nach t bei $t = 0$ definiert eine r mal stetig differenzierbare Funktion*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_F^*(t, \cdot)(f) : \quad X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial f \circ \psi_F}{\partial t}(0, x),$$

die Lie–Ableitung von f nach dem Vektorfeld F genannt wird. Es gilt

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_F^*(t, \cdot)(f)(x) = \frac{\partial f \circ \psi_F}{\partial t}(0, x) = \theta_F(f)(x) \text{ für alle } f \in C^1(X, \mathbb{R}) \text{ und } x \in X.$$

Beweis: Weil der Fluss $\psi_F : W_F \to X$ dadurch definiert ist, dass die Tangentialabbildung $T_{0,x}(\psi)$ das Element $(1, 0) \in \mathbb{R} \times T_x X \simeq T_{(0,x)} W_F$ für alle $x \in X$ auf $F(x) \in T_x X$ abbildet, ist wegen der Kettenregel $\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \psi_F)(0, x)$ gleich der Richtungsableitung von f an der Stelle $x \in X$ in Richtung $F(x)$, und wegen Satz 1.39 gleich $\theta_F(f)(x)$. **q.e.d.**
Fortsetzung des Beweises vom Satz 2.19: Wegen dem Lemma gilt dann

$$\begin{aligned}
\theta_{\theta_F E}(f) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_E(f \circ \psi_F(-t, \cdot)) \circ \psi_F(t, \cdot) = \\
&= \theta_E \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f \circ \psi_F(-t, \cdot) \right) \circ \psi_F(0, \cdot) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_E(f \circ \psi_F(0, \cdot)) \circ \psi_F(t, \cdot) \\
&= \theta_E \circ \theta_{-F}(f) + \theta_F \circ \theta_E(f) = [\theta_F, \theta_E](f) = \theta_{[F,E]}(f).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\quad \theta_{\theta_F E} = \theta_{[F,E]} \quad$ und damit auch $\quad \theta_F E = [F, E]$. **q.e.d.**

Korollar 2.21. *Für zwei Vektorfelder $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist folgendes äquivalent:*

(i) *Die Vektorfelder E und F kommutieren, d.h. $[E, F] = 0 = [\theta_E, \theta_F]$.*

(ii) *Für alle $x \in X$ und $s, t \in \mathbb{R}$ mit $(t, x) \in W_E, (s, x) \in W_F, (t, \psi_F(s, x)) \in W_E$ und $(s, \psi_E(t, x)) \in W_F$ gilt* $\quad \psi_E(t, \psi_F(s, x)) = \psi_F(s, \psi_E(t, x))$.

(iii) $\theta_F E = 0$

(iv) $\theta_E F = 0$

(v) *Für alle $(t, x) \in W_F$ gilt $E(x) = T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot)) E(\psi_F(t, x))$*

(vi) *Für alle $(t, x) \in W_E$ gilt $F(x) = T_{\psi_E(t,x)}(\psi_E(-t, \cdot)) F(\psi_E(t, x))$*

Beweis: Wegen der Bedingung (ii) an den lokalen Fluss ψ_F folgt aus (iii)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T(\psi_F(-t,\cdot))\circ E\circ\psi_F(t,\cdot) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\psi_F(-(t+s),\cdot))\circ E\circ\psi_F(t+s,\cdot) = \\ &= T(\psi_F(-t,\cdot))\circ\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\psi_F(-s,\cdot))\circ E\circ\psi_F(s,\cdot)\right)\circ\psi_F(t,\cdot) = 0.\end{aligned}$$

Also ist (iii) zu (v) äquivalent und analogerweise (iv) zu (vi). Wenn folgendes

$$E = T(\psi_F(-t,\cdot))\circ E\circ\psi_F(t,\cdot) \text{ bzw.} \qquad F = T(\psi_E(-t,\cdot))\circ F\circ\psi_E(t,\cdot)$$

gilt, dann sind auch die entsprechenden lokalen Flüsse gleich. Also gilt lokal

$$\psi_E(s,\cdot) = \psi_F(-t,\cdot)\circ\psi_E(s,\cdot)\circ\psi_F(t,\cdot) \qquad \psi_F(s,\cdot) = \psi_E(-t,\cdot)\circ\psi_F(s,\cdot)\circ\psi_E(t,\cdot)$$

Diese beiden Gleichungen sind offenbar beide äquivalent dazu, dass $\psi_E(s,\cdot)$ und $\psi_F(t,\cdot)$ lokal kommutieren, und damit auch zu (ii).

Wegen Satz 2.19 sind sowohl (iii) als auch (iv) äquivalent zu (i). Also sind sowohl (iii) und (v) als auch (iv) und (vi) äquivalent zu (i) und (ii). **q.e.d.**

Dieses Korollar besagt, dass die lokalen Homöomorphismen von zwei Vektorfeldern $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ genau dann miteinander kommutieren, wenn auch θ_E und θ_F miteinander kommutieren. Wenn die Vektorfelder vollständig sind, definieren sie zusammen eine zweidimensionale abelsche Untergruppe der Homöomorphismengruppe, bzw. der Diffeomorphismengruppe, wenn E und F glatt sind. Die Lie-Ableitung werden wir später auch auf Differentialformen definieren. Lemma 2.20 bedeutet dann, dass sie auf Funktionen mit der Richtungsableitung θ übereinstimmt.

2.4 Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt betrachten wir differenzierbare Untermannigfaltigkeiten X von einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y.

Satz 2.22. *Sei X eine Untermannigfaltigkeit der differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann gilt folgendes:*

(i) *Die Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbündels von Y auf die Untermannigfaltigkeit X ist ein Vektorraumbündel über X.*

(ii) *Das Tangentialbündel TX von X ist ein Unterverktorraumbündel von der Einschränkung $TY|_X$. D.h. TX ist eine Untermannigfaltigkeit von $TY|_X$ und die Urbilder der Einschränkung von $\pi : TY|_X \to X$ auf $TX \subset TY|_X$ von allen Punkten $y \in X$ sind Untervektorräume der entsprechenden Fasern von TY.*

(iii) *Jeder r-mal (stetig) differenzierbare Schnitt von $TY|_X$ auf einer offenen Menge U von X ist die Einschränkung eines r-mal (stetig) differenzierbaren Schnittes von TY auf einer offenen Menge V von Y auf die Schnittmenge $U = V \cap X$. Dasselbe gilt für globale Schnitte, d.h. für $U = X$ kann V als Y gewählt werden.*

(iv) *Seien E und F stetig differenzierbare Vektorfelder von Y auf einer offenen Umgebung von X, deren Einschränkungen auf X in $TX \subset TY|_X$ liegt. Dann ist die Einschränkung von $[E, F]$ auf X gleich dem Kommutator $[E|_X, F|_X]$ der Einschränkungen von E und F auf X als Vektorfelder von X.*

(v) *Die Einschränkung eines Vektorfeldes $F \in \mathrm{Vec}^1(Y)$ auf X liegt genau dann in $TX \subset TY|_X$, wenn der entsprechende Fluss ψ_F die Untermannigfaltigkeit $(\mathbb{R} \times X) \cap W_F$ von W_F nach X abbildet, wenn also die lokalen Homöomorphismen $\psi_F(t, \cdot)$ die Untermannigfaltigkeit X invariant lassen.*

Beweis: (i) Sei $f : X \hookrightarrow Y$ die Einbettung der Untermannigfaltigkeit X in Y. Dann ist die Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbündels von Y auf die Untermannigfaltigkeit X offenbar das inverse Bild von TY unter f, also ein Vektorraumbündel auf X.

(ii) Offenbar ist für jeden Untervektorraum $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraumbündel von $T\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Dann folgt aus Korollar 1.44, dass TX ein Untervektorraumbündel von $TY|_X$ ist.

(iii) Wir wählen eine offene Überdeckung von der Untermannigfaltigkeit $X \subset Y$ die aus Definitionsbereichen von verträglichen Karten von Y besteht, wie sie im Korollar 1.44 beschrieben sind. Weil sich jede r-mal (stetig) differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge U eines Unterraumes $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ offenbar zu einer solchen r-mal (stetig) differenzierbaren Funktion auf das Urbild V der orthogonalen Projektion von $\mathbb{R}^m$ auf $\mathbb{R}^n$ von U fortsetzen lässt, indem wir diese orthogonale Projektion mit der Funktion verknüpfen, folgt die Aussage für alle offenen Mengen U, die in einer offenen Menge der Überdeckung von X enthalten sind. Mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins folgt die Aussage für beliebige U. Wenn wir die offene Überdeckung von $X \subset Y$ zu einer offenen Überdeckung von Y ergänzen, wobei wir nur solche offenen Mengen hinzufügen, die mit einer Umgebung von $X \subset Y$ schnittfremd sind, dann folgt mit der entsprechenden Zerlegung der Eins die Aussage für globale Vektorfelder $TY|_X$.

(v) Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf ist jede Lösung eines Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ mit } x(0) = y$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$, deren Einschränkung $f|_{U \cap \mathbb{R}^n}$ auf die Schnittmenge $U \cap \mathbb{R}^n$ von U mit einem Unterraum $\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit Werten in diesem Unterraum $\mathbb{R}^n$ ist, auch eine Abbildung mit Werten in diesem

Unterraum $\mathbb{R}^n$, wenn $y \in \mathbb{R}^n$ in diesem Unterraum liegt. Aus Korollar 1.44 folgt, dass die Flüsse von Vektorfeldern von Y, deren Einschränkungen auf X in $TX \subset TY|_X$ liegen, die Untermannigfaltigkeit invariant lassen.

Wenn sie umgekehrt die Untermannigfaltigkeit X invariant lassen, dann definieren sie einen lokalen Fluss auf X und wegen Satz 2.10 ein Vektorfeld auf X. Dieses Vektorfeld muss wegen der im Beweis von Satz 2.10 benutzten Formel für das Vektorfeld als partielle Ableitung des Flusses, mit der Einschränkung des entsprechenden Vektorfeldes von Y auf die Untermannigfaltigkeit X übereinstimmen.

(iv) folgt aus (v) und Satz 2.19. **q.e.d.**

Umgekehrt stellt sich die Frage, wann ein Untervektorraumbündel (E, Y, π) von dem Tangentialbündel (TY, Y, π), das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit ist.

Satz 2.23. *(Frobenius) Ein Untervektorraumbündel (E, Y, π) der Dimension d von (TY, Y, π) besitzt genau dann einen Atlas von Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$T(\phi)(E \cap \pi^{-1}[U]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{d+1} = \ldots = x_n = 0\} \times \phi[U] \subset T\mathbb{R}^n,$$

wenn für alle Schnitte $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(Y)$ von E auch $[F, G]$ ein Schnitt von E ist.

Beweis: Aus der ersten Bedingung folgt dass E in allen $y_0 \in Y$ das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit ist. Aus Satz 2.22 (iv) folgt dann die zweite Bedingung.

Es genügt die Umkehrung auf einer offenen Umgebung U eines Punktes $y_0 \in Y$ zu zeigen. Lokal ist E trivial. Wir können also vorraussetzen, dass linear unabhängige Vektorfelder $F_1, \ldots, F_d \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ existieren, deren Werte auf U die Fasern von E aufspannen. Das Vektorfeld F_1 induziert einen lokalen Fluss ψ_{F_1}. Wir wählen eine Karte $\tilde{\psi} : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gegebenfalls verkleinerten Umgebung U von y_0, mit $\tilde{\psi}(y_0) = 0$, so dass $F_1(y_0)$ nicht im Tangentialraum an die Untermannigfaltigkeit $\{y \in Y \mid \tilde{\psi}_1(y) = 0\}$ von U liegt. Dann definiert wegen dem Satz der inversen Funktion $\psi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \psi_{F_1}(x_1, \tilde{\psi}^{-1}(0, x_2, \ldots, x_n))$ die Umkehrabbildung einer Karte $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gebenenfalls verkleinerten Umgebung U von y_0. Aufgrund der Konstruktion parametrisiert ψ_1 die Integralkurven von F_1, und längs dieser Integralkruven sind die Koordinaten $\psi_2, \ldots, \psi_n$ konstant. Also hat bezüglich der Karte ψ das Vektorfeld F_1 die Gestalt $\frac{\partial}{\partial \psi_1}$. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion in d. Für $d = 1$ ist die Integralkurve von F_1 durch y_0 eine solche Untermannigfaltigkeit.

Wir nehmen jetzt an, dass die Umkehrung für alle Untervektorraumbündel der Dimension kleiner als $d \in \mathbb{N}$ gilt. Für jeden Schnitt $F \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E, ist $\tilde{F} = F - \theta_F(\psi_1)F_1$ ein Schnitt von E, dessen Derivation $\theta_{\tilde{F}}$ auf ψ_1 verschwindet. Deshalb induziert $\tilde{F}$ auch ein Vektorfeld an die Untermannigfaltigkeit $\tilde{U} = \{y \in U \mid \psi_1(y) = \psi_1(y_0) = 0\}$ von U. Wegen Satz 2.22 (iv) induziert dann $[\tilde{F}, \tilde{G}] \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ für zwei Schnitte $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E ein Vektorfeld längs der Untermannigfaltigkeit $\tilde{U}$, das auch ein Schnitt von E ist. Für alle Schnitte $F \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E liegen die Werte von $\tilde{F}$ auf $\tilde{U}$ in einem $d-1$-dimenionalen Untervektorraumbündel $(\tilde{E}, \tilde{U}, \pi)$ von der Einschränkung von (E, U, π) auf $\tilde{U}$. Offenbar spannen $\tilde{F}_2, \ldots, \tilde{F}_d$ die Fasern von $\tilde{E}$ auf $\tilde{U}$ auf. Wegen der Induktionsvorraussetzung gibt es eine Karte $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n-1}$ mit

$$T(\tilde{\phi})(\tilde{E} \cap \pi^{-1}[U]) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_d = \ldots = x_{n-1} = 0\} \times \tilde{\phi}[\tilde{U}] \subset T\mathbb{R}^{n-1}$$

auf einer gegebenfalls verkleinerten offenen Umgebung $\tilde{U}$ von y_0 in der Untermannigfaltigkeit. Die Umkehrabbildung $\tilde{\phi}^{-1}$ können wir wieder mit dem Fluss ψ_{F_1} zu der Umkehrabbildung $\phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \psi_{F_1}(x_1, \tilde{\phi}^{-1}(x_2, \ldots, x_n))$ einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gegebenenfalls verkleinerten offenen Umgtebung U von y_0 fortsetzten.

