Analysis III

Übungsblatt 5

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister,
Markus Knopf

FSS 2010
17.3.2010

Aufgabe 15

Zeige, dass eine C^1-Abbildung $f : M \to N$ zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten M und N genau dann lokal konstant ist (d.h. um jeden Punkt $p \in M$ gibt es $U \in \mathfrak{U}^o(p, M)$, so dass $f|U$ konstant ist), wenn für alle $p \in M$ gilt: $T_p f = 0$. (9 Punkte)

Aufgabe 16 *(Rechenregeln für die Tangentialabbildung)*

Seien M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f, g : M \to V$ zwei C^∞-Funktionen, $h : M \to N$ ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus, $p \in M$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Zeige:*

(a) $T_p \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_p M}$. (3 Punkte)

(b) $T_p(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot T_p f + \mu \cdot T_p g$. (6 Punkte)

(c) Ist $V = \mathbb{R}$, so gilt die *Leibnizregel*:

$$\forall v \in T_p M \; : \; T_p(f \cdot g)(v) = T_p f(v) \cdot g(p) + f(p) \cdot T_p g(v) \; . \qquad \text{(6 Punkte)}$$

(d) $T_{h(p)}(h^{-1}) = (T_p h)^{-1}$. (3 Punkte)

Aufgabe 17 *(Der lokale Umkehrsatz)*

Seien M und N C^∞-Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine C^∞-Abbildung, so dass die Tangentialabbildung $T_p f$ in einem Punkt $p \in M$ ein Vektorraum-Isomorphismus $T_p M \to T_{f(p)} N$ ist. *Zeige*, dass eine Umgebung U von p existiert, so dass $f|U$ ein C^∞-Diffeomorphismus in N ist.

[Tipp. Man führe die Aussage auf die entsprechende Aussage der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ zurück.] (9 Punkte)

Bitte wenden.

Aufgabe 18 *(Differenzierbarkeit implizit definierter Funktionen)*

Es seien M_1, M_2 und N C^∞-Mannigfaltigkeiten, $g : M_1 \times M_2 \to N$ und $h : M_1 \to N$ C^∞-Abbildungen und $f : M_1 \to M_2$ eine Auflösung der Gleichung

$$g(p,q) = h(p) \text{ nach } q\,, \quad \text{d.h. } \forall\, p \in M_1 \;:\; g(p, f(p)) = h(p)\ .$$

Zeige, dass falls für jedes $p \in M_1$ die Tangentialabbildung $T_{f(p)}g_p : T_{f(p)}M_2 \to T_{h(p)}N$ von $g_p := g(p,\cdot)$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, folgende Aussage gilt:

> Besitzt die Gleichung $g(p,q) = h(p)$ für jedes $p \in M_1$ genau eine Lösung q oder ist f stetig, so ist f eine C^∞-Abbildung.

[Tipp: Vermittels einer lokalen Betrachtung führe man das Problem auf den entsprechenden Satz der Analysis II zurück.] (9 Punkte)

Abgabe: 24.3.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III