

# Kapitel 3

## Funktionenräume

### 3.1 Banachräume

Zuerst erinnern wir an ein paar grundlegende Begriffe.

**Definition 3.1.** Ein normierter Vektorraum ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$  mit einer Norm, d.h. einer Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\|x\| \geq 0$  und Gleichheit nur für  $x = 0$ .
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  für  $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ .
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für  $x, y \in X$ .

Eine Norm erzeugt durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  eine Metrik. Ist  $X$  mit dieser Metrik vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent, so heißt  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum.

Eine symmetrische, positiv definite Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $X$  heißt inneres Produkt oder Skalarprodukt auf  $X$ . Sie erzeugt durch  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm auf  $X$ . Ist die erzeugte Metrik vollständig, so heißt  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbertraum.

Der Raum aller stetigen, linearen Abbildungen  $\mathcal{L}(X, Y)$  zwischen zwei normierten Vektorräumen  $X, Y$  ist mit der Norm  $\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$  wieder ein normierter Vektorraum, und ein Banachraum, wenn  $Y$  ein Banachraum ist. Der Dualraum  $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  ist der Banachraum der stetigen linearen Funktionale auf  $X$ .

Wir konstruieren mit folgendem Kriterium von Lax und Milgram Isomorphismen:

**Satz von Lax und Milgram 3.2.** Falls ein  $T \in \mathcal{L}(X, X)$  auf einem Hilbertraum  $X$  folgendes erfüllt, dann ist  $T$  ein Isomorphismus, d.h.  $T$  ist bijektiv und  $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ :

$$\langle Tx, x \rangle \geq C|x|^2 \quad \text{für ein } C > 0 \text{ und für alle } x \in X. \quad (3.1)$$

**Beweis:** Aus (3.1) folgt  $C\|x\|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \leq \|Tx\| \cdot \|x\|$  und damit auch

$$C\|x\| \leq \|Tx\| \quad \text{für alle } x \in X \quad (3.2)$$

Insbesondere ist  $T$  injektiv. Für eine Cauchyfolge  $(Tx_m)_{m \in \mathbb{N}}$  im Bild von  $T$ , die gegen  $y$  konvergiert, ist  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  wegen (3.2) eine Cauchyfolge, und konvergiert gegen ein  $x$  mit  $Tx = y$ . Für  $z \in (\text{Bild } T)^\perp$  folgt  $z = 0$  aus (3.1) und  $0 = \langle Tz, z \rangle \geq C\|z\|^2$ , und damit  $\text{Bild } T = \overline{\text{Bild } T} = X$ . Also ist  $T$  bijektiv und wegen (3.2) ist  $T^{-1}$  stetig. **q.e.d.**

Eine stetige lineare Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Teilfolge  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $X$  eine Teilfolge von  $(Tx_m)_{m \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Die Verkettung einer stetigen und einer kompakten Abbildung ist wieder kompakt.

**Lemma von Ehrling 3.3.** *Es seien  $X, Y, Z$  Banachräume und  $X \rightarrow Y \hookrightarrow Z$  zwei stetige, lineare Abbildungen, deren erste  $T : X \rightarrow Y$  kompakt und deren zweite  $I : Y \hookrightarrow Z$  injektiv ist. Dann existiert zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $C(\epsilon) < \infty$  mit*

$$\|Tx\|_Y \leq \epsilon\|x\|_X + C(\epsilon)\|ITx\|_Z \quad \text{für alle } x \in X.$$

**Beweis:** Andernfalls existiert ein  $\epsilon > 0$  und eine Folge  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in X$  mit

$$\epsilon\|x_m\|_X + m\|ITx_m\|_Z < \|Tx_m\|_Y = 1.$$

Dann ist  $x_m \in X$  beschränkt, und, da  $T$  kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von  $(Tx_m)_{m \in \mathbb{N}}$  gegen  $y \in Y$ . Der Grenzwert der entsprechenden Teilfolge von  $(\|Tx_m\|_Y)_{m \in \mathbb{N}}$  ist  $\|y\|_Y = 1$ , und insbesondere  $y \neq 0$ . Aufgrund der Annahme konvergiert die entsprechende Teilfolge von  $(\|ITx_m\|_Z)_{m \in \mathbb{N}}$  gegen Null und wegen der Stetigkeit von  $I$  gegen  $\|Iy\|$ , im Widerspruch zu der Injektivität von  $I$ . **q.e.d.**

Injektive kompakte Störungen von Isomorphismen sind wieder Isomorphismen:

**Lemma 3.4.** *Seien  $T, K : X \rightarrow Y$  stetige lineare Abbildungen zwischen zwei Banachräumen  $X, Y$ . Die erste  $T$  sei ein Isomorphismus, und die zweite  $K$  sei kompakt. Ist  $T - K$  injektiv oder surjektiv, so ist  $T - K$  ein Isomorphismus.*

**Beweis:** O.B.d.A. können wir  $X = Y$  und  $T = \mathbb{1}_X$  annehmen.

Zuerst sei  $\mathbb{1} - K$  injektiv. Wir behaupten, dass dann folgendes gilt:

$$\|(\mathbb{1} - K)x\| \geq C\|x\| \quad \text{für ein } C > 0 \text{ und alle } x \in X. \quad (3.3)$$

Andernfalls existiert eine Folge  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit  $\|(\mathbb{1} - K)x_m\| < \frac{1}{m}\|x_m\|$  und o.B.d.A.  $\|x_m\| = 1$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert  $Kx_m \rightarrow y$  und  $x_m \rightarrow -y$  wegen  $\|(\mathbb{1} - K)x_m\| \rightarrow 0$ . Dann ist  $(\mathbb{1} - K)y$  der Grenzwert von  $(\mathbb{1} - K)x_m \rightarrow 0$ . Weil  $\mathbb{1} - K$  injektiv ist folgt  $y = 0$  im Widerspruch zu  $1 = \|x_m\| \rightarrow \|y\|$ . Das zeigt (3.3).

Dann ist für jede Cauchyfolge  $(\mathbf{1} - K)x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  im  $\text{Bild}(\mathbf{1} - K)$  mit Grenzwert  $y$  auch  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, mit einem Grenzwert  $x$  mit  $(\mathbf{1} - K)x = y$ . Also ist  $\text{Bild}(\mathbf{1} - K)$  abgeschlossen. Wenn  $\mathbf{1} - K$  nicht surjektiv ist, sei  $x \in X \setminus \text{Bild}(\mathbf{1} - K)$ . Aus  $(\mathbf{1} - K)^n x = (\mathbf{1} - K)^{n+1} y$  mit  $y \in X$ , würde  $(\mathbf{1} - K)^n (x - (\mathbf{1} - K)y) = 0$  folgen, und, da  $\mathbf{1} - K$  injektiv ist, auch  $x = (\mathbf{1} - K)y \in \text{Bild}(\mathbf{1} - K)$  im Widerspruch zu  $x \in X \setminus \text{Bild}(\mathbf{1} - K)$ . Das ergibt  $(\mathbf{1} - K)^n x \in \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^n \setminus \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n+1}$ . Mit  $\mathbf{1} - K$  ist auch  $(\mathbf{1} - K)^n$  injektiv und von der Form  $\mathbf{1} - \tilde{K}$  mit  $\tilde{K}$  kompakt:

$$(\mathbf{1} - K)^n = \mathbf{1} - \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} (-1)^{l-1} K^l.$$

Aufgrund des schon gezeigten ist dann auch  $\text{Bild}(\mathbf{1} - K)^n$  abgeschlossen. Dann gilt  $d((\mathbf{1} - K)^n x, \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n+1}) > 0$ . Sei  $y_n \in \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n+1}$  mit

$$d((\mathbf{1} - K)^n x, \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n+1}) \leq \|(\mathbf{1} - K)^n x - y_n\| \leq 2d((\mathbf{1} - K)^n x, \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n+1}).$$

Dann gilt  $d(\tilde{y}_n, \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n+1}) \geq 1/2$  für  $\tilde{y}_n := \frac{(\mathbf{1} - K)^n x - y_n}{\|(\mathbf{1} - K)^n x - y_n\|} \in \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^n$ .

$$\|K\tilde{y}_n - K\tilde{y}_m\| = \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m - (\mathbf{1} - K)\tilde{y}_n + (\mathbf{1} - K)\tilde{y}_m\| \geq 1/2 \quad \text{für } m > n,$$

wegen  $\tilde{y}_m + (\mathbf{1} - K)\tilde{y}_n - (\mathbf{1} - K)\tilde{y}_m \in \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n+1}$ . Also konvergiert keine Teilfolge von  $(K\tilde{y}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , was  $\|\tilde{y}_m\| = 1$  und der Kompaktheit von  $K$  widerspricht. Also ist  $\mathbf{1} - K$  surjektiv und ein Isomorphismus, weil wegen (3.3) die Umkehrabbildung stetig ist.

Nun sei  $\mathbf{1} - K$  surjektiv. Zunächst nehmen wir an, dass  $\mathbf{1} - K$  nicht injektiv ist. Dann existiert  $x = x_1 \in \text{Kern}(\mathbf{1} - K) \setminus \{0\}$ . Da  $\mathbf{1} - K$  surjektiv ist, existiert induktiv

$$(\mathbf{1} - K)x_{n+1} = x_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt  $(\mathbf{1} - K)^{n-1}x_n = x_1 \neq 0$  und  $(\mathbf{1} - K)^n x_n = (\mathbf{1} - K)x_1 = 0$ .

$$x_n \in \text{Kern}(\mathbf{1} - K)^n \setminus \text{Kern}(\mathbf{1} - K)^{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

$\text{Kern}(\mathbf{1} - K)^{n-1}$  ist abgeschlossen und sei  $k_n \in \text{Kern}(\mathbf{1} - K)^{n-1}$  mit

$$d((\mathbf{1} - K)^n x, \text{Kern}(\mathbf{1} - K)^{n+1}) \leq \|(\mathbf{1} - K)^n x - k_n\| \leq 2d((\mathbf{1} - K)^n x, \text{Kern}(\mathbf{1} - K)^{n+1}).$$

Dann gilt  $d(\tilde{x}_n, \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n+1}) \geq 1/2$  für  $\tilde{x}_n := \frac{x_n - k_n}{\|x_n - k_n\|}$ .

$$\|K\tilde{x}_n - K\tilde{x}_m\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m - (\mathbf{1} - K)\tilde{x}_n + (\mathbf{1} - K)\tilde{x}_m\| \geq 1/2 \quad \text{für } m > n,$$

da  $\tilde{x}_m + (\mathbf{1} - K)\tilde{x}_n - (\mathbf{1} - K)\tilde{x}_m \in \text{Bild}(\mathbf{1} - K)^{n-1}$ . Das widerspricht wieder der Kompaktheit von  $K$  und  $\|\tilde{x}_m\| = 1$ . Also ist  $\mathbf{1} - K$  auch injektiv. **q.e.d.**

**Bemerkung 3.5.** Allgemein kann man zeigen, dass eine kompakte Störung eines Isomorphismus ein Fredholmoperator vom Index 0 ist, siehe H.W.Alt: Lineare Funktionalanalysis Satz 8.15. Dabei heißt eine Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  Fredholmoperator, falls

- (i)  $\text{Bild } T \subseteq Y$  ist abgeschlossen,
- (ii)  $\dim \text{Kern } T < \infty$ .
- (iii)  $\dim \text{Kokern } T = \dim(Y / \text{Kern } T) < \infty$ .

Die Differenz  $\text{Ind } T := \dim \text{Kern } T - \dim \text{Kokern } T$  heißt der Index von  $T$ .

## 3.2 Hölderräume

**Definition 3.6. (Hölderräume)** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Der Raum der  $k$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$  bzw. auf  $A$  mit  $\Omega \subseteq A \subseteq \bar{\Omega}$  ist

$$\begin{aligned} C^k(\Omega) &:= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial^\gamma u \text{ existiert für } |\gamma| \leq k \text{ und ist stetig auf } \Omega\} \\ C^k(A) &:= \{u \in C^k(\Omega) \mid \partial^\gamma u \text{ setzt sich für } |\gamma| \leq k \text{ stetig auf } A \text{ fort}\} \end{aligned}$$

und  $C^\infty(A) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(A)$ . Der Index 0 bezeichnet Funktionen mit kompaktem Träger:

$$C_0^k(A) := \{u \in C^k(A) \mid \text{supp}(u) \Subset A\} \quad C_0^\infty(A) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_0^k(A).$$

Für beschränktes  $\Omega$  ist  $C^k(\bar{\Omega})$  ein Banachraum mit  $\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

Für  $0 < \alpha \leq 1$  ist die Hölderkonstante definiert als  $\text{höl}_{\Omega, \alpha} u := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$

und eine Lipschitzkonstante  $\text{lip}_\Omega u := \text{höl}_{\Omega, 1} u$ . Eine Funktion  $u$  mit endlicher Hölder- bzw. Lipschitzkonstante heißt hölder- bzw. lipschitzstetig. Der Raum der Funktion mit beschränkten und hölderstetigen Ableitungen bis zur  $k$ -ten Ordnung ist

$$C^{k, \alpha}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} + \text{höl}_{\Omega, \alpha}(\partial^\gamma u) < \infty \text{ für } |\gamma| \leq k\}.$$

zusammen mit der Norm  $\|u\|_{C^{k, \alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} (\|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} + \text{höl}_{\Omega, \alpha} \partial^\gamma u)$ .

