

# **Analysis III**

Frühjahrssemester 2010

Sebastian Klein

Nach dem Vorbild der Vorlesungen

- *Analysis III*  
von Professor M. U. Schmidt (Universität Mannheim)  
aus dem Sommersemester 2006,
- *Analysis auf Mannigfaltigkeiten*  
von Professor H. Reckziegel (Universität zu Köln)  
aus dem Sommersemester 1998.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>	<b>1</b>
1.1	Topologie: Topologische Räume . . . . .	1
1.2	Karten und Atlanten . . . . .	4
1.3	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	5
1.4	Differenzierbare Funktionen . . . . .	8
1.5	Differenzierbare Abbildungen . . . . .	9
1.6	Über Diffeomorphietypen . . . . .	11
1.7	Topologie: Offene Überdeckungen und Kompaktheit . . . . .	12
1.8	Zerlegungen der Eins . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Lineare Approximation</b>	<b>19</b>
2.1	Vorbereitende Definitionen . . . . .	19
2.2	Tangentialraum und Tangentialabbildung . . . . .	20
2.3	Der Tangentialraum einer Produktmannigfaltigkeit . . . . .	23
2.4	Tangentialvektoren als Derivationen . . . . .	24
2.5	Abbildungen von konstantem Rang, Immersionen und Submersionen . . . . .	27
2.6	Untermannigfaltigkeiten . . . . .	31
2.7	Vektorraumbündel . . . . .	36
2.8	Das Tangentialbündel . . . . .	42
2.9	Whitney-Summe, Homomorphismenbündel . . . . .	44

<b>3</b>	<b>Vektorfelder</b>	<b>47</b>
3.1	Vektorfelder . . . . .	47
3.2	Integralkurven und ihre lokale Existenz . . . . .	50
3.3	$\omega$ -Grenzpunkte und $\alpha$ -Grenzpunkte eines Weges . . . . .	52
3.4	Integration von Vektorfeldern . . . . .	53
3.5	Vollständige Vektorfelder . . . . .	59
3.6	Integration $f$ -verwandter Vektorfelder und Substitutionsmethode . . . . .	59
3.7	Zeitabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	60
3.8	Die Lieklammer von Vektorfeldern . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Tensorfelder und Differentialformen</b>	<b>65</b>
4.1	Tensorfelder . . . . .	65
4.2	Differentialformen . . . . .	68
4.3	Äußere Ableitung von Differentialformen . . . . .	71
4.4	Volumenformen und orientierte Mannigfaltigkeiten . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Integration auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>79</b>
5.1	Integration von Differentialformen im $\mathbb{R}^r$ . . . . .	79
5.2	Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	80
5.3	Mannigfaltigkeiten mit Rand . . . . .	84
5.4	Der Satz von Stokes . . . . .	88

# Kapitel 1

## Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### 1.1 Topologie: Topologische Räume

**Definition 1.** Ein *topologischer Raum* ist eine nicht-leere Menge  $M$  (deren Elemente wir *Punkte* nennen), zusammen mit einer Teilmenge  $\mathcal{T}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  von  $M$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(T0)  $\emptyset, M \in \mathcal{T}$

(T1) Ist  $I$  eine beliebige Indexmenge, und  $U_i \in \mathcal{T}$  für alle  $i \in I$ , so ist auch  $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

(T2) Ist  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ , so ist auch  $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$ .

Die Elemente von  $\mathcal{T}$  heißen *offene Mengen* des topologischen Raums  $M$ . Ist  $p \in M$  (bzw.  $N \subset M$ ), so heißen die offenen Mengen  $U \in \mathcal{T}$  mit  $p \in U$  (bzw.  $N \subset U$ ) *Umgebungen* von  $p$  (bzw. von  $N$ ). Die Menge der Umgebungen von  $p$  (bzw. von  $N$ ) bezeichnen wir mit  $U^o(p, M)$  (bzw. mit  $U^o(N, M)$ ). Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt *abgeschlossen* (in  $M$ ), wenn ihr Komplement  $M \setminus A$  offen in  $M$  ist.

#### Beispiele.

- (a) Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist die Menge  $\mathcal{T}$  aller Teilmengen von  $M$ , die im üblichen Sinne offen sind, d.h. explizit

$$\mathcal{T} := \{U \in \mathcal{P}(M) \mid \forall p \in U \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(p) \subset U\},$$

eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $M$ . Sie heißt die *kanonische Topologie* des metrischen Raums  $(M, d)$ ; in Zukunft betrachten wir metrische Räume stets auf diese Weise auch als topologische Räume. Insbesondere erhält auf diese Weise jeder normierte Vektorraum eine kanonische Topologie.

- (b) Sei  $M$  eine beliebige Menge. Dann sind die Mengen

$$\mathcal{T}_{\text{fein}} := \mathcal{P}(M) \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_{\text{grob}} := \{\emptyset, M\}$$

zwei (ziemlich pathologische) Topologien auf  $M$ .  $\mathcal{T}_{\text{fein}}$  heißt *diskrete Topologie* auf  $M$ .

Viele der uns von metrischen Räumen vertrauten „topologischen“ Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit, ... lassen sich auf topologische Räume übertragen, hier ein Beispiel:

**Definition 2.** Sei  $M$  ein topologischer Raum,  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$  und  $p^* \in M$ . Wir sagen die Folge  $(p_n)$  konvergiert gegen  $p^*$ , wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}^o(p^*, M) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : p_n \in U .$$

Topologische Räume sind im Allgemeinen ziemlich „wild“: viele uns von metrischen Räumen vertraute Aussagen über topologische Begriffe sind in topologischen Räumen im Allgemeinen falsch.\* So braucht beispielsweise der Grenzwert eine Folge in einem topologischen Raum nicht eindeutig bestimmt zu sein. (Bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\text{grob}}$  konvergiert zum Beispiel jede Folge gegen jeden Punkt  $p \in M$ .) Das ist der Grund, warum man die Notation  $p^* = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  für den Grenzwert einer Folge in allgemeinen topologischen Räumen nicht verwendet (sondern nur in Hausdorffräumen, s.u.). Damit wissen wir nun auch, dass nicht alle topologischen Räume *metrisierbar* (d.h. die kanonische Topologie zu einer Metrik) sind, die Kategorie der topologischen Räume ist also tatsächlich umfassender als die der metrischen Räume.

Der der Uneindeutigkeit des Grenzwertes (wie auch einigen anderen „Wildheiten“ topologischer Räume) zugrundeliegende Sachverhalt ist, dass man in einem topologischen Raum im Allgemeinen zwei Punkte nicht durch Umgebungen „trennen“ kann, d.h. sind  $p_1, p_2 \in M$  mit  $p_1 \neq p_2$ , so gibt es im Allgemeinen keine Umgebungen  $U_k$  von  $p_k$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Die Räume, in denen dies doch der Fall ist, spielen daher eine wesentliche Rolle:

**Definition 3.** Ein topologischer Raum  $M$  heißt ein *Hausdorffraum*, wenn es zu je zwei Punkten  $p_1, p_2 \in M$  mit  $p_1 \neq p_2$  Umgebungen  $U_1 \in \mathcal{U}^o(p_1, M)$  und  $U_2 \in \mathcal{U}^o(p_2, M)$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  gibt.

In Hausdorffräumen ist der Grenzwert einer konvergenten Folge  $(p_n)$  eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen daher in einem Hausdorffraum den Grenzwert einer solchen Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ .

### Aufgabe 1.

- (a) **Teilraumtopologie.** Sei  $M$  ein topologischer Raum mit Topologie  $\mathcal{T}$  und  $N$  eine Teilmenge von  $M$ . Dann wird durch

$$\mathcal{T}_N := \{ G \cap N \mid G \in \mathcal{T} \}$$

eine Topologie auf  $N$  konstruiert, die sogenannte *Teilraumtopologie* von  $N$ . Im Folgenden betrachten wir Teilmengen topologischer Räume in der Regel auf diese Weise als topologischen Raum. Zeige weiter: Ist  $M$  ein Hausdorffraum, so auch  $N$ .

- (b) **Produkttopologie.** Seien  $M_1, M_2$  topologische Räume und  $M := M_1 \times M_2$ . Wir nennen eine Teilmenge  $G \subset M$  offen, wenn

$$\forall p = (p_1, p_2) \in M \exists U_1 \in \mathcal{U}^o(p_1, M_1), U_2 \in \mathcal{U}^o(p_2, M_2) : (U_1 \times U_2) \subset G$$

---

\*Es gibt sogar ein ganzes Buch, das eine umfangreiche Sammlung topologischer Räume beschreibt, und untersucht, welche Aussagen in ihnen *nicht* gelten: STEEN/SEEBACH, *Counterexamples in Topology*.

gilt. Zeige: Die Gesamtheit der so definierten offenen Mengen von  $M$  bildet eine Topologie auf  $M$ , die sogenannte *Produkttopologie* von  $M_1$  und  $M_2$ . Zeige weiter: Sind  $M_1$  und  $M_2$  Hausdorffräume, so ist auch  $M$  ein solcher.

Natürlich läßt sich analog auch eine Produkttopologie endlich vieler topologischer Räume konstruieren; im Folgenden betrachten wir Produkte topologischer Räume stets auf diese Weise als topologischen Raum.

**Definition 4.** Es seien  $M$  und  $N$  topologische Räume und  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung.

- (a)  $f$  heißt *stetig*, wenn das Urbild einer jeden offenen Teilmenge von  $N$  eine offene Teilmenge von  $M$  ist.
- (b)  $f$  heißt ein *Homöomorphismus (auf  $N$ )*, wenn  $f$  bijektiv, und sowohl  $f$  als auch die Umkehrabbildung  $f^{-1} : N \rightarrow M$  stetig ist.
- (c)  $f$  heißt ein *Homöomorphismus in  $N$* , wenn  $f(M)$  offen in  $N$  ist, und  $f : M \rightarrow f(M)$  ein Homöomorphismus auf den topologischen Teilraum  $f(M)$  von  $N$  ist.
- (d)  $f$  heißt ein *lokaler Homöomorphismus*, wenn es zu jedem  $p \in M$  ein  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$  gibt, so dass  $f(U)$  offen in  $N$  und  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  ein Homöomorphismus ist.

**Aufgabe 2.** Seien  $(M, d)$  und  $(N, d')$  metrische Räume. Zeige:

- (a)  $M$  (betrachtet als topologischer Raum vermittelt der kanonischen Topologie) ist ein Hausdorffraum.
- (b) Eine Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau im Sinne von Definition 2 gegen ein  $p^* \in M$ , wenn sie im Sinne der  $\varepsilon$ -Definition gegen  $p^*$  konvergiert, d.h. wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : p_n \in U_\varepsilon(p^*).$$

- (c) Eine Teilmenge  $A \subset M$  ist genau dann abgeschlossen im Sinne von Definition 1, wenn sie Limes-abgeschlossen ist (d.h. wenn für jede Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $A$ , die in  $M$  gegen ein  $p^* \in M$  konvergiert, schon  $p^* \in A$  gilt).
- (d) Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist genau dann stetig im Sinne von Definition 4(a), wenn sie stetig im Sinne der  $(\varepsilon, \delta)$ -Definition ist, d.h. wenn

$$\forall p \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p))$$

gilt.

**Aufgabe 3.** Sei  $M$  ein topologischer Raum mit Topologie  $\mathcal{T}$ .

(a) Sei  $A$  eine beliebige Teilmenge von  $M$ . Zeige, dass dann die folgenden Mengen gleich sind:

$$i) \quad A_1 := \{x \in M \mid \forall U \in \mathcal{U}^o(x, M) : U \cap A \neq \emptyset\}$$

$$ii) \quad A_2 := \bigcap_{\substack{A \subset \tilde{A} \subset M \\ \tilde{A} \text{ abgeschlossen in } M}} \tilde{A}$$

Die so gebildete Menge heißt *Abschluss* von  $A$  in  $M$  und wird mit  $\overline{A}$  bezeichnet.

(b) Sind  $A, B$  Teilmengen von  $M$ , so zeige man:

$$(i) \quad A \subset \overline{A}$$

$$(ii) \quad A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$$

$$(iii) \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

$$(iv) \quad A \text{ ist genau dann abgeschlossen in } M, \text{ wenn } \overline{A} = A \text{ gilt.}$$

$$(v) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$(vi) \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}. \text{ Gilt hier sogar Gleichheit (im Allgemeinen)?}$$

## 1.2 Karten und Atlanten

**Definition 1.** Es sei  $M$  ein Hausdorffraum und  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Ist  $U \subset M$  eine offene Teilmenge und ist  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Homöomorphismus in  $\mathbb{R}^n$ , so nennen wir das Paar  $(U, x)$ , oder auch  $x$  selbst, eine (*n-dimensionale*) Karte von  $M$ . Eine Karte heißt *global*, wenn  $U = M$  ist.

(b) Existiert zu jedem Punkt  $p \in M$  eine *n-dimensionale* Karte  $(U, x)$  mit  $p \in U$ , so heißt  $M$  eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit*. In diesem Fall bezeichnen wir mit  $\mathfrak{A}^0(M)$  den „Atlas“ aller *n-dimensionalen* Karten von  $M$ .

(c) Sind  $(U_1, x_1)$  und  $(U_2, x_2)$  zwei Karten von  $M$  mit  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , so heißt der Homöomorphismus

$$x_2 \circ x_1^{-1} : x_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow x_2(U_1 \cap U_2)$$

die *Koordinatentransformation* von  $(U_1, x_1)$  zu  $(U_2, x_2)$ .

### Beispiele.

(a) Jeder *n-dimensionale* Vektorraum  $V$  (und ebenso jeder *n-dimensionale* affine Raum  $\mathbb{E}$ ) ist (mit der üblichen Topologie) eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit*. Ist nämlich  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$ , so ist die Abbildung  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die durch

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : x(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

charakterisiert ist, eine globale Karte von  $V$  im Sinne der Definition (a).



- (b) Ein Hausdorffraum  $M$  ist genau dann eine 0-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, wenn  $M$  die diskrete Topologie trägt (siehe Beispiel (b) in Abschnitt 1.1).
- (c) Jede offene, nicht-leere Teilmenge  $G$  einer  $n$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  ist (aufgefasst als topologischer Teilraum) selbst eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.
- (d) Sind  $M$  und  $N$  topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m$  bzw.  $n$ , so ist  $M \times N$  (aufgefasst als topologischer Raum mit der Produkttopologie) eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $m + n$ . Ist nämlich  $(U, x) \in \mathfrak{A}^0(M)$  und  $(V, y) \in \mathfrak{A}^0(N)$ , so ist  $z := x \times y : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$  eine Karte von  $M \times N$ ; schreiben wir  $z = (z_1, \dots, z_{m+n})$ , so gilt für  $(p, q) \in U \times V$

$$z_i(p, q) = \begin{cases} x_i(p) & \text{für } 1 \leq i \leq m \\ y_{i-m}(q) & \text{für } m+1 \leq i \leq m+n \end{cases} .$$

Die Menge derartiger Karten von  $M \times N$  überdeckt ganz  $M \times N$ .

### Bemerkungen.

- (a) In der algebraischen Topologie (siehe z. B. GREENBERG, *Algebraic Topology*, § 18) zeigt man, dass zwei offene Teilmengen  $W_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $W_2 \subset \mathbb{R}^m$  nur dann zueinander homöomorph sein können, wenn  $n = m$  ist (BROUWER). Daher haben zwei Karten eines topologischen Raums  $M$ , deren Definitionsbereiche nicht-leeren Schnitt haben, dieselbe Dimension. Insbesondere kann für  $n \neq m$  der Raum  $M$  nicht sowohl eine  $n$ -dimensionale als auch eine  $m$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit sein.
- (b) Kompakte topologische Mannigfaltigkeiten  $M$ , die aus mehr als einem Punkt bestehen, besitzen niemals globale Karten. (In der Sprache der *Kurven und Flächen*: Kompakte Flächen besitzen keine singularitätenfreien Parametrisierungen.)
- (c) Nicht alle topologischen Räume sind topologische Mannigfaltigkeiten. So besitzt beispielsweise der topologische Teilraum

$$M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0 \}$$

von  $\mathbb{R}^2$  keine Karte um den Punkt  $(0, 0) \in M$ .

### 1.3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**Definition 1.** Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und  $k \in \{1, 2, \dots, \infty, \omega\}$ .

- (a) Ein *Atlas* von  $M$  ist eine Teilmenge  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^0(M)$ , so dass es für jedes  $p \in M$  eine Karte  $(U, x) \in \mathfrak{A}$  mit  $p \in U$  gibt.

- (b) Zwei Karten  $(U_1, x_1)$  und  $(U_2, x_2)$  von  $M$  heißen  $C^k$ -*verträglich*, wenn entweder  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , oder aber  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  und die zugehörige Koordinatentransformation  $x_2 \circ x_1^{-1}$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist. (Dabei steht  $C^\infty$  für „beliebig oft differenzierbar“ und  $C^\omega$  für „reell-analytisch“.)
- (c) Ein Atlas  $\mathfrak{A}$  von  $M$  heißt ein  $C^k$ -*Atlas*, wenn je zwei Karten aus  $\mathfrak{A}$   $C^k$ -verträglich sind.
- (d) Ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ein  $C^k$ -Atlas von  $M$ , so nennen wir den „maximalen“  $C^k$ -Atlas

$$\mathfrak{A} := \{ (U, x) \in \mathfrak{A}^0(M) \mid (U, x) \text{ ist mit allen } (U', x') \in \tilde{\mathfrak{A}} \text{ } C^k\text{-verträglich} \}$$

die von  $\tilde{\mathfrak{A}}$  erzeugte  $C^k$ -*Struktur* auf  $M$ .

Als eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit wollen wir eine topologische Mannigfaltigkeit auffassen, die mit einer festen  $C^k$ -Struktur versehen ist. Durch diese erhält die Mannigfaltigkeit eine „spezielle lokale Struktur“. Es erweist sich jedoch als zweckmäßig, darüber hinaus eine zusätzliche, „globale“ Eigenschaft zu fordern, nämlich die *Separabilität*. Sie sorgt dafür, dass die Mannigfaltigkeiten, die wir betrachten „nicht zu groß“ werden, und ist insbesondere für die Existenz der „Zerlegungen der Eins“ (siehe Abschnitt 1.8) wesentlich.

**Definition 2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (a) Sei  $Y \subset X$ . Ein Punkt  $p \in X$  heißt *Berührungspunkt* von  $Y$ , wenn für jedes  $U \in \mathcal{U}^o(p, X)$  gilt:  $U \cap Y \neq \emptyset$ . Die Menge der Berührungspunkte von  $Y$  heißt *Abschluß* von  $Y$  und wird mit  $\bar{Y}$  bezeichnet. (Siehe auch Aufgabe 3 in Abschnitt 1.1.) Offenbar gilt  $Y \subset \bar{Y}$ . Man sagt,  $Y$  *liegt dicht in*  $X$ , wenn  $\bar{Y} = X$  gilt.
- (b) Der topologische Raum  $X$  heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge von  $X$  gibt, die dicht in  $X$  liegt.
- (c) Eine *n-dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit* ist eine separable,  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer  $C^k$ -Struktur.

