Analysis III

Übungsblatt 11

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
12.5.2010

Aufgabe 38

Seien $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ die Gaußschen Basisfelder des $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Karte $Id_{\mathbb{R}^2}$ und seien $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$X(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Zeige, dass $[X,Y] = 0$, *berechne* die maximalen Flüsse Φ^X, Φ^Y und *zeige*, dass die Flüsse kommutieren, d.h.

$$\Phi^X(s, \Phi^Y(t,p)) = \Phi^Y(t, \Phi^X(s,p)), \qquad \text{für} \quad (t,p),(s,p) \in W^X \cap W^Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Zeige weiterhin, dass Y unter Φ^X invariant ist, d.h.

$$\Phi^X_{t\,*}Y(p) = Y(\Phi^X_t(p)).$$

(9 Punkte)

[Vergleiche dazu auch die Bemerkung 1 in Abschnitt 3.8 über kommutierende Flüsse.]

Aufgabe 39 *(Rechenregeln für die Lieklammer)*

Zeige:

a) Die Lieklammer auf $\mathfrak{X}(M)$ ist $\mathbb{R}$-bilinear, schief-symmetrisch (d.h. für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt: $[Y,X] = -[X,Y]$) und erfüllt die *Jacobi-Identität*:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

(5 Punkte)

b) Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$, so ist

$$[\varphi\, X, \psi\, Y] = \varphi\,\psi\,[X,Y] + \varphi\,(X \cdot \psi)\,Y - \psi\,(Y \cdot \varphi)\,X\ .$$

$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ ist also nicht $C^\infty(M)$-linear. (4 Punkte)

c) Ist N eine weitere C^∞-Mannigfaltigkeit, ist $f : M \to N$ eine C^∞-Abbildung, sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$, und sind die Paare $(X, \widetilde{X})$ und $(Y, \widetilde{Y})$ jeweils f-verwandt, so sind auch $[X,Y]$ und $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ f-verwandt. (7 Punkte)

d) Sei M eine Untermannigfaltigkeit von N. Dann gilt für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$:

$$X|M,\, Y|M \in \mathfrak{X}(M) \implies [X|M, Y|M] = [X,Y]|M\ .$$

(3 Punkte)

Bitte wenden.

Aufgabe 40

a) *Zeige,* dass auf jeder Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik existiert. (6 Punkte)

[Tipp: Definiere zuerst eine Riemannsche Metrik auf Kartenumgebungen und benutze dann eine Zerlegung der Eins.]

b) Ist $A \in \mathfrak{T}^{(k,r)}(M)$ und $f : N \to M$ eine weitere C^∞-Abbildung, so ist für jedes r-Tupfel $(X_1, \ldots, X_r)$ von Vektorfeldern $X_i \in \mathfrak{X}_f(M)$ auch

$$\Big(A(X_1, \ldots, X_r) : p \mapsto A_{f(p)}\big(X_1(p), \ldots, X_r(p)\big)\Big) \in \begin{cases} \mathrm{C}^\infty(N) & \text{für } k = 0 \\ \mathfrak{X}_f(M) & \text{für } k = 1\ . \end{cases}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 41 (Zusatzaufgabe!)

In der Situation von Abschnitt 3.7 der Vorlesung sei $G = \mathbb{R} \times M$, also $X \in \mathfrak{X}_Q(M)$.

Zeige: Zu jedem Anfangswert $(s, p) \in \mathbb{R} \times M$ existiert eine eindeutige maximale Lösung

$$\beta_{(s,p)} : J_{(s,p)} \to M \quad \text{mit} \quad s \in J_{(s,p)} \ \text{ und } \ \beta_{(s,p)}(s) = p$$

der durch X beschriebenen zeitabhängigen Differentialgleichung. Ist $t \in J_{(s,p)}$ und $q := \beta_{(s,p)}(t)$, so ist

$$\beta_{(t,q)} = \beta_{(s,p)}\ .$$

(7 Punkte)

Abgabe: 19.5.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III