Wir nennen  $C^{k, \alpha}(\Omega)$  Hölderräume. Schließlich sei für  $\Omega \subseteq A \subseteq \bar{\Omega}$

$$C_{\text{loc}}^{k, \alpha}(A) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \varrho > 0 : u|_{A \cap B(x, \varrho)} \in C^{k, \alpha}(\Omega \cap B(x, \varrho))\}.$$

**Übungsaufgabe 3.7.** Zeige dass für  $\alpha > 1$  lokal  $u \equiv \text{const}$  aus  $\text{höl}_{\Omega, \alpha} u < \infty$  folgt.

**Proposition 3.8.**  $C^{k, \alpha}(\Omega)$  ist ein Banachraum.

**Beweis:** Sei  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $C^{k,\alpha}(\Omega)$ . Weil die stetigen und beschränkten Funktionen auf einem metrischen Raum mit  $\|\cdot\|_\infty$  ein Banachraum sind, konvergiert  $\partial^\gamma u_j$  für  $|\gamma| \leq k$  gleichmäßig gegen eine solche Funktion  $u_\gamma$ . Für  $\gamma_i \geq 1$  folgt aus

$$\partial^{\gamma-e_i} u_j(x + te_i) = \partial^{\gamma-e_i} u_j(x) + \int_0^t \partial^\gamma u_j(x + se_i) ds \quad \text{auf} \quad \{x + te_i \mid |t| < \epsilon\} \subseteq \Omega$$

die analoge Gleichung für die entsprechenden Grenzwerte. Deshalb folgt  $u_\gamma = \partial^\gamma u$  mit  $u = \lim u_j$  aus der gleichmäßigen Konvergenz aller partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$ . Genauso konvergiert  $\frac{\partial^\gamma u_j(x) - \partial^\gamma u_j(y)}{|x-y|^\alpha}$  auf  $\{(x, y) \in \Omega \times \Omega \mid x \neq y\}$  gleichmäßig gegen eine stetige beschränkte Funktion. Der Grenzwert stimmt mit dem punktweisen Grenzwert  $\frac{\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)}{|x-y|^\alpha}$  überein. Also konvergiert  $u_j$  in  $C^{k,\alpha}(\Omega)$  gegen  $u$ . **q.e.d.**

Das Produkt zweier hölderstetiger Funktionen ist wieder hölderstetig.

**Proposition 3.9.** Seien  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $0 < \alpha \leq 1$ . Dann gilt für  $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$

$$\text{höl}_{\Omega,\alpha}(uv) \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha} u \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{höl}_{\Omega,\alpha} v$$

und für  $u, v \in C^{k,\alpha}(\Omega)$   $\|uv\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C(n, k) \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ .

**Beweis:** Die erste Abschätzung folgt aus folgender Ungleichung für  $x, y \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} |uv(x) - uv(y)| &\leq |u(x) - u(y)| |v(x)| + |u(y)| |v(x) - v(y)| \\ &\leq (\text{höl}_{\Omega,\alpha} u \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{höl}_{\Omega,\alpha} v) |x - y|^\alpha, \end{aligned}$$

Die zweite folgt aus dieser unter Beachtung der Produktregel

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta u \partial^{\gamma-\beta} v \quad \text{für } |\gamma| \leq k. \quad \text{q.e.d.}$$

**Proposition 3.10.** Für  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  und  $0 < \beta < \alpha$  sind folgende Einbettungen kompakt:

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}).$$

**Beweis:** Eine Funktion  $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$  ist gleichmäßig stetig und lässt sich daher stetig auf  $\bar{\Omega}$  fortsetzen. Klarerweise ist die Einbettung  $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$  stetig. Eine in  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  beschränkte Folge von Funktionen  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ist auf  $\bar{\Omega}$  gleichgradig stetig beschränkt. Da  $\bar{\Omega}$  kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, und die Einbettung der Hölderräume in den Raum der bis zum Rand stetigen Funktionen ist kompakt. Für  $0 < \beta < \alpha$ ,  $x \neq y \in \Omega$  und  $\delta > 0$  gilt

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha} u \delta^{\alpha-\beta} \quad \text{wenn} \quad |x - y| \leq \delta \quad (3.4)$$

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \delta^{-\beta} \quad \text{wenn} \quad |x - y| \geq \delta. \quad (3.5)$$

Für  $\delta \geq \text{diam}(\Omega)$  folgt daraus die Beschränktheit von  $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$ :

$$\text{höl}_{\Omega,\beta} u \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha} u \text{diam}^{\alpha-\beta}(\Omega)$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert also eine in  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  beschränkte Folge  $u_j$  gleichmäßig in  $C^0(\bar{\Omega})$  gegen eine Funktion  $u$ . Mit (3.4) und (3.5) folgt für alle  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \limsup_{i,j \rightarrow \infty} \text{höl}_{\Omega,\beta}(u_i - u_j) &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i,j \geq k} \text{höl}_{\Omega,\beta}(u_i - u_j) \leq \\ &\leq \limsup_{i,j \rightarrow \infty} \delta^{\alpha-\beta} (\text{höl}_{\Omega,\alpha} u_i + \text{höl}_{\Omega,\alpha} u_j) + \limsup_{i,j \rightarrow \infty} 2\delta^{-\beta} \|u_i - u_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta^{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Also ist  $u_j$  eine Cauchyfolge, und damit konvergent in  $C^{0,\beta}(\Omega)$ . q.e.d.

Für Einbettungen mit  $k > 0$  muss  $\partial\Omega$  eine gewisse Regularität aufweisen.

**Definition 3.11.** Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $0 < \alpha \leq 1$ . Wir nennen  $\partial\Omega$   $C^k$ - bzw.  $C^{k,\alpha}$ -regulär ( $\partial\Omega \in C^k$  bzw.  $C^{k,\alpha}$ ), wenn  $\partial\Omega$  lokal der Graph einer  $C^k$  bzw.  $C^{k,\alpha}$  Funktion ist. D.h. für alle  $x_0 \in \partial\Omega$  existieren  $\varrho > 0$ ,  $M < \infty$  und  $\varphi \in C^k(B^{n-1}(0, \varrho))$  bzw.  $C^{k,\alpha}(B^{n-1}(0, \varrho))$  mit  $\varphi(0) = 0$  und  $\|\varphi\|_\infty < M$ , so dass nach einer geeigneten Rotation

$$\{x - x_0 \mid x \in \Omega\} \cap B^{n-1}(0, \varrho) \times (-M, M) = \{(y, t) \in B^{n-1}(0, \varrho) \times (-M, M) \mid t > \varphi(y)\}.$$

Damit erhalten wir den Kompaktheitsansatz für Hölderräume mit  $k > 0$ .

**Proposition 3.12.** Seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ ,  $k \geq l \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 < \beta, \alpha \leq 1$  mit  $k + \alpha > l + \beta$ . Dann sind die Einbettungen  $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\Omega)$  kompakt.

**Beweis:** Für  $k = l$  folgt die Aussage sofort aus Proposition 3.10. Auch der allgemeine Fall folgt aus Proposition 3.10, wenn wir zeigen, dass die Einbettung

$$C^1(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,1}(\Omega) \tag{3.6}$$

wohldefiniert und stetig ist. Da  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ , hat  $\Omega$  nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, und diese haben alle positiven Abstand zueinander. Für  $x, y \in \Omega$ , die nicht in derselben Zusammenhangskomponente liegen, gilt somit

$$|u(x) - u(y)| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega)\|u\|_{L^\infty(\Omega)}|x - y|.$$

Für  $x, y \in \Omega$  in der selben Zusammenhangskomponente gibt es nach dem folgenden Lemma einen stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ , mit  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$  und

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \leq C(\Omega)|x - y|.$$

Daraus folgt für  $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_0^1 |\nabla u(\gamma(t))| dt \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega) |x - y|.$$

Also ist  $\text{lip}_\Omega u = \text{höl}_{\Omega,1} u \leq C(\Omega) \|u\|_{C^1(\Omega)}$ , und (3.6) wohldefiniert und stetig. **q.e.d.**

**Lemma 3.13.** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend,  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ . Dann gibt es  $C(\Omega) < \infty$ , so dass für zwei beliebige Punkte  $x, y \in \Omega$  ein stetig differenzierbarer Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$  und folgender Eigenschaft existiert:*

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \leq C(\Omega) |x - y|. \quad (3.7)$$

**Beweis:** Für  $x_0 \in \partial\Omega$  setzen wir nach einer geeigneten Rotation

$$U(x_0) := \{x \in \Omega \mid x - x_0 \in B^{n-1}(0, \varrho) \times (-M, M)\},$$

wobei  $\varrho := \varrho_{x_0} > 0$ ,  $M := M_{x_0}$  und  $\varphi_{x_0} \in C^{0,1}(B^{n-1}(0, \varrho))$  wie in Definition 3.11 sind. Dann ist (3.7) für  $U(x_0) \cap \Omega$  mit  $C := C(\varrho, M, \text{lip } \varphi) < \infty$  erfüllt. Für  $x_0 \in \Omega$  wählen wir  $U(x_0) := B(x_0, \varrho_{x_0}) \subseteq \Omega$ , und sehen dass (3.7) für  $U(x_0)$  mit  $C = 1$  erfüllt.

Da  $\bar{\Omega}$  kompakt ist, existieren endlich viele  $x_i \in \bar{\Omega}$  mit

$$\bar{\Omega} \subseteq U(x_1) \cup \dots \cup U(x_N).$$

Für jedes  $i = 1, \dots, N$  ist (3.7) für  $U(x_i) \cap \Omega$  mit einem  $C_i < \infty$  erfüllt. Wir setzen  $C = \max\{C_1, \dots, C_N\}$ . Wähle  $\delta > 0$ , so dass für beliebige  $x, y \in \Omega$  mit  $|x - y| < \delta$

$$x, y \in U(x_i) \cap \Omega \quad \text{für ein } i = 1, \dots, N$$

gilt. Also ist (3.7) für  $x, y \in \Omega$  mit  $|x - y| < \delta$  mit  $C = \max\{C_1, \dots, C_N\}$  erfüllt.

Da  $\Omega$  zusammenhängend ist, existiert für  $x, y \in \Omega$  mit  $|x - y| \geq \delta$  ein stetig differenzierbarer Weg  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$  mit (er durchläuft jedes  $U(x_i)$  höchstens einmal)

$$L(\gamma) \leq \left( \sum_{i=1}^N C_i \text{diam}(U(x_i) \cap \Omega) \right) \leq \left( \sum_{i=1}^N C_i \text{diam}(U(x_i) \cap \Omega) \right) \frac{|x - y|}{\delta} =: C_0 |x - y|.$$

Mit  $C(\Omega) := \max\{C_0, \dots, C_N\} < \infty$  ist (3.7) erfüllt, und das Lemma bewiesen. **q.e.d.**

### 3.3 Sobolevräume

Wir beginnen mit einer kurzen Erinnerung an  $L^p$ -Räume.

**Definition 3.14.** ( $L^p$ -Räume) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum, d.h.  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$  und  $\mu$  ein  $\sigma$ -additives Maß auf  $\mathcal{A}$ . Für  $1 \leq p \leq \infty$  und meßbares  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  sei

$$\|u\|_{L^p(\mu)} := \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |u|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \inf \{ \lambda \mid \mu\text{-fast überall gilt } |u| \leq \lambda \} & \text{für } p = \infty, \end{cases}$$

und definieren den Raum der  $p$ -integrierbaren bzw. der beschränkten meßbaren Funktionen

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ meßbar} \mid \|u\|_{L^p(\mu)} < \infty \},$$

wobei wir wie üblich Funktionen identifizieren, die  $\mu$ -fast überall übereinstimmen.  $L^p(\mu)$  ist mit der Norm  $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$  ein Banachraum und für  $p = 2$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} u \bar{v} d\mu$$

ein Hilbertraum. Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar schreiben wir abkürzend  $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , wobei  $\mu$  das  $n$ -dimensionale Lebesguemaß ist und  $\mathcal{A}$  die  $\sigma$ -Algebra der lebesguemeßbaren Teilmengen von  $\Omega$  bezeichnet. Weiter setzen wir

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid u|_{\Omega'} \in L^p(\Omega') \text{ für alle } \Omega' \Subset \Omega \},$$

wobei  $u_m$  in  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  gegen  $u$  konvergiert, falls  $u_m|_{\Omega'} \rightarrow u|_{\Omega'}$  in  $L^p(\Omega')$  für alle  $\Omega' \Subset \Omega$ .

