Analysis III

Übungsblatt 6

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister,
Markus Knopf

FSS 2010
24.3.2010

Aufgabe 19

Welche der folgenden Abbildungen sind Immersionen?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (\cos(2t), \sin(2t), t)$. Ist f injektiv? (6 Punkte)

(b) $g : (1, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ g(t) = (\frac{t+1}{2t}\cos(2t), \frac{t+1}{2t}\sin(2t))$. (6 Punkte)

Aufgabe 20 *(Immersionen und Einbettungen)*

Seien M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten mit M kompakt.

(a) Sei $f : M \to N$ eine injektive Immersion. *Zeige*, dass f eine Einbettung und damit $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N ist. (3 Punkte)
[Tipp. Aufgabe 11(b).]

(b) Sei $M \neq \emptyset$, $\dim(M) = m$ und $f : M \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. *Zeige*, dass f *keine* Immersion ist. (6 Punkte)

Aufgabe 21 *(Differenzierbarkeitstests)*

Es seien M, N und L C^∞-Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine C^∞-Abbildung. *Zeige*:

(a) Ist f eine Immersion, so gilt für jede *stetige* Abbildung $g : L \to M$:

Ist $f \circ g$ eine C^∞-Abbildung, so ist auch g C^∞-differenzierbar.

(6 Punkte)

(b) Ist f eine surjektive Submersion, so gilt für *jede* Abbildung $g : N \to L$:

Ist $g \circ f$ eine C^∞-Abbildung, so ist auch g C^∞-differenzierbar.

(6 Punkte)

Bitte wenden.

Aufgabe 22 *(Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten)*

(a) Sei $a > 0$, und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(a - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 + x_3^2.$$

Zeige, dass das Urbild $f^{-1}(\{b^2\})$ für jedes b mit $0 < b < a$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. (6 Punkte)

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist

$$A := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = t\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$? (6 Punkte)

Abgabe: 14.4.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III