Zuletzt zeigen wir, dass bezüglich dieser Karte ϕ die Derivationen der Vektorfelder $F_1, \ldots, F_d$ auf den Funktionen $\phi_{d+1}, \ldots, \phi_n$ verschwinden. Das Vektorfeld F_1 hat wieder die Gestalt $\frac{\partial}{\partial \phi_1}$. Also verschwindet $\theta_{F_1}(\phi_2) = 0, \ldots, \theta_{F_1}(\phi_n) = 0$. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1} \theta_{F_i}(\phi_j) = \theta_{F_1}(\theta_{F_i}(\phi_j)) = \theta_{[F_1, F_i]}(\phi_j) \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, d \text{ und } j = d+1, \ldots, n.$$

Aus der zweiten Bedingung folgt $[F_i, F_1] = c_{i1} F_1 + \ldots + c_{id} F_d$ mit glatten Funktionen c_{ik}. Also erfüllen die Funktionen $\theta_{F_i}(\phi_j)$ längs der Integralkurven von F_1 auf denen $\phi_2, \ldots, \phi_n$ konstant sind, eine gewöhnliche Differentialgleichung mit glatten Koeffizienten c_{ik}. Aufgrund der Konstruktion von $\tilde{\phi}$ verschwinden diese Funktionen auf $\tilde{U}$. Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf ist $\theta_{F_i}(\phi_j) = 0$ für $i = 2, \ldots, d$ und $j = d+1, \ldots, n$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung. Daraus folgt die erste Bedingung. **q.e.d.**

Satz 2.24. *Sei (E, Y, π) ein Untervektorraumbündel von (TY, Y, π), dass die Bedingungen aus Satz 2.23 erfüllt. Dann gibt es für jedes $y \in Y$ eine injektive Immersion $f : X \to Y$ von einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X mit $T(f)[TX] = E|_{f[X]}$ und $y \in f[X]$. Sie kann in dem Sinne maximal gewählt werden, dass jedes andere f die Einschränkung auf eine offene zusammenhängende Umgebung von $f^{-1}[\{y\}]$ in X ist.*

Beweis: Der Beweis von Lemma 1.29 zeigt auch, dass es einen abzählbaren Atlas $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Karten $\phi_k : U_k \to B(0, r_k)$ auf offene Bälle gibt, die die erste Bedingung im Satz 2.23 erfüllen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $x \in U_k$ gibt es dann genau eine maximale zusammenhängende Untermannigfaltigkeit V von U_k mit $x \in V$ und $TV = E|_V$. Sei $\mathcal{V}$ die Menge aller solcher Untermannigfaltigkeiten. Neben einer Metrik d_Y auf Y, die die offenen Mengen von Y induziert, definieren wir die Metrik

$$d_E(x, x') = \inf_{V \in \mathcal{V}} d_V(x, x') \quad \text{mit} \quad d_V(x, x') = \begin{cases} \frac{d_Y(x, x')}{1 + d_Y(x, x')} & \text{falls } x \in V \text{ und } x' \in V \\ 1 & \text{falls } x \notin V \text{ oder } x' \notin V. \end{cases}$$

Für jedes $V \in \mathcal{V}$ im Definitionsbereich U_k ist die Einschränkung $\phi_k|_V$ eine Karte von dem lokal zusammenhängenden metrischen Raum (Y, d_E). Wir zeigen jetzt, dass die Zusammenhangskomponenten von (Y, d_E) separabel und damit Mannigfaltigkeiten sind. Für $V, V' \in \mathcal{V}$ definiert die Bedingung, dass es endlich viele $V = V_1, \ldots, V_L = V'$ in $\mathcal{V}$ gibt mit $V_l \cap V_{l+1} \neq \emptyset$ für alle $l = 1, \ldots, L-1$ eine Äquivalenzrelation. Die Zusammenhanskomponenten von (Y, d_E) sind gerade die Vereinigungen über die entsprechenden Äquivalenzklassen. Für $k \in \mathbb{N}$ und $V \in \mathcal{V}$ ist jede Zusammenhangskomponente von $V \cap U_k$ in genau einer Untermannigfaltigkeit von U_k in $\mathcal{V}$ enthalten. Deshalb gibt es höchstens abzählbar viele Untermannigfaltigkeiten V' von U_k, die nicht schnittfremd mit V sind. Für $V \in \mathcal{V}$ und L verschiedene Karten gibt es höchstens abzählbar viele Untermannigfaltigkeiten $V = V_1, \ldots, V_L$ der entsprechenden Definitionsbereiche mit $V_l \cap V_{l+1} \neq \emptyset$ für alle $l = 1, \ldots, L-1$. Damit sind die Äquivalenzklassen höchstens abzählbar, und die Zusammenhangskomponenten von (Y, d_E) Mannigfaltigkeiten.

Das Bild einer injektiven Immersion $f : X \to Y$ mit $T(f)[TX] = E|_{f[X]}$ ist eine offene Teilmenge von (Y, d_E). Wenn X zusammenhängend ist, ist es eine offene Teilmenge der entsprechenden Zusammenhangskomponente von (Y, d_E). **q.e.d.**

2.5 Zusammenfassung

Wir haben jetzt drei äquivalente Beschreibungen von Vektorfeldern kennengelernt:

Schnitte des Tangentialbündels: Nach unser Definition sind Vektorfelder Schnitte des Tangentialbündels.

Derivationen: Wegen Satz 2.2 gibt es eine Eins–zu–Eins Beziehung zwischen Vektorfeldern und Derivationen von der Algebra der differenzierbaren Funktionen. Dadurch bilden die Vektorfelder eine Lie–Algebra.

Lokale Flüsse: Wegen Satz 2.10 gibt es eine Eins–zu–Eins Beziehung zwischen Vektorfeldern und lokalen Flüssen auf der Mannigfaltigkeit. Dadurch bilden die Vektorfelder so etwas wie die Lie–Algebra der lokalen Diffeomorphismengrupppe.

Die lokalen Flüsse, die von Vektorfeldern erzeugt werden, sind eindimensionale Untergruppen der lokalen Diffeomorphismen. Durch diese lokalen Diffeomorphismen können wir alle möglichen geometrischen Objekte auf der Mannigfaltigkeit transformieren. Die entsprechenden Ableitungen werden dann Lie–Ableitung genannt. Lemma 2.20 beschreibt dann die Lie–Ableitung von Funktionen, und Satz 2.19 die Lie–Ableitung von Vektorfeldern. Im nächsten Kapitel werden wir auch die Lie–Ableitung von anderen Tensorfeldern kennenlernen.

Kapitel 3

Differentialformen

3.1 Multilineare Algebra

Definition 3.1. *Seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung $A : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ n–linear wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt*

$$A((x_1, \ldots, x_n)) + A((x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = A((x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, x_n))$$

$$A((x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = \lambda A((x_1, \ldots, x_n)).$$

Durch die punktweise Addition und Skalarmultiplikation wird der Raum aller n–linearen Abbildungen von $V_1 \times \ldots \times V_n$ nach W offenbar zu einem Vektorraum. Wenn $V_1, \ldots, V_n$ und W normierte Vektorräume sind, dann besitzt der Vektorraum aller n–linearen Abbildungen von $V_1 \times \ldots \times V_n$ nach W folgende Norm:

$$\| A \| = \sup\{\| A((x_1, \ldots, x_n)) \| \mid \| x_1 \| \leq 1, \ldots, \| x_n \| \leq 1\}$$

Der entsprechende normierte Vektorraum wird mit $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ bezeichnet.

Übungsaufgabe 3.2. *Seien V und W endlichdimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{lll} \phi : & \mathcal{L}(V; W) \to \mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K}), & A \mapsto \phi(A) \text{ mit} \\ \phi(A) : & V \times W' \to \mathbb{K}, & (v, B) \mapsto (B \circ A)(v) \end{array}$$

ein Isomorphismus der normierten Vektorräume $\mathcal{L}(V; W)$ und $\mathcal{L}(V, W'; \mathbb{K})$.

Definition 3.3. *Seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale normierte Vektorräume (oder reflexive Banachräume) über $\mathbb{K}$. Dann ist das Tensorprodukt $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ definiert als*

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \mathcal{L}(V_1', \ldots, V_n'; \mathbb{K}).$$

Seien $(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$ *entsprechende Vektoren. Dann bezeichnen wir mit* $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ *das Element von* $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ *mit*

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n : \quad V_1' \times \dots \times V_n' \to \mathbb{K} \quad (A_1, \dots, A_n) \mapsto A_1(v_1) \cdots A_n(v_n).$$

Vektoren dieser Form werden kohärente Vektoren genannt.

Für endlichdimensionale $V_1, \dots, V_n$ ist die Lineare Hülle der kohärenten Vektoren von $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ das ganze Tensorprodukt. Im Tensorprodukt mit einem unendlichdimensionalen Vektorraum liegt die lineare Hülle der kohärenten Vektoren nur dicht. Im Folgenden werden wir des öfteren lineare Abbildungen auf Tensorprodukten dadurch definieren, dass wir sie auf den kohärenten Vektoren festlegen. Wegen der Linearität sind diese Abbildungen dann im endlichdimensionalen Fall eindeutig bestimmt. Im unendlichdimensionalen Fall benötigen wir noch die Stetigkeit der entsprechenden linearen Abbildung. In unseren Anwendungen sind die vorkommenden Vektorräume endlichdimensional, so dass diese Abbildungen durch die Linearität eindeutig bestimmt sind.

Satz 3.4. *Seien* $V_1, \dots, V_n, W$ *endlichdimensionale normierte Vektorräume (reflexive Banachräume). Dann sind als normierte Vektorräume auf natürliche Weise isomorph*

(i) $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W) \simeq \mathcal{L}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n; W)$

(ii) $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \simeq V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$

(iii) $\mathcal{L}(V; W) \simeq V' \otimes W$.

Beweis: Übungsaufgabe. **q.e.d.**

Auf dem n–fachen Tensoprodukt $V^{\otimes n}$ eines normierten endlichdimensionalen Vektorraumes V mit sich selber, wirkt die symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen von n Elementen. Diese Permutationsgruppe besitzt zwei eindimensionale Darstellungen. Einerseits die triviale Darstellung und andererseits die alternierende Darstellung

$$S_n \to \{1\}, \quad \sigma \mapsto 1 \qquad\qquad S_n \to \{1, -1\}, \quad \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma),$$

wobei $\operatorname{sgn}(\sigma)$ ± 1 ist je nachdem ob sich σ schreiben lässt als das Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen. Entsprechend enthält $V^{\otimes n}$ zwei lineare Unterräume, nämlich aller Vektoren, die sich unter der Wirkung der Permutationsgruppe S_n wie die triviale bzw. die alternierende Darstellung transformieren.

Definition 3.5. *Sei* V *ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann wirkt für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Permutationsgruppe* S_n *auf* $V^{\otimes n}$ *durch*

$$w \mapsto \sigma.w \text{ mit } \quad \sigma.w : \quad V'^{\times n} \to \mathbb{K} \quad (A_1, \dots, A_n) \mapsto w\left(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)}\right)$$

für alle $w \in V^{\otimes n}$ *und* $\sigma \in S_n$. *Auf den kohärenten Vektoren wirkt* S_n *also wie*

$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto \sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$ *für alle* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *und* $\sigma \in S_n$.

Die symmetrischen und antisymmetrischen Tensorprodukte sind definiert als folgende Unterräume von $V^{\otimes n}$

$$S^n V = \{w \in V^{\otimes n} | \sigma.w = w \text{ für alle } \sigma \in S_n\}$$

$$\bigwedge^n V = \{w \in V^{\otimes n} | \sigma.w = \operatorname{sgn}(\sigma) w \text{ für alle } \sigma \in S_n\}.$$

Mit SV *und* $\bigwedge V$ *bezeichnen wir die direkten Summen*

$$SV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n V \quad \text{und} \quad \bigwedge V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n V.$$

Dabei bezeichnet $S^0 V = \mathbb{K}$ *und* $\bigwedge^0 V = \mathbb{K}$ *im Tensorprodukt* $V^{\otimes \circ} = \mathbb{K}$.

Satz 3.6. *Sei* V *ein* n*–dimensionaler* $\mathbb{K}$*–Vektorraum. Dann gibt es* $\mathbb{K}$*–lineare Abbildungen*

$$\bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V, (v, w) \mapsto v \wedge w$$

so dass $\bigwedge V$ *zu einer distributiven* $\mathbb{K}$*–Algebra wird. In dieser Algebra gilt*

$$w \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge w \text{ für alle } v \in \bigwedge^p V \text{ und } w \in \bigwedge^q V.$$

Für alle $p = 0, \ldots, n$ *sind die Dimensionen von* $\dim \bigwedge^p V = \binom{n}{p}$ *und von* $\dim \bigwedge V = 2^n$.

Beweis: Wir definieren die Abbildung

$$\bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V, (v, w) \mapsto v \wedge w$$

durch

$$v \wedge w = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma.(v \otimes w) = \frac{1}{p!q!} \mathcal{A}^{p+q}(v \otimes w)$$

mit

$$\mathcal{A}^{p+q}(v \otimes w) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma.(v \otimes w).$$

Dann gilt für alle $v \in \bigwedge^p V$ auch $\mathcal{A}^p(v) = p!v$ und $\frac{1}{p!}\mathcal{A}^p : V^{\otimes p} \to \bigwedge^p V$ mit $v \mapsto \frac{1}{p!}\mathcal{A}^p(v)$ ist eine Projektion von $V^{\otimes p}$ auf dem Unterraum $\bigwedge^p V \subset V^{\otimes p}$. Offenbar gilt

$$\mathcal{A}^{p+q}(\mathcal{A}^p(v) \otimes w) = p!\,\mathcal{A}^{p+q}(v \otimes w) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}^{p+q}(v \otimes \mathcal{A}^q(w)) = q!\,\mathcal{A}^{p+q}(v \otimes w)$$

für alle $v \in V^{\otimes p}, w \in V^{\otimes q}$. Daraus folgt für alle $u \in \bigwedge^p V$, $v \in \bigwedge^q V$ und $w \in \bigwedge^r V$

$$\begin{aligned} w \wedge (v \wedge u) &= \frac{1}{(p+q)!r!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}(w \otimes \frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q}(v \otimes u)) \\ &= \frac{1}{r!p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}(w \otimes v \otimes u) \\ &= \frac{1}{(q+r)!p!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}\left(\frac{1}{q!r!}\,\mathcal{A}^{q+r}(w \otimes v) \otimes v\right) \\ &= (w \wedge v) \wedge u. \end{aligned}$$

Also ist $\wedge$ ein assoziatives Produkt. Insbesondere ist für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ das äußere Produkt

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n).$$

Die Distributivität folgt aus der Bilinearität der Abbildung

$$\wedge : \bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V, (v, w) \mapsto v \wedge w.$$

Für alle $p, q \in N$ hat folgende Permutation

$$(1, \ldots, p+q) \to (p+1, \ldots, p+q, 1, \ldots, p)$$

die Signatur $(-1)^{pq}$ weil sie aus pq-Transpositionen zusammengesetzt werden kann. Dann folgt für alle $v \in \bigwedge^p V$ und $w \in \bigwedge^q V$

$$w \wedge v = \frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}(w \otimes v) = (-1)^{pq}\frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}(v \otimes w) = (-1)^{pq} v \wedge w.$$

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V. Dann gilt offenbar

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} = \operatorname{sgn}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{\sigma(p)}} \text{ für alle } \sigma \in S_p.$$

Wenn zwei Indizes gleich sind, dann gibt es eine Transposition, unter der dieses äußere Produkt das Vorzeichen wechselt. Deshalb ist das Produkt $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ nur dann ungleich Null, wenn die Indizes $i_1, \ldots, i_p$ paarweise verschieden sind. Also bilden $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$ eine Basis von $\bigwedge^p V$. Die Anzahl solcher äußeren Produkte ist gleich $\binom{n}{p} = dim \bigwedge^p V$. Mit $\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$ folgt $dim \bigwedge V = 2^n$. **q.e.d.**

Satz 3.7. *Seien $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{L}(V;W)$ lineare Abbildungen zwischen den endlichdimensionalen normierten $\mathbb{K}$–Vektorräume V und W. Dann definiert*

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_p : \quad V^{\otimes p} \to W^{\otimes p}, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \to A_1 v_1 \otimes \ldots \otimes A_p v_p$$

eine lineare Abbildung von $V^{\otimes p}$ nach $W^{\otimes p}$. Für $A = A_1 = \ldots = A_p$ bildet diese Abbildung $S^p V$ auf $S^p W$ ab und $\bigwedge^p V$ auf $\bigwedge^p W$. Die entsprechende Abbildung $\bigwedge A : \bigwedge V \to \bigwedge W$ ist ein Algebrahomomorphismus bezüglich des äußeren Produktes.

Beweis: Die Abbildung $A_1 \otimes \ldots \otimes A_p$ ist offenbar linear und für $A \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt

$$A^{\otimes p+q}(v \otimes w) = A^{\otimes p}(v) \otimes A^{\otimes q}(w) \qquad \text{für alle } v \in V^{\otimes p} \text{ und } w \in V^{\otimes q}.$$

Außerdem ist die Abbildung $A^{\otimes p}$ verträglich mit der Wirkung der Permutationsgruppe:

$$A^{\otimes p}(\sigma.v) = \sigma.(A^{\otimes p}(v)) \text{ für alle } v \in V^{\otimes p} \text{ und } \sigma \in S_p.$$

Daraus folgt sofort, dass $A^{\otimes p}$ sowohl $S^p V$ auf $S^p W$ abbildet, als auch $\bigwedge^p V$ auf $\bigwedge^p W$. Zuletzt folgt auch, dass $A^{\otimes p}$ mit $\mathcal{A}^p$ vertauscht, und deshalb

$$A^{\otimes (p+q)}(v \wedge w) = A^{\otimes p}(v) \wedge A^{\otimes q}(w)$$

für alle $v \in \bigwedge^p V$ und $w \in \bigwedge^q V$ gilt. **q.e.d.**

Für die symmetrische Algebra $SV = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^p V$ gilt eine analoge Aussage zu Satz 3.6:

$$v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = \sum_{\sigma \in S_p} \sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p) \text{ für alle } v_1, \ldots, v_p \in V.$$

Eine Basis von $S^p V$ bilden dann $e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_p}$. Die Dimension ist die Anzahl p Elemente aus $1, \ldots, n$ mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. Wenn wir die Elemente einer solchen Auswahl der Größe nach anordnen, dann ist jede Auswahl eindeutig beschrieben, durch die Angabe, an welcher Stelle wir jeweils zu größeren Elementen von $\{1, \ldots, n\}$ übergehen, also zu der Anzahl $\binom{n-1+p}{n-1} = \binom{n-+p-1}{p}$ aus einer Menge mit $n - 1 + p$ verschiednen Elementen ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $n - 1$ Elementen auszuwählen. Diese Dimension wächst also mit p an und SV ist unendlichdimensional. Diese Algebra lässt sich mit dem Raum der Polynome auf V' identifizieren. Im Folgenden benutzen wir nur die endlichdimensionale antisymmetrische Algebra.