Wir werden im Weiteren einfach sagen, „ $M$  ist eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit“, und meinen damit, dass auf der topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  eine bestimmte  $C^k$ -Struktur „ausgewählt“ ist. In diesem Fall bezeichnen wir für  $p \in M$  mit  $\mathcal{U}^k(p)$  oder  $\mathcal{U}^k(p, M)$  die Menge aller Karten  $(U, x)$  der gewählten  $C^k$ -Struktur mit  $p \in U$ .

**Beispiele.**

- (a) Besitzt eine separable topologische Mannigfaltigkeit  $M$  eine globale Karte  $(M, x)$ , so wird von dieser stets eine  $C^k$ -Struktur (für jedes  $k \in \{1, 2, \dots, \infty, \omega\}$ ) erzeugt.  
Sei beispielsweise  $M = \mathbb{R}$ . Dann sind  $x := \text{id}_{\mathbb{R}}$  und  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^3$  Homöomorphismen, also globale Karten von  $\mathbb{R}$ , die allerdings nicht  $C^1$ -verträglich sind. Daher erzeugen diese beiden Karten für jedes  $k \geq 1$  unterschiedliche  $C^k$ -Strukturen auf  $\mathbb{R}$ .
- (b) Die verschiedenen, in Beispiel (a) aus Abschnitt 1.2 konstruierten, globalen Karten eines Vektorraums  $V$  sind zueinander  $C^\infty$ -verträglich. Daher definieren sie auf  $V$  eine ausgezeichnete  $C^\infty$ -Struktur. Wir betrachten  $V$  stets auf diese Weise als  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

- (c) Jede offene, nicht-leere Teilmenge  $G$  einer  $n$ -dimensionalen  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist (aufgefasst als topologischer Teilraum) in kanonischer Weise selbst eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit.
- (d) Sind  $M$  und  $N$   $C^k$ -Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m$  bzw.  $n$ , so ist  $M \times N$  (aufgefasst als topologischer Raum mit der Produkttopologie) eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $m + n$ , und zwar erhält man einen  $C^k$ -Atlas für  $M \times N$ , indem man nach dem Muster von Beispiel (d) aus Abschnitt 1.2 mit Hilfe der Karten  $(U, x) \in \mathfrak{A}_M$  und  $(V, y) \in \mathfrak{A}_N$  die Karten  $(U \times V, z = x \times y)$  konstruiert.

**Aufgabe. Die Sphäre als  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.** Wir betrachten den  $\mathbb{R}^{n+1}$  auf die übliche Weise als euklidischen Vektorraum, dessen kanonische Basis wir mit  $(e_0, \dots, e_n)$  bezeichnen. Unter der  $n$ -dimensionalen Sphäre verstehen wir die Teilmenge

$$S^n := \{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1 \}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, wie man  $S^n$  auf natürliche Weise als  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit auffassen kann. Dazu zeige man:

- (a) Ist  $p \in S^n \setminus \{e_0\}$ , so schneidet die Gerade durch die Punkte  $e_0 \in S^n$  und  $p$  die Hyperebene

$$H := \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, e_0 \rangle = 0 \} = \{0\} \times \mathbb{R}^n$$

in genau einem Punkt, den wir mit  $F(p)$  bezeichnen wollen. Die hierdurch definierte Abbildung  $F : S^n \setminus \{e_0\} \rightarrow H$  heißt *stereographische Projektion*.

- (b)  $F : S^n \setminus \{e_0\} \rightarrow H$  ist ein Homöomorphismus auf  $H$ . Indem wir  $H$  auf die offensichtliche Weise mit  $\mathbb{R}^n$  identifizieren, wird  $(S^n \setminus \{e_0\}, F)$  daher eine Karte für  $S^n$ .
- (c) Sei  $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(v_0, v_1, \dots, v_n) \mapsto (-v_0, v_1, \dots, v_n)$  die Spiegelung an  $H$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist  $\tilde{F} := F \circ \Phi : S^n \setminus \{-e_0\} \rightarrow H$  eine weitere Karte von  $S^n$ .
- (d) Die beiden Karten  $F$  und  $\tilde{F}$  sind  $C^\infty$ -verträglich. Daher ist  $S^n$ , versehen mit der von dem  $C^\infty$ -Atlas  $\{(S^n \setminus \{e_0\}, F), (S^n \setminus \{-e_0\}, \tilde{F})\}$  induzierten  $C^\infty$ -Struktur, eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

**Aussage.** Jede  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist metrisierbar (d.h. es gibt eine Metrik auf  $M$ , die die auf  $M$  gegebene Topologie erzeugt).

*Beweis.* Der Beweis beruht auf dem sogenannten Satz von URYSOHN aus der Topologie (siehe z.B. SCHUBERT, *Topologie*, Satz I.9.3.2 mit Zusatz auf S. 97). Nach ihm ist jeder lokalkompakte topologische Raum mit abzählbarer Topologie metrisierbar. Die Mannigfaltigkeit  $M$  ist (mittels ihrer Karten) lokal homöomorph zum lokalkompakten Raum  $\mathbb{R}^n$ , und daher selbst lokalkompakt. Aus der lokalen Homöomorphie von  $M$  zu  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit der Separabilität von  $M$  ergibt sich außerdem, dass  $M$  abzählbare Topologie besitzt. Daher ist  $M$  nach dem Satz von Urysohn metrisierbar. — Ein alternativer Beweis der Aussage ist mit den Mitteln der *Riemannschen Geometrie* möglich.  $\square$

**Ein Satz von Whitney.** Es seien  $j, k \in \{1, 2, \dots, \infty, \omega\}$  mit  $j < k$  (per definitionem ist  $j < \omega$  für alle  $j = 1, 2, \dots, \infty$ ).

- (a) Ist  $\mathfrak{A}$  eine  $C^k$ -Struktur, so ist  $\mathfrak{A}$  trivialerweise auch ein  $C^j$ -Atlas, der zu einer  $C^j$ -Struktur vervollständigt werden kann. In diesem Sinn ist jede  $C^k$ -Mannigfaltigkeit in kanonischer Weise auch eine  $C^j$ -Mannigfaltigkeit.
- (b) In jeder  $C^j$ -Struktur ist (umgekehrt) mindestens eine  $C^k$ -Struktur (also insbesondere mindestens eine  $C^\omega$ -Struktur) enthalten. (Siehe H. WHITNEY, *The imbedding of manifolds in families of analytic manifolds*, Ann. of Math. **37** (1936), 865–878.)

**| Aus diesem Grund betrachten wir im Folgenden stets nur  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten.**

**Existenz von  $C^1$ -Strukturen auf topologischen Mannigfaltigkeiten.**

- (a) Jede (separable) topologische Mannigfaltigkeit einer Dimension  $\leq 4$  besitzt eine  $C^1$ -Struktur.
- (b) Für jedes  $n = 8, 10, 11, \dots$  existiert eine separable  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, welche keine einzige  $C^1$ -Struktur besitzt. (Siehe M. KERVAIRE, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comm. Math. Helv. **34** (1960), 257–270 und S. SMALE, Ann. Math. **74** (1961).)

## 1.4 Differenzierbare Funktionen

**Definition.** Ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $k \in \{1, \dots, \infty\}$ ,  $G \subset M$  offen und nicht-leer und  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so heißt eine Funktion  $f : G \rightarrow V$   $C^k$ -differenzierbar (oder eine  $C^k$ -Funktion), wenn für jede  $C^\infty$ -Karte  $(U, x)$  von  $M$  (d.h. für jede Karte der  $C^\infty$ -Struktur von  $M$ ) mit  $U \subset G$  die Funktion

$$\mathbb{R}^n \supset x(U) \xrightarrow{f \circ x^{-1}} V$$

im Sinne der Analysis auf Vektorräumen  $C^k$ -differenzierbar ist.

Die Menge  $C^k(G)$  der  $C^k$ -Funktionen  $G \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Algebra; und die Menge  $C^k(G, V)$  der  $C^k$ -Funktionen  $G \rightarrow V$  ist ein  $C^k(G)$ -Modul.

**Aussage.** Eine Funktion  $f : G \rightarrow V$  ist bereits dann eine  $C^k$ -Funktion, wenn

$$\forall p \in G \exists (U_p, x_p) \in \mathcal{U}^\infty(p, G) : (f \circ x_p^{-1} \text{ ist } C^k\text{-differenzierbar}) .$$

*Beweis.* Sei  $(U, x)$  eine beliebige  $C^\infty$ -Karte von  $M$ . Wir haben zu zeigen, dass die Funktion  $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow V$   $C^k$ -differenzierbar ist. Dazu sei  $p \in U$  gegeben. Nach Voraussetzung existiert eine  $C^\infty$ -Karte  $(U_p, x_p)$  mit  $p \in U_p$ , so dass  $f \circ x_p^{-1} : x_p(U_p) \rightarrow V$   $C^k$ -differenzierbar ist. Nun gilt

$$(f \circ x^{-1})|_{x(U \cap U_p)} = (f \circ x_p^{-1}) \circ (x_p \circ x^{-1}) .$$

Die auf der rechten Seite auftretende Abbildung  $x_p \circ x^{-1}$  ist sogar  $C^\infty$ -differenzierbar, weil die Karten  $x$  und  $x_p$  von  $M$   $C^\infty$ -verträglich sind. Daher ist  $f \circ x^{-1}$  in  $p$   $C^k$ -differenzierbar.  $\square$

**Beispiel.** Jede  $C^\infty$ -Karte  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $M$  ist  $C^\infty$ -differenzierbar.

## 1.5 Differenzierbare Abbildungen

**Definition.** Sind  $M$  und  $N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und ist  $k \in \{1, \dots, \infty\}$ , so heißt eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$   $C^k$ -differenzierbar (oder eine  $C^k$ -Abbildung), wenn

$$\forall p \in M \exists (U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M) \text{ und } (V, y) \in \mathcal{U}^\infty(f(p), N) : \\ f(U) \subset V \text{ und } y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist im Sinne der Analysis} \\ \text{auf Vektorräumen } C^k\text{-differenzierbar ;}$$

dabei ist  $n := \dim N$ . Insbesondere sind  $C^k$ -Abbildungen stetig. –  $C^\infty$ -differenzierbare Abbildungen nennt man auch *glatt*.

**Aussage.** Eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist genau dann  $C^k$ -differenzierbar, wenn für jede  $C^k$ -Funktion  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  ( $G \subset N$  offen) die Funktion

$$\varphi \circ f : f^{-1}(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

$C^k$ -differenzierbar ist.

*Beweis.* Sei zunächst  $f$   $C^k$ -differenzierbar, und eine auf einer offenen Teilmenge  $G \subset N$  definierte  $C^k$ -Funktion  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Also existieren zu  $p \in f^{-1}(G)$   $C^\infty$ -Karten  $(U, x)$  von  $M$  und  $(V, y)$  von  $N$  mit  $p \in U$  und  $f(U) \subset V \subset G$ , so dass  $y \circ f \circ x^{-1}$   $C^k$ -differenzierbar ist. Es gilt

$$(\varphi \circ f) \circ x^{-1} = (\varphi \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}),$$

und aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzung an  $\varphi$  ist auch die Funktion  $\varphi \circ y^{-1}$   $C^k$ -differenzierbar. Daher folgt, dass auch  $(\varphi \circ f) \circ x^{-1}$   $C^k$ -differenzierbar ist, und deswegen ist nach der Aussage aus Abschnitt 1.4  $\varphi \circ f$  eine  $C^k$ -Funktion.

Nun setzen wir umgekehrt voraus, dass  $\varphi \circ f$  eine  $C^k$ -Funktion ist für jede  $C^k$ -Funktion  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Es sei eine  $C^\infty$ -Karte  $(V, y)$  von  $N$  gegeben, etwa sei  $y = (y_1, \dots, y_n)$  mit  $C^\infty$ -Funktionen  $y_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Voraussetzung ist daher jeweils  $y_k \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^k$ -Funktion, und deswegen ist auch  $y \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^k$ -Funktion. Dies bedeutet nach Definition, dass für jede  $C^\infty$ -Karte  $x : U \rightarrow x(U)$  von  $M$  die Abbildung  $y \circ f \circ x^{-1}$  eine  $C^k$ -Funktion ist, und somit ist  $f$   $C^k$ -differenzierbar.  $\square$

**Folgerung.**  $\text{id}_M$  ist eine  $C^\infty$ -Abbildung und die Kompositionen von  $C^k$ -Abbildungen sind  $C^k$ -Abbildungen. Daher bilden die  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten zusammen mit den  $C^\infty$ -Abbildungen eine Kategorie.

### Weitere Definitionen.

- (a) Ein  $C^k$ -differenzierbarer Homöomorphismus  $f : M \rightarrow N$  auf bzw. in  $N$ , dessen Umkehrung  $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$  ebenfalls eine  $C^k$ -Abbildung ist, heißt ein  $C^k$ -Diffeomorphismus auf bzw. in  $N$ . Existiert ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus zwischen zwei  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten, so sagt man, dass diese beiden  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten (zueinander) *diffeomorph* sind.

- (b) Einen lokalen Homöomorphismus  $f : M \rightarrow N$  nennen wir einen *lokalen  $C^k$ -Diffeomorphismus*, wenn es zu jedem  $p \in M$  eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$  gibt, so dass  $f|U : U \rightarrow f(U)$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist.
- (c) Ist  $A \subset M$  eine beliebige nichtleere Menge, so heißt eine Abbildung  $f : A \rightarrow N$   *$C^k$ -differenzierbar*, wenn es eine Umgebung  $G \in \mathcal{U}^o(A, M)$  und eine  $C^k$ -Abbildung  $\tilde{f} : G \rightarrow N$  (beachte Beispiel (c) aus Abschnitt 1.3) gibt, so dass  $f = \tilde{f}|A$  ist.
- (d) Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, so nennen wir eine  $C^\infty$ -Abbildung  $I \rightarrow M$  eine *Kurve* in  $M$ . (Falls das Intervall  $I$  nicht offen ist, beachte man hierfür (c).)

### Beispiele.

- (a) Jede konstante Abbildung ist  $C^k$ -differenzierbar.
- (b) Eine Funktion  $f : M \rightarrow V$  in einen Vektorraum  $V$  ist genau dann  $C^k$ -differenzierbar (im Sinne von Abschnitt 1.4), wenn sie eine  $C^k$ -Abbildung (im Sinne von Abschnitt 1.5) ist.
- (c) Die Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen der Analysis II ordnet sich widerspruchsfrei der hier beschriebenen „Differentialrechnung“ auf Mannigfaltigkeiten unter. Insbesondere ist eine Abbildung zwischen Vektorräumen genau dann im hier beschriebenen Sinne  $C^k$ -differenzierbar, wenn sie im Sinne der Analysis II  $C^k$ -differenzierbar ist. Daher ist jede lineare und jede affine Abbildung zwischen Vektorräumen (oder affinen Räumen)  $C^\infty$ -differenzierbar im hiesigen Sinne.
- (d) Ist  $(U, x)$  eine  $C^\infty$ -Karte einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, so ist  $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus in  $\mathbb{R}^n$ .
- (e) Seien  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  die beiden in Beispiel (a) aus Abschnitt 1.3 beschriebenen  $C^\infty$ -Strukturen auf  $\mathbb{R}$ . Dann sind  $(\mathbb{R}, \mathfrak{A}_1)$  und  $(\mathbb{R}, \mathfrak{A}_2)$  zueinander diffeomorph.
- (f) Es seien  $N_1, N_2$  und  $M$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $f = (f_1, f_2) : M \rightarrow N_1 \times N_2$  eine Abbildung. Dann gilt: Die kanonischen Projektionen  $\text{pr}_i : N_1 \times N_2 \rightarrow N_i$ ,  $(p_1, p_2) \mapsto p_i$  ( $i = 1, 2$ ) sind  $C^\infty$ -Abbildungen, und  $f$  ist genau dann eine  $C^k$ -Abbildung, wenn  $f_1$  und  $f_2$   $C^k$ -Abbildungen sind.
- (g) Sind  $L, M$  und  $N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten, ist  $f : M \rightarrow N$  ein lokaler  $C^k$ -Diffeomorphismus und  $g : L \rightarrow N$  eine  $C^k$ -Abbildung, so ist auch jede stetige Abbildung  $\tilde{g} : L \rightarrow M$ , die mit  $g$  durch  $f \circ \tilde{g} = g$  verknüpft ist,  $C^k$ -differenzierbar. (Man nennt  $\tilde{g}$  einen *Lift* von  $g$  bezüglich  $f$ .)

**Aufgabe 1.** Zeige, dass zueinander  $C^\infty$ -diffeomorphe  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten dieselbe Dimension besitzen (ohne die in Bemerkung (a) aus Abschnitt 1.2 erwähnten Aussagen aus der algebraischen Topologie zu verwenden).

**Aufgabe 2.** Wir bezeichnen mit  $U_1(0) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\}$  die offene Einheitskreisscheibe im  $\mathbb{R}^n$ . Zeige:

(a) Die Abbildung

$$f : U_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto \frac{2v}{1 - \|v\|^2}$$

ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus auf  $\mathbb{R}^n$ . Daher ist  $U_1(0)$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, v \mapsto \frac{v}{\|v\|^2}$$

ist ein involutiver  $C^\infty$ -Diffeomorphismus auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . (Dabei bedeutet *involutiv*:  $g \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ .) Man nennt  $g$  die *Inversion an der Einheitskugelsphäre*. Zusammen mit  $f$  ergibt sie einen Diffeomorphismus zwischen dem Äußeren der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe  $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| > 1\}$  und  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

## 1.6 Über Diffeomorphietypen

**Satz.** Jede zusammenhängende 1-dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist zu  $\mathbb{R}$  oder zu  $S^1$  diffeomorph.

Diesen Satz können wir im Moment noch nicht beweisen, da dafür Mittel der Riemannschen Geometrie nötig sind. Er zeigt unter anderem, dass auf einer 1-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit je zwei  $C^\infty$ -Strukturen zueinander diffeomorph sind. Für Mannigfaltigkeiten höherer Dimension ist die Situation komplizierter:

**Exotische  $C^\infty$ -Strukturen.** Es sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit  $C^\infty$ -Struktur  $\mathfrak{A}$ . Wir stellen uns vor, dass wir uns an  $M$  mit der  $C^\infty$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  gewöhnt haben, wie das sicher bei  $M \in \{\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{R}^n \times S^m \text{ usw.}\}$  der Fall sein wird. Wir sagen dann, dass eine andere  $C^\infty$ -Struktur  $\mathfrak{E}$  von  $M$  *exotisch* ist, wenn es *keinen* Diffeomorphismus von  $(M, \mathfrak{A})$  auf  $(M, \mathfrak{E})$  gibt. Über die Existenz exotischer differenzierbarer Strukturen ist folgendes bekannt:

(a)  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten der Dimension 1, 2 und 3 besitzen keine exotischen  $C^\infty$ -Strukturen.

