Analysis III

Übungsblatt 12

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
19.5.2010

Aufgabe 42 *(Rechenregeln für Differentialformen)*

a) *Zeige:* Das Produkt $\wedge$ ist bilinear, assoziativ und antikommutativ; letzteres heißt:

$$\forall\, \omega \in \Omega^r(M)\,,\ \mu \in \Omega^s(M)\ :\ \mu \wedge \omega \;=\; (-1)^{r\cdot s}\, \omega \wedge \mu\ .$$

(5 Punkte)

b) *Zeige,* dass $\wedge$ mit dem Pullback vertauscht, das soll heißen: Ist $f : N \to M$ eine C^∞-Abbildung und $\omega \in \Omega^r(M)$, $\mu \in \Omega^s(M)$, so gilt

$$f^*(\omega \wedge \mu) = (f^*\omega) \wedge (f^*\mu)\ .$$

(5 Punkte)

c) Sei $\omega \in \Omega^r(M)$ und $\mu \in \Omega^s(M)$. *Zeige,* dass gilt:

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \mu) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \mu + (-1)^r \cdot \omega \wedge (\mathrm{d}\mu)\,.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 43 *(Pullback von Differentialformen)*

a) Sei $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

und *sphärische Koordinaten* gegeben durch die Abbildung

$$f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ \ (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho \sin(\varphi)\cos(\theta), \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \rho\cos(\theta)).$$

Berechne ω in sphärischen Koordinaten, d.h. den Pullback $f^*\omega$. (9 Punkte)

b) Seien M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Seien (U, x) und (V, y) jeweils eine Karte von M bzw. N. *Zeige*, dass für jede Funktion $g \in C^\infty(V)$ auf $U \cap g^{-1}(V)$ gilt:

$$f^*(g\,\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n) = (g \circ f)\ \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\ \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

(5 Punkte)

Bitte wenden.

Aufgabe 44 *(Geschlossene und exakte Differentialformen)*

Eine Differentialform $\omega \in \Omega^r(M)$ heißt *geschlossen*, falls $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt und *exakt*, falls ein $\eta \in \Omega^{r-1}(M)$ existiert mit $\omega = \mathrm{d}\eta$. *Zeige:*

a) Die Differentialform $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\omega = xy\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + 2x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

ist geschlossen. (5 Punkte)

b) Finde eine Differentialform $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ mit $\omega = \mathrm{d}\eta$, d.h. ω ist exakt. (7 Punkte)

[Tipp: Benutze den Ansatz

$$\eta = f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + g(x,y,z)\,\mathrm{d}y + h(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

mit C^∞-Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, berechne $\mathrm{d}\eta$ und vergleiche mit ω.]

Bemerkung: Wegen $\mathrm{d}(\mathrm{d}\eta) = 0$ ist jede exakte Differentialform auch geschlossen. Das *Poincaré-Lemma* besagt, dass auf sternförmigen Gebieten des $\mathbb{R}^n$ umgekehrt jede geschlossene Differentialform auch exakt ist.

Abgabe: 26.5.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III