Für  $1 \leq p \leq \infty$  heißt  $1 \leq q \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  der zu  $p$  konjugierte Exponent, und es gilt für  $u \in L^p(\mu), v \in L^q(\mu)$  die Hölderungleichung

$$\left| \int_{\Omega} u v d\mu \right| \leq \|u\|_{L^p(\mu)} \|v\|_{L^q(\mu)}.$$

$$\begin{aligned} \mu(\Omega)^{-1/p} \|u\|_{L^p(\mu)} &\leq \mu(\Omega)^{-1/q} \|u\|_{L^q(\mu)} && \text{für } u \in L^q(\mu) \text{ und } 1 \leq p \leq q < \infty \\ \|u\|_{L^q(\mu)} &\leq \|u\|_{L^p(\mu)}^\lambda \|u\|_{L^r(\mu)}^{1-\lambda} && \text{für } u \in L^r(\mu) \cap L^p(\mu) \text{ und } 1 \leq p \leq q \leq r \end{aligned} \quad (3.8)$$

mit  $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ . Mit Induktion erhalten wir die verallgemeinerte Hölderungleichung

$$\left| \int_{\Omega} u_1 \dots u_m d\mu \right| \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\mu)} \dots \|u_m\|_{L^{p_m}(\mu)} \quad \text{für} \quad \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1. \quad (3.9)$$



Auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist für  $1 \leq p < \infty$  jede Treppenfunktion in  $L^p(\Omega)$  ein Grenzwert von Funktionen in  $C_0(\Omega)$ . Also liegt  $C_0(\Omega)$  dicht in  $L^p(\Omega)$ .

Diese Aussage wollen wir verschärfen, indem wir zeigen, dass die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$ , d.h.  $C_0^\infty(\Omega)$ , für  $1 \leq p < \infty$  in  $L^p(\Omega)$  dicht liegen. Dazu wählen wir einen Mollifier  $\lambda \in C_0^\infty(B(0,1))$ ,  $\lambda \geq 0$  mit  $\int \lambda = 1$  (z.B.  $\lambda = \phi_{B(0,1)}$ ). Wir setzen  $\lambda_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \lambda(\frac{x}{\epsilon})$  für  $\epsilon > 0$  und sehen  $\lambda_\epsilon \in C_0^\infty(B(0,\epsilon))$  und  $\int \lambda_\epsilon = 1$ . Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  definieren wir die Faltung

$$u_\epsilon(x) := (\lambda_\epsilon * u)(x) := \int \lambda_\epsilon(x-y)u(y) \, d^n y \text{ für } x \in \Omega \text{ mit } \epsilon < d(x, \partial\Omega). \quad (3.10)$$

Wir sehen  $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega')$  für  $\Omega' \Subset \Omega$  mit  $d(\Omega', \partial\Omega) > \epsilon$ . Für  $u \in L^1(\Omega)$  können wir  $u_\epsilon$  auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definieren mit  $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Für  $\text{supp}(u) \Subset \Omega$  und  $\epsilon < d(\text{supp}(u), \partial\Omega)$  gilt  $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ . Für  $u = \chi_{\Omega''}$  mit  $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$  und  $\epsilon < \min\{d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)\}$  gilt

$$u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega) \quad 0 \leq u_\epsilon \leq 1 \quad u_\epsilon \equiv 1 \text{ auf } \Omega'.$$

$u_\epsilon$  approximiert  $u$  in lokalen Räumen, wie die folgende Proposition zeigt.

**Proposition 3.15.** (i) Für  $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  gilt  $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ .

Ist  $\Omega = \mathbb{R}^n$  und  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , so gilt  $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

(ii) Für  $u \in C^0(\Omega)$  gilt für alle  $\Omega' \Subset \Omega$   $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $C^0(\bar{\Omega}')$ .

(iii) Für  $u \in C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , gilt für  $0 < \beta < \alpha$   $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $C^{k,\beta}_{\text{loc}}(\Omega)$ ,

und für alle  $\Omega' \Subset \Omega$  gilt  $\|u_\epsilon\|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega'')}$ , falls  $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega)$ .

**Beweis:** Für  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ,  $x \in \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$  und  $\epsilon < d(\Omega', \partial\Omega'')$  gilt, wegen  $\int \lambda_\epsilon = 1$ ,

$$u_\epsilon(x) - u(x) = \int_{\Omega''} \lambda_\epsilon(x-y)(u(y) - u(x)) \, d^n y = \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y)(u(x-y) - u(x)) \, d^n y. \quad (3.11)$$

(i) Wegen  $\lambda_\epsilon \geq 0$ ,  $\int \lambda_\epsilon = 1$  und der Konvexität von  $x \mapsto |x|^p$  folgt<sup>1</sup>  $(\int \lambda_\epsilon |f|)^p \leq \int \lambda_\epsilon |f|^p$  für  $f \in L^p(B(0,\epsilon))$  aus Jensens Ungleichung<sup>2</sup>. Für  $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  und  $1 \leq p < \infty$  folgt

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega')}^p &\leq \int_{\Omega'} \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) |u(x-y) - u(x)|^p \, d^n y \, d^n x = \\ &= \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) \|u(\cdot - y) - u\|_{L^p(\Omega')}^p \, d^n y \leq \sup_{|y| < \epsilon} \|u(\cdot - y) - u\|_{L^p(\Omega')}^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Diese Ungleichung folgt auch aus der allgemeinen Höderungleichung (3.8)

<sup>2</sup>In Rudin: "Real and Complex Analysis" findet sich folgender einfache Beweis: Sei  $t = \int \lambda_\epsilon |f|$ . Aus der Konvexität von  $s \mapsto s^p$  folgt  $s^p \geq t^p + pt^{p-1}(s-t)$  (Tangente an  $s \mapsto s^p$ ) für  $s \geq 0$ , also  $|f(x)|^p \geq t^p + pt^{p-1}(|f(x)| - t)$ . Daraus folgt  $\int \lambda_\epsilon |f|^p \geq \int \lambda_\epsilon t^p + pt^{p-1} \int \lambda_\epsilon (|f| - t) = t^p = (\int \lambda_\epsilon |f|)^p$ .

im Grenzwert  $\epsilon \downarrow 0$ , weil das für gleichmäßig stetige Funktionen im dichten Unterraum  $C_0(\Omega') \subseteq L^p(\Omega')$  gilt. Für  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und  $1 \leq p < \infty$  folgt im Grenzwert  $\epsilon \downarrow 0$  genauso

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) |u(x-y) - u(x)|^p \, d^n y \, d^n x = \\ &= \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) \|u(\cdot - y) - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \, d^n y \leq \sup_{|y| < \epsilon} \|u(\cdot - y) - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

(ii) Für  $u \in C^0(\Omega)$  folgt da  $u$  gleichmäßig stetig auf  $\Omega' \Subset \Omega$  ist aus (3.11)

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \sup_{x \in \Omega', |x-y| < \epsilon} |u(x) - u(y)| \rightarrow 0.$$

(iii) Für  $x \in \Omega'$  gilt  $B(x, \epsilon) \Subset \Omega$ ,  $\lambda_\epsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$  und für  $|\gamma| \leq k$

$$\partial^\gamma u(x) = \int_{\Omega} \lambda_\epsilon(x - y) \partial^\gamma u(y) \, d^n y.$$

Daher genügt es  $k = 0$  zu betrachten. Aus (ii) folgt  $\|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \rightarrow 0$ . Mit (3.11) folgt aus (3.4) für  $x_1 \neq x_2 \in \Omega'$  und  $x_1 - y \neq x_2 - y$  oder für  $x_1 \neq x_1 - y$  und  $x_2 \neq x_2 - y$

$$\begin{aligned} |(u_\epsilon - u)(x_1) - (u_\epsilon - u)(x_2)| &\leq \\ &\leq \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) |(u(x_1 - y) - u(x_1)) - (u(x_2 - y) - u(x_2))| \, d^n y \leq \\ &\leq 2 \operatorname{höl}_{\Omega, \alpha}(u) \min(|x_1 - x_2|^\alpha, \epsilon^\alpha) \leq 2\epsilon^{\alpha-\beta} \operatorname{höl}_{\Omega'', \alpha}(u) |x_1 - x_2|^\beta. \end{aligned}$$

Dies ergibt  $\operatorname{höl}_{\Omega', \beta}(u_\epsilon - u) \leq 2\epsilon^{\alpha-\beta} \operatorname{höl}_{\Omega'', \alpha} u \rightarrow 0$  für  $\epsilon \downarrow 0$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x)| &\leq \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) |u(x-y)| \, d^n y \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{und} \\ |u_\epsilon(x_1) - u_\epsilon(x_2)| &\leq \int_{B(0,\epsilon)} \lambda_\epsilon(y) |u(x_1 - y) - u(x_2 - y)| \, d^n y \leq \operatorname{höl}_{\Omega, \alpha}(u) |x_1 - x_2|^\alpha. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\|u_\epsilon\|_{C^{k, \alpha}(\Omega')} \leq \|u\|_{C^{k, \alpha}(\Omega)}.$$

**q.e.d.**

Daraus folgt sofort

**Proposition 3.16.**  $C_0^\infty(\Omega)$  liegt dicht in  $L^p(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$ .

**Beweis:** Wir wissen bereits, dass  $C_0(\Omega)$  dicht in  $L^p(\Omega)$  liegt. Für  $u \in C_0(\Omega)$ ,  $\text{supp}(u) \Subset \Omega' \Subset \Omega$ ,  $0 < \epsilon < d(\text{supp}(u), \partial\Omega')$  gilt  $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega') \subseteq C_0^\infty(\Omega)$  und mit Proposition 3.15 (ii) folgt für  $\epsilon \downarrow 0$   $\|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mu(\Omega')^{1/p} \|u_\epsilon - u\|_{L^\infty(\Omega')} \rightarrow 0$ . **q.e.d.**

Wir kommen zu den Sobolevräumen.

**Definition 3.17. (Sobolevräume)** Auf einer offenen nicht leeren Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ist für  $1 \leq p \leq \infty$  der Raum der Sobolevfunktionen mit  $k$ -fachen  $L^p$ -integrierbaren schwachen Ableitungen definiert als  $W^{k,p}(\Omega) :=$

$$\left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall |\gamma| \leq k : \exists u_\gamma \in L^p(\Omega) : \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \int u_\gamma \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int u \partial^\gamma \varphi \right\}.$$

Wir nennen  $\partial^\gamma u := u_\gamma$  die schwache Ableitung von  $u$  und definieren die Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\gamma| \leq k} \|\partial^\gamma u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für  $1 \leq p \leq \infty$  definieren wir  $W_0^{k,p}(\Omega)$  als den Abschluß  $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subseteq W^{k,p}(\Omega)$  der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Für  $\Omega \subseteq A \subseteq \bar{\Omega}$  sei

$$W_{\text{loc}}^{k,p}(A) := \{u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \varrho > 0 : u|_{\Omega \cap B(x, \varrho)} \in W^{k,p}(\Omega \cap B(x, \varrho))\}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir abkürzend  $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$ . Wir nennen  $W_0^{k,p}(\Omega)$  und  $W^{k,p}(\Omega)$  Sobolevräume und ihre Elemente Sobolevfunktionen.

**Proposition 3.18.**  $W^{k,p}(\Omega)$  und  $W_0^{k,p}(\Omega)$  sind Banachräume, und für  $p = 2$  sind  $W^{k,2}(\Omega)$  und  $W_0^{k,2}(\Omega)$  mit folgenden Skalarprodukt Hilberträume:

$$\langle u, v \rangle := \sum_{|\gamma| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\gamma u \partial^\gamma \bar{v}$$

**Beweis:** Wir sehen, dass  $W^{k,p}(\Omega)$  isometrisch  $W^{k,p}(\Omega) \cong$

$$\cong \left\{ (u_\gamma)_{0 \leq |\gamma| \leq k} \in L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega) \mid \int u_0 \partial^\gamma \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int u_\gamma \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

zu einem abgeschlossenen Unterraum von  $L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega)$  ist und somit ein Banachraum. Damit ist auch  $W_0^{k,p}(\Omega)$  als abgeschlossener Unterraum von  $W^{k,p}(\Omega)$  ein Banachraum. Die Normen der oben definierten Skalarprodukte sind äquivalent zu den Normen von  $W^{k,2}(\Omega)$  und  $W_0^{k,2}(\Omega)$ . Also sind diese Räume Hilberträume. **q.e.d.**

Folgende Proposition gibt eine Charakterisierung der Sobolevräume für  $1 < p \leq \infty$ .