3.2 Tensorfelder

Definition 3.8. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{N}_0$ sei $T^q_p X$ das Vektorraumbündel des Tensorproduktes des p–fachen Tensorproduktes des Tangentialbündels mit dem q–fachen Tensorprodukt des Kotangentialbündels. Das Kotangentialbündel $T^1_0 X$ bezeichnen wir auch einfach als $T'X$. Die Fasern von $T^q_p X$ bzw. $T'X$ über einem Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit $T^q_{p,x} X$ bzw. $T'_x X$.*

Schnitte der Vektorraumbündel $T^q_p X$ nennen wir Tensorfelder. Wir können die Lie-Ableitung auf solchen Tensorfeldern definieren.

Definition 3.9. *Sei $f : X \to T^q_p X$ ein differenzierbares Tensorfeld auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X. Dann sind für kleine t $\psi_F(t,\cdot)$ und $\psi_F(-t,\cdot)$ lokal stetig differenzierbare Homöomorphismen von X. Wir definieren die Lie-Ableitung von f an der Stelle $x \in X$ als*

$$(\theta_F f)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(T'_x(\psi_F(t,\cdot))\right)^{\otimes q} \otimes \left(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))\right)^{\otimes p} f(\psi_F(t,x)).$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot)): &\quad T_{\psi_F(-t,x)}X \to T_x X \\ T'_x(\psi_F(t,\cdot)): &\quad T'_{\psi_F(t,x)}X \to T'_x X \quad \text{wegen} \quad T_x(\psi_F(t,\cdot)): \; T_x X \to T_{\psi_F(t,x)} X \end{aligned}$$

zusammen eine Abbildung

$$\left(T'_x(\psi_F(t,\cdot))\right)^{\otimes q} \otimes \left(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))\right)^{\otimes p}: \quad T^q_{p,\psi_F(t,x)} X \to T^q_{p,x} X$$

induzieren. Deshalb ist die Ableitung auf der rechten Seite die Ableitung einer differenzierbaren Funktion von $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ nach $T^q_{p,x} X$. Weil dieser Raum ein normierter Vektorraum ist, ist die entsprechende Ableitung wohl definiert.

Definition 3.10. *(Verjüngung): Sei $p, q \in \mathbb{N}$. Dann induzieren für jedes $i = 1, \ldots, p$ und jedes $j = 1, \ldots, q$ die Abbildungen*

$$T'_x X \otimes T_x X \to \mathbb{R}, \quad u \otimes v \mapsto \langle u, v \rangle$$

einen Verjüngungsmorphismus i^j_i von dem Vektorraumbündel $T^q_p X$ auf das Vektorraumbündel $T^{q-1}_{p-1} X$. Hierbei bezeichnet $\langle u, v \rangle$ die Auswertung der Elemente von $T'_x X$ auf den Elementen von $T_x X$. Wenn $f_1, \ldots, f_p$ Vektorfelder sind, und $g_1, \ldots, g_q$ Schnitte von dem Kotangentialbündel, dann wirkt i^j_i auf $g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$ wie

$$i^j_i(g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p) = \langle f_i, g_j \rangle g_1 \otimes \ldots \hat{g}_j \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \hat{f}_i \ldots \otimes f_p.$$

Hierbei bedeutet $\hat{\cdot}$, dass der entsprechende Faktor in dem Produkt weggelassen wird.

Satz 3.11. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Seien $i < j$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \dots, p\}$ und $k < l$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \dots, q\}$. Dann vertauschen die folgenden Verjüngungsmorphismen:*

$$\begin{array}{ccc} T_p^q X & \xrightarrow{i_i^k} & T_{p-1}^{q-1} X \\ i_j^l \downarrow & & \downarrow i_{j-1}^{l-1} \\ T_{p-1}^{q-1} X & \xrightarrow{i_i^k} & T_{p-2}^{q-2} X \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{ccc} T_p^q X & \xrightarrow{i_i^l} & T_{p-1}^{q-1} X \\ i_j^k \downarrow & & \downarrow i_{j-1}^k \\ T_{p-1}^{q-1} X & \xrightarrow{i_i^{l-1}} & T_{p-2}^{q-2} X \end{array} .$$

(ii) *Die Lie-Ableitung θ_F vertauscht mit allen Verjüngungsmorphismen i_i^j mit $i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, q$. D.h. für alle differenzierbaren Schnitte f von $T_p^q X$ und alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$\theta_F(i_i^j(f)) = i_i^j(\theta_F(f)).$$

(iii) *Sei f ein Schnitt von $T_p^q X$ und g ein Schnitt von $T_r^s X$. Dann gilt*

$$\theta_F(f \otimes g) = \theta_F(f) \otimes g + f \otimes \theta_F(g).$$

Beweis: (i) Seien $F_1, \dots, F_p$ Vektorfelder von X und $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ Schnitte des Kotangentialbündels $T'X$ von X. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} & i_{j-1}^{l-1} \circ i_i^k(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \dots \otimes F_p) = \\ & = \langle \alpha_l, F_j \rangle \langle \alpha_k, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \dots \hat{\alpha}_k \dots \hat{\alpha}_l \dots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \dots \hat{F}_i \dots \hat{F}_j \dots \otimes F_p \\ & = i_i^k \circ i_j^l(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \dots \otimes F_p) \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\hat{\cdot}$, dass der entsprechende Faktor im Tensorprodukt weggelassen wird. Genauso gilt auch

$$\begin{aligned} & i_{j-1}^{k} \circ i_i^l(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \dots \otimes F_p) = \\ & = \langle \alpha_k, F_j \rangle \langle \alpha_l, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \dots \hat{\alpha}_k \dots \hat{\alpha}_l \dots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \dots \hat{F}_i \dots \hat{F}_j \dots \otimes F_p \\ & = i_i^{l-1} \circ i_j^k(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \dots \otimes F_p) \end{aligned}$$

(ii) Sei $\phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y. Dann definieren wir die Abbildung,

$$T_p^q(\Phi) : T_p^q Y \to T_p^q X$$

die faserweise gegeben ist durch

$$(T'_x(\Phi)^{\otimes q} \otimes T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1})^{\otimes p} : T^q_{p,\Phi(x)}Y \to T^q_{p,x}X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dabei ist

$$\begin{array}{rlcrl} T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}): & T_{\Phi(x)}Y \to T_x X & & & \\ T'_x(\Phi): & T'_{\Phi(x)}Y \to T'_x X & \text{wegen} & T_x(\Phi): & T_x X \to T_{\Phi(x)}Y \end{array}$$

Dann kommutiert offenbar folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T^q_p Y & \xrightarrow{T^q_p(\Phi)} & T^q_p X \\ i^j_i \downarrow & & \downarrow i^j_i \\ T^{q-1}_{p-1} Y & \xrightarrow{T^{q-1}_{p-1}(\Phi)} & T^{q-1}_{p-1} X \end{array}$$

Also ist für jeden Schnitt f von dem Vektorraumbündel $T^q_p(Y)$ die Abbildung $T^q_p(\Phi) \circ f \circ \Phi$ ein Schnitt von dem Vektorraumbündel $T^q_p(X)$ ist und es gilt

$$T^{q-1}_{p-1}(\Phi) \circ i^j_i \circ f \circ \Phi = i^j_i \circ T^q_p(\Phi) \circ f \circ \Phi.$$

Für die lokalen stetig differenzierbaren Homöomorphismen $\psi_F(t, \cdot)$ gilt also auch

$$T^{q-1}_{p-1}(\psi_F(t, \cdot)) \circ i^j_i \circ f \circ \psi_F(t, \cdot) = i^j_i \circ T^q_p(\psi_F(t, \cdot)) \circ f \circ \psi_F(t, \cdot).$$

Indem wir die linke und die rechte Seite nach t differenzieren erhalten wir $\theta_F(i^j_i(f)) =$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T^{q-1}_{p-1}(\psi_F(t, \cdot)) \circ i^j_i \circ f \circ \psi_F(t, \cdot) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} i^j_i \circ T^q_p(\psi_F(t, \cdot)) \circ f \circ \psi_F(t, \cdot) = i^j_i(\theta_F(f)).$$

(iii) folgt aus der Leibniz-Regel. **q.e.d.**

Aus (ii) und (iii) folgt für alle Vektorfelder $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und für alle Schnitte α des Kotangentialbündels

$$\theta_F(\langle \alpha, E \rangle) = \langle \theta_F\, \alpha, E \rangle + \langle \alpha, \theta_F\, E \rangle.$$

Daraus folgt

$$\langle \theta_F\, \alpha, E \rangle = \theta_F(\langle \alpha, E \rangle) - \langle \alpha, [F, E] \rangle.$$

Mithilfe von (iii) lassen sich dann die Lie-Ableitungen von beliebigen Tensorprodukten von Vektorfeldern und Schnitten des Kotangentialbündels berechnen.

3.3 Differentialformen

Definition 3.12. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei dann $\bigwedge^p X$ das antisymmetrische Untervektorraumbündel von $T^p X$. Analog sei $\bigwedge X$ die direkte Summe aller Vektorraumbündel $\bigwedge^p X$. Die Schnitte von $\bigwedge^p X$ heißen p–Differentialformen oder nur Differentialformen.*

Das p–fache antisymmetrische Tensorprodukt $\bigwedge^p V'$ des Dualraumes V' eines endlichdimensionalen Vektorraumes V ist ein Unterraum des p–fachen Tensorproduktes $V'^{\otimes p}$ von V' mit sich selber. Deshalb sind die Elemente von $\bigwedge^p V'$ antisymmetrische p–lineare Abbildungen von $V^{\times p}$ nach $\mathbb{K}$. Wenn $\alpha \in \bigwedge^p V'$ ein Element dieses p–fachen antisymmetrischen Tensorproduktes ist, und $v_1, \ldots, v_p \in V$ Elemente von V sind, dann können wir α auf $(v_1, \ldots, v_p) \in V^{\times p}$ auswerten. Diese Auswertung ist antisymmetrisch in $v_1, \ldots, v_p$, Wir wollen sie folgendermaßen bezeichnen:

$$\langle \alpha, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \rangle.$$

Das heißt insbesondere für Elemente $A_1, \ldots, A_p \in V'$ und Elemente $v_1, \ldots, v_p \in V$:

$$\begin{aligned}\langle A_1 \wedge \ldots \wedge A_p, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \rangle = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \langle A_{\sigma(1)}, v_1 \rangle \cdots \langle A_{\sigma(p)}, v_p \rangle = \\ = \det \left(\langle A_i, v_j \rangle_{i,j \in \{1,\ldots,p\}} \right).\end{aligned}$$

Auf Differentialformen angewendet heißt das, dass für jede r mal stetig differenzierbare p–Differentialform α und Vektorfelder $F_1, \ldots, F_p \in \mathrm{Vec}^r(X)$, die Auswertung der Differentialform α auf dem Schnitt $F_1 \otimes \ldots \otimes F_p$ des Vektorraumbündels $T^0_p X$ eine r mal stetig differenzierbare reelle Funktion in $C^r(X, \mathbb{R})$ ergibt:

$$\langle \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p \rangle \in C^r(X, \mathbb{R}).$$

Definition 3.13. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}(X)$ ein Vektorfeld von X. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei i_F der eindeutig bestimmte Morphismus $i_F : \bigwedge^p X \to \bigwedge^{p-1} X$, der auf p–Differentialformen α wirkt wie*

$$\langle i_F \circ \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle = \langle \alpha, F \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle$$

für alle Vektorfelder $F_1, \ldots, F_{p-1} \in \mathrm{Vec}(X)$.

Wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, dann ist $\bigwedge^p X$ ein Vektorraumbündel der Dimension $\binom{n}{p}$. Für $p > n$ ist also $\bigwedge^p X$ Null-dimensional und $\bigwedge X$ ist ein Vektorraumbündel der Dimension 2^n. Der Grund, dass wir gerade die antisymmetrischen Untervektorraumbündel von den Tensorprodukten des Kotangentialbündels und nicht von dem Tangentialbündel betrachten, ist dass die entsprechenden Schnitte, also die Differentialformen, das richtige Transformationsverhalten haben, um sie zu integrieren. Diese Differentialformen werden sich als sehr natürliche Objekte herausstellen. Eine schöne Eigenschaft können wir sofort ablesen: Sie lassen sich unter einer differenzierbaren Abbildung zurückziehen, während sich Vektorfelder nur unter invertierbaren differenzierbaren Abbildungen transformieren lassen.

Satz 3.14. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und f eine stetig differenzierbare Abbildung von X nach Y. Dann gilt*

(i) *Das faserweise äußere Produkt $\wedge : \bigwedge^p X \times \bigwedge^q X \to \bigwedge^{p+q} X$ macht die Differentialformen von X zu einer assoziativen Algebra:*

$$\wedge : \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

für alle $p, q \in \mathbb{N}_0$ und alle p–Differentialformen α und alle q–Differentialformen β. Hierbei ist $\bigwedge^0 X$ das triviale reelle Linienbündel $\mathbb{R} \times X$ über X. Die 0–Differentialformen sind also die reelle Algebra aller reellen Funktionen auf X und die Multiplikation mit reellen Funktionen schreiben wir nur als $(f, \alpha) \to f\alpha$ für alle $f \in C(X, \mathbb{R})$ und p–Differentialformen α.

(ii) *Für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt*

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

(iii) *Für alle $x \in X$ bilden die Abbildungen*

$$\bigwedge^p (T'_x(f)) : \qquad \bigwedge^p_{f(x)} Y \to \bigwedge^p_x X \text{ wegen } \qquad T'_x(f) : \qquad T'_{f(x)} Y \to T'_x X$$

einen Algebrahomomorphismus von der Algebra $\bigwedge_{f(x)} Y$ in die Algebra $\bigwedge_x X$. Dadurch lassen sich alle p–Differentialformen α auf Y durch f zu p–Differentialformen $f^*\alpha$ auf X zurückziehen mit

$$f^*\alpha = \bigwedge^p (T'(f)) \circ \alpha \circ f.$$

(iv) *f^* ist ein Algebrahomomorphismus von den Differentialformen auf Y auf die Differentialformen auf X, d.h. es gilt*

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β von Y.

(v) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(x)$ wirkt die Lie-Ableitung θ_F auf den Differentialformen wie*

$$\theta_F\,\alpha = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_F^*(t,\cdot)\alpha.$$

Diese Lie–Ableitung ist eine Derivation, d.h. es gilt

$$\theta_F(\alpha \wedge \beta) = \theta_F(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_F(\beta).$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β.

(vi) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}(X)$ auf X induziert der Morphismus $i_F : \bigwedge X \to \bigwedge X$ eine Anti–Derivation auf den Differentialformen, d.h. für alle p–Differentialformen α und alle q–Differentialformen β gilt*

$$i_F(\alpha \wedge \beta) = i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta).$$

Außerdem gilt $\quad i_F \circ i_F = 0.$

(vii) *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt* $\quad \theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E = i_{[E,F]}.$

Beweis: (i) und (ii) folgen aus den entsprechenden Aussagen über antisymmetrische Tensorprodukte im ersten Abschnitt. (iii) und (iv) folgen aus Satz 3.7 und (v) aus Satz 3.11 (iii).

Zum Beweis von (vi) betrachten wir 1–Differentialformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ und Vektorfelder $F_1, \ldots, F_{p-1}$. Dann gilt $\quad \langle i_F(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p), F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1}\rangle =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\langle \alpha_{\sigma(1)}, F\rangle \cdot \langle \alpha_{\sigma(2)}, F_1\rangle \cdots \langle \alpha_{\sigma(p)}, F_{p-1}\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle \alpha_i, F\rangle \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \ldots \wedge \alpha_p, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1}\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge i_F(\alpha_i) \wedge \ldots \wedge \alpha_p, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1}\rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir jede Permutation $\sigma \in S_p$ zerlegt in die Komposition $\tau \circ \sigma_i$ einer der Permutationen $\sigma_i : (1, \ldots, p) \mapsto (i, 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, p)$ und einer Permutation $\tau \in S_{p-1}$ der Elemente $\{2, \ldots, p\}$. Die erste Permutation σ_i ist offenbar ein Produkt von $(i-1)$ Transpositionen und hat deshalb $\mathrm{sgn}(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$. Diese Zerlegung ist offenbar eine bijektive Abbildung $S_p \simeq (S_{p-1})^p$ Daraus folgt, dass i_F eine Anti–Derivation ist. Weil die Auswertung von p–Differentialformen antisymmetrisch in den Vektorfeldern ist, folgt $i_F \circ i_F = 0$.

