Analysis III

Übungsblatt 10

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
5.5.2010

Aufgabe 34

Es sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld, das einen globalen Fluss $\Phi := \Phi^X$ induziert. *Zeige*, dass X unter Φ invariant ist, das heißt $\Phi_* X = X$, genauer

$$\Phi_{t\,*}\, X(p) = X(\Phi_t(p)), \quad \text{für } p \in M,\ t \in \mathbb{R}.$$

(7 Punkte)

Aufgabe 35 *(Vektorfelder zu dynamischen Systemen)*

Es sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $W \in \mathfrak{U}^o(\{0\} \times M\,,\, \mathbb{R} \times M)$ und $\Phi : W \to M$ eine C^∞-Abbildung. Wir setzen voraus, dass für jedes $p \in M$ die Menge $W^p := \{\, t \in \mathbb{R} \mid (t,p) \in W \,\}$ ein Intervall und $\Phi(0,p) = p$ ist.

Dann ist also jeweils

$$\Phi^p : W^p \to M\,,\ t \mapsto \Phi(t,p)$$

eine C^∞-Kurve. *Zeige*, dass durch

$$X : p \mapsto X_p := \dot{\Phi}^p(0)$$

C^∞-differenzierbares Vektorfeld auf M definiert wird.

[Tipp: Es existiert genau ein Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\times M)$, das durch $P_* \frac{\partial}{\partial t} = \partial \circ P$ und $Q_* \frac{\partial}{\partial t} = 0$ charakterisiert ist, wobei $P : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ und $Q : \mathbb{R} \times M \to M$ die kanonischen Projektionen und ∂ die gewöhnliche Ableitung in $\mathbb{R}$ bezeichne. Mit diesem gilt $X_p = \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}\big|_{(0,p)}$.]

Sei weiterhin $W_t := \{\, p \in M \mid (t,p) \in W \,\}$ und setze voraus, dass für alle $t, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall\, p \in W_s \cap W_{t+s} \cap \Phi_s^{-1}(W_t) \;:\; \Phi_{t+s}(p) = \Phi_t \circ \Phi_s(p)$$

Zeige, dass in diesem Fall $W \subset W^X$ und $\Phi = \Phi^X|W$. Insbesondere sind also die Kurven Φ^p Integralkurven von X . (12 Punkte)

Aufgabe 36 (Zusatzaufgabe!)

Sei $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$\overrightarrow{X}(p_1, p_2) = (p_1^2, 0).$$

Berechne den maximalen Fluss Φ^X von X und *untersuche*, ob Φ^X ein globaler Fluss ist.

(9 Punkte)

Bitte wenden.

Aufgabe 37 *(Über einzelne maximale Integralkurven)*

Es sei $\alpha : J \to M$ eine maximale Integralkurve von X. *Zeige:*

a) Entweder ist $\alpha \equiv \text{const.} = p$, und zwar gilt dies genau dann, wenn $X_p = 0$ ist; in diesem Fall ist $J = \mathbb{R}$ (man sagt dann, dass p eine *Gleichgewichtslage* des dynamischen Systems $\left(\Phi_t^X\right)_{t\in\mathbb{R}}$ ist);

oder α ist reguläre Kurve (also eine Immersion); dann ist α entweder injektiv oder periodisch; letzteres heißt: $J = \mathbb{R}$ und es existiert $d \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\left(\forall\, t \in \mathbb{R} \;:\; \alpha(t+d) = \alpha(t)\right) \quad \text{und} \quad \alpha|[0,d[\text{ ist injektiv;}$$

d heißt die Periode der Integralkurve. (8 Punkte)

b) Das Bild $\alpha(J)$ ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M, wenn

(i) $\alpha \equiv p$ oder
(ii) α periodisch ist. (5 Punkte)

Bemerkung: Mit weiteren topologischen Argumenten kann man ebenso zeigen, dass $\alpha(J)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist, falls J ein beschränktes Intervall ist. In jedem Fall ist $\alpha(J)$ eine „immersierte Untermannigfaltigkeit" im Sinne von Bemerkung 1(d) aus Abschnitt 2.6 der Vorlesung.

c) Für die Menge ω_α der ω-Grenzpunkte von α gilt:

(i) $\omega_\alpha \neq \varnothing \implies \sup J = \infty$ (1 Punkt)
(ii) Ist $\omega_\alpha = \{p_0\}$, so ist $X_{p_0} = 0$. (4 Punkte)

Abgabe: 12.5.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III