(b) Für  $n \neq 4$  besitzt der  $\mathbb{R}^n$  keine exotischen  $C^\infty$ -Strukturen.

(c)  $S^7$  hat 27 exotische  $C^\infty$ -Strukturen (MILNOR 1956); das war das erste diesbezüglich aufregende Resultat. Für  $n \leq 20$  ist die Anzahl  $m$  der exotischen Strukturen auf  $S^n$  bekannt:

$n$	1, ..., 6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$m$	0	27	1	7	5	991	0	2	1	16255	1	15	15	523263	23

Für große  $n$  ist die Frage offen.

(d) Für 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten ist das Problem besonders schwierig. Inzwischen ist die Existenz exotischer  $C^\infty$ -Strukturen auf folgenden 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten bewiesen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^4 & \quad (\text{CAPPELL/SHANESON 1976}), \\ S^3 \times \mathbb{R} & \quad (\text{FREEDMAN 1979}), \end{aligned}$$

und sehr schwierig und unerwartet

$$\mathbb{R}^4 \quad (\text{DONALDSON/FREEDMAN 1983}).$$

Äußerst lesenswert ist M. KRECKs Artikel „Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten“, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **88**, 124–145 (1986).

## 1.7 Topologie: Offene Überdeckungen und Kompaktheit

**Definition 1.** Sei  $M$  ein topologischer Raum und  $N$  eine Teilmenge von  $M$ .

- (a) Eine *offene Überdeckung* von  $N$  ist eine Familie  $(U_i)_{i \in I}$  offener Teilmengen von  $M$  mit  $N \subset \cup_{i \in I} U_i$ .
- (b) Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $N$ , so heißt jede offene Überdeckung  $(U_j)_{j \in J}$  mit  $J \subset I$  eine *Teilüberdeckung* von  $(U_i)_{i \in I}$ .
- (c)  $N$  heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von  $N$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**Bemerkung.** Ist  $M$  ein metrischer Raum, so ist  $M$  genau dann kompakt, wenn  $M$  folgenkompakt ist, d.h. wenn jede Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge besitzt. (In topologischen Räumen ist das im Allgemeinen nicht richtig.) Nach dem bekannten Satz von HEINE-BOREL ist eine Teilmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Aussage.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $K \subset X$  eine kompakte Teilmenge.

- (a) Ist  $X$  ein Hausdorff-Raum, so ist  $K$  abgeschlossen in  $X$ .
- (b) Ist  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $K$ , so ist auch  $A$  kompakt.

*Beweis.* Für (a). Sei  $q \in X \setminus K$ . Wir zeigen zunächst, dass es Umgebungen  $U \in \mathcal{U}^o(K, X)$  und  $V \in \mathcal{U}^o(q, X)$  mit  $U \cap V = \emptyset$  gibt. Dazu: Für jedes  $p \in K$  existieren wegen der Hausdorff-Eigenschaft von  $X$  Umgebungen  $U_p \in \mathcal{U}^o(p, X)$  und  $V_p \in \mathcal{U}^o(q, X)$  mit  $U_p \cap V_p = \emptyset$ .  $(U_p)_{p \in K}$  ist eine offene Überdeckung von  $K$ ; da  $K$  kompakt ist, besitzt diese eine endliche Teilüberdeckung, das heißt, es existieren endlich viele Punkte  $p_1, \dots, p_n \in K$  mit  $K \subset U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n} =: U$ , also  $U \in \mathcal{U}^o(K, X)$ . Mit  $V := V_{p_1} \cap \dots \cap V_{p_n}$  ist dann  $V \in \mathcal{U}^o(q, X)$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

Nach dem ersten Teil des Beweises existiert zu jedem  $q \in X \setminus K$  insbesondere ein  $V_q \in \mathcal{U}^o(q, X)$  mit  $V_q \cap K = \emptyset$ , also  $V_q \subset X \setminus K$ . Damit ist  $X \setminus K = \cup_{q \in X \setminus K} V_q$  offen als Vereinigung offener Mengen, und somit  $K$  abgeschlossen.

Für (b). Wir betrachten  $K$  als topologischen Teilraum. Es sei eine Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $A$  durch in  $K$  offene Mengen gegeben. Indem wir dieser Überdeckung die in  $K$  offene Menge  $K \setminus A$  hinzufügen, erhalten wir eine Überdeckung von ganz  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, besitzt diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung von  $K$ , insbesondere von  $A$ . Sollte in dieser Teilüberdeckung von  $A$  die hinzugefügte Menge  $K \setminus A$  auftreten, können wir sie streichen, denn sie ist disjunkt zu  $A$ . Auf diese Weise erhalten wir eine endliche Teilüberdeckung von  $A$  in der ursprünglichen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$ .  $\square$



**Aufgabe 1.** Seien  $X, Y$  topologische Räume.

- (a) Sind  $K_1, \dots, K_n \subset X$  kompakt, so ist auch  $K_1 \cup \dots \cup K_n$  kompakt.
- (b) Ist  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $(K_i)_{i \in I}$  eine nicht-leere Familie kompakter Mengen  $K_i \subset X$ , so ist auch  $\bigcap_{i \in I} K_i$  kompakt.
- (c) Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und ist  $K \subset X$  kompakt, so ist auch  $f(K)$  kompakt.
- (d) Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige, bijektive Abbildung, und ist  $X$  kompakt und  $Y$  hausdorffsch, so ist  $f$  schon ein Homöomorphismus.

**Aufgabe 2. Das Tubenlemma.** Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume,  $q \in X$  ein beliebiger Punkt,  $K \subset Y$  eine kompakte Teilmenge und  $G \in \mathcal{U}^o(\{q\} \times K, X \times Y)$ . (Zur Produkttopologie siehe Aufgabe 2(b) in Abschnitt 1.1.) Dann gilt: Es gibt eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}^o(q, X)$ , so dass sogar die „Tube“  $U \times K$  in  $G$  enthalten ist.

**Satz.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann besitzt jede offene Überdeckung von  $M$  eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir einige Vorbereitungen:

**Definition 2.** Sei  $M$  ein topologischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge  $N \subset M$  heißt *relativ-kompakt* in  $M$ , wenn der Abschluß  $\overline{N}$  von  $N$  in  $M$  (siehe Definition 2(a) in Abschnitt 1.3) kompakt ist.
- (b)  $M$  heißt *lokal-kompakt*, wenn jeder Punkt  $p \in M$  eine relativ-kompakte Umgebung besitzt.

**Beispiele.**

- (a) Ist  $N$  relativ-kompakt in  $M$  und ist  $L$  offen in  $N$ , so ist auch  $L$  relativ-kompakt.
- (b) Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann relativ-kompakt, wenn sie beschränkt ist.
- (c) Topologische Mannigfaltigkeiten – und damit insbesondere  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten – sind lokal-kompakt.

**Lemma.** Sei  $M$  ein separabler, lokal-kompakter metrischer Raum. Dann existiert eine Folge  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  relativ-kompakter, offener Teilmengen von  $M$ , so dass  $\overline{O_n} \subset O_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = M$  gilt.

*Beweis des Lemmas.* Wir zeigen zunächst, dass es eine abzählbare Familie  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von offenen, relativ-kompakten Teilmengen von  $M$  gibt, so dass jede offene Teilmenge von  $M$  Vereinigung

gewisser Mitglieder dieser Familie ist. (Eine solche Familie offener Teilmengen heißt *Basis der Topologie* von  $M$ .)

$M$  ist separabel, also gibt es eine Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $M$ , die in  $M$  dicht liegt. Sei nun eine offene Menge  $G \subset M$  gegeben. Für jedes  $p \in G$  gilt dann das Folgende: Da  $M$  lokal-kompakt ist, existiert eine relativ-kompakte offene Umgebung  $W_p \in \mathcal{U}^o(p, M)$ . Weiter existiert nach der Definition der kanonischen Topologie des metrischen Raums  $M$  eine Zahl  $k_p \in \mathbb{N}$ , so dass  $U_{1/k_p}(p) \subset W_p \cap G$  ist. Ferner existiert, weil die Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dicht in  $M$  liegt, ein  $n_p \in \mathbb{N}$ , so dass  $q_{n_p} \in U_{1/2k_p}(p)$  gilt. Nun gilt wegen der Dreiecksungleichung  $p \in U_{1/2k_p}(q_{n_p}) \subset W_p \cap G$ , und  $U_{1/2k_p}(q_{n_p})$  ist mit  $W_p$  relativ-kompakt. Daher ist  $G = \cup_{p \in G} U_{1/2k_p}(q_{n_p})$ .

Dies zeigt, dass wenn wir die abzählbare Familie  $U_{1/k}(q_n)$  (wobei  $k, n$  ganz  $\mathbb{N}$  durchlaufen) als  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durchnummerieren,  $(V_n)$  eine Basis der Topologie von  $M$  ist.

Wir beweisen als nächstes: Für jede kompakte Menge  $K \subset M$  existiert ein  $r > 0$ , so dass  $\cup_{p \in K} U_r(p)$  relativ-kompakt ist. Dazu: Da  $M$  lokal-kompakt ist, existiert zu jedem  $p \in K$  ein  $r_p > 0$ , so dass  $U_{r_p}(p)$  relativ-kompakt in  $M$  ist.  $(U_{r_p/2}(p))_{p \in K}$  ist eine offene Überdeckung von  $K$ ; da  $K$  kompakt ist, besitzt diese also eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt endlich viele Punkte  $p_1, \dots, p_n \in K$ , so dass  $K \subset U_{r_{p_1}/2}(p_1) \cup \dots \cup U_{r_{p_n}/2}(p_n)$  gilt. Sei  $r := \frac{1}{2} \min\{r_{p_1}, \dots, r_{p_n}\} > 0$ . Dann gibt es für jedes  $p \in K$  ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $p \in U_{r_{p_k}/2}(p_k)$ ; aufgrund der Dreiecksungleichung gilt  $U_r(p) \subset U_{r_{p_k}}(p_k)$ . Also gilt  $\cup_{p \in K} U_r(p) \subset U_{r_{p_1}}(p_1) \cup \dots \cup U_{r_{p_n}}(p_n)$ , und daher ist  $\cup_{p \in K} U_r(p)$  relativ-kompakt.

Nun konstruieren wir eine Folge  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Teilmengen, die die Eigenschaften des Lemmas besitzt. Dazu verwenden wir die zuvor konstruierte Basis der Topologie  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und definieren induktiv:  $O_1 := V_1$ ; diese Menge ist nach Konstruktion relativ-kompakt. Sind  $O_1, \dots, O_n$  schon konstruiert, so setzen wir

$$O_{n+1} := V_{n+1} \cup \bigcup_{p \in \overline{O_n}} U_r(p),$$

wobei wir  $r > 0$  zur kompakten Menge  $\overline{O_n}$  gemäß des vorherigen Beweisteils so wählen, dass  $\cup_{p \in \overline{O_n}} U_r(p)$  relativ-kompakt ist. Dann ist auch  $O_{n+1}$  offen und relativ-kompakt, und es gilt  $\overline{O_n} \subset O_{n+1}$ . Schließlich gilt nach Konstruktion  $V_n \subset O_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und deshalb  $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} O_n \subset M$ , also  $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ .  $\square$

*Beweis des Satzes.* Als  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist  $M$  separabel und lokal-kompakt. Da  $M$  nach der Aussage aus Abschnitt 1.3 außerdem metrisierbar ist, ist das Lemma anwendbar. Also existiert eine Folge  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  relativ-kompakter, offener Teilmengen von  $M$ , so dass  $\overline{O_n} \subset O_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\cup_{n \in \mathbb{N}} O_n = M$  gilt.

Sei nun eine beliebige offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $M$  gegeben. Dann gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$ :  $(U_i)_{i \in I}$  ist insbesondere eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $\overline{O_n}$ , daher existiert eine endliche Teilmenge  $J_n \subset I$ , so dass schon  $(U_j)_{j \in J_n}$  eine Teilüberdeckung von  $\overline{O_n}$  ist.

In dieser Situation ist die Indexmenge  $J := \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n$  höchstens abzählbar, und  $(U_j)_{j \in J}$  ist eine offene Überdeckung von  $\cup_{n \in \mathbb{N}} O_n = M$ .  $\square$

## 1.8 Zerlegungen der Eins

**Satz. Höckerfunktionen im  $\mathbb{R}^n$ .** Bezeichnet  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm von  $\mathbb{R}^n$ , so existiert zu je zwei Zahlen  $r, R \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq r < R$  eine  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi(u) = 1$  für  $\|u\| \leq r$  und  $\varphi(u) = 0$  für  $\|u\| \geq R$ ; die Funktion  $\varphi$  ist für  $r \leq \|u\| \leq R$  in Abhängigkeit von  $\|u\|$  streng monoton fallend.

*Konstruktion von  $\varphi$ .* Es bezeichne  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch

$$\lambda(t) := \begin{cases} \exp(-1/t) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegebene Funktion, die bekanntlich  $C^\infty$ -differenzierbar ist. Mit ihr definieren wir  $\varphi$  durch

$$\varphi(u) := \frac{\lambda(R - \|u\|)}{\lambda(R - \|u\|) + \lambda(\|u\| - r)}.$$

Wegen  $r < R$  hat der Nenner keine Nullstellen. Man prüft zunächst die Aussagen  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi(u) = 1$  für  $\|u\| \leq r$  und  $\varphi(u) = 0$  für  $\|u\| \geq R$ . Da die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$   $C^\infty$ -differenzierbar ist, ist auch  $\varphi$  auf dieser Menge  $C^\infty$ -differenzierbar. Wegen  $\varphi|_{U_r(0)} \equiv 1$  weitet sich die  $C^\infty$ -Differenzierbarkeit auf ganz  $\mathbb{R}^n$  aus. Um einzusehen, dass für  $r \leq \|u\| \leq R$  die Funktion  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $\|u\|$  streng monoton fallend ist, schreibe man

$$\varphi(u) = \frac{1}{1 + \lambda(\|u\| - r)/\lambda(R - \|u\|)}.$$

□

**Theorem über  $C^\infty$ -Zerlegungen der Eins.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann existiert zu jeder offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $M$  eine angepasste *Zerlegung der Eins*  $(f_i)_{i \in I}$ , das ist eine Familie von  $C^\infty$ -Funktionen  $f_i \in C^\infty(M)$  mit den folgenden Eigenschaften:

(Z1) Für alle  $i \in I$  gilt  $0 \leq f_i \leq 1$ .

(Z2) Für alle  $i \in I$  ist der *Träger*  $\text{Tr}(f_i) := \overline{\{p \in M \mid f_i(p) \neq 0\}}$  in  $U_i$  enthalten.

(Z3) Zu jedem  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}(p, M)$ , so dass

$$\#\{i \in I \mid \text{Tr}(f_i) \cap U \neq \emptyset\} < \infty$$

gilt. Diese Eigenschaft heißt die *lokale Endlichkeit* der Familie  $(\text{Tr}(f_i))_{i \in I}$ .

(Z4)  $\sum_{i \in I} f_i \equiv 1$ .

(Man beachte, dass bei der Auswertung dieser Summe an einer Stelle  $p \in M$  wegen (Z3) nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind.)

**Bemerkung.** Für die Gültigkeit dieses Theorems ist die Separabilität von  $M$  wesentlich.

Für den Beweis des Theorems benötigen wir ein Lemma:

**Lemma.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Dann existiert eine Folge  $(V_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Karten von  $M$ , so dass gilt:

- (i) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x_n(V_n)$  eine offene Kugel  $U_{r_n}(0)$  im  $\mathbb{R}^m$  von einem Radius  $r_n > 0$ .
- (ii)  $(x_n^{-1}(U_{r_n/2}(0)))_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine offene Überdeckung von  $M$ .
- (iii) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $V_n$  in einem  $U_i$  ( $i \in I$ ) enthalten.
- (iv) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es nur endlich viele  $k \in \mathbb{N}$  mit  $V_n \cap V_k \neq \emptyset$ .

*Beweis des Lemmas.* Nach dem Lemma aus Abschnitt 1.7 existiert eine Folge  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  relativ-kompakter, offener Teilmengen von  $M$  mit  $\overline{O_n} \subset O_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und mit  $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $K_n := \overline{O_n} \setminus O_{n-1}$  (dabei setzen wir  $O_0 := O_{-1} := \emptyset$ ), dann ist  $K_n$  eine kompakte Teilmenge von  $M$  und  $O_{n+1} \setminus \overline{O_{n-2}}$  ist jeweils eine offene Umgebung von  $K_n$ .

Daher existiert zu jedem Punkt  $p \in K_n$  eine in  $O_{n+1} \setminus \overline{O_{n-2}}$  enthaltene, offene Umgebung  $W_p^{(n)}$  von  $p$ . Indem wir  $W_p^{(n)}$  erforderlichenfalls verkleinern, können wir erreichen, dass  $W_p^{(n)}$  in  $U_{i_p^{(n)}}$  für ein  $i_p^{(n)} \in I$  enthalten ist, dass es eine Karte  $y_p^{(n)} : W_p^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $M$  gibt, und dass das Bild  $y_p^{(n)}(W_p^{(n)})$  ein offener Ball  $U_{r_p^{(n)}}(0)$  vom Radius  $r_p^{(n)} > 0$  in  $\mathbb{R}^n$  ist. Setzen wir jeweils  $\widehat{W}_p^{(n)} := (y_p^{(n)})^{-1}(U_{r_p^{(n)}/2}(0))$ , so ist offenbar  $(\widehat{W}_p^{(n)})_{p \in K_n}$  eine offene Überdeckung von  $K_n$ .

Da  $K_n$  kompakt ist, existiert zu der offenen Überdeckung  $(\widehat{W}_p^{(n)})_{p \in K_n}$  eine endliche Teilüberdeckung, das heißt, es gibt endlich viele Punkte  $p_1, \dots, p_m \in K_n$  derart, dass  $(\widehat{W}_{p_k}^{(n)})_{k=1, \dots, m}$  eine offene Überdeckung von  $K_n$  ist. Damit ist auch  $(W_{p_k}^{(n)})_{k=1, \dots, m}$  eine offene Überdeckung von  $K_n$ .