Zum Beweis von (vii) zeigen wir zunächst, dass $\theta_E \circ i_F - i_f \circ \theta_E$ eine Anti–Derivation ist. Sei also α eine p–Differentialform und β eine q–Differentialform. Dann gilt wegen (v) und (vi) $\qquad (\theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E)(\alpha \wedge \beta) =$

$$\begin{aligned}
&= \theta_E(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_E(\beta)) \\
&= \theta_E(i_F(\alpha)) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \theta_E(i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha)) \wedge \beta - (-1)^p \alpha \wedge i_F(\theta_E(\beta)).
\end{aligned}$$

Dann genügt es (vii) auf einer differenzierbaren 1–Differentialform α zu zeigen. Sei also $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt wegen Satz 3.11

$$\theta_E(i_F(\alpha)) - i_F(\theta_E(\alpha)) = \theta_E\langle \alpha, F\rangle - \langle \theta_E\, \alpha, F\rangle = \langle \alpha, \theta_E\, F\rangle = i_{[E,F]}\alpha.$$

q.e.d.

Die Lie–Ableitung θ_F stimmt wegen Lemma 2.20 auf den 0–Differentialformen mit der vorher definierten Lie–Ableitung auf den Funktionen überein.

3.4 Die äußere Ableitung

Definition 3.15. *Für jeden Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und jede differenzierbare reelle Funktion f auf X definiert folgende lineare Abbildung aus Satz 1.39*

$$df(x): \quad T_xX \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto D_v(f)$$

ein Element des Kotangentialraums T'_xX über $x \in X$. Dadurch wird für jede differenzierbare Funktion f auf X der Gradient df von f zu einem globalen Schnitt von $T'X$:

$$df: \quad X \to T'X \quad \text{mit} \quad \langle df, F\rangle = \theta_F(f) \quad \text{für alle } F \in \mathrm{Vec}(X).$$

Diese Abbildung $d : f \mapsto df$ wollen wir zu einer Abbildung auf allen Differentialformen fortsetzen.

Satz 3.16. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ einen eindeutigen Differentialoperator d von den differenzierbaren p–Differentialformen in die $(p+1)$–Differentialformen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle differenzierbaren p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

(ii) *Auf differenzierbaren Funktionen f (also $p = 0$) wirkt d wie $f \mapsto df$ (siehe oben).*

(iii) *Für jede zweimal differenzierbare Funktionen f gilt $d(df) = 0$.*

Beweis: Aufgrund der Definition des antisymmetrischen Tensorproduktes ist jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von p–Differentialformen der Form

$$\alpha = f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p.$$

Die Bedingungen (i)-(iii) erzwingen, dass auf solchen p–Differentialformen d wirkt wie

$$d\alpha = df \wedge dg_1 \wedge \ldots dg_p.$$

Damit ist gezeigt, dass die Bedingungen (i)-(iii) den Differentialoperator d eindeutig bestimmen, wenn er existiert.

Um die Existenz zu beweisen, wählen wir eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um einen beliebigen Punkt $x \in U \subset X$. Die Komponenten $\phi_1, \ldots, \phi_n$ bilden also n glatte Funktionen auf U, so dass $d\phi_1(x), \ldots, d\phi_n(x)$ auf allen Punkten von U eine Basis des Kotangentialraums bilden. Also ist jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von Differentialformen der Form

$$f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n.$$

Der Gradient df von f ist über $x \in U$ eine endliche Linearkombination von $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(\phi(x)) \cdot d\phi_i(x).$$

Vergleiche Satz 1.39. Dann folgt

$$d(f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(\phi(x)) d\phi_i \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}.$$

Dadurch ist d also auf allen p–Differentialformen definiert. Wir müssen noch zeigen, dass (i) und (iii) gelten. Wir zeigen zunächst (iii). Aufgrund der Konstruktion von d gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_j \wedge d\phi_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_i \wedge d\phi_j = 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir das Schwarz'sche Lemma benutzt, gemäß dem die zweiten partiellen Ableitungen nicht von der Reihenfolge abhängen. Wegen der Linearität genügt es (i) für Differentialformen von der Form

$$\alpha = f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \quad \text{und} \quad \beta = g d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}$$

zu zeigen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= fgd\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q} \\
d(\alpha \wedge \beta) &= (fdg + gdf)d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q} \\
&= (df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \wedge (gd\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}) \\
&+ (-1)^p (fd\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \wedge (dg \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 3.17. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Für jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt $d(d\alpha) = 0$.*

(ii) *Für jede zweimal differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y und jede differenzierbare p–Differentialform α auf Y ist $f^*\alpha$ eine differenzierbare p–Differentialform auf X und es gilt*

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha).$$

(iii) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare Funktion g gilt*

$$\theta_F(dg) = d(\theta_F(g))$$

(iv) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F\, d\alpha = d(\theta_F\, \alpha)$$

(v) *Für jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F\, \alpha = i_F \circ d\alpha + d(i_F \circ \alpha).$$

(vi) *Für jede differenzierbare p–Differentialform α und stetig differenzierbare Vektorfelder $F_0, \ldots, F_p \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$\begin{aligned}
\langle d\alpha, F_0 \otimes \ldots \otimes F_p \rangle &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, \theta_{F_i}(\langle \alpha, F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \otimes F_p \rangle) \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \langle \alpha, [F_i, F_j] \otimes F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \rangle.
\end{aligned}$$

Beweis: (i) Sei α wieder wie im Beweis von (i) des vorangehenden Satzes $\alpha = f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}$. Dann gilt wegen (i) und (iii) aus dem vorangehenden Satz

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d(df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \\ &= d(df) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d(d\phi_{i_j}) \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Wegen der Kettenregel gilt für alle differenzierbaren Funktionen g auf Y

$$d(f^*g) = d(g \circ f) = T'(f) \circ dg \circ f = f^* dg.$$

Dann folgt (ii) aus (i), der Linearität von d, der Konstruktion von d im Beweis des vorangehenden Satzes und aus Satz 3.14 (iv): Sei $\alpha = g d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_p$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &= d(f^*g(f^*d\phi_1) \wedge \ldots \wedge (f^*d\phi_p)) & &= d((f^*g) \wedge d(f^*\phi_1) \wedge \ldots \wedge d(f^*\phi_p)) \\ &= (f^*dg) \wedge (f^*d\phi_1) \wedge \ldots \wedge (f^*d\phi_p) & &= f^*d(g d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_p) = f^*(d\alpha). \end{aligned}$$

(iii) Aus der Definition von dg bzw. $d\,\theta_F(g)$ und Satz 3.11 (iii) folgt für $E \in \mathrm{Vec}^1(X)$

$$\begin{aligned} \langle \theta_F(dg) - d(\theta_F(g)), E\rangle &= \langle \theta_F(dg), E\rangle & & & &- \langle d(\theta_F(g)), E\rangle \\ &= \theta_F(\langle dg, E\rangle) & &- \langle dg, \theta_F\, E\rangle & &- \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= \theta_F(\theta_E(g)) & &- \theta_{\theta_F\, E}(g) & &- \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= [\theta_F, \theta_E](g) & &- \theta_{[F,E]}(g) & &= 0. \end{aligned}$$

(iv) Wegen (ii) ist d eine Anti–Derivation. Also ist $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ genauso wie im Beweis von Satz 3.14 (vii) eine Anti–Derivation. Dann genügt es zu zeigen, dass diese Anti–Derivation auf allen zweimal differenzierbaren 1–Differentialformen $\alpha = g dh$ verschwindet. Weil $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ eine Anti–Derivation ist und wegen (i) gilt

$$\begin{aligned} (\theta_F \circ d - d \circ \theta_F)(g dh) &= (\theta_F(dg) - d(\theta_F(g))) \wedge dh + g(\theta_F \circ d - d \circ \theta_F)(dh) \\ &= (\theta_F(dg) - d(\theta_F(g))) \wedge dh + g d(\theta_F(dh)) \\ &= (\theta_F(dg) - d(\theta_F(g))) \wedge dh + g d(\theta_F(dh) - d(\theta_F(h))) \\ &= (\theta_F \circ d - d \circ \theta_F)(g) \wedge dh + g d \circ (\theta_F \circ d - d \circ \theta_F)(h). \end{aligned}$$

Also genügt es (iii) zu zeigen, dass diese Anti–Derivation $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ auf allen zwei mal differenzierbaren Funktionen g verschwindet. Wegen Satz 3.14 (v) können (iii) und (iv) auch aus (ii) gefolgert werden.

(v) Wegen (ii) und Satz 3.14 (vi) sind sowohl d als auch i_F Anti–Derivationen. Dann ist $i_F \circ d + d \circ i_F$ eine Derivation: Für eine p–Differentialform α und eine q–Differentialform β gilt nämlich $(i_F \circ d + d \circ i_F)(\alpha \wedge \beta) =$

$$\begin{aligned} &= i_F(d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta) + d(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) \\ &= i_F(d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge i_F(d\beta) + d(i_F(\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge d(i_F(\beta)). \end{aligned}$$

Also genügt es (v) für 1–Differentialformen $\alpha = gdh$ zu zeigen. Wegen der Definition von d, Satz 3.14 (vi) und (iv) gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} i_F(d(gdh)) + d(i_F(gdh)) &= i_F(dg \wedge dh) + d(g\langle F, dh\rangle) \\ &= \langle F, dg\rangle dh - \langle F, dh\rangle dg + \langle F, dh\rangle dg + gd(\langle F, dh\rangle) \\ &= \theta_F(g)dh + gd(\theta_F(h)) = \theta_F(g)dh + g\,\theta_F(dh) = \theta_F(gdh). \end{aligned}$$

Außerdem bemerken wir, dass (v) aufgrund der Definition von dg auf 0–Differentialformen $\alpha = g$ gilt, wenn i_F auf 0–Differentialformen trivial wirkt.

(vi) Wegen (v) gilt $\langle d\alpha, F_0 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle + \langle d(i_{F_0}(\alpha)), F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle =$

$$= \langle i_{F_0}(d\alpha), F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle + \langle d(i_{F_0}(\alpha)), F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle = \langle \theta_{F_0}\,\alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle.$$

Daraus folgt induktiv

$$\begin{aligned} \langle d\alpha, F_0 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle &= \langle \theta_{F_0}\,\alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle - \langle \theta_{F_1}\, i_{F_0}(\alpha), F_2 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle + \ldots \\ &\ldots + (-1)^{p-1}\langle \theta_{F_{p-1}}\, i_{F_{p-2}}(\ldots(i_{F_0}\alpha)\ldots), F_p\rangle + (-1)^p\,\theta_{F_p}\, i_{F_{p-1}}(\ldots(i_{F_0}\alpha)\ldots). \end{aligned}$$

Wegen Satz 3.11 (ii)-(iii) gilt $\theta_{F_0}\langle \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle =$

$$= \langle \theta_{F_0}\,\alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_d\rangle + \sum_{j=1}^{p} \langle \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{j-1} \otimes [F_0, F_j] \otimes F_{j+1} \otimes \ldots \otimes F_p\rangle.$$

Für die obigen Summanden gilt dann $\langle \theta_{F_i}\, i_{F_{i-1}}(\ldots(i_{F_0}(\alpha)\ldots), F_{i+1} \otimes \ldots \otimes F_p\rangle =$

$$= \theta_{F_i}\langle \alpha, F_0 \otimes F_2 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle - \sum_{j=i+1}^{p} \langle \alpha, F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \otimes F_{j-1} \otimes [F_i, F_j] \otimes F_{j+1} \ldots \otimes F_p\rangle.$$

Das Vertauschen von $[F_i, F_j]$ mit $F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \otimes F_{j-1}$ ergibt ein Vorzeichen $(-1)^{j-1}$. Die alternierende Summe $\sum_{i=0}^{p}(-1)^i$ über diese Terme ergibt dann (vi). **q.e.d.**

Wegen (vi) gilt insbesondere für jede differenzierbare 1–Differentialform ω und stetig differenzierbare Vektorfelder $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$

$$\langle d\omega, E \otimes F\rangle = \theta_E\langle \omega, F\rangle - \theta_F\langle \omega, E\rangle - \langle \omega, [E, F]\rangle.$$

Die Formel (vi) erlaubt es ganz allgemein, die Auswertung der äußere Ableitung einer Differentialform durch Lie–Ableitungen von Funktionen und Vektorfeldern zu berechnen. Umgekehrt erlaubt es (v) die Auswertung der Lie–Ableitung einer Differentialform durch die äußere Ableitung zu berechnen.

3.5 Orientierungen

Für die Integration von Differentialformen müssen wir noch den Begriff der Orientierung einführen. Weil die Übergangsfunktionen zwischen zwei verträglichen Karten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Diffeomorphismen zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ sind, sind ihre Ableitungen invertierbare lineare Abbildungen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Solche lineare Abbildungen werden durch reelle $n \times n$ Matrizen beschrieben, deren reelle Determinante ungleich Null ist.

Definition 3.18. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt ein Atlas von X orientiert, wenn die Ableitungen der Übergangsfunktionen, zwischen zwei Karten mit nicht schnittfremdem Definitionsbereich jeweils positive Determinante haben. Wenn X einen solchen orientierten Atlas besitzt, dann heißt X orientierbar. Andernfalls heißt X nicht orientierbar. Eine Orientierung von X ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten, wobei zwei orientierte Atlanten äquivalent sind, wenn die Vereinigung der beiden orientierten Atlanten wieder ein orientierter Atlas ist.*

Die invertierbare lineare Abbildung

$$I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto I(x) \text{ mit } I(x) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

hat offenbar Determinante -1 und ist eine Involution, d.h. ihr Quadrat ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Für jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist die Komposition $I \circ \phi$ mit I auch eine Karte von X. Wenn also von zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ die Ableitung der Übergangsfunktionen $(\psi \circ \phi^{-1})'$ auf einer Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ negative Determinante hat, dann hat die Ableitung der Übergangsfunktion $((I \circ \psi) \circ \phi^{-1})'$ bzw. $(\psi \circ (I \circ \phi)^{-1})'$ positive Determinante auf der entsprechenden Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ bzw. $I \circ \phi[U \cap V]$. Also können wir versuchen einen Atlas von X dadurch zu einem orientierten Atlas zu machen, dass wir einige Karten des Atlases durch die Komposition mit I ersetzen. Wenn X orientierbar ist, dann ist das immer möglich.

Satz 3.19. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann ist folgendes äquivalent*

(i) *X ist orientierbar.*

(ii) *Jede zusammenhängende Komponente von X ist orientierbar.*

(iii) *Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X ist das reelle Linienbündel $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ trivial.*

(iv) *Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X gibt es eine stetige $\dim(Y)$–Differentialform, die keine Nullstellen auf Y hat.*

Beweis: Offenbar folgt (ii) aus (i).

(ii)$\Rightarrow$(iv): Sei Y eine orientierbare zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Auf dem Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ eine $\dim(Y)$- Differentialform, die offenbar keine Nullstellen hat, weil $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ alle linear unabhängig sind. Sei $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine zweite Karte des orientierten Atlases von Y, dann ist $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n = \det(\psi \circ \phi^{-1})' d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$, weil für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$d\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i \circ \phi^{-1}}{\partial \phi_j} \cdot d\phi_j$$

Also sind auf $U \cap V$ die bei den $\dim(Y)$–Differentialformen $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ und $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$ durch eine positive glatte Funktion proportional zueinander. Die Überdeckung durch die Definitionsbereiche der Karten des orientierten Atlases von Y besitzt eine entsprechende Zerlegung der Eins. Indem wir alle entsprechenden $\dim(Y)$–Differentialformen mit dieser Zerlegung der Eins aufsummieren, erhalten wir eine globale glatte $\dim(Y)$–Differentialform auf Y, die keine Nullstellen hat.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Weil $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ ein reelles Linienbündel ist, folgt aus Lemma 1.54, dass $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ genau dann trivial ist, wenn es einen globalen glatten Schnitt ohne Nullstellen besitzt. Also sind (iii) und (iv) äquivalent.

