Analysis III

Übungsblatt 13

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
26.5.2010

Aufgabe 45

Sei M eine orientierbare C^∞-Mannigfaltikeit mit Volumenform ω und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit Divergenz $\mathrm{div}^\omega X$. Weiter sei (U, x) eine Karte von M so dass $\omega|U = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_m$ gilt. Ferner sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ lokal dargestellt als

$$X|U = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit Funktionen $\varphi_i \in C^\infty(U)$. *Zeige*, dass dann gilt:

$$(\mathrm{div}^\omega X)|U = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \varphi_i \;.$$

(7 Punkte)

Aufgabe 46

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine differenzierbare Abbildung und $q \in \mathbb{R}^{n-m}$ ein Punkt, so dass $M := f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$ und $f|M$ submersiv ist. *Zeige*, dass M eine m-dimensionale orientierbare C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. (7 Punkte)

Aufgabe 47

a) Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$\omega = y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y.$$

Betrachte die Einschränkung von ω auf die 2-Sphäre, die parametrisiert ist durch

$$S^2 := \{(\sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [0, \pi]\}.$$

Zeige durch Rechnung, dass der Satz von Stokes in diesem konkreten Fall gilt, d.h.

$$\int_{S^2} \mathrm{d}\omega = 0.$$

(9 Punkte)

Bitte wenden.

[Tipp: Betrachte $S^2 \setminus \Gamma$, wobei Γ den halben Großkreis bezeichne, der in der obigen Parametrisierung $\theta = 0$ entspricht. Da $\mathrm{d}\omega$ auf S^2 differenzierbare Koeffizienten hat und $\Gamma \subset S^2$ eine Nullmenge ist, stimmt das Integral über $S^2 \setminus \Gamma$ mit dem gesuchten überein.]

b) Sei M eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension m und $\alpha \in \Omega^m(M)$ mit $\alpha_p \neq 0$ für alle $p \in M$. *Zeige*, dass α nicht exakt sein kann.

(6 Punkte)

[Tipp: Satz von Stokes]

Aufgabe 48

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension 3 und $\alpha \in \Omega^1(M)$, wobei $\alpha_p \neq 0$ für alle $p \in M$. Sei $q \in M$ ein Punkt, so dass eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ der Dimension 2 existiert mit $q \in N$ und $\alpha | TN = 0$. *Zeige,* dass gilt:

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha)_q = 0.$$

(7 Punkte)

Abgabe: 2.6.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III