

### 1. Eine äquivalente Definition für zusammenhängende Räume.

Sei  $X$  ein metrischer Raum. *Zeige*:  $X$  ist zusammenhängend.  $\Leftrightarrow$  Es existiert kein Paar  $(U, V)$  von nicht-leeren, disjunkten, offenen Teilmengen  $U, V \subset X$ , so dass  $X = U \cup V$  gilt. (6 Punkte)

### 2. Über zusammenhängende Komponenten.

Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  Teilmengen, die durch  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ und } y \in [-1, 1]\}$  und  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}^+ \text{ und } y = \sin(\frac{1}{x})\}$  gegeben sind und sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  definiert durch  $M := A \cup B$ .

(a) *Zeige*, dass  $M$  zusammenhängend ist. (8 Punkte)

[Tipp. Zeige, dass  $\overline{B} = M$  gilt und benutze Satz 1.8.]

(b) Sei  $y \in [-1, 1]$  und  $\varepsilon < 1$ . Da  $\overline{B} = M$  gilt, gibt es ein  $x \in \mathbb{R}^+$  mit  $(x, \sin(\frac{1}{x})) \in (0, \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ . *Bestimme* für ein solches  $x \in \mathbb{R}^+$  die Zusammenhangskomponente des Punktes  $(x, \sin(\frac{1}{x}))$  in  $M \cap ((0, \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon))$ . (6 Punkte)

[Tipp. Benutze Satz 1.7.]

(c) *Zeige* mithilfe von (b), dass  $M$  nicht lokal zusammenhängend ist. (6 Punkte)

(d) *Zeige* durch einen Widerspruchsbeweis, dass kein stetiger Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  mit Anfangspunkt  $\gamma(0) \in A$  und Endpunkt  $\gamma(1) \in B$  existiert. Daraus folgt, dass  $M$  nicht weg-zusammenhängend ist. (6 Punkte)

[Tipp. Man nehme an, die Behauptung sei falsch. Dann ist die Menge  $\gamma^{-1}[A]$  abgeschlossen und besitzt ein Maximum. Dadurch wird ein Element  $y \in [-1, 1]$  definiert, so dass man durch Anwendung von Teilaufgabe (b) zu einem Widerspruch gelangt.]

### 3. Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

(a) Wir betrachten die Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}^2$  aus Aufg. 2 als metrisierbaren, separablen topologischen Raum. *Bestimme* einen Atlas  $\mathcal{A}$  für  $B$  und *zeige*, dass  $(B, \mathcal{A})$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist. (6 Punkte)

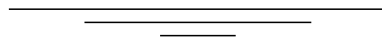
*Bitte wenden.*

- (b) Wir betrachten den Zylinder  $Z = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  als metrisierbaren, separablen topologischen Raum. Für festes  $\theta \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Abbildung

$$\psi_\theta : \mathbb{R} \times (\theta, \theta + 2\pi) \rightarrow Z, \quad (t, s) \mapsto (t, \cos(s), \sin(s)).$$

*Zeige:*

- (i) Die Abbildung  $\psi_\theta$  ist ein Homöomorphismus in  $Z$ . Daher definiert die Umkehrabbildung  $\phi_\theta := \psi_\theta^{-1} : \psi_\theta[\mathbb{R} \times (\theta, \theta + 2\pi)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Karte für  $Z$ . (6 Punkte)
- (ii) Durch  $\mathcal{A} = \{\phi_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$  wird auf  $Z$  eine differenzierbare Struktur definiert, d.h.  $(Z, \mathcal{A})$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 2. (6 Punkte)



Das **Tutorium** findet erstmals am  
**Mittwoch, den 15. Februar 2012**  
um **13.45–15.15 Uhr** in **A5, Raum C 013** statt.