(iv)$\Rightarrow$(i): Sei ω eine stetige $\dim(Y)$–Differentialform auf der zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y ohne Nullstellen. Offenbar besitzt Y dann einen Atlas von Karten, deren Definitionsbereiche zusammenhängend sind. Auf einem solchen Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist dann $\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ mit einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, die keine Nullstellen hat. Die Urbilder von $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ unter f sind dann auch die Urbilder von $(-\infty, 0]$ bzw. $[0, \infty)$ und damit sowohl offen als auch abgeschlossen. Weil der Definitionsbereich der Karte zusammenhängend ist, ist f entweder positiv oder negativ. Offenbar dreht sich durch die Transformation I auch das Vorzeichen der $\dim(Y)$–Differentialform $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ um. Indem wir alle die Karten des Atlases von Y mit I verknüpfen, für die das entsprechende f negativ (bzw. positiv) ist, erhalten wir einen Atlas von Y, so dass für alle Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, die entsprechenden Funktionen f mit $\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ positiv (bzw. negativ) sind. Dadurch wird dieser Atlas zu einem orientierten Atlas von X, weil für zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ dieses Atlases mit den entsprechenden Funktionen f und g gilt

$$f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n = g d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$$

mit positiven Funktionen $f > 0$ und $g > 0$ auf U bzw. V. Also folgt, dass für alle $x \in U \cap V$ gilt $\det(\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) = g(x) f^{-1}(x) > 0.$ **q.e.d.**

An diesem Beweis erkennen wir auch, dass jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit X genau zwei Orientierungen besitzt. Die zweite erhalten wir aus der ersten, indem wir alle Karten mit I verknüpfen. Allgemein besitzt jede orientierbare Mannigfaltigkeit mit N zusammenhängenden Komponenten genau 2^N Orientierungen.

Übungsaufgabe 3.20. (i) *Beweise, dass jede eindimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit X entweder diffeomorph ist zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1.*

(ii) *Folgere aus (i), dass jede eindimensionale Mannigfaltigkeit orientierbar ist.*

(iii) *Folgere aus (i), dass für jede eindimensionale Mannigfaltigkeit alle differenzierbaren Strukturen zueinander diffeomorph sind.*

In der Dimension $n = 2$ gibt es sehr viele verschiedene nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten. So ist z.B. der zweidimensionale reelle projektive Raum nicht orientierbar, aber kompakt. Offenbar sind alle euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Im übernächsten Abschnitt werden wir auch sehen, dass alle Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1 von orientierbaren Mannigfaltigkeiten wieder orientierbar sind. Deshalb sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die kompakten Mannigfaltigkeiten S^n orientierbar. Insbesondere ist es nicht möglich den zweidimensionalen projektiven reellen Raum in $\mathbb{R}^3$ einzubetten. Es ist aber durchaus möglich nicht orientierbare Flächen in $\mathbb{R}^3$ zu immersieren, wie z.B. die Kleinsche Flasche.

3.6 Integration von Differentialformen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass auf einer orientierbaren n–dimensionalen Mannigfaltigkeit X jede stetige n–Differentialform ω über alle kompakten Teilmengen A von X integriert werden kann. Dafür geben wir an, wie wir dieses Integral lokal in einer Karte berechnen. Wir zeigen dann, dass dieses Integral nicht von der Wahl der Karte abhängt. Mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins können wir zuletzt das Integral von ω über eine beliebige kompakte Teilmenge $A \subset X$ definieren.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir stellen uns vor, dass A der Abschluss einer relativ kompakten offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist dann beschränkt. Indem wir f außerhalb von A gleich Null setzen, erhalten wir eine Lebesque–integrable Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wenn der Rand ∂A von A, also die Schnittmenge von A mit dem Abschluss des Komplements von A, eine Nullmenge ist, dann ist nach dem Lebesgue–Kriterium die Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$ sogar Riemann–integrabel. Wenn wir uns im folgenden also auf solche kompakte Teilmengen A von X beschränkten, deren Ränder ∂A in allen Karten Nullmengen sind, dann können wir auch das Riemannintegral statt dem Lebesgueintegral benutzen. Im folgenden Satz rufen wir in Erinnerung, wie sich das Integral unter Koordinatentransformationen verhält.

Satz 3.21. *(Jacobis Transformationsformel) Sei $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int\limits_U f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \dots dx_n = \int\limits_V f(y)dy_1 \dots dy_n \quad \text{für alle} \quad f \in L^1(V).$$

Insbesondere gilt für eine kompakte Menge $A \subset U$ und ein $f \in C(\Phi[A], \mathbb{R}) \subset L^1(V)$

$$\int\limits_A f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{\Phi[A]} f(y)dy_1 \dots dy_n.$$

Korollar 3.22. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine n–Differentialform auf X. Sei A eine kompakte Teilmenge, die in den Definitionsbereichen U und V zweier Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eines orientierten Atlases von X enthalten ist. Dann gibt es zwei stetige Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ mit $\omega|_U = fd\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n$ und $\omega|_V = gd\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_n$. Und es gilt*

$$\int\limits_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n.$$

Beweis: Offenbar ist $\phi \circ \psi^{-1}|_{\psi[U\cap V]}$ ein Diffeomorphismus von $\psi[U \cap V]$ auf $\phi[U \cap V]$, und es gilt $\det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x))) > 0$ für alle $x \in U \cap V$. Außerdem gilt für $x \in U \cap V$

$$\begin{aligned} d\phi_1(x) \wedge \dots \wedge d\phi_n(x) &= \det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x)))d\psi_1(x) \wedge \dots \wedge d\psi_n(x). \\ g(x) &= f(x) \det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x))). \end{aligned}$$

Seien jetzt $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \mathbb{R}$ und $\tilde{g} = g \circ \psi^{-1} : \psi[V] \to \mathbb{R}$. Dann gilt auf $\psi[U \cap V] : \tilde{f} \circ (\phi \circ \psi^{-1}) \cdot \det((\phi \circ \psi^{-1})') = \tilde{g}$. Also folgt aus Jacobis Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int\limits_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n &= \int\limits_{\phi[A]} \tilde{f}(x)dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int\limits_{\psi[A]} \tilde{f}(\phi \circ \psi^{-1}(x)) \det((\phi \circ \psi^{-1})'(x))dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int\limits_{\psi[A]} \tilde{g}(x)dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

q.e.d.

Mit diesem Korollar können wir das Integral einer n–Differentialform auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit definieren.

Definition 3.23. *Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine stetige n–Differentialform auf X und $A \subset X$ kompakt. Weil A kompakt ist besitzt die Überdeckung von A durch die Definitionsbereiche eines orientierten Atlases von X eine endliche Teilüberdeckung und eine entsprechende Zerlegung der Eins $(f_m)_m$. Für jedes m verschwindet f_m außerhalb des Definitionsbereiches U_m einer Karte $\phi_m : U_m \to \mathbb{R}^n$. Auf den Definitionsbereichen $(U_m)_m$ dieser Karten sei ω gleich $\omega = g_m d\phi_{m,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{m,n}$ mit stetigen Funktionen $g_m : U_m \to \mathbb{R}$. Wir definieren*

$$\int\limits_A \omega = \sum_m \int\limits_{\phi_m[A \cap A_m]} f_m(\phi_m^{-1}(x)) g_m(\phi_m^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_n.$$

Weil eine endliche Teilüberdeckung die Menge A überdeckt, ist diese Summe immer endlich und das Integral wohldefiniert. Wegen dem vorangehenden Korollar hängt das Integral $\int_A \omega$ weder von der Wahl des orientierten Atlases noch von der Wahl der Zerlegung der Eins ab. Dieses Integral kann auch in Analogie zum uneigentlichen Riemannintegral auf nicht kompakte Teilmengen A von X ausgedehnt werden, wenn die entsprechenden Summen konvergieren.

Wenn wir die Orientierung von X umdrehen, dann wechselt das Integral $\int_A \omega$ das Vorzeichen, weil sich in allen Karten das Vorzeichen der Funktion f ändert mit

$$\omega|_U = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n.$$

Zum Abschluss können wir Jacobis Transformationsformel noch mal umformulieren:

Korollar 3.24. *Sei $f : X \to Y$ eine orientierungserhaltender C^1-Diffeomorphismus zwischen den orientierten Mannigfaltigkeiten X und Y der Dimension n. Sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge und ω eine stetige n–Differentialform auf Y. Dann gilt*

$$\int\limits_{f[A]} \omega = \int\limits_A f^* \omega.$$ **q.e.d.**

Im Allgemeinen gilt dies nicht, wenn f nur eine Immersion zwischen zwei gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten und damit nicht notwendigerweise injektiv ist.

Beispiel 3.25. *Betrachte z.B. die Abbildung $f : S^1 \to S^1$, die von der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ induziert wird mit $n \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung f ist zwar eine Immersion, und damit auch lokal ein Diffeomorphismus. Allerdings ist sie für $n > 1$ nicht injektiv. Es ist eine sogenannte Überlagerungsabbildung, d.h. die Urbilder von einzelnen Punkten bestehen jeweils aus n Punkten. Wir parametrisieren S^1 durch $\phi \mapsto e^{\imath\phi}$. Dann ist $\omega = d\phi$ eine nichtverschwindende 1–Differentialform auf S^1 und induziert wegen*

Satz 3.19 auf S^1 *eine Orientierung. Wegen* $(e^{\imath\phi})^n = e^{n\imath\phi}$ *entspricht die Abbildung* f *in dieser Parametrisierung der Abbildung* $\phi \mapsto n\phi$. *Also gilt* $f^*d\phi = nd\phi$. *Damit ist sie insbesondere orientierungserhaltend. Es gilt aber*

$$\int\limits_{S^1} f^*\omega = \int\limits_{S^1} nd\phi = n \int\limits_{S^1} d\phi = n \int\limits_{f[S^1]} \omega,$$

weil das Bild der Abbildung f *die Sphäre* S^1 n*–mal umrundet, während das Urbild sie nur einmal umrundet. Also gilt das vorangehende Korollar nicht für alle orientierungserhaltenden Immersionen zwischen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension.*

3.7 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition 3.26. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Eine Funktion von f *von* $\mathbb{H}^n$ *nach* $\mathbb{R}^m$ *heißt in einem Randpunkt* $x \in \partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \mid x_n = 0\}$ *(stetig) differenzierbar, wenn* f *eine (stetig) differenzierbare Fortsetzung auf eine Umgebung* U *von* x *als Element von* $\mathbb{R}^n$ *besitzt.*

Durch diese Definition überträgt sich auch die Definition von glatten Funktionen und Diffeomorphismen auf offene Teilmengen von $\mathbb{H}^n$.

Definition 3.27. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit* X *mit Rand ist ein separabler metrisierbarer topologischer Raum zusammen mit einem Atlas. Die Karten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* X *mit Rand sind dabei Homöomorphismen* $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ *von offenen Teilmengen* $U \subset X$ *auf offene Teilmengen von* $\mathbb{H}^n$. *Die Karten heißen wieder verträglich wenn die Übergangsfunktionen Diffeomorphismen sind. Ein Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* X *mit Rand ist eine Familie von verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche* X *überdecken. Der Rand* ∂X *ist die Menge aller Punkte, die durch die Karten auf den Rand von* $\mathbb{H}^n$ *abgebildet werden.*

Beispiel 3.28. **(i)** *Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $\mathbb{H}^n$ *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(ii) *Jedes abgeschlossene endliche Intervall ist eine eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Allgemein gilt, dass alle Intervalle differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand sind. Der Rand von offenen Intervallen ist leer.*

(iii) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist der abgeschlossene Einheitsball um die Null eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(vi) *Offenbar sind für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Räume $\mathbb{H}^{m+n}$ und $\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^n$ bzw. $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^m$ diffeomorph. Wenn also X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ist und Y eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand), dann sind $X \times Y$ und $Y \times X$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der Rand besteht jeweils aus $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y$ bzw. $\partial(Y \times X) = Y \times \partial X$.*

Satz 3.29. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt:*

(i) *Der Rand ∂X von X ist eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand von X.*

(ii) *Eine offene Umgebung U von ∂X in X ist diffeomorph zu der differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand*

$$U \simeq [0, 1) \times \partial X.$$

Eine solche Umgebung des Randes heißt Kragen.

(iii) *Wenn X orientierbar ist, dann ist auch ∂X orientierbar, und jede Orientierung von X induziert zusammen mit einem stetigen Vektorfeld N, dessen Einschränkung auf ∂X nach Innen (bzw. Außen) zeigt, eine Orientierung von ∂X.*

(iv) *Wenn X kompakt ist, dann ist auch ∂X kompakt.*

Beweis: (i) Die inneren Punkte von $\mathbb{H}^n$, also die Menge $\{x \in \mathbb{H}^n | x_n > 0\}$, lassen sich eindeutig dadurch charakterisieren, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass der Ball $B(x, \epsilon)$ in $\mathbb{H}^n$ homöomorph ist zu dem entsprechenden Ball in $\mathbb{R}^n$. Deshalb bildet jeder Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{H}^n$ die inneren Punkte auf innere Punkte ab. Also bildet jeder solche Diffeomorphismus auch Randpunkte von $\mathbb{H}^n$ auf Randpunkte ab. Deshalb hängen die Randpunkte ∂X nicht davon ab, welche Karte wir benutzen um sie zu identifizieren. Daraus folgt, dass der Rand das Komplement der offenen Menge aller inneren Punkte und damit ein abgeschlossener topologischer Unterraum und eine Untermannigfaltigkeit von X ist. Insbesondere können wir Satz 2.22 darauf anwenden.

(ii) Auf jeder Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ von X induziert wegen Satz 2.2 die Derivation $\frac{\partial}{\partial \phi_n}$ ein glattes Vektorfeld. Diese Vektorfelder können wir mit Hilfe einer Zerlegung der Eins zu einem globalen glatten Vektorfeld N aufsummieren. Wir zeigen jetzt, dass die Einschränkung dieses Vektorfelds N auf den Rand ∂X offenbar überall nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Sei $x \in U$ und $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ eine zweite Karte von X um $x \in V$. Dann ist die Funktion $\psi \circ \phi^{-1}$ eine glatte Funktion auf $\phi[U \cap V]$, die die Hyperebene $\partial \mathbb{H}^n$ auf sich selber abbildet, und das Innere von $\mathbb{H}^n$ auch auf sich selber abbildet. Also gilt bei dem Randpunkt $x \in V \cap U$:

$$\frac{\partial(\psi_n \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq n \\ > 0 & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial \psi_n}(x) \in T_xX$ durch eine positive Konstante proportional ist zu $\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x) \in T_xX$. Daraus folgt, dass auch $N(x) \in T_xX$ durch eine positive Konstante proportional ist zu den beiden Vektoren $\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x)$ und $\frac{\partial}{\partial \psi_n}(x)$ in T_xX.

Wegen Satz 2.10 hat dann die glatte Abbildung

$$W_N \cap (\mathbb{R} \times \partial X) \to X, \quad (t,x) \mapsto \psi_N(t,x)$$

in allen Punkten $(0,x) \in W \cap (\mathbb{R} \times \partial X)$ eine invertierbare Ableitung. Also gibt es wegen dem Satz 1.36 für jedes $x \in \partial X$ eine Umgebung U von x in ∂X und ein $\epsilon > 0$, so dass der entsprechende Fluss ψ_N auf $[0,\epsilon) \times U$ definiert ist, und diese Menge diffeomorph auf eine offenen Menge von X abbildet. Mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins, können wir die konstanten Funktionen ϵ auf den Umgebungen U zu einer glatten positiven Funktion ϵ auf ∂X aufsummieren. Dann ist die Abbildung

$$[0,1) \times \partial X \to \{(t,x) \in W_N \cap (\mathbb{R} \times \partial X) \mid 0 \leq t < \epsilon(x)\}, \quad (t,x) \mapsto (\epsilon(x)t, x)$$

ein Diffeomorphismus zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand. Wegen Satz 2.10 ist dann die Verknüpfung

$$\Phi : [0,1) \times \partial X \to X, \quad (t,x) \mapsto (\epsilon(x)t, x) \mapsto \psi_N(\epsilon(x)t, x)$$

eine injektive glatte Immersion von $[0,1) \times \partial X$ auf eine Umgebung U von ∂X in X, und damit auch ein Diffeomorphismus.