Ist nun  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die (irgendwie geordnete) Folge aller dieser Mengen  $(W_{p_k}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}; k=1, \dots, m}$  und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Folge der jeweils zu  $V_k$  gehörenden Karten  $(y_p^{(n)})$ , so ist  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n = M$ . Mit dieser Wahl sind offenbar die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) aus dem Lemma erfüllt.

Zur Eigenschaft (iv): Sei  $\ell \in \mathbb{N}$  gegeben, etwa  $V_\ell = W_{p_k}^{(n)}$ . Da  $W_{p_k}^{(\tilde{n})}$  jeweils in  $O_{\tilde{n}+1} \setminus \overline{O_{\tilde{n}-2}}$  enthalten ist, ist  $W_{p_k}^{(n)}$  in  $O_{n+1}$  enthalten, und  $W_{p_k}^{(\tilde{n})}$  ist jeweils disjunkt zu  $O_{\tilde{n}-2}$ . Das zeigt, dass  $V_\ell$  nur mit denjenigen  $W_{p_k}^{(\tilde{n})}$  einen nicht-leeren Durchschnitt haben kann, für die  $\tilde{n} \leq n+2$  ist, und davon gibt es nur endlich viele.  $\square$

*Beweis des Theorems über Zerlegungen der Eins.* Nach dem soeben bewiesenen Lemma existiert zur gegebenen offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Karten  $x_n : V_n \rightarrow U_{r_n}(0)$  mit den im Lemma aufgeführten Eigenschaften (i)–(iv). Nach dem Satz über Höckerfunktionen im  $\mathbb{R}^m$  existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine glatte Funktion  $\varphi_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi_n(\mathbb{R}^m) \subset [0, 1]$ ,  $\varphi_n(u) = 1$  für alle  $u \in \mathbb{R}^m$  mit  $\|u\| \leq \frac{1}{2} r_n$  und  $\varphi_n(u) = 0$  für alle  $u \in \mathbb{R}^m$  mit  $\|u\| \geq \frac{2}{3} r_n$ . Wir setzen dann die zunächst nur auf  $V_n$  definierte Funktion  $h_n := \varphi_n \circ x_n$  zu einer glatten

Funktion auf  $M$  fort, indem wir sie außerhalb von  $V_n$  auf Null setzen. Nach Eigenschaft (iii) ist dann der Träger von  $h_n$  in  $U_{i_n}$  für ein  $i_n \in I$  enthalten.

Wir definieren nun die Zerlegung der Eins  $(f_i)_{i \in I}$ , indem wir für jedes  $i \in I$

$$f_i := \begin{cases} h_n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (1 - h_k) & \text{falls } i = i_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

setzen. Damit sind die  $f_i$  offensichtlich glatte Funktionen auf  $M$ , die (Z1) erfüllen. Außerdem gilt  $\text{Tr}(f_{i_n}) \subset \text{Tr}(h_n) \subset U_{i_n}$  und  $\text{Tr}(f_i) = \emptyset$  für  $i \notin \{i_1, i_2, \dots\}$ , deshalb gilt auch (Z2). Da der Träger von  $f_{i_n}$  sogar in  $V_n$  enthalten ist, ergibt sich aus der Eigenschaft (iv) des Lemmas, dass außerdem die Eigenschaft (Z3) der lokalen Endlichkeit gegeben ist.

Um nachzuweisen, dass (Z4) gilt, zeigen wir zunächst durch Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$f_{i_1} + \dots + f_{i_n} + \prod_{k=1}^n (1 - h_k) = 1 \quad (*)$$

gilt. Es ist nämlich  $f_{i_1} = h_1$  und deshalb  $f_{i_1} + (1 - h_1) = 1$ . Gilt die Gleichung (\*) für ein bestimmtes  $n \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\begin{aligned} & f_{i_1} + \dots + f_{i_n} + f_{i_{n+1}} + \prod_{k=1}^{n+1} (1 - h_k) \\ = & f_{i_1} + \dots + f_{i_n} + \underbrace{h_{n+1} \cdot \prod_{k=1}^n (1 - h_k) + (1 - h_{n+1}) \cdot \prod_{k=1}^n (1 - h_k)}_{= \prod_{k=1}^n (1 - h_k)} \stackrel{(*)}{=} 1, \end{aligned}$$

und damit (\*) auch für  $n + 1$  an der Stelle von  $n$ .

Ist nun ein  $p \in M$  gegeben, so existiert wegen (ii) ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_{n_0}(p) \in U_{r_{n_0}/2}(0)$  und deswegen  $h_{n_0}(p) = 1$ . Daher verschwindet das Produkt  $\prod_{k=1}^n (1 - h_k)$  an der Stelle  $p$  für alle  $n \geq n_0$ , und deshalb gilt nach (\*)  $\sum_{k=1}^n f_{i_k}(p) = 1$  für alle  $n \geq n_0$ , also  $\sum_{i \in I} f_i(p) = 1$ . Somit ist auch (Z4) gezeigt.  $\square$

**Folgerung. Höckerfunktionen in  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten.** Es sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $A \subset M$  eine abgeschlossene, nichtleere Teilmenge und  $G \in \mathcal{U}^o(A, M)$ .

(a) Es existiert eine „Höckerfunktion“  $\lambda \in C^\infty(M)$  mit

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad , \quad \lambda|_A \equiv 1 \quad \text{und} \quad \text{Tr}(\lambda) \subset G .$$

(b) Zu jeder  $C^k$ -Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  (siehe die Weitere Definition (c) aus Abschnitt 1.5) existiert eine „Extrapolation“  $\tilde{f} \in C^k(M)$  mit  $\tilde{f}|_A = f$ .

**Ein wichtiger Spezialfall.** Zu jedem  $p \in M$  und  $V \in \mathcal{U}^o(p, M)$  existiert ein  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$  mit  $\bar{U} \subset V$ . Indem man  $G := V$  und  $A := \bar{U}$  setzt kann man daher die obige Aussage (a) anwenden.

*Beweis der Folgerung.* Zu (a). Wegen  $A \subset G$  ist  $(G, M \setminus A)$  eine offene Überdeckung von  $M$ ; nach dem Theorem existiert hierzu eine Zerlegung der Eins, d.h. Funktionen  $\lambda, \mu \in C^\infty(M)$  mit  $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ,  $\text{Tr}(\lambda) \subset G$ ,  $\text{Tr}(\mu) \subset M \setminus A$  (d.h. insbesondere  $\mu|_A = 0$ ) und  $\lambda + \mu = 1$ . Aus der letzten Gleichung folgt zusammen mit  $\mu|_A = 0$  die Gleichung  $\lambda|_A = 1$ , und somit erfüllt  $\lambda$  alle Forderungen.

Zu (b). Dass  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^k$ -Funktion ist, besagt nach Definition, dass es ein  $G \in \mathcal{U}^o(A, M)$  und ein  $\hat{f} \in C^\infty(G)$  mit  $\hat{f}|_A = f$  gibt. Zu diesen Mengen  $A$  und  $G$  wählen wir  $\lambda \in C^\infty(M)$  wie in (a), und definieren eine Funktion  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\forall p \in M : \tilde{f}(p) := \begin{cases} \lambda(p) \cdot \hat{f}(p) & \text{für } p \in G \\ 0 & \text{für } p \in M \setminus G \end{cases} .$$

Damit gilt offenbar  $\tilde{f}|_A = f$ . Es verbleibt zu zeigen, dass  $\tilde{f}$  eine  $C^k$ -Funktion ist. Dazu:  $\tilde{f}|_G = (\lambda|_G) \cdot \hat{f}$  ist  $C^k$ -differenzierbar, und ebenfalls ist  $\tilde{f}|_{(M \setminus \text{Tr}(\lambda))} = 0$   $C^k$ -differenzierbar. Wegen  $\text{Tr}(\lambda) \subset G$  ist  $(G, M \setminus \text{Tr}(\lambda))$  eine offene Überdeckung von  $M$ , und daher folgt, dass  $\tilde{f}$   $C^k$ -differenzierbar ist.  $\square$

**Bemerkung.** Eine weitere Folgerung aus der Existenz von Zerlegungen der Eins, deren Beweis allerdings weitergehende differentialtopologische Hilfsmittel erfordert, als wir hier zur Verfügung haben, ist die folgende Aussage, die auf WHITNEY zurückgeht:

Ist  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $A \subset M$  eine abgeschlossene Teilmenge, so existiert eine Funktion  $g \in C^\infty(M)$  mit  $A = g^{-1}(\{0\})$ .

Also: Jede abgeschlossene Teilmenge von  $M$  ist gleichungsdefiniert.

**Aufgabe 1. Verbindbarkeit durch  $C^\infty$ -Kurven.** Ist  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  eine stückweise  $C^\infty$ -differenzierbare Kurve in einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$  (d.h.: Es existiert eine „Zerlegung“  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  von  $[0, 1]$ , so dass  $\alpha|_{[t_{k-1}, t_k]}$  jeweils im Sinne von Abschnitt 1.5 Weitere Definition (c)  $C^\infty$ -differenzierbar ist), so existiert eine streng monoton wachsende  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(0) = 0$ , und  $\varphi(1) = 1$ , so dass  $\alpha \circ \varphi$  eine  $C^\infty$ -Kurve ist. Insbesondere sind also in einer zusammenhängenden  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit je zwei Punkte durch eine  $C^\infty$ -Kurve verbindbar.

[Tipp. Man verwende den Satz über Höckerfunktionen im  $\mathbb{R}^n$ .]

**Aufgabe 2. Gleichmäßige Approximierbarkeit stetiger Funktionen durch  $C^\infty$ -Funktionen.** Es sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ . Dann existiert ein  $g \in C^\infty(M)$  mit

$$|f(p) - g(p)| < \varepsilon \quad \text{für alle } p \in M .$$

Jede stetige Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  kann also gleichmäßig durch  $C^\infty$ -Funktionen  $M \rightarrow \mathbb{R}$  approximiert werden.

## Kapitel 2

# Lineare Approximation, Untermannigfaltigkeiten und Vektorraumbündel

In diesem Kapitel werden wir für jeden Punkt  $p$  einer jeden  $n$ -dimensionalen  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$  einen  $n$ -dimensionalen Richtungsvektorraum  $T_pM$ , den sog. *Tangentenraum von  $M$  in  $p$* , „konstruieren“ und damit das Fundament für die Analysis auf Mannigfaltigkeiten legen. Die grundlegende Idee unserer Konstruktion besteht in der Vorstellung, dass jede  $C^1$ -Kurve  $\alpha : J \rightarrow M$  in jedem Zeitpunkt  $t \in J$  einen Tangentenvektor  $\dot{\alpha}(t)$  besitzt (natürlich können verschiedene Kurven denselben Tangentenvektor haben) und dass dieser Tangentenvektor durch die infinitesimalen Änderungen aller in der Nähe von  $\alpha(t)$  definierten  $C^\infty$ -Funktionen längs  $\alpha$  zum Zeitpunkt  $t$  charakterisiert ist. Entspricht diese Richtungsvorstellung nicht der Identifizierung von Richtungen im täglichen Leben?! Zunächst ein paar

### 2.1 Vorbereitende Definitionen

Ein Paar  $(M, p)$ , bestehend aus einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und einem Punkt  $p \in M$ , nennen wir eine *punktierte  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit*. Die Symbolsequenz  $f : (M, p) \rightarrow (N, q)$  soll besagen, dass  $f$  eine Abbildung  $M \rightarrow N$  mit  $f(p) = q$  ist. Das System der punktierten  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten zusammen mit den  $C^\infty$ -Abbildungen vom Typ  $f : (M, p) \rightarrow (N, q)$  bildet eine *Kategorie*, d.h.:

- Für jede punktierte  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $(M, p)$  ist  $\text{id}_M$  eine derartige Abbildung und
- sind  $f : (M, p) \rightarrow (N, q)$  und  $g : (N, q) \rightarrow (L, r)$   $C^\infty$ -Abbildungen, so ist auch die Komposition  $g \circ f$  eine  $C^\infty$ -Abbildung  $(M, p) \rightarrow (L, r)$ .

Für eine punktierte  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $(M, p)$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}_pM$  die Menge aller Paare  $(\alpha, t)$ , bestehend aus einer  $C^1$ -Kurve  $\alpha : J \rightarrow M$  ( $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall) und einem Parameter  $t \in J$  mit  $\alpha(t) = p$ .

## 2.2 Konstruktion des Tangentialraums und der Tangentialabbildung

Es seien  $(M, p)$  und  $(N, q)$  punktierte  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $f : (M, p) \rightarrow (N, q)$  eine  $C^1$ -Abbildung.

**Konstruktion des Tangentialraums.** In  $\mathcal{K}_p M$  wird folgendermaßen eine Äquivalenzrelation definiert:

$$\begin{aligned} (\alpha, t) \sim (\beta, s) &: \iff \forall (U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M) : (x \circ \alpha)'(t) = (x \circ \beta)'(s) \\ &\iff \exists (U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M) : (x \circ \alpha)'(t) = (x \circ \beta)'(s) . \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse des „Elementes“  $(\alpha, t)$  wird mit  $\dot{\alpha}(t)$  bezeichnet und der *Tangentenvektor* der  $C^1$ -Kurve  $\alpha$  zum Zeitpunkt  $t$  genannt. Die Menge aller derartigen Äquivalenzklassen ist per definitionem der *Tangentialraum*  $T_p M$  von  $M$  in  $p$ .

**Konstruktion der Tangentialabbildung.** Für die Abbildung

$$\mathcal{K}_p f : \mathcal{K}_p M \rightarrow \mathcal{K}_q N, (\alpha, t) \mapsto (f \circ \alpha, t)$$

gilt

$$(\alpha, t) \sim (\beta, s) \implies \mathcal{K}_p f(\alpha, t) \sim \mathcal{K}_p f(\beta, s) .$$

[*Beweis.* Es gelte  $(\alpha, t) \sim (\beta, s)$ . Wir wählen Karten  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(U', y) \in \mathcal{U}^\infty(q, N)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $f(U) \subset U'$  annehmen. Dann gilt  $(y \circ (f \circ \alpha))'(t) = ((y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \alpha))'(t) = d_{x(p)}(y \circ f \circ x^{-1})((x \circ \alpha)'(t)) = d_{x(p)}(y \circ f \circ x^{-1})((x \circ \beta)'(s)) = (y \circ (f \circ \beta))'(s)$  und damit  $\mathcal{K}_p f(\alpha, t) \sim \mathcal{K}_p f(\beta, s)$ .  $\square$  ]

Daher existiert genau eine Abbildung  $T_p f : T_p M \rightarrow T_q N$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_p M & \xrightarrow{\mathcal{K}_p f} & \mathcal{K}_q N \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p M & \xrightarrow{T_p f} & T_q N , \end{array}$$

anders ausgedrückt: Für jedes  $(\alpha, t) \in \mathcal{K}_p M$  gilt

$$T_p f(\dot{\alpha}(t)) = (f \circ \alpha)'(t) .$$

$T_p f$  heißt die *Tangentialabbildung* von  $f$  in  $p$ . Anstelle von  $T_p f$  schreibt man häufig auch  $f_{*|p}$  oder  $f_*$ , wenn der Punkt  $p$  nicht spezifiziert werden muss.

Wir notieren ausdrücklich die Regel  $T_p \text{id}_M = \text{id}_{T_p M}$  und für  $C^\infty$ -Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow L$  die *Kettenregel*

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f .$$

Damit ist die Zuordnung

$$\begin{aligned} (M, p) &\mapsto T_p M \\ (f : (M, p) \rightarrow (N, q)) &\mapsto (T_p f : T_p M \rightarrow T_q N) . \end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor  $T$  von der Kategorie der punktierten  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten in die Kategorie ENS („ensemble“) der Mengen.



**Tangentialräume an offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit.** Sei  $U$  eine offene Teilmenge der Mannigfaltigkeit  $M$  und  $p \in U$ . Wir betrachten die Inklusionsabbildung  $i : U \hookrightarrow M$ . Deren Tangentialabbildung  $T_p i : T_p U \rightarrow T_p M$  ist eine Bijektion, vermittle der wir  $T_p U$  mit  $T_p M$  identifizieren.

**Wichtiges Beispiel. Tangentialräume an Vektorräume.** Seien  $V, W$  Vektorräume und  $p \in V, q \in W$ . Dann existieren eindeutig bestimmte bijektive Abbildungen

$$\Phi_p^V : T_p V \rightarrow V \quad \text{bzw.} \quad \Phi_q^W : T_q W \rightarrow W ,$$

so dass für jede  $C^1$ -Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit  $f(p) = q$  das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T_p V & \xrightarrow{T_p f} & T_q W \\ \Phi_p^V \downarrow & & \downarrow \Phi_q^W \\ V & \xrightarrow{d_p f} & W . \end{array}$$

Hierbei bezeichnet  $d_p f$  das Differential von  $f$  im Sinne der Analysis II. Explizit heißt das also, dass

$$T_p f = (\Phi_q^W)^{-1} \circ d_p f \circ \Phi_p^V \quad (*)$$

gilt. Dies bedeutet insbesondere, dass für  $(\alpha, t) \in \mathcal{K}_p V$

$$\Phi_p^V(\dot{\alpha}(t)) = \alpha'(t) \quad (\dagger)$$

gilt. Im Folgenden identifizieren wir  $T_p V$  in der Regel mit  $V$  vermittle der Bijektion  $\Phi_p^V$ .

*Beweis.* Für alle  $(\alpha, t), (\beta, s) \in \mathcal{K}_p V$  gilt

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\beta}(s) \in T_p V \iff \alpha'(t) = \beta'(s) \in V .$$

Daher existiert genau eine injektive Abbildung

$$\Phi_p : T_p V \rightarrow V ,$$

so dass für alle  $(\alpha, t) \in \mathcal{K}_p V$  die Beziehung  $(\dagger)$  gilt.  $\Phi_p$  ist auch surjektiv, denn zu gegebenem  $v \in V$  ist mit  $\alpha_v : \mathbb{R} \rightarrow V, t \mapsto p + tv$  das Paar  $(\alpha_v, 0)$  ein Element von  $\mathcal{K}_p V$  mit  $\Phi_p(\dot{\alpha}_v(0)) = \alpha_v'(0) = v$ .

