Analysis III

Übungsblatt 4

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
10.3.2010

Aufgabe 12

a) *(Eine stetige Zerlegung der Eins auf einem metrischen Raum)*

Wir betrachten das offene Intervall $M :=]0,4[$ als 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann sind

$$U_1 :=]0,2[\ , \quad U_2 :=]1,3[\quad \text{und} \quad U_3 :=]2,4[$$

offenbar offene Teilmengen von M, die gemeinsam eine offene Überdeckung von M bilden. Man *skizziere* eine dieser Überdeckung angepasste Zerlegung der Eins, d.h. man skizziere Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$ mit

$$0 \leq f_k \leq 1, \quad \mathrm{Tr}(f_k) \subset U_k \quad \text{für } k = 1,2,3$$

und

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1\ . \qquad \text{(6 Punkte)}$$

b) Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, A eine abgeschlossene Teilmenge von M und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für jedes $p \in A$ existiere ein $U_p \in \mathfrak{U}^o(p,M)$ und eine Funktion $g_p \in C^\infty(U_p)$, die auf $U_p \cap A$ mit f übereinstimmt. *Zeige*, dass f dann C^∞-differenzierbar (siehe die Weitere Definition (c) in Abschnitt 1.5) ist. (9 Punkte)

Aufgabe 13 *(Stückweise C^∞-Kurven sind glatt)*

Ist $\alpha : [0,1] \to M$ eine stückweise C^∞-differenzierbare Kurve in einer C^∞-Mannigfaltigkeit M (d.h.: Es existiert eine „Zerlegung“ $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ von $[0,1]$, so dass $\alpha|[t_{k-1}, t_k]$ jeweils im Sinne von Abschnitt 1.5, Weitere Definition (c) C^∞-differenzierbar ist), so existiert eine streng monoton wachsende C^∞-Funktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$, und $\varphi(1) = 1$, so dass $\alpha \circ \varphi$ eine C^∞-Kurve ist. (15 Punkte)

Aufgabe 14 *(Gleichmäßige Approximierbarkeit stetiger Funktionen durch C^∞-Funktionen)*

Es sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. *Zeige:* Dann existiert ein $g \in C^\infty(M)$ mit

$$|f(p) - g(p)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad p \in M\ .$$

Jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ kann also gleichmäßig durch C^∞-Funktionen $M \to \mathbb{R}$ approximiert werden. (12 Punkte)

Abgabe: 17.3.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III