Analysis III

Übungsblatt 9

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
28.4.2010

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann existiert nach dem Theorem aus Abschnitt 3.4 der Vorlesung zu jedem $p \in M$ eine maximale Integralkurve $\alpha_p : J_p \to M$ von X mit $0 \in J_p$ und $\alpha_p(0) = p$. Die Menge

$$W := \bigcup_{p \in M} (J_p \times \{p\})$$

ist eine offene Umgebung von $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$ und der *maximale Fluss* von X ist definiert als

$$\Phi^X : W \to M, \quad (t, p) \mapsto \alpha_p(t)$$

und ist eine C^∞-Abbildung. Ein Fluss Φ^X heißt *global*, falls $W = \mathbb{R} \times M$, d.h. alle Integralkurven α_p sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 31

Bestimme für die folgenden Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ die maximalen Flüsse Φ^X und Φ^Y.

a) $\overrightarrow{X}(p_1, p_2, p_3) = (a\,p_1, a\,p_2, a^2)$, wobei $a \in \mathbb{R}$. (5 Punkte)

b) $\overrightarrow{Y}(p_1, p_2, p_3) = (p_2, -p_1, b\,p_3)$, wobei $b \in \mathbb{R}$. (5 Punkte)

Aufgabe 32

Sei $S^2 = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1\}$ die 2-Sphäre und $a \in \mathbb{R}$. Definiere $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\overrightarrow{X}(p_1, p_2, p_3) = (a\,p_2, -a\,p_1, 0).$$

a) *Zeige*, dass X ein Vektorfeld auf S^2 ist. (3 Punkte)

b) *Berechne* den maximalen Fluss Φ^X von X. (5 Punkte)

Aufgabe 33

Sei M ein lokal-kompakter topologischer Hausdorffraum, der dem *ersten Abzählbarkeitsaxiom* genügt, das bedeutet: Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine Folge $(U_n)_{n=1,2,\dots}$ von Umgebungen $U_n \in \mathfrak{U}^o(p,M)$, so dass zu jedem $U \in \mathfrak{U}^o(p,M)$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subset U$ existiert. Man kann dann jeweils $U_{n+1} \subset U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen.

Weiterhin sei J ein nichtleeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$, $\delta_- := \inf J$, $\delta_+ := \sup J$ und $c : J \to M$ ein Weg. Die Menge der α- und ω-*Grenzpunkte* von c seien wie in Abschnitt 3.3 der Vorlesung definiert. *Zeige:*

a) Für jedes $p \in M$ gilt: $p \in \omega_c \iff$ es existiert eine Folge (t_n) in J mit $t_n \to \delta_+$, so dass $p = \lim c(t_n)$ ist. (Eine analoge Aussage gilt natürlich für α_c.) (6 Punkte)

b) α_c und ω_c sind abgeschlossen. (3 Punkte)

c) Die folgenden Aussagen sind zueinander äquivalent:

(i) $\omega_c = \varnothing$.

(ii) c läuft mit $t \to \delta_+$ gegen den Rand von M, das soll heißen: Jede kompakte Teilmenge $K \subset M$ wird schließlich endgültig von c verlassen, und das wiederum soll heißen: Es existiert ein $t_K \in J$, so dass

$$\forall\, t \in J \ : \ \big(t > t_K \ \Rightarrow \ c(t) \notin K \big) \ ;$$

mit anderen Worten: $\sup c^{-1}(K) < \delta_+$.

Eine analoge Aussage gilt natürlich für α_c. (6 Punkte)

d) Ist $c(J)$ in M relativ kompakt, so sind α_c und ω_c nicht leer. (4 Punkte)

Abgabe: 5.5.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III