

# Analysis III

## Übungsblatt 8

Sebastian Klein,  
Matthias Leimeister

FSS 2010  
21.4.2010

### Aufgabe 27

Sei  $\pi : E \rightarrow B$  ein Vektorraumbündel über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $B$  und  $s \in \Gamma(\pi)$ . Zeige, dass  $s(B) \subset E$  eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist. (7 Punkte)

### Aufgabe 28

a) Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Zeige, dass das Tangentialbündel  $TV$  von  $V$  trivial ist. (4 Punkte)

b) Seien  $M, N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $f : M \rightarrow N$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Zeige, dass  $Tf : TM \rightarrow TN$  ein Vektorbündel-Isomorphismus über  $f$  ist. (7 Punkte)

### Aufgabe 29

a) Sei  $S^1 := \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1^2 + p_2^2 = 1\}$  der Einheitskreis in  $\mathbb{R}^2$ , den wir als differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 1 auffassen. Zeige, dass das Tangentialbündel  $TS^1$  trivial ist. (4 Punkte)

b) Sei  $S^3 := \{(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 p_i^2 = 1\}$  die 3-Sphäre. Zeige, dass das Tangentialbündel  $TS^3$  trivial ist. (7 Punkte)

[Tipp: Betrachte zu  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$  die folgenden Vektorfelder (d.h. Schnitte von  $T\mathbb{R}^4$ )  $X, Y, Z$ , die charakterisiert sind durch

$$\begin{aligned} X(p) &= (-p_2, p_1, p_4, -p_3) \in T_p \mathbb{R}^4, & Y(p) &= (-p_3, -p_4, p_1, p_2) \in T_p \mathbb{R}^4, \\ Z(p) &= (-p_4, p_3, -p_2, p_1) \in T_p \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

und benutze Aufgabe 24.]

### Aufgabe 30

Sei  $S^2 = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1\}$  die 2-Sphäre. Finde lokale Trivialisierungen und berechne die Übergangsfunktionen für das Tangentialbündel  $TS^2$ . (12 Punkte)

[Tipp: Benutze die stereographische Projektion aus Aufgabe 8.]

*Bemerkung:*  $TS^2$  ist ein Beispiel eines nicht-trivialen Vektorraumbündels (Diskussion in der Übung).

**Abgabe: 28.4.2010 in der Vorlesung**

<http://analysis.math.uni-mannheim.de>  $\rightarrow$  Lehre  $\rightarrow$  Analysis III