Sei nun eine  $C^1$ -Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit  $f(p) = q$ , sowie  $u \in T_p V$  gegeben. Betrachten wir mit  $v := \Phi_p^V(u) \in V$  wieder die Kurve  $\alpha_v : \mathbb{R} \rightarrow V, t \mapsto p + tv$ , so ist  $\dot{\alpha}_v(t) = u$  und deshalb

$$\begin{aligned} T_p f(u) &= T_p f(\dot{\alpha}_v(t)) = (f \circ \alpha)'(t) \stackrel{(\dagger)}{=} (\Phi_q^W)^{-1}((f \circ \alpha)'(t)) = (\Phi_q^W)^{-1}(d_p f(\alpha'(t))) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} (\Phi_q^W)^{-1}(d_p f(\Phi_p^V(\dot{\alpha}(t)))) = ((\Phi_q^W)^{-1} \circ d_p f \circ \Phi_p^V)(u) . \end{aligned}$$

Damit ist auch  $(*)$  gezeigt. □

**Die lineare Struktur von  $T_pM$  und  $T_p f$ .** Auf  $T_pM$  existiert genau eine Vektorraum-Struktur, so dass für jede Karte  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  die Abbildung  $T_p x : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraum-Isomorphismus ist; hierbei haben wir die beiden oben beschriebenen Identifikationen  $T_p U \cong T_pM$  und  $T_{x(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  schon angewendet. Im Folgenden betrachten wir Tangentialräume stets auf diese Weise als Vektorräume. Damit wird  $T_p f : T_pM \rightarrow T_qN$  eine lineare Abbildung.

*Beweis.* Sind  $(U, x), (\tilde{U}, \tilde{x}) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$ , so gilt auf  $U \cap \tilde{U}$

$$T_p \tilde{x} = T_p((\tilde{x} \circ x^{-1}) \circ x) = T_{x(p)}(\tilde{x} \circ x^{-1}) \circ T_p x = d_{x(p)}(\tilde{x} \circ x^{-1}) \circ T_p x.$$

Weil die Koordinatentransformation  $\tilde{x} \circ x^{-1}$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $d_{x(p)}(\tilde{x} \circ x^{-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraum-Automorphismus, und daher zeigt die obige Rechnung, dass es genau eine Vektorraum-Struktur auf  $T_pM$  gibt, so dass für jede Karte  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  die bijektive Abbildung  $T_p x : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Versehen wir  $T_pM$  und  $T_qN$  mit dieser Vektorraum-Struktur, so gilt bezüglich Karten  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(U', y) \in \mathcal{U}^\infty(q, N)$

$$T_p f = T_p(y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1} \circ x) = T_{y(q)}(y^{-1}) \circ T_{x(p)}(y \circ f \circ x^{-1}) \circ T_p x = (T_q y)^{-1} \circ d_{x(p)}(y \circ f \circ x^{-1}) \circ T_p x.$$

Also ist  $T_p f$  als Verkettung linearer Abbildungen linear.  $\square$

**Aufgabe 1.** Eine  $C^1$ -Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  ist genau dann lokal konstant (d.h. um jeden Punkt  $p \in M$  gibt es  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$ ), so dass  $f|U$  konstant ist), wenn für alle  $p \in M$  gilt:  $T_p f = 0$ .

**Aufgabe 2. Rechenregeln für die Tangentialabbildung.** Seien  $M, N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten,  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum,  $f, g : M \rightarrow V$  zwei  $C^\infty$ -Funktionen,  $h : M \rightarrow N$  ein lokaler  $C^\infty$ -Diffeomorphismus,  $p \in M$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Man zeige:

(a)  $T_p(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot T_p f + \mu \cdot T_p g$ .

(b) Ist  $V = \mathbb{R}$ , so gilt die *Leibnizregel*:

$$\forall v \in T_p M : T_p(f \cdot g)(v) = T_p f(v) \cdot g(p) + f(p) \cdot T_p g(v).$$

(c)  $T_{h(p)}(h^{-1}) = (T_p h)^{-1}$ .

**Aufgabe 3. Der lokale Umkehrsatz.** Sind  $M$  und  $N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten, ist  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und ist die Tangentialabbildung  $T_p f$  in einem Punkt  $p \in M$  ein Vektorraum-Isomorphismus  $T_p M \rightarrow T_{f(p)}N$ , so existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$ , so dass  $f|U$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus in  $N$  ist. [Tipp. Man führe die Aussage auf die entsprechende Aussage der Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$  zurück.]

### 2.3 Der Tangentialraum einer Produktmannigfaltigkeit

Es seien  $M$ ,  $N$  und  $L$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten,  $p \in M$  und  $q \in N$ . Im Folgenden bezeichnen

$$\text{pr}_M : M \times N \rightarrow M \quad \text{und} \quad \text{pr}_N : M \times N \rightarrow N$$

die kanonischen Projektionen und

$$i_p := (p, \cdot) : N \rightarrow M \times N \quad \text{und} \quad i^q := (\cdot, q) : M \rightarrow M \times N$$

die durch den Punkt  $(p, q) \in M \times N$  bestimmten „Einbettungen“ von  $M$  bzw.  $N$  in  $M \times N$ . Die Abbildungen  $\text{pr}_M$ ,  $\text{pr}_N$ ,  $i_p$  und  $i^q$  sind  $C^\infty$ -Abbildungen.

**Satz.**

(a) Die Abbildung

$$\Phi : (T_{(p,q)}\text{pr}_M, T_{(p,q)}\text{pr}_N) : T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_p M \oplus T_q N$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus mit der Umkehrung

$$(v, w) \mapsto T_p i^q(v) + T_q i_p(w) .$$

Wir schreiben  $u \cong (v, w)$ , wenn  $u \in T_{(p,q)}(M \times N)$  durch diesen kanonischen Isomorphismus auf  $(v, w) \in T_p M \times T_q N$  abgebildet wird; also

$$\begin{aligned} u \cong (v, w) &\iff v = T_{(p,q)}\text{pr}_M(u) \quad \& \quad w = T_{(p,q)}\text{pr}_N(u) \\ &\iff u = i_*^q v + i_{p*} w . \end{aligned}$$

(b) Sind  $f : L \rightarrow M$  und  $g : L \rightarrow N$   $C^\infty$ -Abbildungen, so gilt für die  $C^\infty$ -Abbildung  $h := (f, g) : L \rightarrow M \times N$

$$\forall p \in L, v \in T_p L : h_* v \cong (f_* v, g_* v) .$$

(c) Für jede  $C^\infty$ -Abbildung  $f : M \times N \rightarrow L$  sind auch

$$f_p := f(p, \cdot) : N \rightarrow L \quad \text{und} \quad f^q := f(\cdot, q) : M \rightarrow L$$

$C^\infty$ -Abbildungen und es gilt für alle  $u \in T_{(p,q)}(M \times N)$ ,  $v \in T_p M$  und  $w \in T_q N$

$$u \cong (v, w) \implies T_{(p,q)} f(u) = T_p f^q(v) + T_q f_p(w) .$$

*Beweis.* Zu (a). Es gilt

$$\text{pr}_M \circ i^q = \text{id}_M \quad \text{und} \quad \text{pr}_M \circ i_p \equiv p$$

und daher für  $(v, w) \in T_p M \oplus T_q N$

$$T_{(p,q)}\text{pr}_M \circ T_p i^q(v) = v \quad \text{und} \quad T_{(p,q)}\text{pr}_M \circ T_q i_p(w) = 0 ,$$

somit für  $u := T_p i^q(v) + T_q i_p(w) \in T_{(p,q)}(M \times N)$

$$T_{(p,q)}\text{pr}_M(u) = v .$$

Analog ergibt sich

$$T_{(p,q)}\text{pr}_N(u) = w .$$

Somit gilt  $\Phi(u) = (v, w)$ . Dies zeigt, dass die Abbildung  $\Phi$  linear und surjektiv ist. Da ihr Definitionsraum und ihr Zielraum dieselbe Dimension besitzen, ergibt sich, dass  $\Phi$  ein Vektorraumisomorphismus ist. Aus der Rechnung ergibt sich auch, dass die Angabe für die Umkehrabbildung von  $\Phi$  korrekt ist.

Zu (b). Es gilt

$$f = \text{pr}_M \circ h \quad \text{und} \quad g = \text{pr}_N \circ h ,$$

deswegen

$$f_* = (\text{pr}_M)_* \circ h_* \quad \text{und} \quad g_* = (\text{pr}_N)_* \circ h_* ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Zu (c). Ist  $u \cong (v, w)$ , also  $u = T_p i^q(v) + T_q i_p(w)$ , so gilt

$$f_* u = T_{(p,q)} f(T_p i^q(v) + T_q i_p(w)) = \underbrace{T_{(p,q)} f \circ T_p i^q(v)}_{=T_p(f \circ i^q)(v)=T_p f^q(v)} + \underbrace{T_{(p,q)} f \circ T_q i_p(w)}_{=T_q(f \circ i_p)(w)=T_q f_p(w)} = T_p f^q(v) + T_q f_p(w) .$$

□

**Aufgabe. Differenzierbarkeit implizit definierter Funktionen.** Es seien  $M_1$ ,  $M_2$  und  $N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten,  $g : M_1 \times M_2 \rightarrow N$  und  $h : M_1 \rightarrow N$   $C^\infty$ -Abbildungen und  $f : M_1 \rightarrow M_2$  eine Auflösung der Gleichung

$$g(p, q) = h(p) \quad \text{nach } q, \quad \text{d.h. } \forall p \in M_1 : g(p, f(p)) = h(p) .$$

Ist für jedes  $p \in M_1$  die Tangentialabbildung  $T_{f(p)} g_p : T_{f(p)} M_2 \rightarrow T_{h(p)} N$  von  $g_p := g(p, \cdot)$  ein Vektorraum-Isomorphismus, so gilt:

Besitzt die Gleichung  $g(p, q) = h(p)$  für jedes  $p \in M_1$  genau eine Lösung  $q$  oder ist  $f$  stetig, so ist  $f$  eine  $C^\infty$ -Abbildung.

[Tipp: Vermittels einer lokalen Betrachtung führe man das Problem auf den entsprechenden Satz der Analysis II zurück.]

## 2.4 Tangentialvektoren als Derivationen

Es sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Eine *Derivation auf  $C^\infty(M)$  an der Stelle  $p \in M$*  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $D_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , die zusätzlich die *Leibnizregel* in  $p$  erfüllt, d.h. für die gilt:

$$\forall f, g \in C^\infty(M) : D_p(f \cdot g) = D_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D_p(g) .$$

Den Vektorraum der Derivationen auf  $C^\infty(M)$  an der Stelle  $p \in M$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{D}_p(M)$ .

**Wichtiges Beispiel.** Für  $v \in T_p M$  ist die Abbildung

$$D^v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto T_p f(v)$$

eine Derivation auf  $C^\infty(M)$  an der Stelle  $p$ , siehe Aufgabe 2(b) aus Abschnitt 2.2. Der folgende Satz zeigt, dass tatsächlich alle Derivationen auf  $C^\infty(M)$  an der Stelle  $p$  von dieser Art sind.

**Aussage.** Sei  $D_p \in \mathfrak{D}_p(M)$ .

- (a)  $D_p(1) = 0$ .
- (b) Sind  $f, g \in C^\infty(M)$  mit  $f(p) = g(p) = 0$ , so gilt  $D_p(f \cdot g) = 0$ .
- (c)  $D_p(f)$  „hängt nur vom Keim von  $f$  an der Stelle  $p$  ab“, das soll heißen: Sind  $f, g \in C^\infty(M)$  und existiert  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$  mit  $f|_U = g|_U$ , so gilt  $D_p(f) = D_p(g)$ .
- (d) Für  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$  existiert genau eine Derivation  $\tilde{D}_p \in \mathfrak{D}_p(U)$  mit

$$\forall f \in C^\infty(M) : \tilde{D}_p(f|_U) = D_p(f).$$

In Zukunft werden wir diese Derivation ebenfalls mit  $D_p$  bezeichnen, also Derivationen an der Stelle  $p$  auch auf Funktionen anwenden, die lediglich auf  $U$  definiert sind.

*Beweis.* Zu (a). Wegen der Leibnizregel gilt  $D_p(1) = D_p(1 \cdot 1) = D_p(1) \cdot 1 + 1 \cdot D_p(1) = 2 \cdot D_p(1)$  und daher  $D_p(1) = 0$ .

Zu (b). Dies folgt unmittelbar aus der Leibnizregel.

Zu (c). Es gelte also  $f|_U = g|_U$  für ein  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$ . Nach der Folgerung (a) über Höckerfunktionen aus Abschnitt 1.8 existiert eine Funktion  $\lambda \in C^\infty(M)$  mit  $\lambda(p) = 1$  und  $\text{Tr}(\lambda) \subset U$ . (In der genannten Folgerung wähle man  $A = \{p\}$  und  $G = U$ .) Dann gilt

$$f - g = (1 - \lambda) \cdot (f - g),$$

denn in dieser Gleichung verschwinden beide Seiten auf  $U$ , und auf  $M \setminus U$  gilt  $1 - \lambda = 1$ . Mit ihr ergibt sich nun

$$D_p(f) - D_p(g) = D_p(f - g) = D_p((1 - \lambda) \cdot (f - g)) \stackrel{(*)}{=} 0,$$

wobei das mit (\*) markierte Gleichheitszeichen aus (b) folgt: Sowohl die Funktion  $1 - \lambda$  als auch die Funktion  $f - g$  verschwindet an der Stelle  $p$ . Also gilt  $D_p(f) = D_p(g)$ .

Zu (d). Sei  $f \in C^\infty(U)$  gegeben. Wir können eine Umgebung  $V \in \mathcal{U}^o(p, M)$  wählen, so dass  $\bar{V} \subset U$  ist. Dann existiert nach der Folgerung (b) aus Abschnitt 1.8 eine „Extrapolation“  $\tilde{f} \in C^\infty(M)$  mit  $\tilde{f}|_{\bar{V}} = f|_{\bar{V}}$ . Wir definieren nun  $\tilde{D}_p(f) := D_p(\tilde{f})$ ; wegen (c) ist diese Definition von der Wahl von  $V$  und  $\tilde{f}$  unabhängig, und wir erhalten eine Derivation auf  $U$  mit der gewünschten Eigenschaft.  $\square$

**Satz.** Jede Derivation auf  $C^\infty(M)$  ist von der im obigen Beispiel beschriebenen Art, mehr noch: Die Abbildung

$$\Phi : T_p M \rightarrow \mathfrak{D}_p(M), v \mapsto D^v$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

**Bemerkung.** Viele Autoren verwenden  $\mathfrak{D}_p(M)$  als die Definition des Tangentialraums an  $M$  im Punkt  $p$ . Der obige Satz zeigt, dass dieser Zugang zum Tangentialraum zu unserer Definition gleichwertig ist.

Das folgende Lemma bereitet den Beweis des Satzes vor:

**Lemma (von Hadamard/Bohnenblust).** Ist  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $f \in C^\infty(U)$ , so existieren  $C^\infty$ -Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^\infty(U)$  und ein  $V \in \mathcal{U}^o(p, U)$ , so dass gilt

$$f|_V = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) \cdot \varphi_i|_V.$$

*Beweis.* Mit Hilfe der Karte  $(U, x)$  wird das Problem auf den  $\mathbb{R}^n$  herunter gezogen; das heißt wir dürfen annehmen, dass  $U = \mathbb{R}^n$ ,  $x = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  und  $p = 0$  ist. Für die  $C^\infty$ -Funktionen

$$\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_i}(tu) dt$$

gilt dann für  $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$

$$f(0) + \sum u_i \cdot \varphi_i(u) = f(0) + \int_0^1 \underbrace{\left( \sum u_i \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i}(tu) \right)}_{=(t \rightarrow f(tu))'} dt = f(0) + f(tu) \Big|_0^1 = f(u). \quad \square$$

*Beweis des Satzes.* Dass  $\Phi$  tatsächlich in  $\mathfrak{D}_p(M)$  hinein abbildet, folgt aus dem obigen Beispiel, und die Linearität von  $\Phi$  folgt aus der Linearität von  $T_p f$ .

Zur Injektivität von  $\Phi$  sei  $v \in T_p M$  mit  $D^v = 0$  gegeben. Zu zeigen ist  $v = 0$ . Wir wählen eine Karte  $x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$  von  $M$  um  $p$ . Aufgrund der Aussage (d) können wir  $D^v$  auch auf die auf  $U$  definierten Funktionen  $x_i$  anwenden, und zwar gilt  $0 = D^v(x_i) = T_p x_i(v)$  und damit  $T_p x(v) = 0$ . Da  $T_p x : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^n$  ein Vektorraum-Isomorphismus ist, folgt  $v = 0$ .

Für den Beweis der Surjektivität von  $\Phi$  sei  $D_p \in \mathfrak{D}_p(M)$  gegeben. Wir wählen eine Karte  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$ , etwa  $x = (x_1, \dots, x_n)$  mit Funktionen  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ; dabei gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x(p) = 0$ . Wieder können wir  $D_p$  auch auf die auf  $U$  definierten Funktionen  $x_i$  anwenden, und für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  liegt das Bild der Kurve

$$] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (t D_p(x_1), \dots, t D_p(x_n))$$

in  $x(U)$ , so dass

$$\alpha : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M, t \mapsto x^{-1}(t D_p(x_1), \dots, t D_p(x_n))$$

eine Kurve in  $M$  mit  $\alpha(0) = p$  ist. Wir setzen  $v := \dot{\alpha}(0) \in T_p M$ , damit gilt

$$D^v(x_i) = T_p x_i(v) = T_p x_i(\dot{\alpha}(0)) = (x_i \circ \alpha)'(0) = (t \mapsto t D_p(x_i))'(0) = D_p(x_i).$$

Wir zeigen nun, dass  $D_p = D^v$  gilt. Dazu sei  $f \in C^\infty(M)$  gegeben. Nach dem Lemma von Hadamard/Bohnenblust existiert ein  $V \in \mathcal{U}^0(p, U)$  und Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^\infty(U)$  mit

$$f|V = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) \cdot \varphi_i|V.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D_p(f) &= D_p(f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) \cdot \varphi_i|V) \\ &= \sum_{i=1}^n D_p((x_i - x_i(p)) \cdot \varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{D_p(x_i)}_{=D^v(x_i)} \cdot \varphi_i(p) + \underbrace{(x_i(p) - x_i(p))}_{=0} \cdot D_p(\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n D^v(x_i) \cdot \varphi_i(p) = \dots = D^v(f), \end{aligned}$$

und somit  $D_p = D^v$ . □

## 2.5 Abbildungen von konstantem Rang, insbesondere Immersionen und Submersionen

Es seien  $M, N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m$  bzw.  $n$ ,  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und  $p \in M$ .

### Definition.

- (a) Der Rang der linearen Abbildung  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , d.h. die Zahl  $\dim T_p f(T_p M)$ , heißt der *Rang* von  $f$  an der Stelle  $p$ . Er wird mit  $\text{rg}_p f$  bezeichnet.
- (b)  $f$  heißt in  $p$  *immersiv* (bzw. *submersiv*), wenn die lineare Abbildung  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  injektiv (bzw. surjektiv) ist.
- (c)  $f$  heißt eine *Immersion* (bzw. *Submersion*), wenn  $f$  in allen  $p \in M$  immersiv (bzw. submersiv) ist.

