Analysis III

Übungsblatt 3

Sebastian Klein,
Matthias Leimeister

FSS 2010
3.3.2010

Aufgabe 8 *(Die Sphäre als C^∞-Mannigfaltigkeit)*

Wir betrachten den $\mathbb{R}^{n+1}$ auf die übliche Weise als euklidischen Vektorraum, dessen kanonische Basis wir mit $(e_0, \dots, e_n)$ bezeichnen. Unter der *n-dimensionalen Sphäre* verstehen wir die Teilmenge

$$S^n := \{\, p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1 \,\} \,.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, wie man S^n auf natürliche Weise als n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit auffassen kann. Dazu *zeige* man:

a) Ist $p \in S^n \setminus \{e_0\}$, so schneidet die Gerade durch die Punkte $e_0 \in S^n$ und p die Hyperebene

$$H := \{\, v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, e_0 \rangle = 0 \,\} = \{0\} \times \mathbb{R}^n$$

in genau einem Punkt, den wir mit $F(p)$ bezeichnen wollen. *Finde* eine explizite Formel für $F(p)$. Die hierdurch definierte Abbildung $F : S^n \setminus \{e_0\} \to H$ heißt *stereographische Projektion.* (6 Punkte)

b) $F : S^n \setminus \{e_0\} \to H$ ist ein Homöomorphismus *auf* H. Indem wir H auf die offensichtliche Weise mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, wird $(S^n \setminus \{e_0\}, F)$ daher eine Karte für S^n. (6 Punkte)

c) Sei $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $(v_0, v_1, \dots, v_n) \mapsto (-v_0, v_1, \dots, v_n)$ die Spiegelung an H in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $\widetilde{F} := F \circ \Phi : S^n \setminus \{-e_0\} \to H$ eine weitere Karte von S^n. (3 Punkte)

d) Die beiden Karten F und $\widetilde{F}$ sind C^∞-verträglich. Daher ist S^n, versehen mit der von dem C^∞-Atlas $\{\, (S^n \setminus \{e_0\}, F)\,, (S^n \setminus \{-e_0\}, \widetilde{F})\,\}$ induzierten C^∞-Struktur, eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. (3 Punkte)

Aufgabe 9

Zeige, dass zueinander C^∞-diffeomorphe C^∞-Mannigfaltigkeiten dieselbe Dimension besitzen (ohne die in Bemerkung (a) aus Abschnitt 1.2 der Vorlesung erwähnten Aussagen aus der algebraischen Topologie zu verwenden). (6 Punkte)

Aufgabe 10

Wir bezeichnen mit $U_1(0) := \{\, v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1 \,\}$ die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^n$. *Zeige:*

a) Die Abbildung

$$f : U_1(0) \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto \frac{2\,v}{1 - \|v\|^2}$$

ist ein C^∞-Diffeomorphismus *auf* $\mathbb{R}^n$. Daher ist $U_1(0)$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$. (6 Punkte)

b) Die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ v \mapsto \frac{v}{\|v\|^2}$$

ist ein involutiver C^∞-Diffeomorphismus *auf* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (Dabei bedeutet *involutiv*: $g \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$.) Man nennt g die *Inversion an der Einheitssphäre.* $f \circ g$ ergibt einen Diffeomorphmismus zwischen dem Äußeren der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\{\, v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| > 1 \,\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (6 Punkte)

Aufgabe 11

Seien X, Y topologische Räume.

a) Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und ist $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt. (6 Punkte)

b) Ist $f : X \to Y$ eine stetige, bijektive Abbildung, und ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f schon ein Homöomorphismus. (6 Punkte)

c) *(Das Tubenlemma)* Es seien $q \in X$ ein beliebiger Punkt, $K \subset Y$ eine kompakte Teilmenge und $G \in \mathcal{U}^o(\{q\} \times K, X \times Y)$. (Zur Produkttopologie siehe Aufgabe 2 b) auf Blatt 1.) Dann gilt: Es gibt eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^o(q, X)$, so dass sogar die „Tube“ $U \times K$ in G enthalten ist. (9 Punkte)

Abgabe: 10.3.2010 in der Vorlesung

http://analysis.math.uni-mannheim.de → Lehre → Analysis III