**Proposition 3.19.** Für  $1 < p \leq \infty, k \in \mathbb{N}$  gilt  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  genau dann, wenn  $u \in L^p(\Omega)$  und für ein  $M < \infty, |\gamma| \leq k, q = \frac{p}{p-1}$  folgendes gilt ( $\Leftrightarrow \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C(n, k)M$ ):

$$|(\Lambda_\gamma u)(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{mit } (\Lambda_\gamma u)(\varphi) : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\Lambda_\gamma u)(\varphi) := (-1)^{|\gamma|} \int_{\Omega} u \cdot \partial^\gamma \varphi.$$

**Beweis** folgt aus der isometrischen Dualität  $L^q(\Omega)' = L^p(\Omega)$  für  $1 < p \leq \infty$ . **q.e.d.**

**Proposition 3.20.** Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, zusammenhängend, und  $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  mit  $\nabla u = 0$ . Dann ist fast überall  $u \equiv \text{const}$  auf  $\Omega$ .

**Beweis:** Wir betrachten  $x_0 \in \Omega$  und  $B(x_0, 2\rho) \subseteq \Omega$ . Für  $\epsilon < \rho$  ist die Faltung  $u_\epsilon \in C^\infty(B(x_0, \rho))$  und für  $x \in B(x_0, \rho)$  ist  $\lambda_\epsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(B(x_0, 2\rho)) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ . Dies ergibt

$$\nabla u_\epsilon(x) = \int \nabla \lambda_\epsilon(x - y) u(y) \, d^n y = \int \lambda_\epsilon(x - y) \nabla u(y) \, d^n y = 0.$$

Daher ist  $u_\epsilon \equiv \text{const}$  auf  $B(x_0, \rho)$ , und, da  $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $L^1(B(x_0, \rho))$ , ist fast überall  $u \equiv \text{const}$  auf  $B(x_0, \rho)$ . Da  $\Omega$  zusammenhängend ist, folgt  $u^{-1}[\{u(x_0)\}] = \Omega$ . **q.e.d.**

Sobolevfunktionen können durch glatte Faltungen (3.10) lokal approximiert werden.

**Proposition 3.21.** Für  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < \infty$  gilt  $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ . Ist  $\text{supp}(u) \Subset \Omega$  oder  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , so existieren  $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ , also

$$u \in W_0^{k,p}(\Omega), \quad \text{wenn} \quad \text{supp}(u) \Subset \Omega,$$

und  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . Ist schließlich  $\Omega = \mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ , so existieren  $u_m \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , d.h.  $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)}$ .

**Beweis:** Wir betrachten die in (3.10) definierte Faltung  $u_\epsilon := \lambda_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Für  $x \in \Omega, \epsilon < d(x, \partial\Omega)$  ist  $\lambda_\epsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$ , und wir sehen für  $|\gamma| \leq k$

$$\begin{aligned} \partial^\gamma u_\epsilon(x) &= \int_{\Omega} \partial^\gamma \lambda_\epsilon(x - y) u(y) \, d^n y = \\ &= (-1)^{|\gamma|} \int_{\Omega} \partial_y^\gamma \lambda_\epsilon(x - y) u(y) \, d^n y = \int_{\Omega} \lambda_\epsilon(x - y) \partial^\gamma u(y) \, d^n y = (\partial^\gamma u)_\epsilon(x) \end{aligned}$$

im Sinne einer schwachen Ableitung. Da  $\partial^\gamma u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  folgt mit Proposition 3.15  $\partial^\gamma(u_\epsilon) = (\partial^\gamma u)_\epsilon \rightarrow \partial^\gamma u$  in  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ , also  $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ . Ist  $\text{supp}(u) \Subset \Omega$  oder  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , so gilt mit obiger Rechnung und Proposition 3.15  $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ .

Im Fall  $\text{supp}(u) \Subset \Omega$  wissen wir weiter, dass  $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ , wenn  $\epsilon < d(\text{supp}(u), \partial\Omega)$ .

Im Fall  $\Omega = \mathbb{R}^n$  können wir mit obigem Argument  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$  annehmen. Wir wählen  $\eta_1 \in C_0^\infty(B(0,2))$  mit  $\eta_1 \equiv 1$  auf  $B(0,1)$ . Für  $R \geq 1$  gilt dann

$$|\partial^l \eta_R| \leq C_l R^{-l} \chi_{B(0,2R) \setminus B(0,R)} \quad \text{für } l \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \eta_R(x) := \eta_1\left(\frac{x}{R}\right).$$

Wir setzen  $u_R := \eta_R u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt für  $|\gamma| \leq k$  im Grenzwert  $R \rightarrow \infty$

$$\partial^\gamma u_R \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta \eta_R \partial^{\gamma-\beta} u \quad \|\partial^\gamma u_R - \eta_R \partial^\gamma u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,k) R^{-1} \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0.$$

Da  $\eta_R \partial^\gamma u \rightarrow \partial^\gamma u$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  folgt  $\partial^\gamma u_R \rightarrow \partial^\gamma u$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , und  $u_R \rightarrow u$  in  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Im Fall  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  wählen wir den Faltungskern in  $\lambda \in C_0^\infty(B(0,1) \cap \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0))$ . Für  $x \in \mathbb{R}_+^n$  hängt die rechte Seite von (3.11) nur von den Werten von  $u$  auf  $\mathbb{R}_+^n$  ab. Wegen  $\|u_\epsilon|_{\mathbb{R}_+^n} - u|_{\mathbb{R}_+^n}\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|u_\epsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  folgt auch dieser Fall. **q.e.d.**

Schwache Ableitungen können durch endliche Differenzen approximiert werden. Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $h \neq 0$ ,  $l = 1, \dots, n$  und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  setzen wir

$$\partial_l^h u(x) := \frac{u(x + h e_l) - u(x)}{h} \quad \text{für} \quad x \in \Omega \cap (\Omega - h e_l). \quad (3.13)$$

Wenn wir  $x + h e_l$  durch  $x$  substituieren erhalten wir die diskrete partielle Integration:

$$\int \partial_l^h u \phi \, d\mu = - \int u \partial_l^{-h} \phi \, d\mu \quad \text{für} \quad u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ und } \phi \in C_0(\Omega).$$

**Proposition 3.22.** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , und  $l = 1, \dots, n$ .*

*Für  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ,  $\Omega' \Subset \Omega$  und  $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$  gilt*

$$\|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} \quad \text{und} \quad \partial_l^h u \rightarrow \partial_l u \text{ in } W_{\text{loc}}^{k-1,p}(\Omega) \text{ für } h \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

*Gilt umgekehrt für  $1 < p \leq \infty$ ,  $u \in W^{k-1,p}(\Omega)$ ,  $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$  und  $l = 1, \dots, n$*

$$\text{für alle } \Omega' \Subset \Omega \quad \|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq C(\Omega'), \quad (3.15)$$

$$\text{so ist } u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) \text{ mit} \quad \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq C(n,k,\Omega'). \quad (3.16)$$

**Beweis:** Für  $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ ,  $|\gamma| \leq k-1$ ,  $x \in \Omega' \Subset \Omega$  und  $|h| < d(\Omega', \partial\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} \partial^\gamma \partial_l^h u(x) &= \frac{\partial^\gamma u(x + h e_l) - \partial^\gamma u(x)}{h} = \int_0^1 \partial^\gamma \partial_l u(x + t h e_l) dt \\ \|\partial^\gamma \partial_l^h u\|_{L^p(\Omega')}^p &\leq \int_{\Omega'} \int_0^1 |\partial^\gamma \partial_l u(x + t h e_l)|^p dt dx \leq \int_0^1 \int_{\Omega} |\partial^\gamma \partial_l u(y)|^p dy dt \leq \|\partial^\gamma \partial_l u\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

wegen Jensens Ungleichung. Für glatte  $u$  folgen nacheinander beide Seiten von (3.14).

Für allgemeines  $u$  existiert nach Proposition 3.21  $u_m \in C^\infty(\Omega)$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ . Mit  $\Omega' \Subset \Omega'' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \Omega') < \delta\} \Subset \Omega$  und für  $|h| < \delta < d(\Omega', \partial\Omega)$  gilt

$$\|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leftarrow \|\partial_l^h u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq \|\partial_l u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} \rightarrow \|\partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')},$$

also (3.14) linke Seite. Die rechte Seite folgt im Grenzwert  $m \rightarrow \infty$ , weil folgendes gilt:

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0} \|\partial_l^h u - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \|\partial_l^h u_m - \partial_l u_m\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} + \|\partial_l^h(u - u_m)\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} + \|\partial_l u_m - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \leq \\ & \leq 2\|\partial_l u_m - \partial_l u\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')}. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ ,  $|\gamma| \leq k-1$  und  $0 < h < d(\text{supp } \varphi, \partial\Omega')$

$$\begin{aligned} \left| \int u \partial_l \partial^\gamma \varphi \, d\mu \right| &= \left| \int \partial^\gamma u \partial_l \varphi \, d\mu \right| \leftarrow \left| \int \partial^\gamma u \partial_l^{-h} \varphi \, d\mu \right| = \left| \int \partial^\gamma \partial_l^h u \varphi \, d\mu \right| \leq \\ & \leq \|\partial_l^h u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega') \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

aus (3.15). Für  $1 < p \leq \infty$  folgt mit Proposition 3.19  $u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$  und (3.16) aus

$$\left| \int u \partial^\gamma \varphi \, d\mu \right| \leq \|u\|_{W^{k-1,p}(\Omega')} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}. \quad \text{q.e.d.}$$

**Bemerkung 3.23.** Für  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  sehen wir durch zweimalige Anwendungen von (3.14) für  $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ ,  $0 < h < d(\Omega', \partial\Omega'')$ ,  $d(\Omega'', \partial\Omega)$ ,

$$\|\partial_l^{-h} \partial_l^h u\|_{L^1(\Omega')} \leq \|\partial_l \partial_l^h u\|_{L^1(\Omega'')} \leq \|\partial_l^2 u\|_{L^1(\Omega)}$$

und  $\partial_l^{-h} \partial_l^h u \rightarrow \partial_l^2 u$  in  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  durch Approximation mit Proposition 3.21.

Für  $p = \infty$  können wir  $W^{1,\infty}$  mit Hölderräumen identifizieren.

**Proposition 3.24.** Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $C^{k-1,1}(\Omega) \subseteq W^{k,\infty}(\Omega)$  und

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n) \text{lip}_\Omega u \text{ für } u \in C^{0,1}(\Omega). \quad (3.17)$$

Ist  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  oder  $\Omega$  konvex, so gilt  $W^{k,\infty}(\Omega) \subseteq C^{k-1,1}(\Omega)$ , und, falls  $\Omega$  zusammenhängend ist,  $\text{lip}_\Omega u \leq C(\Omega, n) \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$  für  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ .

**Beweis:** Es genügt den Fall  $k = 1$  zu beweisen. Für  $u \in C^{0,1}(\Omega)$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  und  $0 < h < d(\text{supp}(\varphi), \partial(\Omega))$ ,  $l = 1, \dots, n$  gilt mit diskreter partieller Integration

$$\left| \int u \partial_l \varphi \right| \leftarrow \left| \int u \partial_l^h \varphi \right| = \left| \int \partial_l^{-h} u \varphi \right| \leq \text{lip}_\Omega u \|\varphi\|_{L^1(\Omega)}.$$

Dann folgt mit Proposition 3.19, dass  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$  und (3.17). Nun sei  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . Zuerst betrachten wir  $\Omega = B(0, 1)$ . Dann liegt die Faltung (3.10)  $u_\epsilon = \lambda_\epsilon * u$  in  $C^\infty(B(0, 1 - \epsilon))$ . Da  $\lambda_\epsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(B(0, 1))$  für  $x \in B(0, 1 - \epsilon)$ , folgt

$$\begin{aligned} \nabla u_\epsilon(x) &= \int \nabla \lambda_\epsilon(x - y) u(y) \, d^n y = \int \lambda_\epsilon(x - y) \nabla u(y) \, d^n y \\ \text{lip}_{B(0, 1 - \epsilon)} u_\epsilon &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(0, 1))}. \end{aligned}$$

Gemäß Proposition 3.15 konvergiert  $u_\epsilon \rightarrow u$  in  $L^1_{\text{loc}}(B(0, 1))$  für  $\epsilon \downarrow 0$ . Dies ergibt  $u \in C^{0,1}(B(0, 1))$  für einen geeigneten Repräsentanten und

$$\text{lip}_{B(0, 1)} u \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(0, 1))}. \quad (3.18)$$

Für allgemeines  $\Omega$  erhalten wir  $W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega) = C^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ . Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  zusammenhängend mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  existiert nach Lemma 3.13 für beliebige  $x, y \in \Omega$  ein stetig differenzierbaren Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ , mit  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$  und (3.7). Gleiches gilt für konvexes  $\Omega$  mit  $C(\Omega) = 1$ . Wir unterteilen  $[0, 1]$  in  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  mit

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < d(\gamma([0, 1]), \partial\Omega) =: \delta \text{ für } i = 1, \dots, N.$$

Dann folgt für  $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \subseteq C^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega)$  mit (3.18)

$$\begin{aligned} |u(\gamma(t_i)) - u(\gamma(t_{i-1}))| &\leq \text{lip}_{B(\gamma(t_i), \delta)} u |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(\gamma(t_i), \delta))} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'| \\ |u(x) - u(y)| &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^1 |\gamma'| \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} |x - y|. \end{aligned}$$

Dies ergibt  $u \in C^{0,1}(\Omega)$  und  $\text{lip}_\Omega u \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

Ist  $\Omega$  nicht zusammenhängend, so ist  $u \in C^{0,1}(\Omega')$  für alle Zusammenhangskomponenten  $\Omega'$  von  $\Omega$ . Da  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ , gibt es nur endlich viele Zusammenhangskomponenten und diese haben positiven Abstand zueinander. Dies ergibt  $u \in C^{0,1}(\Omega)$ . **q.e.d.**

Wir stellen einige einfache Rechenregeln für Sobolevfunktionen zusammen.

**Proposition 3.25. (*Produktregel*)** Es sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $v \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  mit  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Dann ist  $uv \in W^{1,r}(\Omega)$  und

$$\nabla(uv) = (\nabla u)v + u\nabla v. \quad (3.19)$$

**Beweis:** Zuerst betrachten wir  $p, q < \infty$ . Gemäß Proposition 3.21 existieren  $u_m, v_m \in C^\infty(\Omega)$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$  und  $u_m \rightarrow v$  in  $W_{\text{loc}}^{1,q}(\Omega)$ . Dann folgt  $u_m v_m \rightarrow uv$  aus  $u_m v_m \in C^\infty(\Omega)$  mit der Hölderungleichung in  $L_{\text{loc}}^r(\Omega)$  und

$$\nabla(u_m v_m) = (\nabla u_m)v_m + u_m \nabla v_m \rightarrow (\nabla u)v + u \nabla v.$$

Damit folgt  $uv \in W_{\text{loc}}^{1,r}(\Omega)$  und (3.19) in  $L^r(\Omega)$ . Da  $uv \in L^r(\Omega)$ , folgt  $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ .

Ohne die Endlichkeitannahme an  $p, q$  erhalten wir für  $r > 1$  zuerst  $uv \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  und anschließend  $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ , da  $uv \in L^r(\Omega)$  und  $\nabla(uv) \in L^r(\Omega)$ . Ist  $r = 1$  und o.B.d.A.  $p = \infty, q = 1$  so approximieren wir  $u_m \rightarrow u, v_m \rightarrow v$  in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  durch glatte  $u_m, v_m$ . Für ein festes  $l \in \mathbb{N}$  folgt  $u_m v_l \rightarrow uv_l$  in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  für  $m \rightarrow \infty$ , und  $uv_l$  erfüllt (3.19). Dann folgt  $uv_l \rightarrow uv$  in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  für  $l \rightarrow \infty$  und (3.19), da  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . **q.e.d.**

**Proposition 3.26. (*Kettenregel*)** Es sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Dann ist  $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$  und  $\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u$ .

**Beweis:** Gemäß Proposition 3.21 existieren  $u_m \in C^\infty(\Omega)$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  und  $u_m \rightarrow u$ ,  $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$  punktweise fast überall. Es gilt  $f(u_m) \in C^1(\Omega) \subseteq W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  und

$$|f(u_m) - f(u)| \leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u_m - u| \quad f'(u_m)\nabla u_m \rightarrow f'(u)\nabla u$$

punktweise fast überall in  $\Omega$ . Aus der Konvergenz in  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  folgt  $f(u) \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  mit

$$\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u \in L^p(\Omega). \quad \text{Mit} \quad |f(u)| \leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u|,$$

wegen  $f(0) = 0$ , folgt  $f(u) \in L^p(\Omega)$  und schließlich  $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ . **q.e.d.**

**Proposition 3.27.** Für  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  ist  $|u| \in W^{1,1}(\Omega)$  mit

$$\nabla|u| = \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ 0 & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

Außerdem ist  $\nabla u = 0$  fast überall auf  $u^{-1}[\{0\}] \cap \Omega$ .



**Beweis:** Mit Proposition 3.26 ist für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  und  $\epsilon > 0$

$$u_\epsilon := ((u + \theta\epsilon)^2 + \epsilon^2)^{1/2} - \epsilon\sqrt{\theta^2 + 1} \in W^{1,1}(\Omega) \quad \nabla u_\epsilon = \frac{u + \theta\epsilon}{((u + \theta\epsilon)^2 + \epsilon^2)^{1/2}} \nabla u.$$

Im Grenzwert  $\epsilon \downarrow 0$  konvergiert  $u_\epsilon \rightarrow |u|$  in  $L^1(\Omega)$  und

$$\nabla u_\epsilon \rightarrow \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}} & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

punktweise fast überall in  $\Omega$  und in  $L^1(\Omega)$ . Daraus folgt  $|u| \in W^{1,1}(\Omega)$  und

$$\nabla |u| = \nabla u \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}} & \text{für } u = 0, \\ -1 & \text{für } u < 0. \end{cases}$$

Da die schwache Ableitung wohldefiniert ist, ist obiger Ausdruck unabhängig von  $\theta \in \mathbb{R}$ , und somit ist  $\nabla u = 0$  fast überall auf  $u^{-1}[\{0\}]$ . Dies ergibt die Behauptung. **q.e.d.**

Für Transformationen im Definitionsbereich haben wir folgende Proposition.

**Proposition 3.28.** *Es seien  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\Psi : \Omega_1 \cong \Omega_2$  eine bi-lipschitzstetige Abbildung mit  $\text{lip}_{\Omega_1} \Psi \leq \Lambda$  und  $\text{lip}_{\Omega_2} \Psi^{-1} \leq \Lambda$ . Für  $1 \leq p \leq \infty$  folgt  $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$  aus  $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$ . Mit der schwachen Ableitung  $D\Psi$  von  $\Psi \in C^{0,1}(\Omega_1) \subseteq W^{1,\infty}(\Omega_1)$ , die gemäß Proposition 3.24 existiert, gilt dann*

$$\nabla(u \circ \Psi) = ((\nabla u) \circ \Psi) \cdot D\Psi \quad \text{mit} \quad \|u \circ \Psi\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C(\Lambda, n) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_2)}. \quad (3.20)$$

**Beweis:** Zuerst sei  $u \in C^\infty(\Omega_2)$ . Für  $\Omega'_1 \Subset \Omega_1$  konvergiert mit Proposition 3.15 die Faltung (3.10)  $\Psi_\epsilon \rightarrow \Psi$  gleichmäßig auf  $\Omega'_1$ ,  $D\Psi_\epsilon \rightarrow D\Psi$  punktweise fast überall in  $\Omega$ ,

$$\|D\Psi_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega'_1)} \leq \|D\Psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda.$$

Wählen wir  $\overline{\Psi(\Omega'_1)} \Subset \Omega'_2 \Subset \Omega_2$ , so gilt  $\Psi_\epsilon(\Omega'_1) \subseteq \Omega'_2$  für kleine  $\epsilon$ . Dies ergibt  $u \circ \Psi_\epsilon \in C^\infty(\Omega'_1)$  und  $u \circ \Psi_\epsilon \rightarrow u \circ \Psi$  gleichmäßig auf  $\Omega'_1$  mit

$$\nabla(u \circ \Psi_\epsilon) = ((\nabla u) \circ \Psi_\epsilon) \cdot D\Psi_\epsilon \rightarrow ((\nabla u) \circ \Psi) \cdot D\Psi$$

in  $L^1(\Omega'_1)$ , da die Konvergenz punktweise fast überall in  $\Omega'_1$  und  $\nabla u$  auf  $\Omega'_2$  und  $D\Psi_\epsilon$  auf  $\Omega'_1$  beschränkt sind. Daraus folgt  $u \circ \Psi \in W^{1,1}(\Omega'_1)$  und die linke Gleichung von (3.20). Nun gilt für lebesguemeßbares  $A \subseteq \Omega_2$

$$\mu(\Psi^{-1}(A)) \leq (\text{lip}_{\Omega_2} \Psi^{-1})^n \mu(A) \quad \text{also} \quad \int_{\Omega_1} v \circ \Psi \leq \Lambda^n \int_{\Omega_2} v$$

für  $v \in L^1(\Omega_2)$  mit  $v \geq 0$ . Daraus folgt  $u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega_1)$  und

$$\|u \circ \Psi\|_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C(\Lambda, n) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_2)}. \quad (3.21)$$

Ist schließlich  $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$  so existieren mit Proposition 3.21  $u_m \in C^\infty(\Omega_2)$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega_2)$  und punktweise fast überall. Aus (3.21) folgt, dass  $u_m \circ \Psi$  in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega_1)$  konvergiert. Andererseits konvergiert  $u_m \rightarrow u$  und  $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$  fast überall auf  $\Omega_2$ , z.B. auf  $\Omega_2 - N$  mit  $\mu(N) = 0$ . Da  $\mu(\Psi^{-1}(N)) = 0$ , da  $\Psi^{-1}$  lipschitzstetig ist, konvergiert  $u_m \circ \Psi \rightarrow u \circ \Psi$  und  $(\nabla u_m) \circ \Psi \rightarrow (\nabla u) \circ \Psi$  fast überall auf  $\Omega_1$ . Daraus folgt  $u \circ \Psi \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega_1)$ , und die linke Gleichung von (3.20) aus der entsprechenden Gleichung für  $u_m \in C^\infty(\Omega_2)$ . Aus (3.21) für  $u_m$  folgt  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  und (3.20). **q.e.d.**

Als nächstes setzen wir Funktionen über einen genügend glatten Rand hinweg fort.

**Fortsetzungssatz 3.29.** *Es sei  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann existiert für jedes  $\Omega' \ni \Omega$  ein Fortsetzungsoperator  $E : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,p}(\Omega')$  mit*

$$Eu|_\Omega = u \quad \text{und} \quad \|Eu\|_{W^{l,q}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', n, k) \|u\|_{W^{l,q}(\Omega)} \quad \forall 0 \leq l \leq k, 1 \leq q \leq p.$$

**Beweis:** Für  $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$  definieren wir einen Fortsetzungsoperator

$$E_0 : W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \quad (E_0 u)(y, t) := \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i u(y, -it) \quad \text{für } t < 0,$$

wobei die  $\sigma_i$  so gewählt sind, dass  $\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i (-i)^m = 1$  für  $m = 0, \dots, k$  gilt. Damit folgt

$E_0 u \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  aus  $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ . Und mit Proposition 3.24 folgt auch  $E_0 u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$  aus  $u \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}_+^n)$  und

$$\|E_0 u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, k) \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Da  $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  gemäß Proposition 3.21 in  $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$  dicht liegt bzw. mit Proposition 3.24  $C^{k-1,1}(\mathbb{R}_+^n) = W^{k,\infty}(\mathbb{R}_+^n)$  gilt, setzt sich  $E_0$  stetig auf  $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  fort.