### Beispiele.

- (a) Eine Kurve  $\alpha : I \rightarrow M$  ist genau dann eine Immersion, wenn sie regulär ist (d.h. wenn  $\dot{\alpha}$  nullstellenfrei ist).

- (b) Die kanonische Projektion  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$  auf den  $n$ -dimensionalen projektiven Raum  $\mathbb{R}P^n$  ist eine Submersion.
- (c) Beispiele für Abbildungen mit konstantem Rang:
- (i) Konstante Abbildungen haben den Rang 0.
  - (ii) Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen haben konstanten Rang, und zwar stimmt ihr Rang im Sinne unserer Definition mit ihrem Rang im Sinne der Linearen Algebra überein.
  - (iii) Immersionen (bzw. Submersionen)  $f : M \rightarrow N$  haben den konstanten Rang  $\dim(M)$  (bzw.  $\dim(N)$ ).

**Beobachtung.** Haben  $M$  und  $N$  dieselbe Dimension, so sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (a)  $f$  ist eine Immersion.
- (b)  $f$  ist eine Submersion.
- (c)  $f$  ist ein lokaler Diffeomorphismus.

*Beweis.* Die Äquivalenz von (a) und (b) folgt unmittelbar aus der aus der Linearen Algebra bekannten Aussage, dass eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen gleicher, endlicher Dimension genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist. Die Äquivalenz zu (c) ist eine Folge des lokalen Umkehrsatzes, siehe Aufgabe 3 in Abschnitt 2.2.  $\square$

**Aussage.** Die Funktion  $\text{rg}f : M \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $p \mapsto \text{rg}_p f$  ist *halbstetig nach unten*, das bedeutet: Zu jedem  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$ , so dass

$$\forall q \in U : \text{rg}_q f \geq \text{rg}_p f$$

gilt. Deshalb sind

$$G_i := \{p \in M \mid f \text{ ist in } p \text{ immersiv}\} \quad \text{und} \quad G_s := \{p \in M \mid f \text{ ist in } p \text{ submersiv}\}$$

offene Teilmengen von  $M$ .

*Beweis.* Wir wählen Karten  $(\tilde{U}, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(f(p), N)$ , ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit  $f(\tilde{U}) \subset V$ . Diese verwenden wir, um das Problem in den  $\mathbb{R}^n$  zu übertragen: Da  $x$  und  $y$  Diffeomorphismen sind, gilt für  $q \in \tilde{U}$ :

$$\text{rg}_q(f) = \text{rg}(T_q f) = \text{rg}(d_{x(q)}(y \circ f \circ x^{-1})) = \text{rg}(\text{Jac}_{x(q)}(y \circ f \circ x^{-1})),$$

wobei mit  $\text{Jac}_u(g)$  die Jacobi-Matrix an der Stelle  $u \in \mathbb{R}^m$  einer Funktion  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezeichnet ist.

Daher genügt zu zeigen: Ist  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$  eine stetige Abbildung, so ist die Funktion  $\text{rg}(A)$  in  $u \in \mathbb{R}^n$  halbstetig nach unten. Dazu: Mit  $k := \text{rg}(A(u))$  existieren unter den Spaltenvektoren von  $A(u)$   $k$  Stück, die linear unabhängig sind. Weil die Gramsche Determinante dieser



$k$  Spaltenvektoren stetig von  $u$  abhängt, existiert eine Umgebung  $U$  von  $u$ , so dass diese  $k$  Spaltenvektoren für alle  $u' \in U$  linear unabhängig sind, und das bedeutet  $\text{rg}(A(u')) \geq k = \text{rg}(A(u))$ .  $\square$

Das folgende Theorem zeigt, dass sich zu  $C^\infty$ -Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  von konstantem Rang Karten wählen lassen, bezüglich derer  $f$  eine besonders übersichtliche Darstellung besitzt. Natürlich ist dieses Theorem insbesondere anwendbar, wenn  $f$  eine Immersion oder eine Submersion ist.

**Theorem. (Rangtheorem.)** Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung von konstantem Rang  $r$ . Dann existieren zu jedem  $p \in M$  Karten  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(f(p), N)$  mit  $x(p) = 0$ ,  $y(f(p)) = 0$  und  $f(U) \subset V$ , so dass

$$y_i \circ f|U = \begin{cases} x_i & \text{für } 1 \leq i \leq r \\ 0 & \text{für } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

gilt.

In der Situation des Theorems wird  $f$  also lokal bezüglich der Karten  $x$  und  $y$  durch die Abbildung

$$f_0 : x(U) \rightarrow y(V), (u_1, \dots, u_m) \mapsto (u_1, \dots, u_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$$

beschrieben (das soll heißen:  $f|U = y^{-1} \circ f_0 \circ x$ ). Daher sehen wir insbesondere: Abbildungen von konstantem Rang sind lokal die Hintereinanderausführung von einer Immersion und einer Submersion. Daher nennt man solche Abbildungen auch *Subimmersionen*.

Wir bereiten den Beweis des Theorems durch ein Lemma vor:

**Lemma. (Angepasste Karten für  $C^\infty$ -Abbildungen.)** Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, die in  $p \in M$  den Rang  $r$  besitzt. Dann existieren Karten  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(f(p), N)$  mit  $x(p) = 0$ ,  $y(f(p)) = 0$  und  $f(U) \subset V$ , sowie  $C^\infty$ -Funktionen  $\psi_{r+1}, \dots, \psi_n \in C^\infty(U)$ , so dass

$$y_i \circ f|U = \begin{cases} x_i & \text{für } 1 \leq i \leq r \\ \psi_i & \text{für } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

gilt.

*Beweis des Lemmas* (nach SPIVAK, *Differential Geometry* Vol. I, Theorem 2.9(1), S. 2-21f.). Wir wählen zunächst beliebige Karten  $(\tilde{U}, \tilde{x}) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(f(p), N)$  mit  $f(\tilde{U}) \subset V$ , dabei schreiben wir  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $y = (y_1, \dots, y_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Durch Vertauschung der Komponentenfunktionen von  $\tilde{x}$  und  $y$  können wir erreichen, dass die  $(r \times r)$ -Matrix  $A := (d_{x(p)}(y_j \circ f \circ \tilde{x}^{-1})(e_i))_{i,j=1,\dots,r}$  invertierbar ist.

Um die geforderte Darstellung zu erhalten, konstruieren wir eine neue Karte von  $M$  in der Nähe von  $p$ . Dazu sei  $x := (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  definiert durch

$$x_i := \begin{cases} y_i \circ f|_{\tilde{U}} & \text{für } 1 \leq i \leq r \\ \tilde{x}_i & \text{für } r+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Dann ist

$$\det(d_{x(p)}(x_j \circ \tilde{x}^{-1})(e_i))_{i,j=1,\dots,n} = \det \begin{pmatrix} (d_p(y_j \circ f \circ \tilde{x}^{-1})(e_i))_{i,j=1,\dots,r} & * \\ 0 & \mathbf{1}_{n-r} \end{pmatrix} \neq 0,$$

also ist  $d_{x(p)}(x \circ \tilde{x}^{-1}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Vektorraum-Isomorphismus. Wegen des lokalen Umkehrsatzes folgt, dass es eine Umgebung  $U' \in \mathcal{U}^o(\tilde{x}(p), \tilde{x}(\tilde{U}))$  gibt, so dass  $(x \circ \tilde{x}^{-1})|_{U'}$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist. Mit  $U := \tilde{x}^{-1}(U') \in \mathcal{U}^o(p, U)$  ist daher auch  $x|_U = (x \circ \tilde{x}^{-1})|_{U'} \circ \tilde{x}$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus, und somit  $(U, x|_U) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$ . Nun gilt für  $1 \leq i \leq r$  nach Definition  $y_i \circ f|_U = x_i|_U$ , und für  $r+1 \leq i \leq n$  ist  $\psi_i := y_i \circ f|_U \in C^\infty(U)$ .  $\square$

*Beweis des Theorems* (nach SPIVAK, *Differential Geometry* Vol. I, Theorem 2.9(2), S. 2-22f.). Nach dem Lemma existieren Karten  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(\tilde{V}, \tilde{y}) \in \mathcal{U}^\infty(f(p), N)$  mit  $f(U) \subset \tilde{V}$  sowie Funktionen  $\psi_i \in C^\infty(U)$  für  $r+1 \leq i \leq n$ , so dass

$$\tilde{y}_i \circ f|_U = \begin{cases} x_i & \text{für } 1 \leq i \leq r \\ \psi_i & \text{für } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

gilt; hierbei schreiben wir wieder  $x = (x_1, \dots, x_m)$  und  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ . Die Jacobi-Matrix der Funktion  $\tilde{y} \circ f \circ x^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  an der Stelle  $p' \in U$  hat daher die (Block-)Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ * & (d_{p'}(\psi_j \circ x^{-1})(e_i))_{i,j=r+1,\dots,n} \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix nach Voraussetzung für alle  $p' \in U$  den Rang  $r$  besitzt, folgt, dass die Matrix  $(d_{p'}(\psi_j \circ x^{-1})(e_i))_{i,j=r+1,\dots,n}$  für alle  $p' \in U$  verschwindet. Also hängt für  $r+1 \leq j \leq n$  die Funktion  $(\psi_j \circ x^{-1}) : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$  in Wahrheit nur von den ersten  $r$  Koordinaten von  $x(U) \subset \mathbb{R}^m$  ab, anders gesagt: Es existieren Funktionen  $\bar{\psi}_{r+1}, \dots, \bar{\psi}_n : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\forall r+1 \leq j \leq n \forall p' \in U : \psi_j(p') = \bar{\psi}_j(x_1(p'), \dots, x_r(p'))$$

gilt.

Wir definieren nun eine Funktion  $y = (y_1, \dots, y_n) : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$y_i := \begin{cases} \tilde{y}_i & \text{für } 1 \leq i \leq r \\ \tilde{y}_i - \bar{\psi}_i \circ (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r) & \text{für } r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Damit gilt für  $(v_1, \dots, v_n) \in \tilde{V}$

$$(y \circ \tilde{y}^{-1})(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1} - \bar{\psi}_{r+1}(v_1, \dots, v_r), \dots, v_n - \bar{\psi}_n(v_1, \dots, v_r))$$

und deswegen ist die Jacobi-Matrix

$$(d_{f(p)}(y_j \circ \tilde{y})(e_i))_{i=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ * & \mathbf{1}_{n-r} \end{pmatrix}$$

von  $y \circ \tilde{y}^{-1}$  invertierbar. Nach dem lokalen Umkehrsatz folgt, dass es eine Umgebung  $V \in \mathcal{U}^o(f(p), \tilde{V})$  gibt, so dass  $(y \circ \tilde{y}^{-1})|_V$  ein Diffeomorphismus in  $\mathbb{R}^n$  ist. Damit ist dann auch  $y|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus, und somit  $(V, y|_V) \in \mathcal{U}^\infty(f(p), N)$ .

Damit gilt für  $1 \leq i \leq r$ :  $y_i \circ f|_U = \tilde{y}_i \circ f|_U = x_i$ , und für  $r+1 \leq i \leq n$  gilt

$$y_i \circ f|_U = \tilde{y}_i \circ f|_U - \bar{\psi}_i \circ (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r) \circ f|_U = \psi_i - \bar{\psi}_i \circ (x_1, \dots, x_r) = \psi_i - \psi_i = 0. \quad \square$$

**Folgerung.** Ist  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Submersion, so existiert zu jedem  $q \in f(M) \subset N$  und  $p \in f^{-1}(\{q\})$  ein  $V \in \mathcal{U}^o(q, N)$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung  $s : V \rightarrow M$  mit  $f \circ s = \text{id}_V$  und  $s(q) = p$ . Ein derartiges  $s$  nennt man einen (lokalen) *Schnitt* von  $f$ .

*Beweis.* Nach dem Rangtheorem existieren Karten  $(\tilde{U}, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(\tilde{V}, y) \in \mathcal{U}^\infty(q, N)$  mit  $x(p) = 0$ ,  $y(q) = 0$  und  $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$ , so dass

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(\tilde{U}) \rightarrow y(\tilde{V}), (u_1, \dots, u_m) \mapsto (u_1, \dots, u_n)$$

gilt. (Offenbar muss  $m \geq n$  sein.) Da  $x(\tilde{U})$  offen mit  $0 \in x(\tilde{U})$  ist, existieren Umgebungen  $U \in \mathcal{U}^o(p, \tilde{U})$  und  $V \in \mathcal{U}^o(q, \tilde{V})$ , so dass gilt:

$$\forall (u_1, \dots, u_m) \in y(V) : (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0) \in x(U).$$

Wir definieren nun  $s : V \rightarrow M$  durch

$$\forall (u_1, \dots, u_m) \in y(V) : s(y^{-1}(u_1, \dots, u_m)) := x^{-1}(u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0).$$

Dann ist  $s$  eine  $C^\infty$ -Abbildung mit  $f \circ s = \text{id}_V$  und  $s(q) = p$ . □

**Aufgabe. (Differenzierbarkeitstests.)** Es seien  $M$ ,  $N$  und  $L$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung

(a) Ist  $f$  eine Immersion, so gilt für jede *stetige* Abbildung  $g : L \rightarrow M$ :

Ist  $f \circ g$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, so ist auch  $g$   $C^\infty$ -differenzierbar.

(b) Ist  $f$  eine surjektive Submersion, so gilt für *jede* Abbildung  $g : N \rightarrow L$ :

Ist  $g \circ f$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, so ist auch  $g$   $C^\infty$ -differenzierbar.

## 2.6 Untermannigfaltigkeiten

Es sei  $N$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Eine Teilmenge  $M$  von  $N$ , die wir als topologischen Teilraum auffassen, und die mit einer  $C^\infty$ -Struktur versehen sei, heißt eine *Untermannigfaltigkeit* von  $N$ , wenn die Inklusionsabbildung  $i : M \hookrightarrow N$ ,  $p \mapsto p$  eine  $C^\infty$ -Immersion ist.

### Beispiele 1.

(a) Jede nicht-leere *offene Teilmenge*  $M \subset N$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ , siehe auch Beispiel (c) aus Abschnitt 1.3.

- (b) Ist  $(U, x)$  eine Karte von  $N$  mit  $0 \in x(U)$ , etwa  $x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , und ist  $1 \leq m \leq n$ , so ist die „Scheibe“

$$M := \{p \in U \mid x_{m+1}(p) = \dots = x_n(p) = 0\}$$

eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ ; ihre  $C^\infty$ -Struktur wird durch die globale Karte  $M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $p \mapsto (x_1(p), \dots, x_m(p))$  gegeben. Im folgenden Satz 1 zeigt sich, dass *lokal* jede Untermannigfaltigkeit von  $N$  eine derartige Scheibe ist.

Insbesondere sind Untervektorräume von Vektorräumen Untermannigfaltigkeiten.

### Bemerkungen 1.

- (a) Ist ein topologischer Teilraum  $M$  von  $N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ , so ist dies nur bezüglich einer einzigen  $C^\infty$ -Struktur möglich. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden oft einfach Teilmengen  $M$  von  $N$  als Untermannigfaltigkeiten bezeichnen, ohne die dazu gehörenden  $C^\infty$ -Strukturen auf  $M$  ausdrücklich zu erwähnen.

[*Beweis.* Sind  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  zwei  $C^\infty$ -Strukturen auf  $M$ , so dass  $i_k : (M, \mathfrak{A}_k) \hookrightarrow N$  für  $k = 1, 2$  eine  $C^\infty$ -Immersion ist, so gilt mit der stetigen Abbildung  $f : (M, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (M, \mathfrak{A}_2)$ ,  $p \mapsto p$  die Beziehung  $i_1 = i_2 \circ f$ ; da  $i_2$  eine  $C^\infty$ -Immersion und  $i_1$  eine  $C^\infty$ -Abbildung ist, folgt mit dem „Differenzierbarkeitstest“ für Immersionen (Aufgabe (a) aus Abschnitt 2.5), dass  $f$  eine  $C^\infty$ -Abbildung ist. Analog folgt, dass auch  $f^{-1}$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, also  $f$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist. Somit gilt  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ .  $\square$ ]

- (b) Ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ , so induziert die  $C^\infty$ -Immersion  $i : M \hookrightarrow N$  für  $p \in M$  die injektive lineare Abbildung  $T_p i : T_p M \rightarrow T_p N$ . Indem wir diese verwenden, um  $T_p M$  mit seinem Bild in  $T_p N$  zu identifizieren, werden wir künftig  $T_p M$  als Untervektorraum von  $T_p N$  auffassen.
- (c) WHITNEY hat gezeigt, dass *jede*  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ist (Whitney'scher Einbettungssatz). In diesem Sinne ist die gesamte Theorie der  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit in der Theorie der Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  enthalten.
- (d) Gelegentlich betrachtet man (in Verallgemeinerung der obigen Definition) auch „Untermannigfaltigkeiten“, die nicht die Teilraumtopologie der umgebenden Mannigfaltigkeit, sondern eine andere Topologie tragen; man fordert nur, dass die Inklusion  $i : M \hookrightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Immersion ist. (Dann muss die Topologie der Untermannigfaltigkeit jedenfalls feiner als die Teilraumtopologie sein, damit  $i$  insbesondere stetig ist.) Derartige, sogenannte *immersierte Untermannigfaltigkeiten* spielen beispielsweise in der Theorie der Blätterungen sowie in der Theorie der (Lie-)Gruppenwirkungen auf Mannigfaltigkeiten eine wesentliche Rolle. Will man in diesem Zusammenhang betonen, dass eine Untermannigfaltigkeit die Teilraumtopologie trägt, so spricht man von einer *regulären Untermannigfaltigkeit*.

**Aussage.** Sei  $L$  eine weitere  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, und  $f : L \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Einbettung, das heißt, eine  $C^\infty$ -Immersion, die zugleich ein Homöomorphismus auf den topologischen Teilraum  $M := f(L)$  von  $N$  ist. Dann ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ ; die  $C^\infty$ -Struktur auf  $M$

wird dadurch charakterisiert, dass die Abbildung  $g := (f : L \rightarrow M)$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist.

