Analysis III

Übungsblatt 7

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
14.4.2010

Aufgabe 23

Sei $\pi : E \to B$ ein Vektorraumbündel. *Zeige:*

a) Der *Nullschnitt* $O : B \to E$, $O(b) = 0 \in E_b$, ist differenzierbar. (3 Punkte)

b) Seien $s_1, s_2 \in \Gamma(\pi)$ Schnitte von π. Dann ist $s_1 + s_2 \in \Gamma(\pi)$. (3 Punkte)

c) Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine C^∞ - Funktion und $s \in \Gamma(\pi)$. Dann ist $f \cdot s \in \Gamma(\pi)$. (3 Punkte)

Aufgabe 24

Man zeige: Ein Vektorraumbündel $\pi : E \to B$ der Faserdimension ℓ ist genau dann trivial, wenn es ℓ globale Schnitte $s_1, \ldots, s_\ell : B \to E$ gibt, so dass für jedes $b \in B$ die Vektoren $s_1(b), \ldots, s_\ell(b) \in E_b$ linear unabhängig sind. (9 Punkte)

Aufgabe 25 *(Extrapolation von Schnitten eines Vektorbündels)*

Es sei $\pi : E \to B$ ein Vektorraumbündel und $b_0 \in B$. *Zeige:* Zu jedem $v \in E_{b_0}$ existiert ein $s \in \Gamma(\pi)$ mit $s(b_0) = v$. (6 Punkte)

[Tipp: Man verwende eine lokale Trivialisierung von π um b_0, sowie eine Zerlegung der Eins auf B.]

Bitte wenden.

Aufgabe 26 *(Linienbündel über S^1)*

a) *Zeige:* Jedes Vektorraumbündel der Faserdimension 1 über einem offenen Intervall $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ist trivial. (9 Punkte)

[Tipp: Sei $\pi : E \to]a, b[$ ein Vektorraumbündel der Faserdimension 1, $t_0 \in]a, b[$ fest und

$$J := \{ t \in]a, b[\mid \text{Es existiert ein nullstellenfreier Schnitt von } \pi \text{ auf }]t, t_0[\text{ bzw. auf }]t_0, t[\} .$$

(Dabei ist in der Definition von J das Intervall $]t, t_0[$ oder $]t_0, t[$ zu wählen, je nachdem, ob $t \leq t_0$ oder $t > t_0$ ist.) Man zeige, dass J in $]a, b[$ offen und abgeschlossen ist.]

b) *Zeige:* Jedes Vektorraumbündel der Faserdimension 1 über S^1 ist entweder trivial, oder zu dem (in Beispiel 2 aus Abschnitt 2.7 der Vorlesung beschriebenen) Möbiusband isomorph. (12 Punkte)

[Anleitung: Ist $\pi : E \to S^1$ ein Vektorraumbündel der Faserdimension 1 und $p_0 \in S^1$ fest, so ist (U_1, U_2) mit $U_1 := S^1 \setminus \{p_0\}$ und $U_2 := S^1 \setminus \{-p_0\}$ eine offene Überdeckung von S^1. $U_1 \cap U_2 = S^1 \setminus \{p_0, -p_0\}$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten V_+ und V_-.

Mittels (a) zeige man nun, dass es Trivialisierungen $\varphi_k : U_k \times \mathbb{R} \to E|_{U_k}$ von π gibt. Dann ist $s : U_1 \to E,\ p \mapsto \varphi_1(p, 1)$ ein nullstellenfreier Schnitt von π über U_1. Indem man s mit Hilfe von φ_2 in der Nähe von p_0 untersucht, zeige man, dass sich nach einer Deformation von s in der Nähe von p_0 einer der folgenden beiden Fälle erreichen läßt: *Entweder* s läßt sich in p_0 zu einem globalen, nullstellenfreien Schnitt von π fortsetzen, *oder* mit der Funktion $\chi : E|_{U_1 \cap U_2} \to E|_{U_1 \cap U_2}$, die durch

$$\chi|(E|_{V_+}) = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad \chi|(E|_{V_-}) = -\mathrm{id}$$

charakterisiert ist, läßt sich $\chi \circ s$ in p_0 nullstellenfrei zu einem Schnitt von π über U_2 fortsetzen. Im letzteren Fall ist π isomorph zum Möbiusband.]

Abgabe: 21.4.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III