(iii) Wegen (ii) gibt es auf X ein glattes Vektorfeld N, das überall auf ∂X nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Wir können annehmen, dass X zusammenhängend und n–dimensional ist. Wegen Satz 3.19 sind die Orientierungen von X bestimmt durch nicht verschwindende stetige n–Differentialformen ω. In (ii) haben wir gesehen, dass auf dem Rand die Verjüngung von N mit den 1–Differentialformen $d\phi_i$ nur für $j = n$ nicht verschwindet, und für $j = n$ positiv ist. Also gilt auf dem Rand

$$i_N(\omega) = i_N(f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^n \langle N, d\phi_n \rangle f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$$

mit einer positiven Funktion f auf U. Also induziert jede Orientierung von X durch N auf ∂X genau eine Orientierung.

(iv) ∂X ist wegen (i) ein abgeschlossener topologischer Unterraum von X und deshalb kompakt, wenn X kompakt ist. **q.e.d.**

Lemma 3.30. *Sei Y eine $(n+1)$–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und X eine n–dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit ohne Rand von Y. Dann gibt es eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand Z und eine glatte Immersion $f : Z \to Y$, deren Einschränkung auf $Z \setminus \partial Z$ ein Diffeomorphismus auf $Y \setminus X$ ist und auf jeden Punkt von X jeweils zwei Punkte von ∂Z abbildet.*

Beweis: Wir überdecken X durch Definitionsbereiche von Karten von einem Atlas von Y, die die Bedingung aus dem Korollar 1.44 erfüllen. Wegen Lemma 1.29 können wir dann X auch durch Definitionsbereiche von Karten überdecken, die

(i) die Bedingungen aus dem Korollar 1.44 erfüllen,

(ii) diese Definitionsbereiche auf offene Bälle im $\mathbb{R}^{n+1}$ abbilden,

(iii) und stetige Fortsetzungen auf den Abschluss der Definitionsbereiche besitzen.

Weil X kompakt ist, sind die Schnittmengen von X mit abgeschlossenen Mengen kompakt und werden durch stetige Abbildungen auf kompakte Mengen abgebildet. Wegen (i)-(iii) bilden die Karten die Schnittmengen von X mit den Definitionsbereichen auf offene und abgeschlossene Teilmengen von den Schnitten von offenen Bällen im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit linearen Unterräumen ab. Weil die Schnittmenge einem beliebigen offenen Ball von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit einem Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ wieder ein offener Ball ist, ist diese Schnittmenge auch zusammenhängend. Also bilden die Karten die Schnittmengen der Definitionsbereiche mit X auf die Schnittmengen der Bilder der Definitionsbereiche mit linearen Unterräumen des $\mathbb{R}^{n+1}$ ab.

Die Vereinigung der Definitionsbereiche aller dieser Karten ist eine offene Umgebung U von X in Y. Dann überdecken wir $Y \setminus U$ durch Karten mit relativkompakten Definitionsbereichen, deren Abschlüsse alle in $Y \setminus X$ lieben. Die Karten, die Punkte von Y enthalten, können wir durch orthogonale Transformation in $O(n)$ so transformieren, dass jeweils der Abschluss einer zusammenhängenden Komponente von dem Schnitt von $Y \setminus X$ mit dem Definitionsbereich der Karte auf $\mathbb{H}^n$ abgebildet wird. Die Karten, deren Definitionsbereiche kompakte Abschlüsse in $Y \setminus X$ haben, können wir durch Translationen des $\mathbb{R}^n$ zu Karten in $\mathbb{H}^n$ transformieren. Dadurch erhalten wir auf $Y \setminus X$ einen Atlas, der sich zu einem Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Z mit Rand fortsetzt. Weil wir die Mannigfaltigkeit Z lokal als Untermannigfaltigkeit von Y konstruiert haben, besitzt Z eine natürliche Immersion nach Y, deren Einschränkung auf $Z \setminus \partial Z$ ein Diffeomorphismus auf $Y \setminus X$ ist. Auf jeden Punkt von X bildet f zwei Punkte von ∂Z ab, die jeweils Randpunkte von den zwei Seiten von X sind. **q.e.d.**

Offenbar bildet f jeweils zwei Punkte von Z auf einen Punkt von X ab. Zusammenhängende Komponenten von X, die diffeomorph sind zu zwei zusammenhängenden Komponenten von ∂Z nennen wir zweiseitige Untermannigfaltigkeiten. Zusammenhängende Komponenten von X, auf die f eine zusammenhängende Komponente von ∂Z zweifach abbildet, nennen wir einseitige Untermannigfaltigkeiten. Wenn Y eine $n+1$–dimensionale orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, dann sind alle zweiseitigen kompakten n–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten orientierbar. Im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind alle n–dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten zweiseitig. Insbesondere sind alle kompakten n–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^{n+1}$ orientierbar. Also können nicht orientierbare kompakte zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten (wie z.B. $\mathbb{R}P^2$) nicht in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden.

3.8 Der Satz von Stokes

Heute beweisen wir zum Abschluss folgende Formel:

Satz 3.31. *Sei X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n+1$. Sei ω eine stetige differenzierbare n–Differentialform auf X. Dann gilt*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Hierbei hat ∂X die durch die Orientierung von X und ein nach **Außen** *zeigendes Vektorfeld N (vergleiche Satz 3.29 (iii)) induzierte Orientierung.*

Beweis: Wir überdecken X durch Karten $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$. Weil X kompakt ist besitzt jeder orientierte Atlas von X einen endlichen Teilatlas. Mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins können wir jede stetig differenzierbare n–Differentialform ω zerlegen in eine endliche Summe von stetig differenzierbaren n–Differentialformen, die jeweils außerhalb einer abgeschlossenen und damit kompakten Teilmenge A eines Definitionsbereiches U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$ des orientierten Atlases verschwinden. Dann genügt es die Aussage für solche stetig differenzierbaren n–Differentialformen ω zu zeigen. Wir unterscheiden zwei Fälle:
(A) Der Definitionsbereich U der Karte enthält keine Randpunkte. Dann bildet $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$ den Definitionsbereich auf eine offene Menge im Inneren von $\mathbb{H}^{n+1}$ ab. Wir müssen jetzt zeigen, dass dann gilt

$$\int_A d\omega = 0.$$

Hierbei ist $A \subset U$ die kompakte Teilmenge vom Inneren von U, außerhalb dessen ω verschwindet. Die n–Differentialform lässt sich auf U schreiben als

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} f_i d\phi_0 \wedge \ldots \hat{d\phi_i} \ldots \wedge d\phi_n$$

Hierbei bedeutet $\hat{\cdot}$ wieder, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_i \wedge d\phi_0 \wedge \ldots \hat{d\phi_i} \ldots \wedge d\phi_n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition des Integrals gilt dann

$$\begin{aligned} \int\limits_A d\omega &= \int\limits_{\phi[A]} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} (\phi^{-1}(x)) dx_0 \ldots dx_n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int\limits_{\phi[A]} \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (x) dx_0 \ldots dx_n. \end{aligned}$$

Weil die Funktionen $f_0, \ldots, f_n$ stetig differenzierbar sind und außerhalb der kompakten Menge A verschwinden, können wir die Funktionen $f_i \circ \phi^{-1}$ stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{H}^{n+1}$ fortsetzen, indem wir sie außerhalb von $\phi[A]$ gleich Null setzen. Dann ist das Integral gleich dem Integral über einen Quader $Q = [a_0, b_0] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, der $\phi[A]$ enthält:

$$\int\limits_A d\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int\limits_Q \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (x) dx_0 \ldots dx_n.$$

Dann ist das Integral ein mehrfaches eindimensionales Integral über die Intervalle $[a_0, b_0], \ldots, [a_n, b_n]$. Wegen dem Satz von Fubini können wir die Reihenfolge der Integrale vertauschen. Wenn wir im i–ten Summanden

$$(-1)^i \int\limits_Q \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} (x) dx_0 \ldots dx_n$$

die Integration über die Variable dx_i zuerst ausführen, erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Differenz von $f_i \circ \phi^{-1}$ an den entsprechenden Intervallgrenzen. Weil f_i außerhalb von A verschwindet, sind diese Werte gleich Null. Also folgt

$$\int\limits_A d\omega = 0.$$

Jetzt betrachten wir den Fall

(B) Der Definitionsbereich U der Karte enthält Randpunkte. In diesem Fall verfahren wir genauso wie in Fall (A), nur dass wir eine Randseite des Quaders Q auf den Rand von $\mathbb{H}^{n+1}$ legen müssen. Also ist das entsprechende Intervall in der n–ten Koordinate von der Form $[0, b_n]$. Weil die Normale N nach Außen zeigt, gilt auf dem Rand:

$$\langle d\phi_n, N\rangle < 0 \quad \text{und} \quad \langle d\phi_i, N\rangle = 0 \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Wegen Satz 3.14 (vi) gilt dann auf dem Rand

$$i_N(d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^n \langle N, d\phi_n\rangle d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Also entspricht die auf dem Rand induzierte Orientierung der n–Differentialform

$$-(-1)^n d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Für alle $i = 0, \dots, n-1$ verschwinden die Funktionen $f_i \circ \phi^{-1}$ wieder an den Rändern des Intervalles $[a_i, b_i]$. Also gilt wie im Fall (A)

$$(-1)^i \int\limits_Q \frac{\partial(f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n = 0.$$

Für $i = n$ verschwindet $f_n \circ \phi^{-1}$ nur an der Grenze b_n. Dann gilt

$$(-1)^n \int\limits_Q \frac{\partial(f_n \circ \phi^{-1})}{\partial x_n} dx_0 \ldots dx_n = -(-1)^n \int\limits_{Q \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}} f_n \circ \phi^{-1} dx_0 \ldots dx_{n-1}.$$

Weil auf $U \cap \partial X$ die 1–Form $d\phi_n$ verschwindet gilt dort $\omega|_{U\cap\partial X} = f_n d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$. Weil das Vorzeichen $-(-1)^n$ mit dem Vorzeichen der Orientierung übereinstimmt, gilt

$$\int\limits_A d\omega = \int\limits_{\partial X \cap A} \omega. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Dieser Satz gilt genauso für stetig differenzierbare n–Differentialformen ω mit kompaktem Träger auf nicht kompakten $n+1$–dimensionalen Mannigfaltigkeiten X mit Rand. Allgemein kann man ihn auch auf nicht kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern, wenn man sicherstellt, dass die entsprechenden Integrale konvergieren.

Kapitel 4

Einführung in die Differentialtopologie

Dieser Abschnitt enthält eine kleine Einfürung in die sogenannte Differentialtopologie. Das ist die Theorie der qualitativen Aspekte von differenzierbaren Abbildungen (vgl. J.W.Milnor: "Topology from the differentiable viewpoint", Princeton Univ. Press).

4.1 Der Satz von Sard

Satz von Sard 4.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ l-mal stetig differenzierbar mit $l > \frac{m}{n}$. Dann ist das Bild $f[C]$ folgender Menge eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$:*

$$C = \{x \in U \mid \operatorname{Rang} T_x(f) < n\}.$$

Beweis: Wir beweisen das mit vollständiger Induktion in m. Den Fall $n = 0$ mit $C = \emptyset$ können wir ausschließen. Für $n \in \mathbb{N}$ und $m = 0$ besteht C aus einem Punkt.

Für $m > 0$ betrachten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge C_k aller Punkte, so dass alle partiellen Ableitungen höchstens k-ter Ordnung verschwinden. Diese Mengen sind ineinander enthalten: $C \supset C_1 \supset \ldots \supset C_k \supset \ldots$. Wir zeigen, dass erstens $f[C \setminus C_1]$, zweitens $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ für $k \in \mathbb{N}$ und drittens $f[C_k]$ für $k = l - 1$ Nullmengen sind. Dann ist auch $f[C] = f[C \setminus C_1] \cup f[C_1 \setminus C_2] \cup \ldots \cup f[C_{k-1} \setminus C_k] \cup f[C_k]$ eine Nullmenge.

1. Im Fall $n = 1$ ist $C_1 = C$ und $C \setminus C_1 = \emptyset$. Für $n > 1$ zeigen wir, dass jedes $y \in C \setminus C_1$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ enthält, so dass $f[V \cap (C \setminus C_1)]$ eine Nullmnge ist. Wegen $y \notin C_1$ ist mindestens eine erste partielle Ableitung von f bei y ungleich Null. Nach vertauschen der Komponenten können wir $\frac{\partial f_1(y)}{\partial x_1} \neq 0$ annehmen. Dann hat $h : U \to \mathbb{R}^m$, mit $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_m)$ bei y eine invertierbare Ableitung und bildet wegen dem Satz der inversen Funktion eine offene Umgebung $V \subset U$ von y mit einem C^l-Diffeomorphismus auf eine offene Menge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Sei $g = f \circ h^{-1}$. Die Punkte $x \in V'$ mit $\mathrm{Rang}(T_x(g)) < n$ sind dann genau $C' = h[V \cap C]$, und $f[V \cap C] = g[C']$. Aufgrund der Definition von h und g bildet g für jedes $(t, x_2, \ldots, x_m) \in V'$ die Hyperebene $H_t = \{x \in V' \mid x_1 = t\}$ nach $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Sei g_t die Einschränkung von g auf H_t. Weil $T(g)$ auf V' den Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ auf einen Vektor abbildet, dessen erster Eintrag nicht Null ist, und den Tangentialraum an die Hyperebene H_t auf Tangentialvektoren der Hyperebene $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ abbildet, hat $T(g_t)$ bei einem Punkt $x \in H_t$ genau dann einen kleineren Rang als $n - 1$, wenn dort $T(g)$ einen kleineren Rang als n hat, also wenn $h^{-1}(x)$ in C liegt. Nach Induktionsvorausetzung ist das Bild $g_t[H_t \cap C']$ für alle diese Hyperebenen eine Nullmenge in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Im Satz von Fubini wird gezeigt, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist, wenn $A \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Nullmenge von $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ ist. Also ist $g[V' \cap C'] = f[V \cap C]$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Weil jede solche Umgebung V von y einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C \setminus C_1$, deren Bilder unter f Nullmengen sind. Dann ist $f[C \setminus C_1]$ eine Nullmenge.

2. Für $y \in C_k \setminus C_{k+1}$ ist mindestens eine $k + 1$-te partielle Ableitung ungleich 0. Nach Vertauschen der Komponenten können wir annehmen, dass für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ der Ordnung $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ und ein $r \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktion $w(x) = \partial^\alpha f_r(x)$ bei y verschwindet, aber $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ nicht. Wegen dem Satz der inversen Funktion bildet $x \mapsto h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_m)$ mit einem C^1-Diffeomorphismus eine offenen Umgebung $V \subset U$ von y auf eine offene Teilmenge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Weil auf C_k alle k-ten Ableitungen verschwinden, bildet sie $C_k \cap V$ auf die Hyperebene $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V'$ ab. Die Einschränkung $g|_H$ der Abbildung $g = f \circ h^{-1}$ auf H bildet laut Induktionsvorausetzung alle Punkte $x \in H \cap V$, an denen der Rang von $T(g|_H)$ kleiner als n ist, auf eine Nullmenge ab. Alle Punkte von $h[C_k \cap V]$ sind in dieser Menge enthalten. Deshalb ist $g|_H[h[C_k \cap V]] = f[C_k \cap V]$ eine Nullmenge. Weil jede solche Umgebung V von y einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C_k \setminus C_{k+1}$ deren Bilder unter f Nullmengen sind. Dann ist $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ eine Nullmenge.

3. Wir zeigen dass $f[C_k]$ für $k = l - 1 > \frac{m}{n} - 1$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm von $\mathbb{R}^m$ und $Q = \overline{B(x, r)} \subset U$ ein abgeschlossener Ball bezüglich dieser Norm, also ein Quader mit den Kantenlängen $2r$. Weil f $(k + 1)$-mal stetig differenzierbar ist, gibt es wegen der Restgliedabschätzung im Satz von Taylor und der Kompaktheit von Q ein $c > 0$ mit

$$\|f(x + h) - f(x)\|_\infty \leq c\|h\|_\infty^{k+1} \qquad \text{für alle } x \in C_k \cap Q \text{ und } x + h \in Q.$$

Wir unterteilen Q in l^m Quader mit Kantenlängen $\frac{2r}{l}$. Sei $\tilde{Q}$ ein solcher Quader, der ein $x \in C_k$ enthält. Dann gilt $\|h\|_\infty \leq \frac{2r}{l}$ für jeden Punkt $x + h \in \tilde{Q}$. Mit der obigen

Abschätzung folgt, dass $f[\tilde{Q}]$ in einem abgeschlossenen Ball bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ mit dem Radius $c(\frac{2r}{l})^{k+1}$ enthalten ist, also höchstens das Volumen $(2c)^n(\frac{2r}{l})^{(k+1)n}$ hat. Dann hat $f[C_k \cap Q]$ höchstens das l^m fache Volumen $2^{n(k+2)}c^n r^{n(k+1)} l^{m-(k+1)n}$. Wegen $k+1 > \frac{m}{n}$ konvergiert diese obere Schranke im Grenzwert $l \to \infty$ gegen Null.

