Analysis III

Übungsblatt 2

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
24.2.2010

Aufgabe 5 *(Der Zylinder als C^∞-Mannigfaltigkeit)*

Wir betrachten den Zylinder $Z = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid p_2^2 + p_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ als topologischen Raum mit der Teilraumtopologie des $\mathbb{R}^3$. Für festes $\varphi \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildung

$$f_\varphi : \mathbb{R} \times]\varphi, \varphi + 2\pi[\to Z, \quad (t, s) \mapsto (t, \cos(s), \sin(s)).$$

Zeige:

a) Die Abbildung f_φ ist ein Homöomorphismus in Z. Daher definiert die Umkehrabbildung $x_\varphi := f_\varphi^{-1} : f_\varphi(\mathbb{R} \times]\varphi, \varphi + 2\pi[) \to \mathbb{R}^2$ eine Karte für Z. (6 Punkte)

b) Durch $\{\, x_\varphi \,|\, \varphi \in \mathbb{R}\,\}$ wird auf Z eine C^∞-Struktur definiert. (3 Punkte)

Aufgabe 6 *(Der reell-projektive Raum)*

Auf $\mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$p \sim q \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^{\neq 0} : \ p = \lambda q.$$

Wir bezeichnen mit $[p]$ die Äquivalenzklasse eines Punktes $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann betrachten wir den *reell-projektiven Raum*

$$\mathbb{RP}^n := \{\, [p] \ \big|\, p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\,\},$$

zusammen mit der Projektionsabbildung

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n, \qquad p \mapsto [p].$$

Wir versehen $\mathbb{RP}^n$ mit der sogenannten *Quotiententopologie*, d.h. wir nennen eine Menge $U \subset \mathbb{RP}^n$ genau dann offen, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ offen ist.

Für $i = 0, \ldots, n$ betrachten wir die Mengen

$$U_i := \{[p] \in \mathbb{RP}^n \mid p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } p_i \neq 0\}$$

und die Abbildungen

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \qquad [(p_0, \ldots, p_n)] \mapsto \frac{1}{p_i}(p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n).$$

Zeige, dass die Mengen U_i offen in $\mathbb{RP}^n$ sind, dass durch $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0,\ldots,n}$ ein C^∞-Atlas auf $\mathbb{RP}^n$ definiert wird, und dass $\mathbb{RP}^n$ versehen mit diesem Atlas eine C^∞-Mannigfaltigkeit wird.
(12 Punkte)

Aufgabe 7 *(Eine einfache „Blätterung“ des $\mathbb{R}^3$)*

Zu $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ setzen wir

$$U_\epsilon(p) := \{q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 \mid q_3 = p_3 \text{ und } (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 < \epsilon\}.$$

Mittels dieser „ϵ-Umgebungen“ definieren wir auf $\mathbb{R}^3$ eine Topologie $\mathcal{T}$ durch:

$$U \subset \mathbb{R}^3 \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad \forall p \in U \ \exists \epsilon > 0 : \quad U_\epsilon(p) \subset U.$$

Zeige:

a) $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T})$ ist ein Hausdorffraum. (3 Punkte)

b) Definiere zu $b \in \mathbb{R}$ die Menge $L_b := \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid p_3 = b\} = \mathbb{R}^2 \times \{b\}$. Dann ist $x^b : L_b \to \mathbb{R}^2, \ p \mapsto (p_1, p_2)$ für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Karte für $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T})$. Also ist $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T})$ eine topologische Mannigfaltigkeit. (6 Punkte)

c) $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T})$ ist nicht separabel. (6 Punkte)

Abgabe: 3.3.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III