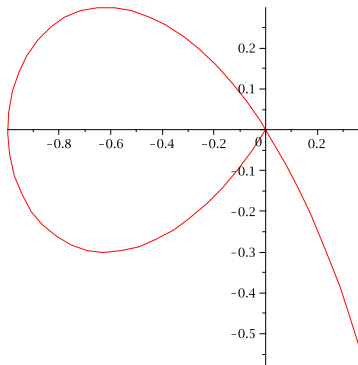
*Beweis.* Da  $f$  eine Einbettung ist, ist  $g : L \rightarrow M$  ein Homöomorphismus. Daher können wir  $g$  verwenden, um die  $C^\infty$ -Struktur von  $L$  auf  $M$  zu übertragen; hierdurch wird  $g$  zu einem  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Nun gilt für die Inklusionsabbildung  $i : M \hookrightarrow N$  die Beziehung  $i = f \circ g^{-1}$ ; da  $f$  eine  $C^\infty$ -Immersion und  $g^{-1}$  sogar ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist, folgt, dass  $i$  eine  $C^\infty$ -Immersion ist. Also ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ .  $\square$

**Bemerkung 2.** Für die Gültigkeit der obigen Aussage ist die Forderung, dass  $f$  eine Einbettung ist, wesentlich. Fordert man nur, dass  $f : L \rightarrow N$  eine injektive  $C^\infty$ -Immersion ist, ist  $f(L)$  im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit von  $N$  in unserem Sinne (wohl aber eine immensierte Untermannigfaltigkeit im Sinne von Bemerkung 1(d)). Dies wird durch das folgende Beispiel illustriert:

Es sei

$$f : ]-\infty, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \left( \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, t \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right).$$

Offensichtlich ist  $f$  eine injektive Immersion, und das Bild von  $f$  ist sogar abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$ . Dennoch ist  $f(]-\infty, 1[)$  keine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ , wie sich aus der Untersuchung des Punkts  $(0, 0)$  ergibt.



**Satz 1. (Lokale Planierbarkeit von Untermannigfaltigkeiten.)** Sei  $M$  eine Teilmenge von  $N$ , die wir als topologischen Teilraum auffassen. Dann ist  $M$  genau dann eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ , wenn  $M$  lokal planierbar ist, das soll heißen: Für jedes  $p \in M$  existiert eine Karte  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(p, N)$ , so dass  $y(p) = 0$  und

$$y(V \cap M) = y(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$$

gilt.

*Beweis.* Wir setzen zunächst voraus, dass  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist. Sei  $p \in M$  gegeben. Nach dem Rangtheorem (Theorem in Abschnitt 2.5), angewendet auf die  $C^\infty$ -Immersion  $i : M \hookrightarrow N$ , existieren Karten  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(p, N)$  mit  $x(p) = 0$  und  $y(p) = 0$ , so dass  $i|_U$  unter den Karten der Abbildung

$$x(U) \rightarrow y(V), (u_1, \dots, u_m) \mapsto (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$$

entspricht. Hieraus ergibt sich  $y(V \cap M) = y(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$ .

Es sei nun umgekehrt  $M$  lokal planierbar. Wir konstruieren eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $M$ : Zu gegebenem  $p \in M$  gibt es nach Voraussetzung eine Karte  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(p, N)$  mit  $y(p) = 0$  und  $y(V \cap M) = y(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\})$ . Da  $M$  die Teilraumtopologie trägt, ist  $U := V \cap M \in \mathcal{U}^o(p, M)$  und  $x := \text{pr}_m \circ (y|_U) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Homöomorphismus in  $\mathbb{R}^m$ ; hierbei bezeichnet  $\text{pr}_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(u_1, \dots, u_n) \mapsto (u_1, \dots, u_m)$  die Projektion auf die ersten  $m$  Koordinaten des  $\mathbb{R}^n$ . Also ist  $(U, x)$  eine Karte für den topologischen Raum  $M$ . Aus der  $C^\infty$ -Verträglichkeit der Karten von  $N$  ergibt sich, dass je zwei auf diese Weise konstruierten Karten von  $M$  miteinander  $C^\infty$ -verträglich sind; wir betrachten  $M$  als eine  $m$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mittels der durch sie erzeugten  $C^\infty$ -Struktur. Bezüglich Karten  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(p, N)$  wie in der obigen Konstruktion wird die Inklusion  $i : M \hookrightarrow N$  durch die Abbildung

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$$

dargestellt. Hieraus ergibt sich, dass  $i$  eine  $C^\infty$ -Immersion, und somit  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist.  $\square$

**Folgerung 1. (Lokale Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten.)** Sei  $M$  eine Teilmenge von  $N$ , die wir als topologischen Teilraum auffassen. Dann ist  $M$  genau dann eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ , wenn es für jedes  $p \in M$  eine Umgebung  $V \in \mathcal{U}^o(p, N)$  gibt, so dass  $M \cap V$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist.

*Beweis.* Die eine Implikation ist klar: Wenn  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist, so kann für jedes  $p \in M$   $V := N \in \mathcal{U}^o(p, N)$  gewählt werden, damit ist  $M \cap V = M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ .

Existiert umgekehrt zu jedem  $p \in M$  ein  $V \in \mathcal{U}^o(p, N)$ , so dass  $M \cap V$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist, so ist nach Satz 1  $M \cap V$  jeweils lokal planierbar. Daher ist auch  $M$  lokal planierbar, und damit nach Satz 1 eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ .  $\square$

Bisher war unser Vorrat an  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten sehr eingeschränkt. Der folgende Satz erlaubt es uns, auf effiziente Weise  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten als Untermannigfaltigkeiten (beispielsweise im  $\mathbb{R}^n$ ) zu konstruieren.

**Satz 2. (Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten.)** Sei  $L$  eine weitere  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, und sei  $f : N \rightarrow L$  eine  $C^\infty$ -Abbildung von konstantem Rang  $r$ . Dann ist für jedes  $q \in f(N)$  das Urbild  $M := f^{-1}(\{q\}) \subset N$  eine  $(n-r)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ , und für  $p \in M$  gilt

$$T_p M = \ker(T_p f) \subset T_p N.$$

*Beweis.* Um nachzuweisen, dass  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist, genügt es nach Satz 1 zu zeigen, dass  $M$  lokal planierbar ist. Hierzu wenden wir das Rangtheorem auf die Abbildung  $f : N \rightarrow L$  an: Zu gegebenem  $p \in M$  existieren Karten  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, N)$  und  $(V, y) \in \mathcal{U}^\infty(q, L)$  mit  $x(p) = 0$ ,  $y(q) = 0$  und  $f(U) \subset V$ , so dass  $f|_U : U \rightarrow L$  bezüglich dieser

Karten durch die Abbildung

$$x(U) \rightarrow y(V), (u_1, \dots, u_n) \mapsto (u_1, \dots, u_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{\ell-r})$$

beschrieben wird. Dann ist

$$M \cap U = \{p \in U \mid f(p) = q\} = \{p \in U \mid y(f(p)) = 0\}$$

und daher

$$x(M \cap U) = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in x(U) \mid u_1 = \dots = u_r = 0\} = x(U) \cap (\{0_r\} \times \mathbb{R}^{n-r}).$$

Also ist  $M$  lokal planierbar, und damit eine  $(n-r)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ .

Es verbleibt, die Gleichung  $T_p M = \ker(T_p f)$  zu beweisen. Da die beiden Vektorräume dieselbe Dimension  $n-r$  besitzen, genügt es tatsächlich,  $T_p M \subset \ker(T_p f)$  zu zeigen. Dazu sei  $v \in T_p M$  gegeben. Also existiert eine Kurve  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  mit  $\dot{\alpha}(0) = v$ . Es gilt  $\alpha(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset M = f^{-1}(\{q\})$  und daher  $f \circ \alpha \equiv q$  und somit  $T_p f(v) = T_p f(\dot{\alpha}(0)) = (f \circ \alpha)'(0) = 0$ , also  $v \in \ker(T_p f)$ .  $\square$

**Folgerung 2.** Sei  $L$  eine  $\ell$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $f : N \rightarrow L$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und  $q \in f(N)$  derart, dass  $f$  in allen  $p \in f^{-1}(\{q\}) =: M$  submersiv ist. Dann ist  $M$  eine  $(n-\ell)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ , und für  $p \in M$  gilt  $T_p M = \ker(T_p f) \subset T_p N$ .

*Beweis.* Die Menge  $G_s := \{p \in N \mid f \text{ ist in } p \text{ submersiv}\}$  ist nach der Aussage aus Abschnitt 2.5 offen, und nach Voraussetzung gilt  $M \subset G_s$ . Daher können wir den Satz über gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten auf die Submersion  $f|_{G_s} : G_s \rightarrow L$  anwenden, und erhalten die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 2.** Wir haben früher (siehe die Aufgabe in Abschnitt 1.3) recht viel arbeiten müssen, um die  $n$ -Sphäre  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  als  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit zu erkennen. Dieses Ergebnis können wir nun sehr viel leichter erlangen: Wir betrachten die  $C^\infty$ -Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, (u_1, \dots, u_{n+1}) \mapsto u_1^2 + \dots + u_{n+1}^2.$$

Es gilt  $S^n = f^{-1}(\{1\})$ , und  $f$  ist in allen  $p \in S^n$  submersiv. Aus der obigen Folgerung 2 ergibt sich daher, dass  $S^n$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , und daher insbesondere selbst eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist.

**Eine Anwendung. Faserprodukte.** Seien  $M, N, L$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m, n$  bzw.  $\ell$ , und seien  $f : M \rightarrow L$  und  $g : N \rightarrow L$  zwei  $C^\infty$ -Abbildungen, von denen mindestens eine eine Submersion ist. Dann ist das *Faserprodukt*

$$M \times_L N := \{(p, q) \in M \times N \mid f(p) = g(q)\}$$

eine Untermannigfaltigkeit der Produktmannigfaltigkeit  $M \times N$  der Dimension  $m + n - \ell$ .

*Beweis.* Wäre  $L$  ein Vektorraum, könnten wir den Satz über gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten direkt auf die Submersion  $M \times N \rightarrow L, (p, q) \mapsto f(p) - g(q)$  anwenden. In

der allgemeinen Situation müssen wir Karten für  $L$  verwenden, um das Problem lokal auf die Vektorraum-Situation zurückzuführen.

Sei also  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  eine Karte von  $L$ . Dann ist  $V := f^{-1}(U) \times g^{-1}(U)$  eine offene Umgebung in  $M \times N$  und es gilt  $(M \times_L N) \cap V = \varphi^{-1}(\{0\})$  mit der  $C^\infty$ -Funktion

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^\ell, (p, q) \mapsto x(f(p)) - x(g(q)).$$

Weil entweder  $x \circ f : f^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  oder  $x \circ g : g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  eine Submersion ist, ist auch  $\varphi$  eine solche, und daher ist nach dem Satz über gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten (Satz 2)  $(M \times_L N) \cap V = \varphi^{-1}(\{0\})$  eine Untermannigfaltigkeit von  $V$  und damit von  $M \times N$ . Mit der Folgerung 1 (Lokale Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten) folgt, dass deshalb auch  $M \times_L N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M \times N$  ist.  $\square$

### Beispiele 3.

- (a) Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Die *Diagonale* in  $M \times M$  ist

$$\Delta(M) := \{ (p, p) \in M \times M \mid p \in M \} = M \times_M M,$$

wobei das Faserprodukt bezüglich zweier Kopien der Abbildung  $\text{id}_M : M \rightarrow M$  gebildet ist. Daher ist  $\Delta(M)$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M \times M$ .

- (b) Seien  $M, N$  zwei  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Dann ist der *Graph* von  $f$  die Menge

$$\text{Graph}(f) := \{ (p, f(p)) \mid p \in M \} = M \times_N N,$$

wobei das Faserprodukt bezüglich  $f : M \rightarrow N$  und  $\text{id}_N : N \rightarrow N$  gebildet ist. Daher ist  $\text{Graph}(f)$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M \times N$ .

## 2.7 Vektorraumbündel

### Definition 1.

- (a) Ein  $C^\infty$ -*Faserraum* ist ein Tripel  $(E, B, \pi)$ , bestehend aus  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  $E$  und  $B$  sowie einer surjektiven  $C^\infty$ -Submersion  $\pi : E \rightarrow B$ . In diesem Zusammenhang heißt  $E$  der *Totalraum* und  $B$  der *Basisraum* des Faserraums; man sagt auch, dass  $(E, B, \pi)$  ein Faserraum *über*  $B$  sei. Für  $b \in B$  nennt man  $E_b := \pi^{-1}(\{b\})$  die *Faser* des Faserraums über dem Punkt  $b$ . Wir werden statt dem Tripel  $(E, B, \pi)$  auch die Abbildung  $\pi : E \rightarrow B$  selbst als Faserraum bezeichnen.
- (b) Sei  $F$  eine weitere  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann heißt ein  $C^\infty$ -Faserraum  $(E, B, \pi)$  ein  $C^\infty$ -*Faserbündel mit typischer Faser*  $F$ , wenn es zu jedem Punkt  $b \in B$  eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}^\circ(b, B)$  und einen  $C^\infty$ -Diffeomorphismus

$$\varphi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U) =: E|_U \quad \text{mit} \quad \pi \circ \varphi = \text{pr}_U : U \times F \rightarrow U, (p, q) \mapsto p$$

gibt. In dieser Situation nennt man  $\varphi$  eine *lokale Trivialisierung* des Faserbündels, und man sagt, dass das Faserbündel *über*  $U$  *trivial* ist.



- (c) Sei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Ein  $C^\infty$ - $\mathbb{K}$ -Vektorraumbündel (oft sprechen wir auch einfach von einem Vektorraumbündel) ist ein  $C^\infty$ -Faserbündel  $(E, B, \pi)$ , dessen typische Faser  $F$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist, dessen Fasern  $E_b$  ( $b \in B$ ) alle ebenfalls die Struktur eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums tragen, und für das es um jeden Punkt  $b \in B$  eine lokale Trivialisierung  $\varphi : U \times F \rightarrow E|_U$  (mit  $U \in \mathcal{U}^o(b, B)$ ) gibt, so dass für jedes  $b' \in U$  die Abbildung

$$\varphi|(\{b'\} \times F) : \{b'\} \times F \rightarrow E_{b'}$$

jeweils ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Wenn im Folgenden von einer lokalen Trivialisierung eines Vektorraumbündels die Rede ist, meinen wir stets eine Trivialisierung dieser Art. Die Dimension der typischen Faser  $F$  nennt man auch die *Faserdimension* des Vektorraumbündels.

- (d) Sei  $M$  eine weitere Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow B$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Dann ist ein Schnitt längs  $f$  in einem Faserbündel (oder  $\mathbb{K}$ -Vektorraumbündel)  $\pi : E \rightarrow B$  eine  $C^\infty$ -Abbildung  $s : M \rightarrow E$  mit  $\pi \circ s = f$ . Wir bezeichnen den Raum derartiger Schnitte mit  $\Gamma_f(\pi)$ . Ein Schnitt über einer Umgebung  $U \subset B$  ist ein Schnitt längs der Inklusionsabbildung  $U \hookrightarrow B$ . Ein solcher Schnitt heißt *global*, wenn  $U = B$  ist. Den Raum der globalen Schnitte von  $\pi$  bezeichnen wir mit  $\Gamma(\pi)$ .

**Beispiel 1.** Sind  $B, F$  beliebige  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten, so ist mit  $E := B \times F$  und der Projektion

$$\pi : E \rightarrow B, (b, q) \mapsto b$$

das Tupel  $(E, B, \pi)$  ein  $C^\infty$ -Faserbündel mit typischer Faser  $F$ . Dieses ist „trivial“ in dem Sinne, dass die Abbildung

$$\varphi := \text{id}_E : B \times F \rightarrow E$$

eine „globale“ Trivialisierung ist. Allgemein nennt man ein Bündel *trivial*, wenn es eine globale Trivialisierung besitzt; jedes triviale Bündel ist zu einem Bündel  $B \times F \rightarrow B$  isomorph (siehe Definition 2 unten). — Ist  $F$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, so wird  $(E, B, \pi)$  ein *triviales*  $\mathbb{K}$ -Vektorraumbündel.

**Bemerkung.** Nach dem „Kochrezept“ der obigen Definition (c) kann man auch Faserbündel definieren, deren Fasern andere Strukturen als die eines Vektorraums tragen. Eine besonders große Bedeutung haben hierbei Bündel, deren Fasern die Struktur von (Lieschen) Gruppen tragen. Diese nennt man *Prinzipalfaserbündel*.

**Aufgabe 1.** Ein Vektorraumbündel  $\pi : E \rightarrow B$  der Faserdimension  $\ell$  ist genau dann trivial, wenn es  $\ell$  globale Schnitte  $s_1, \dots, s_\ell : B \rightarrow E$  gibt, so dass für jedes  $b \in B$  die Vektoren  $s_1(b), \dots, s_\ell(b) \in E_b$  linear unabhängig sind.

**Aufgabe 2. Extrapolation von Schnitten eines Vektorbündels.** Es sei  $\pi : E \rightarrow B$  ein Vektorraumbündel,  $b_0 \in B$ ,  $A$  eine abgeschlossene und  $G$  eine offene Teilmenge von  $B$  mit  $b_0 \in A \subset G$ . Zeige:

- (a) Zu jedem  $v \in E_{b_0}$  existiert ein  $s \in \Gamma(\pi)$  mit  $s(b_0) = v$ . [Tipp. Man verwende eine lokale Trivialisierung von  $\pi$  um  $b_0$ , sowie eine Zerlegung der Eins auf  $B$ .]
- (b) Zu jedem lokalen Schnitt  $s \in \Gamma_{G \leftrightarrow B}(\pi)$  existiert ein globaler Schnitt  $\tilde{s} \in \Gamma(\pi)$  mit  $\tilde{s}|_A = s|_A$ . [Tipp. Zerlegung der Eins.]