Da  $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$  kompakt ist, können wir endlich viele  $x_1, \dots, x_N \in \partial\Omega$  mit Umgebungen  $x_j \in U_j \Subset \Omega'$  und bi- $C^{k-1,1}$ -Abbildungen  $\Psi_j$  wählen, die nach einer Rotation

$$\Psi_j(y, t) := \lambda_j^{-1}((y, t - \varphi_j(y)) - x_j) \quad \Psi_j^{-1}(y, t) := \lambda_j(y, t) + \phi_j(y) + x_j \quad \text{mit}$$

$$\lambda_j > 0, \quad \varphi_j \in C^{k-1,1}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \text{und}$$

$$\Psi_j : U_j \cong B(0, 1), \quad \Psi_j(x_j) = 0, \quad \Psi_j(U_j \cap \Omega) = B(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^n$$

und  $\partial\Omega \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_N \Subset \Omega'$  erfüllen. Dazu wählen wir eine offene Teilmenge  $U_0 \Subset \Omega$  mit  $\bar{\Omega} \subseteq U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_N \Subset \Omega'$  und eine entsprechende Zerlegung der Eins

$$\eta_j \in C_0^\infty(U_j) \quad 0 \leq \eta_j \leq 1 \quad \text{für } j = 0, \dots, N \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^N \eta_j \equiv 1 \text{ auf } \bar{\Omega}. \quad (3.22)$$

Damit definieren wir für  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  als  $E_j u := E_0((\eta_j u) \circ \Psi_j^{-1}) \circ \Psi_j$ .

Aus Propositionen 3.24 und 3.28 folgt  $\Psi_j \in C^{k-1,1}(U_j) \subseteq W^{k,\infty}(U_j)$  und

$$E_j u \in W^{k,p}(\Omega') \quad \text{mit} \quad \|E_j u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C(\eta_j, \Psi_j, U_j, n, k) \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \quad (3.23)$$

Da  $\text{supp}(\eta_j) \Subset U_j$  folgt  $\text{supp}(E_j u) \Subset U_j \Subset \Omega'$  aus der Definition von  $E_0$ , also  $E_j u \in W_0^{k,p}(\Omega')$  aus der Proposition 3.21. Weiter gilt  $E_j u|_\Omega = \eta_j u$ . Schließlich setzen wir

$$Eu := \eta_0 u + \sum_{j=1}^N E_j u \in W_0^{k,p}(\Omega'),$$

Aus (3.22) und  $E_j u|_\Omega = \eta_j u$  folgt  $E|_\Omega = \eta_0 u + \sum_{j=1}^N E_j u|_\Omega = \eta_0 u + \sum_{j=1}^n \eta_j u = u$ . **q.e.d.**

Damit können wir die Approximation aus Proposition 3.21 verschärfen.

**Approximationssatz 3.30.** *Es sei  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$  und  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Dann existieren  $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ .*

**Beweis:** Für ein  $\Omega' \supset \Omega$  betrachten wir den Fortsetzungsoperator aus Satz 3.29

$$E : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,p}(\Omega').$$

Wir wählen  $v_m \in C_0^\infty(\Omega')$  mit  $v_m \rightarrow Eu$  in  $W^{k,p}(\Omega')$ . Für  $u_m := v_m|_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$  folgt

$$u_m = v_m|_\Omega \rightarrow Eu|_\Omega = u \text{ in } W^{k,p}(\Omega). \quad \text{q.e.d.}$$

**Übungsaufgabe 3.31.** *Zeige mit den folgenden Aussagen, dass  $f_1, \dots, f_n \in C^{0,1}(\Omega)$  auf einer offenen beschränkten Menge  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  den Divergenzsatz erfüllt.*

(i) Für  $f \in W_0^{1,\infty}(B^{n-1}(0, \varrho) \times (-M, M))$  und  $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0, \varrho))$  definieren wir

$$\int_{\{(y, \varphi(y)) | y \in B^{n-1}(0, \varrho)\}} f \cdot N \, d\sigma = \int_{B^{n-1}(0, \varrho)} f(y, \varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi(y), -1) \, d^{n-1}y.$$

Für  $\partial\Omega \in C^1$  stimmt das entsprechende  $\int_{\partial\Omega} f \cdot N \, d\sigma$  mit Definition 1.5 überein.

(ii) Zeige für  $f_1, \dots, f_n \in C_0^\infty(B^{n-1}(0, \varrho) \times (-M, M))$  und  $\varphi \in C^{0,1}(B^{n-1}(0, \varrho))$

$$\int_{B^{n-1}(0, \varrho)} \int_{\varphi(y)}^M \nabla \cdot f(y, t) \, dt \, d^{n-1}y = \int_{B^{n-1}(0, \varrho)} f(y, \varphi(y)) \cdot (\nabla_y \varphi(y), -1) \, d^{n-1}y.$$

Folgende Proposition stellt den Zusammenhang zwischen Randwerten und  $W_0^{1,p}$  her.

**Proposition 3.32\*** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ , und  $1 \leq p < \infty$ . Ein  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$  gehört genau dann zu  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , wenn  $u$  auf  $\partial\Omega$  verschwindet.*

**Beweis\*:**  $(\Rightarrow)$  : Es sei  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ . Falls  $\sup_{\partial\Omega} |u| > 0$ , so existiert  $x_0 \in \partial\Omega$  mit einer Umgebung  $U(x_0)$ , so dass o.B.d.A.  $u \geq \epsilon$  in  $U(x_0)$ , also  $\min(u, \epsilon) = \epsilon$  in  $U(x_0)$  gilt. Da  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  existiert  $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  und  $u_m \rightarrow u$  und  $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$  punktweise fast überall. Es gilt  $\min(u_m, \epsilon) \rightarrow \min(u, \epsilon)$  in  $L^p(\Omega)$ , und mit Proposition 3.27 gilt  $\min(u_m, \epsilon) \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\nabla \min(u_m, \epsilon) \rightarrow \chi_{[u < \epsilon]} \nabla u$  punktweise fast überall,  $|\nabla \min(u_m, \epsilon)| \leq |\nabla u_m|$ , also  $\min(u_m, \epsilon) \rightarrow \min(u, \epsilon)$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Für  $\varphi \in C_0^1(U(x_0), \mathbb{R}^n)$  rechnen wir mit  $\min(u_m, \epsilon) \in C_0^{0,1}(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} \epsilon \varphi \cdot N \, d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \cdot ((\min(u, \epsilon) \varphi) \, d\mu \leftarrow \int_{\Omega} \nabla \cdot ((\min(u_m, \epsilon) \varphi) \, d\mu = 0.$$

Auf  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  gilt dies nicht für alle  $\varphi \in C_0^1(U(x_0), \mathbb{R}^n)$ . Also folgt  $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ .

$(\Leftarrow)$  : Es sei  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$  mit  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Für  $u_\epsilon := \max(u, \epsilon) - \epsilon$  mit  $\epsilon > 0$  gilt  $\text{supp}(u_\epsilon) \subseteq \Omega$ ,  $u_\epsilon \rightarrow u_+$  in  $L^p(\Omega)$ , und mit Proposition 3.27 gilt weiter  $u_\epsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ ,

$$\nabla u_\epsilon = \chi_{[u > \epsilon]} \nabla u \rightarrow \chi_{[u > 0]} \nabla u \text{ punktweise fast überall, und } |\nabla u_\epsilon| \leq \chi_{[u > 0]} |\nabla u|,$$

also  $u_\epsilon + u_+$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Mit Proposition 3.21 ergibt sich  $u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , also  $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Genauso folgt  $(-u)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$  und schließlich  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . **q.e.d.**

Dies legt folgende Definition nahe.

**Definition 3.33\*** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$  offen und  $1 \leq p < \infty$ . Wir sagen  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  hat Nullrandwerte auf  $\Gamma$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ , geschrieben  $u = 0$  auf  $\Gamma$ , wenn  $u\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$  für alle  $\eta \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma)$ . Wir sagen  $v \in W^{1,p}(\Omega)$  hat die gleichen Randwerte wie  $u$ , falls  $u - v = 0$  auf  $\Gamma$ . Die Randwerte bleiben unter Konvergenz erhalten.*

**Proposition 3.34\*** *Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$  offen  $1 \leq p < \infty$ . Dann ist*

$$V := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \Gamma\} \subseteq W^{1,p}(\Omega) \quad \text{ein abgeschlossener Unterraum.}$$

**Beweis\*:** Klarerweise ist  $V$  ein Unterraum. Nun sei  $u_m \in V$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Für  $\eta \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma)$  gilt  $\eta u_m \rightarrow \eta u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Da  $\eta u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$  und  $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$  abgeschlossen ist, folgt  $\eta u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  und  $u = 0$  auf  $\Gamma$ , also  $u \in V$ . **q.e.d.**

Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  bezeichne  $\Omega_\pm := \mathbb{R}^{n-1} \times \pm(0, \infty) \subset \mathbb{R}^n$  und  $\Omega_0 = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Approximationen können mit Erhaltung von Nullrandwerte durchgeführt werden.

**Proposition 3.35\*** *Sei  $u \in W^{1,p}(B(0, 1)_+)$ ,  $1 \leq p < \infty$  mit  $u = 0$  auf  $B(0, 1)_0$ . Dann existieren  $u_m \in C^\infty(\overline{B(0, 1)_+})$  mit  $u_m = 0$  auf  $B(0, 1)_0$  und  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(B(0, 1)_+)$ .*

**Beweis\*:** Wir setzen  $u(y, t) = 0$  für  $t < 0$  und  $\Omega := B(0, 1) \cup \mathbb{R}^n$ . Nach Definition 3.33 gilt  $u\eta \in W_0^{1,p}(B(0, 1)_+)$  für  $\eta \in C_0^1(\Omega)$ . Durch Approximation mit  $u_m \in C_0^\infty(B(0, 1)_+)$  folgt

$$0 = \int_{B(0,1)_+} \nabla(u\eta) = \int_{\Omega} u \nabla \eta + \int_{B(0,1)_+} \nabla u \eta,$$

also  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Wir setzen  $u_h(y, t) := u(y, t-h)$  für  $h > 0$  und  $(y, t) \in \Omega_h := \Omega + h e_n$  und wählen  $h$  für gegebenes  $\delta > 0$  so, dass  $\|u_h - u\|_{W^{1,p}(B(0,1)_+)} < \delta$  gilt. Da  $B(0, 1)_+ \Subset \Omega_h$ , konvergiert die Faltung  $u_{h,\epsilon} \in C^\infty(\overline{B(0, 1)_+})$  nach Proposition 3.21  $u_{h,\epsilon} \rightarrow u_h$  in  $W^{1,p}(B(0, 1)_+)$ , also  $\|u_{h,\epsilon} - u_h\|_{W^{1,p}(B(0,1)_+)} < \delta$  für  $\epsilon$  hinreichend klein. Für  $\epsilon < h$  gilt  $u_{h,\epsilon} = 0$  auf  $B(0, 1)_0$ . Wählen wir  $\delta_m \downarrow 0$ , so erhalten wir die gewünschte Folge. **q.e.d.**

Wir setzen eine Funktion  $u : B(0, 1)_+ \rightarrow \mathbb{R}$  folgendermaßen auf  $B(0, 1)$  fort:

$$E_{\pm,0}u(y, t) := \begin{cases} u(y, t) & \text{falls } t > 0, \\ \{\pm, 0\}u(y, -t) & \text{falls } t < 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

**Proposition 3.36\*:** Für  $u \in W^{1,p}(B(0, 1)_+)$ ,  $1 \leq p < \infty$  gilt  $E_+u \in W^{1,p}(B(0, 1))$  und, falls  $u = 0$  auf  $B(0, 1)_0$ , gilt weiter  $E_0u \in W^{1,p}(B(0, 1))$  und  $E_-u \in W^{1,p}(B(0, 1))$ .

**Beweis\*:** Mir Proposition 3.30 und 3.35 existieren  $u_m \in C^\infty(\overline{B(0, 1)_+})$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(B(0, 1)_+)$ , und, falls  $u = 0$  auf  $B(0, 1)_0$ , so gilt weiter  $u_m = 0$  auf  $B(0, 1)_0$ . Dies ergibt  $E_{\pm,0}u_m \in C^{0,1}(B(0, 1)) \subseteq W^{1,p}(B(0, 1))$ ,

$$\|\nabla E_{\pm,0}u_m\|_{L^p(B(0,1))} \leq 2^{1/p} \|\nabla u_m\|_{L^p(B(0,1)_+)} \leq C$$

und  $E_{\pm,0}u_m \rightarrow E_{\pm,0}u$  in  $L^p(B(0, 1))$ . Daraus folgt  $E_{\pm,0}u \in W^{1,p}(B(0, 1))$ . **q.e.d.**

Bei zwei schwachen Ableitungen übertragen sich Nullrandwerte auf Ableitungen.