Im Fall $l = 1$ mit $m < n$ und $C = U$ ist $f[U]$ wegen **3.** eine Nullmenge. **q.e.d.**

Korollar 4.2. *(A.B. Brown) Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist $Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang} T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\}$ eine überall dichte (mit keiner offenen nichtleeren Menge schnittfremde) Teilmenge von Y.*

Beweis: Weil jede offene Teilmenge einen offenen Ball enthält, hat sie auch positives Volumen. Wegen dem Satz von Sard enthält dann jede offene Teilmenge von Y Punkte aus diesem Komplement. Damit ist das Komplement überall dicht. **q.e.d.**

Korollar 4.3. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit $\dim X \geq \dim Y$ und $y \notin \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang} T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\}$. Dann ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine $\dim Y - \dim X$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X.*

Für $x \in f^{-1}[\{y\}]$ ist $T_x f^{-1}[\{y\}]$ der Kern von $T_x(f)$ und $T'_x(f)$ bildet $T'_y Y$ isomorph auf das orthogonale Komplement von $T_x f^{-1}[\{y\}]$ in $T'_x X$ ab.

Beweis: Auf $f^{-1}[\{y\}]$ gilt $\operatorname{Rang} T(f) = \dim Y$. Wegen Satz 1.43 ist $\operatorname{Rang} T(f)$ auf einer Umgebung von $f^{-1}[\{y\}]$ konstant und die erste Aussage folgt. Die zweite Aussage folgt aus dem Beweis von Satz 1.43 und der Surjektivität von $T_x(f)$. **q.e.d.**

Wir wollen diese Aussagen jetzt auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern.

Korollar 4.4. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit Rand auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y ohne Rand und $y \notin \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang} T_x(f|_{X\setminus\partial X}) < \dim T_{f(x)}Y \text{ bzw. } \operatorname{Rang} T_x(f|_{\partial X}) < \dim T_{f(x)}Y\}$. Dann ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial f^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{y\}] \cap \partial X$.*

Beweis: Die Aussage folgt aus Korollar 4.3 angewendet auf $f|_{X\setminus\partial X}$ und $f|_{\partial X}$. **q.e.d.**

Lemma 4.5. *(Hirsch) Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X mit Rand gibt es keine glatte Abbildung $f : X \to \partial X$ mit $f|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}$.*

Beweis: Sei f eine solche Abbildung mit $f|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}$. Dann gibt es wegen dem Satz von Sard ein $y \in \partial X$, das die Voraussetzungen von Korollar 4.4 erfüllt. Dann ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit mit $\partial f^{-1}[\{y\}] = \{y\}$. Die kompakten eindimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand sind diffeomorph zu disjunkte Vereinigungen von $\mathbb{S}^1$ und $[0, 1]$ (Übungsaufgabe). Also haben sie eine gerade Anzahl an Randpunkten. Das widerspricht der Annahme. **q.e.d.**

Brouwersche Fixpunktsatz 4.6. *Jede stetige Abbildung f von dem abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ auf sich selber hat einen Fixpunkt.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zuerst für eine glatte Abbildung $f : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$. Wenn f keinen Fixpunkt hat, dann sei $g(x)$ für alle $x \in \overline{B(0,1)}$ der Schnittpunkt von der Geraden durch x und $f(x)$ mit $\partial B(0,1)$, der näher bei x liegt. Dann widerspricht die glatte Abbildung g dem Lemma 4.5. Also hat ein glattes f einen Fixpunkt.

Sei jetzt f eine solche stetige Abbildung ohne Fixpunkt. Dann besitzt die stetige Abbildung $x \mapsto \|x - f(x)\|$ auf der kompakten Menge $\overline{B(0,1)}$ ein Minimum $\epsilon > 0$. Wegen dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es n reelle Polynome $p = (p_1, \ldots, p_n)$ mit

$$\|f(x) - p(x)\| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle} \qquad x \in \overline{B(0,1)}.$$

Dann bildet $x \mapsto \frac{2}{2+\epsilon}p(x)$ alle Elemente von $\overline{B(0,1)}$ auf Vektoren einer Länge kleiner als $\frac{2}{2+\epsilon}(1 + \frac{\epsilon}{2}) = 1$ ab. Also ist das eine glatte Abbildung von $\overline{B(0,1)}$ auf sich selber mit einem Fixpunkt $x \in \overline{B(0,1)}$. Dort gilt wegen $\frac{2}{2+\epsilon}p(x) = p(x) - \frac{\epsilon}{2}\frac{2}{2+\epsilon}p(x)$

$$\epsilon \leq \|x - f(x)\| = \|\tfrac{2}{2+\epsilon}p(x) - f(x)\| \leq \|p(x) - f(x)\| + \|\tfrac{\epsilon}{2}\tfrac{2}{2+\epsilon}p(x)\| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Das widerspricht der Annahme, dass f keinen Fixpunkt hat. **q.e.d.**

4.2 Der Grad glatter Abbildungen

Definition 4.7. *Zwei glatte Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen glatt homotop, wenn es eine glatte Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$ gibt, mit $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Zwei solche Diffeomorphismen heißen glatt isotop, wenn $x \mapsto F(x,t)$ für alle $t \in [0,1]$ zusätzlich ein Diffeomorphismus ist.*

Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen gleichdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Kern}(T_x(f)) \neq 0\}$ ist $f^{-1}[\{y\}]$ wegen Satz 1.36 eine diskrete Teilmenge von X, von der je zwei verschiedene Elemente disjunkte Umgebungen besitzen. Wenn X kompakt ist, hat diese Menge also nur eine endliche Anzahl $\#f^{-1}[\{y\}]$ an Elementen. Wir zeigen zuerst

Satz 4.8. *Seien $f, g : X \to Y$ glatt homotope glatte Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit X kompakt und $\dim X = \dim Y$. Wenn y nicht zu folgender Menge gehört, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ eine gerade Zahl*

$$\{f(x) \mid \ \textit{mit } \mathrm{Kern}(T_x(f)) \neq 0\} \cup \{g(x) \mid x \in X \textit{ mit } \mathrm{Kern}(T_x(g)) \neq 0\}.$$

Wenn Y zusammenhängend ist, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}]$ bis auf eine gerade Zahl unabhängig von der Wahl von $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \mathrm{Kern}(T_x(f)) \neq 0\}$.

Beweis: Sei $F : X \times [0,1] \to Y$ eine glatte Homotopie zwischen f und g. Wenn y nicht zu der Menge $\{F(x,t) \mid (x,t) \in X \times [0,1] \text{ und } \operatorname{Rang}(T_x(F)) < \dim Y\}$ gehört, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit dem Rand $(f^{-1}[\{y\}] \times \{0\}) \cup (g^{-1}[\{y\}] \times \{1\})$. Weil der Rand einer kompakten eindimensionalen Mannigfaltigkeit eine gerade Anzahl von Punkten ist, ist $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ gerade.

Aufgrund der Vorausetzung an y und dem Satz der inversen Funktion sind die beiden Funktionen $z \mapsto \#f^{-1}[\{z\}]$ und $z \mapsto \#g^{-1}[\{z\}]$ auf einer kleinen Umgebung von y konstant. Wegen dem Satz von Sard enthält diese Umgebung einen Punkt z in obiger Menge. Also gilt die erste Aussage. Für die zweite beutzen wir

Lemma 4.9. *Seien y und z Punkte einer zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann bildet ein zu $\mathbb{1}_y$ isotoper Diffeomorphismus von Y y auf z ab.*

Beweis: Für je zwei Punkte in $(0,1)$ gibt es offenbar einen Diffeomorphismus ϕ von $\mathbb{R}$ auf sich selber, der außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ die identische Abbildung ist und den einen Punkt auf den anderen abbildet. Es gibt sogar eine glatte Isotopie solcher Diffeomorphismen zu der Identität. Ein Diffeomorphismus Φ von der Form $x \mapsto a + r\phi(\frac{|x-a|}{r})\frac{x-a}{|x-a|}$ ist dann außerhalb einer kompakten Menge in $B(a,r) \subset B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ die Identität und bildet 0 auf einen beliebigen Punkt von $B(0,R)$ ab. Weil die Aussage in y und z transitiv ist, ist die Menge der Punkte z, so dass die Aussage für y und z gilt, dann offen und abgeschlossen, und damit gleich Y. **q.e.d.**

Fortsetzung des Beweises von Satz 4.8: Seien y, z Punkte von $Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) \neq 0\}$. Dann gibt es wegen dem Lemma einen zu $\mathbb{1}_Y$ glatt isotopen Diffeomorphismus Φ von Y, der z auf y abbildet. Dann sind f und $g = \Phi \circ f$ glatt homotop mit $g^{-1}[\{z\}] = f^{-1}[\{y\}]$. Also folgt die zweite Aussage aus der ersten. **q.e.d.**

Dieser Satz zeigt, dass $\deg_2(f) = \#f^{-1}[\{y\}] \mod 2$ für ein $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) \neq 0\}$ eine Homotopieinvariante von solchen glatten Abbildungen $f : X \to Y$ ist. Wenn f nicht surjektiv ist, dann ist die Anzahl für Werte y außerhalb des Bildes von f Null und damit $\deg_2(f) = 0 \mod 2$. Weil das Bild $f[X]$ immer kompakt ist, ist f nicht surjektiv wenn Y nicht kompakt ist, und $\deg_2(f) = 0 \mod 2$.

Beispiel 4.10. **(i)** *Jede konstante Abbildung $f : X \to X$ hat $\deg_2(f) = 0 \mod 2$.*

(ii) *Die Identität einer kompakten Mannigfaltigkeit $\mathbb{1}_X$ hat $\deg_2(\mathbb{1}_X) = 1 \mod 2$.*

(iii) *Die Aussage für $X = Y = \mathbb{S}^n$ impliziert die Aussage von Lemma 4.5 für $X = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und damit den Brouwerschen Fixpunktsatz 4.6, weil jede glatte Abbildung $f : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{S}^n$ mit $f|_{\mathbb{S}^n} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ eine glatte Homotopie von $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu einer konstanten Abbildung definiert.*

Definition 4.11. *Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit X kompakt und* $\dim X = \dim Y$ *hängt das Vorzeichen von* $\det(T_x(f))$ *bei $x \in X$ nur von den Orientierungen von X und Y ab. Wir definieren*

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} \frac{\det(T_x(f))}{|\det(T_x(f))|} \quad \textit{für } y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Kern}(T_x(f)) \neq 0\}.$$

Satz 4.12. *Seien $f, g : X \to Y$ glatt homotope glatte Abbildungen zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit X kompakt und* $\dim X = \dim Y$. *Wenn y nicht zu folgender Menge gehört, dann ist* $\deg(f, y) = \deg(g, y)$

$$\{f(x) \mid \textit{ mit } \operatorname{Kern}(T_x(f)) \neq 0\} \cup \{g(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Kern}(T_x(g)) \neq 0\}.$$

Wenn Y zusammenhängend ist, dann ist $\deg(f, y)$ *unabhängig von der Wahl von*

$$y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Kern}(T_x(f)) \neq 0\}.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass für alle $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Kern}(T_x(f)) = 0\}$ $\deg(f, y) = 0$ gilt, wenn X der Rand einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit Z ist und f sich zu einer glatten Abbildung $F : Z \to Y$ fortsetzt. Für $y \in Y \setminus \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ ist $F^{-1}[\{y\}]$ eine endliche Vereinigung von eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten von Z, deren Rand in $X = \partial Z$ liegt. Sei $A \subset F^{-1}[\{y\}]$ eine Zusammenhangskomponente mit nicht verschwindendem Rand $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$. Die Orientierungen von Z und Y induzieren eine Orientierung von A, deren äußeres Produkt mit der durch f zurückgezogenen nicht verschwindenden Volumenform von Y positiv proportional zu der nichtverschwindenden Volumenform von Z ist. Weil A als eine kompakte zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ein abgeschlossenes Intervall ist, zeigt die Orientierung von A an einem Ende aus A heraus und an dem anderen Ende nach A hinein. Daraus folgt, dass die Vorzeichen von $\det(T_a(f))$ und $\det(T_b(f))$ unterschiedlich sind, und deshalb $\deg(f, y)$ verschwindet. Für $y \in \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ ist die Funktionen $y' \mapsto \deg(f, y')$ wegen Satz 1.36 auf einer Umgebung von y konstant. Wegen dem Satz von Sard gibt es in dieser Umgebung ein $y' \in Y \setminus \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$. Daraus folgt $\deg(f, y) = 0$, wenn sich f zu einem $F : Z \to Y$ fortsetzt.

Wenn f und g glatt homotop sind, dann sind f und g die Randwerte von $F : X \times [0, 1] \to Y$ mit $\partial(X \times [0, 1]) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. Weil beide Randwerte bezüglich der Orientierung von $X \times [0, 1]$ umgekehrtes Vorzeichen haben folgt die erste Aussage. Die zweite Ausaage folgt aus der ersten wie im Beweis von Satz 4.8. **q.e.d.**

Satz vom Igel 4.13. *Die n-dimensionale Sphähre $\mathbb{S}^n$ hat genau dann ein nichtverschwindendes glattes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

Beweis: Für ungerades n ist $x \mapsto (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \ldots, x_{n+1}, -x_n)$ ein solches Vektorfeld. Für gerades n hat die Antipodenabbildung von $\mathbb{S}^n$ als eine Verkettung von den $n+1$ Abbildungen, die jeweils eine Koordinate von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit -1 multiplizieren den Grad $(-1)^{n+1}$ und ist wegen Satz 4.12 nicht glatt homotop zu $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$. Indem wir $\mathbb{S}^n$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen, definiert ein glattes nichtverschwindendes Vektorfeld F von $\mathbb{S}^n$ eine glatte Abbildung $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \cdot F(x) = 0$, und damit eine glatte Homotopie von $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu der Antipodenabbildung:

$$\mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n, \quad (x,t) \mapsto \cos(t\pi)x + \sin(t\pi)\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

Für gerades n kann es also kein solches Vektorfeld F geben. **q.e.d.**

4.3 Vektorfelder

In diesem Abschnitt untersuchen wir qualitative Aspekte von Vektorfeldern auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Lokal sieht jede differenzierbare Mannigfaltigkeit wie der $\mathbb{R}^n$ aus. Deshalb betrchten wir zunächst Vektorfelder F auf dem $\mathbb{R}^n$ mit einer isolierten Nullstelle. Sei also $F : B(x_0, R) \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit $F(x_0) = 0$ und $F(x) \neq 0$ für $x \in B(x_0, R) \setminus \{0\}$. Dann definiert für alle $0 < r < R$ die Abbildung

$$\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{F(x_0 + rx)}{\|F(x_0 + rx)\|}$$

eine glatte Abbildung. Diese Abbildungen sind für alle $0 < r < R$ zueinander glatt homotop und haben deshalb den gleichen Grad. Den Grad dieser Abbildung bezeichen wir als den $\mathrm{Index}(F, x_0)$ des Vektorfeldes F an der isolierten Nullstele x_0.

Lemma 4.14. *Für ein glattes Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit einer isolierten Nullstelle bei $x_0 \in U$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ hat $T(\Phi) \circ F \circ \Phi^{-1}$ eine isolierte Nullstelle bei $\Phi(x_0)$ mit*

$$\mathrm{Index}(T(\Phi) \circ F \circ \Phi^{-1}, \Phi(x_0)) = \mathrm{Index}(F, x_0).$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass jeder orientierungserhaltende Diffeomorphismus Φ von $\mathbb{R}^n$ glatt isotop zu $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ ist. Nach Verkettung mit einer Translation haben wir $\Phi(0) = 0$.

$$F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad (x,t) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t}\Phi(tx) & \text{für } t \in (0,1] \\ T_0(\Phi) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

definiert dann eine Isotopie von dem linearen Isomorphismus $T_0(\Phi)$ nach Φ. Wegen $\Phi(0) = 0$ läßt sich $\Phi(x)$ schreiben als $\Phi(x) = x_1\phi_1(x) + \ldots + x_n\phi_n(x)$ mit glatten

Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Dann ist $F(x,t) = x_1\phi_1(tx) + \ldots + x_n\phi_n(tx)$ und deshalb auch bei $t = 0$ eine glatte Isotopie. Dann folgt die Aussage daraus, dass die Gruppe der linearen orientierungerhaltender Isomorphismen zusammenhängend ist.

