Analysis III

Übungsblatt 1

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
17.2.2010

Aufgabe 1

Sei $(M, \mathcal{T})$ gegeben durch $M = \mathbb{R} \cup \{p_0\}$, wobei p_0 einen zusätzlichen Punkt bezeichne, und

$$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ offen in } \mathbb{R}\} \cup \{U \cup \{p_0\} \mid U \subset \mathbb{R},\ U \cup \{0\} \text{ offen in } \mathbb{R}\}.$$

Zeige, dass dadurch eine Topologie auf M definiert ist. Ist $(M, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum?

(6 Punkte)

Aufgabe 2

a) *(Teilraumtopologie)* Sei M ein topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{T}$ und N eine Teilmenge von M. Zeige: Dann wird durch

$$\mathcal{T}_N := \{\, G \cap N \mid G \in \mathcal{T} \,\}$$

eine Topologie auf N konstruiert, die sogenannte *Teilraumtopologie* von N. Im Folgenden betrachten wir Teilmengen topologischer Räume in der Regel auf diese Weise als topologischen Raum. Zeige weiter: Ist M ein Hausdorffraum, so auch N. (6 Punkte)

b) *(Produkttopologie)* Seien M_1, M_2 topologische Räume und $M := M_1 \times M_2$. Wir nennen eine Teilmenge $G \subset M$ offen, wenn

$$\forall\, p = (p_1, p_2) \in G\ \exists\, U_1 \in \mathfrak{U}^o(p_1, M_1), U_2 \in \mathfrak{U}^o(p_2, M_2)\ :\ (U_1 \times U_2) \subset G$$

gilt. Zeige: Die Gesamtheit der so definierten offenen Mengen von M bildet eine Topologie auf M, die sogenannte *Produkttopologie* von M_1 und M_2. Zeige weiter: Sind M_1 und M_2 Hausdorffräume, so ist auch M ein solcher. (6 Punkte)

Aufgabe 3

Seien (M, d) und (N, d') metrische Räume. Zeige:

a) M (betrachtet als topologischer Raum vermittels der kanonischen Topologie) ist ein Hausdorffraum. (3 Punkte)

b) Eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau im Sinne von Definition 2 aus Abschnitt 1.1 der Vorlesung gegen ein $p^* \in M$, wenn sie im Sinne der ε-Definition gegen p^* konvergiert, d.h. wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; p_n \in U_\varepsilon(p^*) \; .$$

(6 Punkte)

c) Eine Teilmenge $A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen im Sinne von Definition 1 aus Abschnitt 1.1, wenn sie Limes-abgeschlossen ist (d.h. wenn für jede Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A, die in M gegen ein $p^* \in M$ konvergiert, schon $p^* \in A$ gilt). (6 Punkte)

d) Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann stetig im Sinne von Definition 4(a) aus Abschnitt 1.1, wenn sie stetig im Sinne der (ε,δ)-Definition ist, d.h. wenn

$$\forall \, p \in M \; \forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; : \; f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p))$$

gilt. (6 Punkte)

Aufgabe 4

Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die folgenden Mengen gleich sind:

$$i) \quad A_1 := \{x \in M \mid \forall U \in \mathcal{U}^o(x, M) \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$$

$$ii) \quad A_2 := \bigcap_{\substack{A \subset B \subset M \\ B \text{ abgeschlossen}}} B$$

Die so gebildete Menge heißt *Abschluss* von A in M und wird mit $\bar{A}$ bezeichnet. (9 Punkte)

Abgabe: 24.2.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III