

Die Aufgaben dieser Übung dienen zur Vorbereitung der letzten Vorlesungsthemen für die Klausur. Sie werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Stattdessen wird am Donnerstag, den 9. Dezember 2010 eine Musterlösung auf der Webseite veröffentlicht und die Aufgaben werden in der letzten Großen Übung am 10. Dezember diskutiert.

**58. Stammfunktionen.** *Berechne* die folgenden Stammfunktionen, und *mache jeweils die Probe* durch Differentiation:

- (a)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- (b)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- (c)  $\int x \arcsin(x) dx$
- (d)  $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$  [Tipp. Siehe Beispiel 8.25(vi).]

**59. Bestimmte Integrale.** *Berechne* die folgenden bestimmten Integrale:

- (a)  $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$
- (b)  $\int_1^8 \frac{\exp(1/x)}{x^2} dx$
- (c)  $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

**60. Partialbruchzerlegung.** *Berechne* mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Stammfunktionen:

- (a)  $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$
- (b)  $\int \frac{x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 6}{x^4 + 2x^2 - 8x + 5} dx$   
[Tipp. Das Nennerpolynom hat in  $x = 1$  eine zweifache Nullstelle.]

**61. Ein Integral aus der Fourier-Analyse.** Es sei  $m, n \in \mathbb{N}$ . *Zeige*:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}.$$

[Tipp. Für  $m \neq n$  wende man zweimal partielle Integration an, um zu zeigen, dass ein gewisses Vielfaches des gesuchten Integrals verschwindet. Für  $m = n$  wende man einmal partielle Integration und anschließend die Gleichung  $\sin^2 = 1 - \cos^2$  an.]

## 62. Flächenberechnung.

- (a) Man *gebe* eine Funktion  $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$  an, so dass der Graph von  $f$  einen Halbkreis vom Radius  $r > 0$  in der oberen Halbebene beschreibt.
- (b) Man *berechne* mit Hilfe von Integralen die Fläche einer Kreisscheibe vom Radius  $r$ .



Mit dem Abschnitt 8.4 des Skripts und dem vorliegenden Übungsblatt endet der für die Abschlußklausur relevante Stoff der Analysis I.

Wir wünschen Euch allen viel Erfolg bei der Abschlußklausur  
und anschließend ein gesegnetes Weihnachtsfest 2010  
sowie einen guten Rutsch ins neue Jahr.

— Martin Schmidt, Sebastian Klein, und alle TutorInnen.

*Laßt uns nun lustig integrieren ...*