Wenn Φ orientierungserhaltend ist, konstruieren wir mithilfe der Isotopie aus dem ersten Teil eine eine glatte Homotopie zwischen der Einbettung $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und dem Diffeomorphismus $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$. Das definiert eine glatte Homotopie zwischen den entsprechenden glatten Abbildungen von $\mathbb{S}^{n-1} \sim \partial B(x_0, R)$ nach $\mathbb{S}^{n-1}$. Dann folgt die Aussage aus Satz 4.12. Wenn Φ nicht orientierungserhalten ist, genügt es zu zeigen, dass der Index nicht von der Orientierung abhängt. Für den speziellen Fall $x_0 = 0$ und einer Reflektion einer Koordinate ändert sich der Grad nicht, weil die Ableitung der entsprechenden Abbildung von $\mathbb{S}^{n-1}$ auf sich selber mit der Reflektion konjugiert wird, und deshalb die Determinante das Vorzeichen nicht ändert. **q.e.d.**

Wegen diesem Lemma ist der Index eines glatten Vektorfeldes einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit bei einer isolierten Nullstelle unabgängig von der Karte definiert.

Lemma 4.15. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, also eine n-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $F : X \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit isolierten Singularitäten, das auf ∂X nach Außen zeigt, also in den Karten in die obere Halbebene eine negative letzte Komponente hat. Dann ist*

$$\sum_{x \in F^{-1}[\{0\}]} \operatorname{Index}(F, x)$$

gleich dem Grad der äußeren Normalen N, als glatte Abbildung von ∂X nach $\mathbb{S}^{n-1}$.

Beweis: Mithilfe des in Satz 3.29 (ii) konstruierten Kragens, können wir eine glatte Homotopie von einem glatten Vektorfeld, das auf ∂X nach Außen zeigt auf das dort definierte Vektorfeld $-N$ definieren. Wegen Satz 4.12 können wir dann annehmen, dass das Vektorfeld auf ∂X mit dieser äußeren Normalen übereinstimmt. Wir schneiden um jede isolierte Nullstelle eine kleinen Ball aus X heraus. Auf der entstehenden glatten Mannigfaltigkeit mit Rand definiert das normierte Vektorfeld eine glatte Abbildung nach $\mathbb{S}^{n-1}$, deren Grad auf dem Rand wegen des ersten Teils des Beweises von Satz 4.12 verschwindet. Dieser Grad ist die Summe des Grades der äußeren Normalen auf ∂X minus der Summe über die Indizes von dem Vektorfeld. **q.e.d.**

Allgemein kann man folgendes zeigen:

Satz von Poincare und Hopf 4.16. *Sei F ein glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X, das nur isolierte Nullstellen hat, und wenn X einen Rand hat auf ∂X nach Außen zeigt. Dann ist die Summe der Indizes von F unabhängig von der Wahl eines solchen Vektorfeldes und gleich der sogenannten Eulerchrakteristik von X:*

$$\sum_{x \in \text{Nullstellen von } F} \operatorname{Index}(F, x) = \chi(X).$$

4.4 Pontryagins Kobordismen

Definition 4.17. *Zwei Untermannigfaltigkeiten Y und Z einer Mannnigfaltigkeit X heißen kobordant, wenn sich die Untermannigfaltigkeiten mit Rand $Y \times [0, \epsilon)$ und $Z \times (1-\epsilon, 1]$ von $X \times [0,1]$ zu einer kompakten Untermannigfaltigkeit W mit Rand von $X \times [0,1]$ fortsetzen läßt mit $\partial W = (Y \times \{0\}) \cup (Z \times \{0\})$.*

Definition 4.18. *Eine Rahmung einer Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ ist eine glatte Basis auf Y des orthogonalen Komplements von TY bzüglich der natürlichen Paarung zwischen T_yX und T'_yX als Unterbündel von $T'X|_Y$. Zwei gerahmte Untermannigfaltigkeiten Y und Z einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißen kobordant, wenn sich die beiden gerahmten Untermannigfaltigkeiten $Y \times [0, \epsilon)$ und $Z \times (1-\epsilon, 1]$ von $X \times [0,1]$ zu einer gerahmten kompakten Untermannigfaltigkeit fortsetzen.*

Definition 4.19. *Sei $f : X \to \mathbb{S}^n$ eine glatte Abbildung und $y \in \mathbb{S}^n$ kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } Rang(T_x(f)) < n\}$. Dann ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit. Für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ bildet die duale Abbildung von $T_x(f)$ eine orientierte Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ auf eine Basis des orthogonalen Komplements von $T_xf^{-1}[\{y\}]$ in T'_xX ab. Jede orientierete Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ induziert also eine Rahmung von $f^{-1}[\{y\}]$. Die gerahmte Untermannigfaltigkeit $f^{-1}[\{y\}] \subset X$ heißt Pontryaginmannigfaltigkeit von f.*

Wir beweisen in diesem Abschnitt folgenden Satz

Satz 4.20. *Sei $f : X \to \mathbb{S}^n$ eine glatte Abbildung auf einer m-dimensionalen zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit X mit $m \geq n$. Dann gilt:*

A *Seien $y, z \in \mathbb{S}^n \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < n\}$. Dann sind die beiden Pontryaginmannigfaltigkeiten $f^{-1}[\{y\}]$ und $f^{-1}[\{z\}]$ kobordant.*

B *Zwei Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ sind genau dann glatt homotop, wenn die entsprechenden Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant sind.*

C *Jede kompakte gerahmte Untermannigfaltigkeit von X der Dimension $m - n$ ist die Pontryaginmannigfaltigkeit einer glatten Abbildung $f : X \to \mathbb{S}^n$.*

Beweis: 1. Eine orientierte Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ bildet eine orientierte Basis des orthogonalen Komplementes von y in $\mathbb{R}^{n+1}$. Wenn wir diese orthogonale Komplement mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, dann setzt sich eine orientierte Basis zu einer $n \times n$ Matrix mit positiver Determinante zusammen. Dadurch werden die orientierten Basen von $T_y\mathbb{S}^n$ sogar mit allen $n \times n$ Matrizen mit positiver Determinante identifiziert. Weil diese offene Menge der $n \times n$ Matrizen zusammenhängend ist, hängt die Klasse der kobordanten Pontryaginmannigfaltigkeiten $f^{-1}[\{y\}]$ nicht von der orientierten Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ ab.

2. Sei jetzt y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f) < n\}$. Wegen dem Rangsatz 1.43 ist diese Menge abgeschlossen. Deshalb gibt es einen offenen Ball um y der nur solche Elemente enthält. Für ein z aus diesem Ball wählen wir eine glatte Familie $(r_t)_{t\in[0,1]}$ von Rotationen von $\mathbb{R}^{n+1}$, die auf $t \in [0, \epsilon)$ konstant gleich der Identität sind, auf $t \in (1-\epsilon, 1]$ konstant gleich einer Rotation, die y auf z abbildet, und y für alle $t \in [0, 1)$ nur auf Punkte auf dem Großkreis durch y und z, also innerhalb der Balles abbildet. Für die glatte Homotopie $F(t, x) = r_t \circ f(x)$ ist z ein regulärer Wert, und $F^{-1}[\{z\}]$ ein Kobordimus der gerahmten Untermannigfaltigkeit $f^{-1}[\{z\}]$ auf $f^{-1}[\{y\}]$. Also sind diese Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant.

3. Wenn f und g zwei glatt homotope glatte Abbildungen von X nach $\mathbb{S}^n$ sind, dann wählen wir eine Homotopie F von f nach g, die auf $t \in [0, \epsilon)$ konstant gleich f ist und auf $t \in (1 - \epsilon, 1]$ konstant gleich g. Für ein y, das weder zu $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < n\}$ noch zu $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(g)) < n\}$ gehört, gibt es wegen dem Satz von Sard ein z in jeder kleinen Umgebung von y, das nicht zu $\{F(x, t) \mid (x, t) \in X \times [0, 1] \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_{(x,t)}(F)) < n\}$ gehört. Dann ist $F^{-1}[\{z\}]$ ein Kobordimus von $f^{-1}[\{z\}]$ nach $g^{-1}[\{z\}]$. Wegen **2.** sind dann $f^{-1}[\{y\}]$ und $g^{-1}[\{y\}$ kobordant.

Beweis von A: Für zwei y, z die nicht zu $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f) < n\}$ gehören, wählen wir eine glatte Isotopie von $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu einer Rotation, die y auf z abbildet. Dann sind $f^{-1}[\{y\}]$ und $f^{-1}[\{z\}]$ wegen **3.** kobordant.

Beweis von C: Sei $Y \subset X$ eine $m - n$ dimensionale kompakte gerahmte Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Dann besitzt wegen Korollar 1.44 eine offenen Umgebung von $Y \subset X$ einen Atlas von Karten, die jeweils Y auf $\mathbb{R}^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$ abbilden. Wenn wir die Basen von $\mathbb{R}^m$ mit den invertierbaren $m \times m$ Matrizen, und damit mit Diffeomorphismen vom $\mathbb{R}^m$ identifizieren, dann entspricht der Rahmen von Y in den Koordinaten dieser Karten einer glatte Abbildung von Y in die linearen Diffeomorphismen von $\mathbb{R}^n$. Eine solche Abbildung induziert auch einen Diffeomorphismus von $Y \times \mathbb{R}^n$, der auf $Y \times \{0\}$ gleich der Identität ist. Die Verkettung der Karten mit diesem Difeeomorphismus definiert dann auf einer Umgebung einer $(m - n)$-dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeit Y von X einen Atlas von Karten von X, die Y auf $\mathbb{R}^{m-n}$ und auf Y den Rahmen auf die Einsformen $dx_{m-n+1}, \ldots, dx_m$ abbilden. Mit einer Zerlegung der Eins erhalten wir dann einen Diffeomorphismus von dem kartesischen Produkt von Y mit einem Ball $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Untermannigfaltigkeit von X, dessen Einschränkung auf $Y \times \{0\}$ die Identität von Y ist, so dass der Rahmen durch die Koordinateneinsformen von $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Die Verkettung mit dem Diffeomorphismus $x \mapsto \frac{\epsilon^2 x}{\epsilon^2 - \|x\|^2}$ von $B(0, \epsilon)$ nach $\mathbb{R}^n$ ergibt einen Diffeomorphismus Φ von $Y \times \mathbb{R}^n$ auf eine offenen Untermannigfaltigkeit V von X, der die gerahmte Untermannigfaltigkeit $Y \times \{0\}$ auf Y abbildet. Dann gibt es eine eindeutige glatte Abbildung $g : V \to \mathbb{R}^n$ mit $g(\Phi(y, t)) = t$ für alle $(y, t) \in Y \times \mathbb{R}^n$. Sei h eine glatte Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$, die die

Punkte außerhalb von $B(0,1)$ auf einen Punkt $y \in \mathbb{S}^n$ abbildet, und $B(0,1)$ glatt auf $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ immersiert. Dann ist Y die Pontryaginmannigfaltigkeit $f^{-1}[\{y\}]$ von $f = h \circ g$.
4. Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ zwei glatte Abbildungen und y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < n\}$ und $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(g)) < n\}$ mit $Y = f^{-1}[\{y\}] = g^{-1}[\{y\}]$. Für eine Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ sind dann die entsprechenden Rahmen genau dann gleich, wenn $T_x(f) = T_x(g)$ für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ gilt. Wir zeigen in diesem Fall, dass f glatt homotop zu einer Abbildung $X \to \mathbb{S}^n$ ist, die auf einer Umgebung von Y mit g übereinstimmt. Dazu wählen wir wieder einen Diffeomorphismus Φ von $Y \times \mathbb{R}^n$ auf eine offene Umgebung von $Y \subset X$, die die gerahmte Untermannigfaltigkeiten Y auf sich selber abbildet. Wir können dabei das Bild von Φ so klein wählen, dass sowohl f als auch g das Bild von Φ in das Komplement von $-y \in \mathbb{S}^n$ abbilden. Die Verkettung einer Rotation mit der stereographischen Projektion ist dann ein Diffeomorphismus Ψ von $\mathbb{S}^n \setminus \{-y\}$ nach $\mathbb{R}^n$, die y auf 0 abbildet. Die beiden Abbildungen $\tilde{f} = \Psi \circ f \circ \Phi$ und $\tilde{g} = \Psi \circ g \circ \Phi$ sind glatte Abbildungen von $Y \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, die $Y \times \{0\}$ auf 0 abbilden, und deren Ableitungen auf $Y \times \{0\}$ übereinstimmen. Dann genügt es zu zeigen, dass $\tilde{f}$ glatt homotop zu einer Abbildung $Y \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist, die auf $Y \times B(0,1)$ mit $\tilde{g}$ übereinstimmt, und auf $Y \times (\mathbb{R}^n \setminus B(0,2))$ mit $\tilde{f}$ übereintimmt. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, die auf $[0,1]$ gleich Null ist und auf $[2,\infty)$ gleich Eins. Dann ist

$$F((x,s),t) = (1-t)\tilde{f}(x,s) + t(h(\|s\|)\tilde{f}(x,s) + (1-h(\|s\|))\tilde{g}(x,s))$$

eine glatte Homotopie von $\tilde{f}$ auf eine solche Funktion von $Y \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$.
5. Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ zwei glatte Abbildungen und y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < n\}$ und $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(g)) < n\}$ mit $Y = f^{-1}[\{y\}] = g^{-1}[\{y\}]$, so dass f und g auf offenen Umgebungen von $Y \subset X$ übereinstimmen. Die Verkettung einer Rotation mit der stereographischen Projektion ist ein Diffeomorphismus Ψ von $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ nach $\mathbb{R}^n$. Dann sind $\tilde{f} = \Psi \circ f$ und $\tilde{g} = \Psi \circ g$ glatte Abbildungen von $X \setminus Y$ nach $\mathbb{R}^n$. Weil f und g auf einer Umgebung von $Y \subset X$ übereinstimmen, ist folgende Abbildung eine glatte Homotopie von f nach g

$$F(x,t) = \Psi^{-1}((1-t)\tilde{f}(x) + t\tilde{g}(x)).$$

Beweis von B: Wenn f und g glatt homotop sind, dann zeigt **3.**, dass die entsprechenden Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant sind. Wenn umgekehrt zwei gerahmte Untermannigfaltigkeiten von X kobordant sind, dann definiert die Konstruktion in dem **Beweis von C** für die entsprechende gerahmte Untermannigfaltigkeit von $X \times [0,1]$ mit Rand eine glatte Homotopie von einer Abbildung $\tilde{f}$ auf eine Abbildung $\tilde{g}$, deren Pontryaginmannigfaltigkeiten mit denen von f bzw. g übereintimmen. Aus **4.** und **5.** folgt, dass f und $\tilde{f}$ bzw. g und $\tilde{g}$ und damit f und g glatt homotop sind. **q.e.d.**

Ein analoger Satz gilt auch für Mannigfaltigkeiten X mit Rand. In diesem Fall wird zusätzlich gefordert, dass der Rand auf einen fest gewählten Basispunkt von $\mathbb{S}^n$ abgebildet wird.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich einige Aussagen über die Homotopiegruppen von Mannigfaltigkeiten treffen, deren Elemente gerade die Homotopieklassen von Abbildungen nach $\mathbb{S}^n$ sind. Das führt nur in einigen Fällen zu einem befriedigenden Verständnis der Homotopiegruppen. Im Fall $\dim X = n$ bestehen die Pontryaginmannigfaltigkeiten nur aus endlich vielen Punkten mit einem Vorzeichen. Zwei solche endliche Teilmengen sind genau dann kobordant, wenn die Summe der Vorzeichen gleich ist.

Satz von Hopf 4.21. *Auf einer n-dimensionalen kompakten orientierten Mannigfaltigkeit X sind zwei glatte Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ genau dann glatt homotop, wenn die Grade aus Satz 4.12 gleich sind.* **q.e.d.**

Daraus läßt sich mithilfe der Theorie der Überlagerungen auch folgern, dass auf kompakten n-dimensionalen nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten zwei glatte Abbildungen genau dann glatt homotop sind, wenn die Grade aus Satz 4.8 gleich sind.