**Proposition 3.37\*:** Für  $u \in W^{2,p}(B(0, 1)_+)$ ,  $1 \leq p < \infty$  mit  $u = 0$  auf  $B(0, 1)_0$  gilt

$$\partial_l u = 0 \text{ auf } B(0, 1)_0 \quad \text{für} \quad l = 1, \dots, n-1.$$

**Beweis\*:** Für  $0 < \delta < 1/2$  wählen wir  $B(0, 1-\delta)_+ \subseteq \Omega_0 \subseteq B(0, 1)_+$  mit  $\partial\Omega \in C^\infty$  und betrachten den Fortsetzungsoperator  $E : W^{2,p}(\Omega_0) \rightarrow W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$  aus Satz 3.29. Mit Proposition 3.22 folgt  $\partial_l^h E u \rightarrow \partial_l E u$  in  $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{1,p}(B(0, 1-\delta)_+)$ . Da  $\partial_l^h E u = \partial_l^h u$  in  $B(0, 1-2\delta)_+$  für  $0 < |h| < \delta$ , folgt  $\partial_l^h u \rightarrow \partial_l u$  in  $W^{1,p}(B(0, 1-2\delta)_+)$ . Nun gilt  $\partial_l^h u = 0$  auf  $B(0, 1-2\delta)_0$ , und die Behauptung folgt aus Proposition 3.34 **q.e.d.**

Wir setzen Funktionen mit zwei schwachen Ableitungen ungerade durch  $E_-$  fort.

**Proposition 3.38\*:** Für  $u \in W^{2,p}(B(0, 1)_+)$ ,  $1 \leq p < \infty$  mit  $u = 0$  auf  $B(0, 1)_0$  gilt  $E_-u \in W^{2,p}(B(0, 1))$ .

**Beweis\*:** Proposition 3.36 und 3.37 ergeben  $\partial_l(E_-u) = E_-(\partial_l u) \in W^{1,p}(B(0))$  für  $l \neq n$  und  $\partial_n(E_-u) = E_+(\partial_n u) \in W^{1,p}(B(0, 1))$ , also  $E_-u \in W^{2,p}(B(0, 1))$ . **q.e.d.**

### 3.4 Einbettungssätze für Sobolevräume

Wir beginnen mit dem Satz von Rellich.

**Satz vom Rellich 3.39.** Für  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  und  $1 \leq p \leq \infty$  ist folgende Einbettung kompakt:  

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

**Beweis:** Für  $p = \infty$  folgt aus den Propositionen 3.10 und 3.24 die Kompaktheit von

$$W^{1,\infty}(\Omega) \cong C^{0,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Für  $1 \leq p < \infty$  betrachten wir eine beschränkte Folge  $u_m$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Mit dem Fortsetzungsoperator  $E$  aus Proposition 3.21 für  $B(0, R) \supset \Omega$  folgt  $Eu_m \in W_0^{1,p}(B(0, R))$ . Wir können also o.B.d.A.  $u_m \in W_0^{1,p}(B(0, R))$  mit  $\|u_m\|_{W^{1,p}(B(0,R))} \leq C$  annehmen.

Für die Faltung 3.10  $u_{m,\epsilon}$  eines  $u_m$  gilt wegen  $\lambda_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\lambda(x/\epsilon)$  und (3.8)

$$\begin{aligned} |u_{m,\epsilon}(x)| &= \left| \int \lambda_\epsilon(x-y)u_m(y) \, d^n y \right| \leq \frac{\|\lambda\|_{L^\infty(B(0,1))}}{\epsilon^n} \|u_m\|_{L^1(B(0,R))} \leq \frac{C'}{\epsilon^n} \\ |\nabla u_{m,\epsilon}(x)| &= \left| \int \nabla \lambda_\epsilon(x-y)u_m(y) \, d^n y \right| \leq \frac{\|\nabla \lambda\|_{L^\infty(B(0,1))}}{\epsilon^{n+1}} \|u_m\|_{L^1(B(0,R))} \leq \frac{C''}{\epsilon^{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Weiter gilt mit (3.12)  $\|u - u_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{|h|<\epsilon} \|u(\cdot + h) - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  und

$$\begin{aligned} \|u(\cdot + h) - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq \int |u(x+h) - u(x)|^p \, d^n x \leq \int \left( \int_0^1 |h \cdot \nabla u(x+th)| \, dt \right)^p \, d^n x \\ &\leq \int \int_0^1 |h \cdot \nabla u(x+th)|^p \, dt \, d^n x \leq |h|^p \int_0^1 \int |\nabla u(x+th)|^p \, d^n x \, dt = |h|^p \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned}$$

$$\text{Zusammen ergibt dies} \quad \|u - u_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.26)$$

Wegen (3.25) und dem Satz von Arzela-Ascoli können wir induktiv für jedes  $j \in \mathbb{N}$  die Folgenglieder  $u_m$  zu  $m \geq j$  durch eine Teilfolge von  $(u_m)_{m \geq j}$  ersetzen, so dass  $u_{m,j} := u_{m,\epsilon_j}$  mit  $\epsilon_j = \frac{1}{j}$  gleichmäßig auf  $B(0, R)$  und somit in  $L^p(B(0, R))$  konvergiert:

$$\limsup_{m,l \rightarrow \infty} \|u_{m,j} - u_{l,j}\|_{L^p(B(0,R))} = 0. \text{ Mit (3.26) folgt } \limsup_{m,l \rightarrow \infty} \|u_m - u_l\|_{L^p(B(0,R))} \leq 2C\epsilon_j.$$

Der Grenzwert  $j \rightarrow \infty$  zeigt, dass  $u_m$  in  $L^p(B(0, R))$  eine Cauchyfolge ist. **q.e.d.**

Mit dem Satz von Rellich erhalten wir eine Poincaréungleichung.

**Poincaréungleichung 3.40.** Es sei  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  offen, zusammenhängend mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , und  $M \subseteq W^{1,p}(\Omega)$  ein abgeschlossener Kegel, d.h. mit  $u \in M$  folgt  $\lambda u \in M$  für  $\lambda > 0$ , der außer  $0 \in M$  keine Konstanten enthält. Dann gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{für ein } C > 0 \text{ und für alle } u \in M.$$

**Beweis:** Angenommen die Gleichung ist falsch, dann existieren  $u_m \in M$  mit

$$\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{m} \|u_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Nach Übergang zu  $\frac{u_m}{\|u_m\|_{L^p(\Omega)}} \in M$  können wir weiter  $\|u_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$  annehmen, und  $u_m$  ist beschränkt in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Nach dem Satz von Rellich konvergiert für eine Teilfolge  $u_m \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$  mit  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ . Andererseits konvergiert wegen obiger Ungleichung  $\nabla u_m \rightarrow 0$  in  $L^p(\Omega)$  und daher  $u_m \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Also ist  $u \in M$  mit  $\nabla u = 0$ , und nach Proposition 3.20 ist  $u \equiv \text{const}$ , also nach der Voraussetzung  $u = 0$ . Dies widerspricht  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ , und die Ungleichung ist bewiesen. **q.e.d.**

Die Kombination des Satzes von Rellich mit dem Lemma von Ehrling 3.3, ergibt das

**Interpolationslemma für Sobolevräume 3.41.** *Für  $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  gilt*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p) \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/2} \|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/2}.$$

Für  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $\partial\Omega \in C^{1,1}$ ,  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  und  $2 \leq p \leq \infty$  gilt für  $0 < \epsilon < 1$

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon \|D^2 u\|_{L^p(\Omega)} + C(\Omega, n, p) \epsilon^{-1} \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

**Beweis:** Sei  $Q_\varrho$  ein offener Würfel mit Seitenlänge  $\varrho$ . Die Einbettungen

$$W^{2,p}(Q_1) \hookrightarrow W^{1,p}(Q_1) \hookrightarrow L^p(Q_1)$$

sind wegen dem Satz von Rellich 3.39 kompakt. Mit dem Lemma von Ehrling 3.3 folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} &\leq \frac{1}{2} \|u\|_{W^{2,p}(Q_1)} + 2\tilde{C}(n, p) \|u\|_{L^p(Q_1)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} + \frac{1}{2} \|D^2 u\|_{L^p(Q_1)} + 2\tilde{C}(n, p) \|u\|_{L^p(Q_1)} \quad \text{für } u \in W^{2,p}(Q_1), \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$\|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} \leq \|D^2 u\|_{L^p(Q_1)} + \tilde{C}(n, p) \|u\|_{L^p(Q_1)}.$$

Für  $\varrho > 0$  und  $u \in W^{2,p}(Q_\varrho)$ , reskalieren wir  $v(x) := u(\varrho x)$  und erhalten

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^p(Q_\varrho)} &= \varrho^{-1+n/p} \|\nabla v\|_{L^p(Q_1)} \leq \varrho^{-1+n/p} \|D^2 v\|_{L^p(Q_1)} + \tilde{C}(n, p) \varrho^{-1+n/p} \|v\|_{L^p(Q_1)} = \\ &= \varrho \|D^2 u\|_{L^p(Q_\varrho)} + \tilde{C}(n, p) \varrho^{-1} \|u\|_{L^p(Q_\varrho)}. \end{aligned}$$

Wir überdecken  $\mathbb{R}^n$  bis auf eine Nullmenge  $N$  durch abzählbar viele disjunkte Würfel der Seitenlänge  $\varrho$ :  $\mathbb{R}^n \setminus N = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_\varrho^i$ . Für  $a, b \geq 0$  gilt  $(\frac{a+b}{2})^p \leq \frac{a^p+b^p}{2} \leq \max\{a, b\}^p \leq$

$(a+b)^p$  wegen der Konvexität von  $x \rightarrow x^p$ . Für  $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$  und  $1 \leq p < \infty$  folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \sum_{i=1}^{\infty} \|\nabla u\|_{L^p(Q_{\varrho}^i)}^p \leq 2^{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \varrho^p \|D^2 u\|_{L^p(Q_{\varrho}^i)}^p + \tilde{C}(n,p) \varrho^{-p} \|u\|_{L^p(Q_{\varrho}^i)}^p \right) \\ &= \frac{1}{2} (2\varrho \|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^p + \frac{\tilde{C}(n,p)}{2} \left( \frac{2}{\varrho} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^p \leq \left( 2\varrho \|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{4\tilde{C}^{1/p}(n,p)}{2\varrho} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^p, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varrho \|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 4\tilde{C}^{1/p}(n,p) \varrho^{-1} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für alle } \varrho > 0. \quad (3.27)$$

Für  $p = \infty$  erhalten wir  $\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\nabla u\|_{L^\infty(Q_{\varrho}^i)} \leq$

$$\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \left( \varrho \|D^2 u\|_{L^\infty(Q_{\varrho}^i)} + C(n) \varrho^{-1} \|u\|_{L^\infty(Q_{\varrho}^i)} \right) = \varrho \|D^2 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C(n) \varrho^{-1} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

also wieder (3.27). Für  $\epsilon > 0$  setzen wir  $\varrho := \sqrt{\frac{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon}{\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon}} > 0$  und erhalten

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C(n,p) (\|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon) (\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon)$$

aus (3.27). Im Grenzwert  $\epsilon \downarrow 0$  folgt die erste Behauptung.

Für  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $\partial\Omega \in C^{1,1}$  und  $1 \leq p \leq \infty$  betrachten wir den Fortsetzungsoperator  $E : W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$  aus Satz 3.29 und erhalten für  $u \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/2} \|D^2 Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/2} + \|Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C(\Omega, n, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}^{1/2} \leq \epsilon \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} + C(\Omega, n, p) \epsilon^{-1} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq \epsilon \|D^2 u\|_{L^p(\Omega)} + \epsilon \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + C(\Omega, n, p) \epsilon^{-1} \|u\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

also nach Absorption des Termes  $\epsilon \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  die Behauptung. **q.e.d.**

Wir zeigen jetzt, dass Sobolevfunktionen höhere Integrabilität besitzen.

**Sobolevungleichung 3.42.** *Es sei  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < n$ . Dann gilt*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für } p^* := \frac{np}{n-p} \quad \text{d.h. } 1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p^*}.$$

**Beweis:** Zuerst sei  $p = 1$ ,  $p^* = \frac{n}{n-1}$  und  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n) dt_i, \quad \text{also}$$

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \quad \text{und}$$

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$



Nun integrieren wir bezüglich  $x_1$ . Dies ergibt mit (3.9)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |u(x_1, \dots, x_n)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \\ & \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t_1, x_2, \dots, x_n)| dt_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ & \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t_1, x_2, \dots, x_n)| dt_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n)| dt_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Sukzessive Integration über  $x_2, \dots, x_n$  ergibt  $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \right)^{\frac{n}{n-1}}$ , also

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.28)$$

Für  $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  gibt es nach Proposition 3.21  $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $u_j \rightarrow u$  in  $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ . Mit (3.28) folgt daraus

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_j| = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|. \quad (3.29)$$

Im Fall  $1 < p < n$  setzen wir  $v = |u|^\gamma$  für  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\gamma > 1$ . Mit (3.29) gilt

$$\|u\|_{L^{\frac{n\gamma}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^\gamma = \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u| \leq \gamma \|u\|_{L^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma-1} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Wir wählen  $\gamma$  so, dass  $\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{p(\gamma-1)}{p-1}$  bzw.  $\frac{p-1}{p}\gamma = \frac{n}{n-1}(\gamma-1)$ , also  $\left(\frac{p-1}{p} - \frac{n-1}{n}\right)\gamma = -\frac{n-1}{n}$  und  $\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{n}} = \frac{np}{n-p} = p^*$ . Dies ergibt  $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ .

Für allgemeine  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  folgt dies mit Proposition 3.21 wie oben. **q.e.d.**

**Soboleveinbettungssatz 3.43.** Für  $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ ,  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , und  $1 \leq p, q < \infty$  sind folgende Einbettungen stetig und bei strikten Ungleichungen kompakt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega) \quad \text{für} \quad k \geq l \quad \text{und} \quad k - \frac{n}{p} \geq l - \frac{n}{q}. \quad (3.30)$$

**Beweis:** Zuerst betrachten wir den Spezialfall  $k = 1, l = 0, 1 \leq p < n, 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$ . Für  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  gilt mit dem Fortsetzungsoperator  $E$  aus Satz 3.29,

$$Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

und mit der Sobolevungleichung 3.42 und

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p) \|\nabla Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega, n, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Aus  $-\frac{n}{p^*} = 1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$  folgt  $1 \leq q \leq p^*$ . Wegen (3.8) ist  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  stetig. Gilt die strikte Ungleichung in (3.30), also  $1 \leq q < p^*$ , und ist  $u_m$  beschränkt in  $W^{1,p}(\Omega)$ , so ist  $u_m$  nach dem Gezeigten beschränkt in  $L^{p^*}(\Omega)$ , und nach dem Satz von Rellich 3.39 konvergiert eine Teilfolge  $u_m$  in  $L^p(\Omega)$  gegen  $u$ . Für  $1 \leq q \leq p$  folgt der Spezialfall aus (3.8). Für  $p < q < p^*$  und  $M > 0$  folgt  $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{L^q(\Omega)}^q =$

$$\begin{aligned} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \left( \|(u_m - u)\chi_{[|u_m - u| \leq M]}\|_{L^q(\Omega)}^q + \|(u_m - u)\chi_{[|u_m - u| > M]}\|_{L^q(\Omega)}^q \right) \leq \\ &\leq M^{q-p} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{L^p(\Omega)}^p + M^{-p^*(1-\frac{q}{p^*})} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{q+p^*(1-\frac{q}{p^*})} \leq M^{q-p^*} (2C)^{p^*}, \end{aligned}$$

weil  $|u_m - u|^q \leq M^{q-p}|u_m - u|^p$  auf  $[|u_m - u| \leq M]$  gilt, und wegen (3.8) zusammen mit  $\mu([|u_m - u| > M])M^{p^*} \leq \|u_m - u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*}$ . Im Grenzwert  $M \rightarrow \infty$  folgt der Spezialfall.

Die allgemeine Aussage beweisen wir mit Induktion in  $k - l \in \mathbb{N}_0$ . Für  $k = l$  gilt  $1 \leq q \leq p$  und die Aussage folgt mit (3.8) aus der Stetigkeit von  $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ .

Nun sei  $k = l + 1$ . Dann gilt  $1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$ . Da  $q < \infty$ , gilt  $-\frac{n}{q} < 0$ , und wir können o.B.d.A.  $1 \leq p < n$  annehmen. Für  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  und  $|\gamma| \leq l$  ist  $\partial^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega)$ , und

$$\|\partial^\gamma u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p) \|\partial^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p) \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

folgt aus dem Gezeigten. Dann ist  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$  stetig. Für strikte Ungleichheit in (3.30) und  $u_m$  beschränkt in  $W^{k,p}(\Omega)$  ist  $\partial^\gamma u_m$  für  $|\gamma| \leq l$  beschränkt in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Mit dem Spezialfall konvergiert eine Teilfolge  $\partial^\gamma u_m$  in  $L^q(\Omega)$ , also  $u_m$  in  $W^{l,q}(\Omega)$ .

Schließlich sei  $k \geq l + 2$ . Ist  $p \geq n$ , so gilt  $k - \frac{n}{p} > (k - 1) - \frac{n}{n} \geq l > l - \frac{n}{q}$  und per Induktion ist die folgende Einbettung kompakt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega).$$

$$\text{Ist } 1 \leq p < n, \text{ so gilt } k - \frac{n}{p} = (k - 1) - \frac{n}{p^*} \geq l - \frac{n}{q}, \quad (3.31)$$

$$\text{und per Induktion ist die Einbettung } W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega) \quad (3.32)$$

stetig. Ist die Ungleichung in (3.30) strikt, dann auch in (3.31), und per Induktion ist die zweite Einbettung in (3.32) kompakt, also auch die Einbettung (3.30). **q.e.d.**

**Bemerkung 3.44.** Im kritischen Fall  $1 - \frac{n}{p} = -\frac{n}{\infty} := 0$ , also  $p = n$ , gilt für  $n \geq 2$   $W^{1,n}(\Omega) \not\subset L^\infty(\Omega)$ . Dazu betrachten wir auf  $B(0, 1)$

$$u(x) := \ln(1 + |\ln|x||).$$

Klarerweise gilt  $u \notin L^\infty(B(0, 1))$ . Weiter gilt  $u \in W^{1,n}(B(0, 1))$  für  $n \geq 2$  wegen

$$|\nabla u(x)| = \frac{1}{|x|(1 + |\ln|x||)} \quad \|\nabla u\|_{L^n(B(0,1))}^n = \int_0^1 \frac{n\omega_n r^{n-1} dr}{r^n(1 - \ln r)^n} = \int_0^1 \frac{n\omega_n dt}{(1+t)^n} = \frac{n\omega_n}{n-1}.$$

Nun betten wir Sobolevräumen in Hölderräume ein. Dazu folgende Abschätzung:

**Lemma 3.45.** Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex,  $S \subseteq \Omega$  meßbar mit  $\mu(S) > 0$  und  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  gilt

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{\text{diam}^n(\Omega)}{n \cdot \mu(S)} \int_{\Omega} |x - y|^{1-n} |\nabla u(y)| \, d^n y \quad \text{a.e. in } \Omega \quad \text{mit} \quad u_S = \frac{1}{\mu(S)} \int_S u.$$

**Beweis:** Sei  $d = \text{diam}(\Omega)$ . Mit Approximation von  $u$  durch glatte Funktionen wie in Proposition 3.21 erhalten wir fast überall auf  $x \neq y \in \Omega$  mit  $\omega = \frac{y-x}{|y-x|}$

$$u(x) - u(y) = - \int_0^{|x-y|} \nabla u(x + r\omega) \omega \, dr.$$

$$\begin{aligned} \text{Integration von } y \text{ über } S \text{ ergibt} \quad \mu(S)|u(x) - u_S| &\leq \int_S \int_0^{|x-y|} |\nabla u(x + r\omega)| \, dr \, d^n y \leq \\ &\leq \int_{B(x,d)} \int_0^d |\nabla u(x + r\omega)| \chi_{\Omega}(x + r\omega) \, dr \, d^n y = \int_0^d \int_0^d \int_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x + r\omega)| \chi_{\Omega}(x + r\omega) \, d\omega s^{n-1} \, ds \, dr \\ &= \frac{d^n}{n} \int_0^d \int_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x + r\omega)| \chi_{\Omega}(x + r\omega) \, d\omega \, dr = \frac{d^n}{n} \int_{\Omega} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| \, d^n y. \quad \mathbf{q.e.d.} \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum Einbettungssatz in Hölderräume.

**Satz von Morrey 3.46.** Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ ,  $k > l \in \mathbb{N}_0$ ,  $1 \leq \infty$  und  $0 < \alpha < 1$  sind folgende Einbettungen stetig und bei strikter Ungleichung kompakt:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega) \quad \text{mit} \quad k - \frac{n}{p} \geq l + \alpha. \quad (3.33)$$

**Beweis:** Die Kompaktheit der Einbettungen ergibt sich sofort aus der Stetigkeit der Einbettungen und Proposition 3.10: Gilt in (3.33) die strikte Ungleichung, so wählen wir  $0 < \beta < 1$  mit  $k - \frac{n}{p} > l + \beta > l + \alpha$ , und erhalten die stetige Einbettungen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta} \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega).$$

Nach Proposition 3.10 ist die zweite Einbettung kompakt, also auch die Gesamteinbettung. Daher genügt es die Stetigkeit der Einbettungen zu beweisen.

Zuerst betrachten wir den Spezialfall  $k = 1, l = 0, 1 - \frac{n}{p} = \alpha \in (0, 1)$ . Mit dem Fortsetzungsoperator  $E$  aus Satz 3.29 gilt für  $B(0, R) \ni \Omega$  und  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$Eu \in W_0^{1,p}(B(0, R)) \quad \|Eu\|_{W^{1,p}(B(0,R))} \leq C(\Omega, n, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Zum Beweis der Stetigkeit der Einbettung im Spezialfall genügt es folgendes zu zeigen:

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \text{ für alle } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.34)$$

Im Spezialfall gilt  $n < p < \infty$  und deshalb  $1 < q < \frac{n}{n-1}$  für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Es folgt

$$\| |x - \cdot|^{1-n} \|_{L^q(B(0,1))} \leq \left( \int_{B(0,2)} |y|^{q(1-n)} dy \right)^{1/q} \leq C(n,p) \text{ für alle } x \in B(0,1).$$

Mit Lemma 3.45 und der Hölderungleichung folgt für  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\operatorname{osc}_{B(0,1)} u := \sup_{x,y \in B(0,1)} |u(x) - u(y)| \leq 2\|u - u_{B(0,1)}\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B(0,1))}. \quad (3.35)$$

Durch Reskalieren  $v(x) := u(z + \varrho x)$  erhalten wir für alle  $B(z, \varrho) \subseteq \mathbb{R}^n$  wegen  $1 - \frac{n}{p} = \alpha$

$$\operatorname{osc}_{B(z,\varrho)} u := \sup_{x,y \in B(z,\varrho)} |u(x) - u(y)| = \operatorname{osc}_{B(0,1)} v \leq C(n,p)\|\nabla v\|_{L^p(B(0,1))} = C(n,p)\varrho^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(B(z,\varrho))},$$

Daraus folgt für  $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varrho := \frac{|x-y|}{2}$ ,  $z := \frac{x+y}{2}$ ,  $x, y \in \overline{B(z, \varrho)}$ , dass

$$|u(x) - u(y)| \leq \operatorname{osc}_{B(z,\varrho)} u \leq C(n,p)\varrho^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(B(z,\varrho))} \quad \text{höl}_{\mathbb{R}^n, \alpha} u \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Schließlich folgt aus (3.35) für beliebiges  $B_1 = B(z, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$   $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq$

$$\leq \|u - u_{B_1}\|_{L^\infty(B_1)} + |u_{B_1}| \leq C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B_1)} + C(n)\|u\|_{L^1(B_1)} \leq C'(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(B_1)}.$$

Damit ist (3.34) und der Spezialfall bewiesen.

Wenn  $1 - \frac{n}{p} \geq \alpha$ , ist für  $\bar{\alpha} := 1 - \frac{n}{p} \in (0, 1)$  die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\bar{\alpha}}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$$

mit dem eben Gezeigten und Proposition 3.10 stetig.

Die allgemeine Aussage beweisen wir mit Induktion in  $k - l \in \mathbb{N}$ . Für  $k = l + 1$  gilt  $1 - \frac{n}{p} \geq \alpha$ . Für  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  und  $|\gamma| \leq l$  gilt  $\partial^\gamma u \in W^{1,p}(\Omega)$ , und wegen dem Gezeigten

$$\|\partial^\gamma u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p)\|\partial^\gamma u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, n, p)\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Also ist die Einbettung  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$  stetig.

Für  $k \geq l + 2$  und  $n \leq p$  gilt  $k - \frac{n}{p} \geq (k - 1) > l + \alpha$ . Für großes  $\bar{p} < \infty$  ist

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,\bar{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

wegen Satz 3.43 und durch Induktion eine kompakte Einbettung.

Für  $k \geq l + 2$  und  $1 \leq p < n$  gilt  $k - \frac{n}{p} = (k - 1) - \frac{n}{p^*} \geq l + \alpha$ , und die Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\Omega)$$

ist durch Induktion und mit dem Satz 3.43 stetig.

**q.e.d.**