Die Existenz lokaler Trivialisierungen für ein Vektorraumbündel besagt gerade, dass dieses lokal isomorph zu einem trivialen Vektorbündel ist, wobei sich „lokal“ auf die Basismannigfaltigkeit bezieht. Daher kann man erwarten, dass sich jedes Vektorbündel aus trivialen Vektorbündeln „zusammenkleben“ läßt. Der folgende Satz zeigt, was genau darunter zu verstehen ist:

**Satz.**

- (a) Sei  $\pi : E \rightarrow B$  ein Vektorraumbündel mit typischer Faser  $F$ , und für jedes  $b \in B$  sei  $\varphi_b : U_b \times F \rightarrow E|_{U_b}$  eine lokale Trivialisierung von  $\pi$  über  $U_b \in \mathcal{U}^o(b, B)$ . Für jedes Paar  $(b_1, b_2) \in B \times B$  mit  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \neq \emptyset$  existiert dann eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\psi_{U_{b_1}, U_{b_2}} : U_{b_1} \cap U_{b_2} \rightarrow \text{GL}(F)$ , so dass

$$\forall b \in U_{b_1} \cap U_{b_2}, q \in F : \varphi_{b_2}(b, \psi_{U_{b_1}, U_{b_2}}(b)q) = \varphi_{b_1}(b, q) \quad (*)$$

gilt. Die Übergangsfunktionen  $\psi_{U_{b_1}, U_{b_2}}$  sind miteinander verträglich, in dem Sinne, dass für alle  $b_1, b_2, b_3 \in B$  mit  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap U_{b_3} \neq \emptyset$  die folgende, sogenannte *Kozykel-Bedingung* gilt:

$$\forall b \in U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap U_{b_3} : \psi_{U_{b_1}, U_{b_3}}(b) = \psi_{U_{b_2}, U_{b_3}}(b) \circ \psi_{U_{b_1}, U_{b_2}}(b). \quad (\dagger)$$

- (b) Es sei  $B$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $F$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Es sei eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $B$ , und für jedes Paar  $(i_1, i_2) \in I \times I$  mit  $U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$  eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\psi_{i_1, i_2} : U_{i_1} \cap U_{i_2} \rightarrow \text{GL}(F)$  gegeben, so dass diese Abbildungen für alle  $i_1, i_2, i_3 \in I$  mit  $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap U_{i_3} \neq \emptyset$  die Kozykel-Bedingung erfüllen:

$$\forall b \in U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap U_{i_3} : \psi_{U_{i_1}, U_{i_3}}(b) = \psi_{U_{i_2}, U_{i_3}}(b) \circ \psi_{U_{i_1}, U_{i_2}}(b). \quad (\ddagger)$$

Dann existiert eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $E$  und ein Vektorraumbündel  $\pi : E \rightarrow B$  über  $B$  und mit typischer Faser  $F$ , das über den  $U_i$  trivial ist – sagen wir, mit lokalen Trivialisierungen  $\varphi_i : U_i \times F \rightarrow E|_{U_i}$  – und so dass die Übergangsfunktion (siehe (a)) von  $\varphi_{i_1}$  zu  $\varphi_{i_2}$  jeweils gerade durch die Abbildung  $\psi_{i_1, i_2}$  gegeben wird.

*Beweis. Für (a).* Sei  $b_1, b_2 \in B$  gegeben mit  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \neq \emptyset$ . Dann sind für alle  $b \in U_{b_1} \cap U_{b_2}$  die Abbildungen  $\varphi_{b_1}(b, \cdot) : F \rightarrow E_b$  und  $\varphi_{b_2}(b, \cdot) : F \rightarrow E_b$  Vektorraum-Isomorphismen; deshalb ist

$$\psi_{b_1, b_2}(b) := \varphi_{b_2}(b, \cdot)^{-1} \circ \varphi_{b_1}(b, \cdot) \in \text{GL}(F).$$

Die hierdurch definierte Abbildung  $\psi_{b_1, b_2} : U_{b_1} \cap U_{b_2} \rightarrow \text{GL}(F)$  ist  $C^\infty$  und erfüllt offenbar (\*).

Zum Nachweis der Kozykel-Bedingung ( $\dagger$ ) sei  $b_1, b_2, b_3 \in B$  mit  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap U_{b_3} \neq \emptyset$  und  $b \in U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap U_{b_3}$  gegeben. Dann gilt wegen (\*)

$$\varphi_{b_3}(b, \cdot) \circ \psi_{U_{b_2}, U_{b_3}}(b) \circ \psi_{U_{b_1}, U_{b_2}}(b) = \varphi_{b_2}(b, \cdot) \circ \psi_{U_{b_1}, U_{b_2}}(b) = \varphi_{b_1}(b, \cdot) = \varphi_{b_3}(b, \cdot) \circ \psi_{U_{b_1}, U_{b_3}}(b),$$

woraus wegen der Bijektivität von  $\varphi_{b_3}(b, \cdot)$  folgt:

$$\psi_{U_{b_2}, U_{b_3}}(b) \circ \psi_{U_{b_1}, U_{b_2}}(b) = \psi_{U_{b_1}, U_{b_3}}(b).$$

Für  $(b)$ . Die Beweisidee besteht darin, die „lokalen Vektorraumbündel“  $U_i \times F$  über  $U_i$  mit Hilfe der Funktionen  $\psi_{i_1, i_2}$  zu einem globalen Vektorraumbündel (über  $B$ ) zusammenzukleben.

Zu diesem Zweck bilden wir die „disjunkte Vereinigung“  $N := \coprod_{i \in I} (U_i \times F)$ . Wir betrachten  $N$  als topologischen Raum, indem wir eine Teilmenge  $G \subset N$  genau dann offen nennen, wenn  $G \cap (U_i \times F)$  offen in  $U_i \times F$  für alle  $i \in I$  ist. Auf  $N$  führen wir die folgende Relation  $\sim$  ein: Ist  $(b_1, q_1) \in U_{i_1} \times F$  und  $(b_2, q_2) \in U_{i_2} \times F$ , so definieren wir

$$(b_1, q_1) \sim (b_2, q_2) :\iff (b_1 = b_2 \text{ und } \psi_{i_1, i_2}(b_1)q_1 = q_2).$$

Wir zeigen nun, dass die Kozykel-Bedingung ( $\ddagger$ ) dazu führt, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist. Setzen wir in ( $\ddagger$ )  $i_1 = i_2 = i_3 =: i \in I$ , so ergibt sich

$$\forall b \in U_i : \psi_{i, i}(b) = \text{id}_F,$$

daraus folgt die Reflexivität von  $\sim$ . Setzen wir in ( $\ddagger$ )  $i_3 = i_1$  ein und nutzen  $\psi_{i_1, i_1}(b) = \text{id}_F$  aus, so erhalten wir

$$\forall b \in U_{i_1} \cap U_{i_2} : \psi_{i_1, i_2}(b)^{-1} = \psi_{i_2, i_1}(b),$$

woraus die Symmetrie von  $\sim$  folgt. Schließlich folgt aus ( $\ddagger$ ) unmittelbar die Transitivität von  $\sim$ .

Wir bilden nun den Raum  $E := N / \sim$  der Äquivalenzklassen von  $N$  bezüglich  $\sim$ , sowie die zugehörige Projektionsabbildung  $\tau : N \rightarrow E$ . Indem wir eine Menge  $G \subset E$  genau dann offen nennen, wenn  $\tau^{-1}(G)$  offen in  $N$  ist, erhalten wir eine Topologie auf  $N$ , bezüglich derer  $\tau$  eine stetige, offene Abbildung ist. Da die Einschränkung von  $\tau$  auf die offene Teilmenge  $U_i \times F$  von  $N$  jeweils injektiv ist, ist  $\tau$  tatsächlich sogar ein lokaler Homöomorphismus. Indem wir die  $C^\infty$ -Strukturen von  $U_i \times F$  jeweils mit  $\tau$  auf  $E$  übertragen, erhalten wir daher einen zumindestens stetigen Atlas von  $E$ . Tatsächlich sind die so auf  $E$  konstruierten Karten sogar  $C^\infty$ -verträglich: Sind  $(b_k, q_k) \in U_{i_k} \times F$  (für  $k = 1, 2$ ) mit  $\tau(b_1, q_1) = \tau(b_2, q_2) =: p \in E$ , so haben die zu diesen beiden Darstellungen von  $p$  gehörenden Karten von  $E$  die Gestalt

$$y_k := x_k \circ (\tau|_{U_{i_k} \times F})^{-1},$$

wobei  $x_k$  eine Karte von  $U_{i_k} \times F$  um  $(b_k, q_k)$  ist. Der Kartenwechsel von  $y_1$  zu  $y_2$  ist demnach die Abbildung

$$y_2 \circ y_1^{-1} = x_2 \circ (\tau|_{U_{i_2} \times F})^{-1} \circ (\tau|_{U_{i_1} \times F}) \circ x_1^{-1}.$$

Nun ist für  $(b, q) \in U_{i_1} \times F$

$$(\tau|_{U_{i_2} \times F})^{-1}(\tau(b, q)) = (b, \psi_{i_1, i_2}(b)q). \quad (\diamond)$$

Aus diesem Grund ist  $(\tau|_{U_{i_2} \times F})^{-1} \circ (\tau|_{U_{i_1} \times F})$  und daher auch  $y_2 \circ y_1^{-1}$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Damit wird  $E$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $\tau : N \rightarrow E$  ein lokaler  $C^\infty$ -Diffeomorphismus.

Weil für  $(b_1, q_1), (b_2, q_2) \in N$  aus  $\tau(b_1, q_1) = \tau(b_2, q_2)$  schon  $b_1 = b_2$  folgt, existiert genau eine Abbildung  $\pi : E \rightarrow B$  mit

$$\forall (b, q) \in N : \pi(\tau(b, q)) = b,$$

und diese ist offensichtlich surjektiv. Für  $i \in I$  ist

$$\varphi_i := (\tau|_{U_i \times F}) : U_i \times F \rightarrow \tau(U_i \times F)$$

ein Diffeomorphismus mit  $\pi \circ \varphi_i = \text{pr}_{U_i}$ , und damit eine lokale Trivialisierung für  $\pi$ . Aus dieser Gleichung folgt auch, dass  $\pi$  eine Submersion ist, und somit ist  $(E, B, \pi)$  ein  $C^\infty$ -Vektorraumbündel mit typischer Faser  $F$ . Schließlich folgt aus  $(\diamond)$ , dass die Übergangsfunktion von  $\varphi_{i_1}$  zu  $\varphi_{i_2}$  durch  $\psi_{i_1, i_2}$  gegeben wird.  $\square$

**Beispiel 2.** Wir verwenden den Satz (b), um Vektorraumbündel der Faserdimension 1 (d.h. mit typischer Faser  $\mathbb{R}$ ) über dem Einheitskreis  $S^1$  zu konstruieren. Ist  $p_1, p_2 \in S^1$  ein Paar von Antipodenpunkten (d.h. wenn wir  $S^1$  auf die übliche Art in  $\mathbb{R}^2$  eingebettet denken, ist  $p_2 = -p_1$ ), so ist mit

$$U_1 := S^1 \setminus \{p_1\} \quad \text{und} \quad U_2 := S^1 \setminus \{p_2\}$$

$(U_1, U_2)$  eine offene Überdeckung von  $S^1$ , und  $U_1 \cap U_2$  zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten  $V_+$  und  $V_-$ .

Um den Satz (b) auf  $B := S^1$  und  $F := \mathbb{R}$  mit dieser Überdeckung anwenden zu können, müssen wir also nur eine Übergangsfunktion von  $U_1$  nach  $U_2$  angeben, also eine Funktion  $\psi : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$ . Wählen wir beispielsweise

$$\forall p \in U_1 \cap U_2 : \psi(p) = \text{id}_{\mathbb{R}},$$

so erhalten wir offenbar das triviale Bündel  $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Wählen wir hingegen

$$\forall p \in V_+ : \psi(p) = \text{id}_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \forall p \in V_- : \psi(p) = -\text{id}_{\mathbb{R}},$$

so erhalten wir ein Vektorraumbündel  $\pi : E \rightarrow S^1$ , das keinen nullstellenfreien globalen Schnitt besitzt, und deshalb nicht trivial ist. Es hat die Gestalt eines (unendlich ausgedehnten) *Möbiusbandes*.

[*Beweis.* Angenommen,  $s : S^1 \rightarrow E$  wäre ein globaler, nullstellenfreier Schnitt. Bezeichnen wir mit  $\varphi_k : U_k \times \mathbb{R} \rightarrow E|_{U_k}$  die lokale Trivialisierung von  $\pi$  über  $U_k$  ( $k \in \{1, 2\}$ ), so gilt mit der Funktion  $f_k := \text{pr}_{\mathbb{R}} \circ \varphi_k^{-1} \circ (s|_{U_k}) : U_k \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\forall p \in U_k : s(p) = \varphi_k(p, f_k(p)).$$

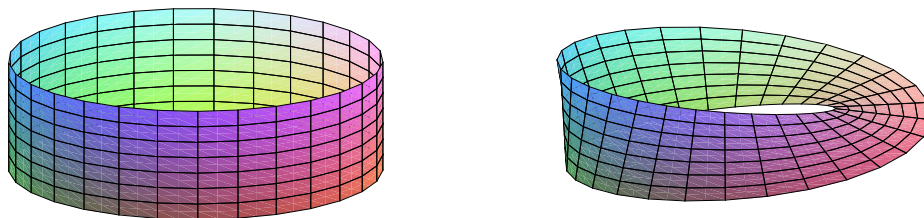
Mit  $s$  sind auch die Funktionen  $f_k$  nullstellenfrei. Da sie auf der zusammenhängenden Menge  $U_k$  definiert und stetig sind, können sie also ihr Vorzeichen nicht wechseln. Andererseits gilt für  $p \in U_1 \cap U_2$

$$\varphi_1(p, f_1(p)) = s(p) = \varphi_2(p, f_2(p)) = \varphi_1(p, \psi(p)f_2(p))$$

und somit  $f_1(p) = \psi(p)f_2(p)$ . Wegen der Definition von  $\psi$  folgt nun

$$f_1|_{V_+} = f_2|_{V_+} \quad \text{und} \quad f_1|_{V_-} = -f_2|_{V_-},$$

was ein Widerspruch dazu ist, dass  $f_1$  und  $f_2$  ihr Vorzeichen nicht wechseln.  $\square$  ]



**Definition 2.** Seien  $\pi : E \rightarrow B$  und  $\pi' : E' \rightarrow B'$  zwei Vektorraumbündel und  $f : B \rightarrow B'$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Ein *Vektorraumbündel-Morphismus von  $\pi$  nach  $\pi'$  über  $f$*  ist eine  $C^\infty$ -Abbildung  $g : E \rightarrow E'$ , für die das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array},$$

und die *faserweise linear* ist; letzteres soll bedeuten: Für jedes  $b \in B$  ist die Abbildung  $g|_{E_b} : E_b \rightarrow E'_{f(b)}$  linear.  $g$  ist ein *Vektorraumbündel-Isomorphismus über  $f$* , wenn sowohl  $f$  als auch  $g$  ein Diffeomorphismus ist. Existiert ein Vektorraumbündel-Isomorphismus zwischen  $\pi$  und  $\pi'$ , so heißen die beiden Vektorraumbündel *isomorph*.

**Aufgabe 3.** In der Situation von Teil (b) des Satzes dieses Abschnittes zeige man, dass das dort konstruierte Vektorraumbündel  $\pi : E \rightarrow B$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, das heißt: Ist  $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow B$  ein weiteres Vektorraumbündel mit typischer Faser  $F$ , das über den  $U_i$  trivial ist mit lokalen Trivialisierungen  $\tilde{\varphi}_i : U_i \times F \rightarrow \tilde{E}|_{U_i}$ , und so dass die Übergangsfunktionen zu den  $\tilde{\varphi}_i$  ebenfalls durch die vorgegebenen Abbildungen  $\psi_{i_1, i_2} : U_{i_1} \cap U_{i_2} \rightarrow \text{GL}(F)$  gegeben werden, so ist  $\tilde{\pi}$  isomorph zu  $\pi$  über  $\text{id}_B$ .

**Aufgabe 4.** Zeige:

- (a) Jedes Vektorraumbündel der Faserdimension 1 über einem offenen Intervall  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  ist trivial.

[Tipp. Sei  $\pi : E \rightarrow ]a, b[$  ein Vektorraumbündel der Faserdimension 1,  $t_0 \in ]a, b[$  fest und

$$J := \{ t \in ]a, b[ \mid \text{Es existiert ein nullstellenfreier Schnitt von } \pi \text{ auf } ]t, t_0[ \text{ bzw. auf } ]t_0, t[ \}.$$

(Dabei ist in der Definition von  $J$  das Intervall  $]t, t_0[$  oder  $]t_0, t[$  zu wählen, je nachdem, ob  $t \leq t_0$  oder  $t > t_0$  ist.) Man zeige, dass  $J$  in  $]a, b[$  offen und abgeschlossen ist.]

- (b) Jedes Vektorraumbündel der Faserdimension 1 über  $S^1$  ist entweder trivial, oder zu dem (in Beispiel 2 beschriebenen) Möbiusband isomorph.

[Tipp. Ist  $\pi : E \rightarrow S^1$  ein Vektorraumbündel der Faserdimension 1 und  $p_0 \in S^1$  fest, so ist  $(U_1, U_2)$  mit  $U_1 := S^1 \setminus \{p_0\}$  und  $U_2 := S^1 \setminus \{-p_0\}$  eine offene Überdeckung von  $S^1$ .  $U_1 \cap U_2 = S^1 \setminus \{p_0, -p_0\}$  zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten  $V_+$  und  $V_-$ .

Mittels (a) zeige man nun, dass es Trivialisierungen  $\varphi_k : U_k \times \mathbb{R} \rightarrow E|_{U_k}$  von  $\pi$  gibt. Dann ist  $s : U_1 \rightarrow E$ ,  $p \mapsto \varphi_1(p, 1)$  ein nullstellenfreier Schnitt von  $\pi$  über  $U_1$ . Indem man  $s$  mit Hilfe von  $\varphi_2$  in der Nähe von  $p_0$  untersucht, zeige man, dass sich nach einer Deformation von  $s$  in der Nähe von  $p_0$  einer der folgenden beiden Fälle erreichen läßt: Entweder  $s$  läßt sich in  $p_0$  zu einem globalen, nullstellenfreien Schnitt von  $\pi$  fortsetzen, oder mit der Funktion  $\chi : E|_{U_1 \cap U_2} \rightarrow E|_{U_1 \cap U_2}$ , die durch

$$\chi|(E|_{V_+}) = \text{id} \quad \text{und} \quad \chi|(E|_{V_-}) = -\text{id}$$

charakterisiert ist, läßt sich  $\chi \circ s$  in  $p_0$  nullstellenfrei zu einem Schnitt von  $\pi$  über  $U_2$  fortsetzen. Im letzteren Fall ist  $\pi$  isomorph zum Möbiusband.]

## 2.8 Das Tangentialbündel

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Der Bündelraum des Tangentialbündels von  $M$  ist der „Raum“

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M,$$

den wir zusammen mit der Bündelprojektion, der surjektiven Abbildung

$$\pi : TM \rightarrow M,$$

die jeweils die Elemente von  $T_p M$  auf  $p$  abbildet, betrachten. Wir werden den Satz des vorherigen Abschnitts verwenden, um  $\pi : TM \rightarrow M$  zu einem Vektorraumbündel über  $M$ , dem sogenannten Tangentialbündel von  $M$ , zu machen.

### Satz.

- (a) Es gibt auf  $TM$  genau eine  $C^\infty$ -Struktur, so dass für jede Karte  $(U, x)$  von  $M$  die Abbildung

$$\varphi_U : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM|_U := \pi^{-1}(U), (p, v) \mapsto (T_p x)^{-1}(v)$$

ein Diffeomorphismus ist. Wir werden  $TM$  im Folgenden stets auf diese Weise als  $2m$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit auffassen. Dann ist die Projektion  $\pi : TM \rightarrow M$  ein Vektorraumbündel mit typischer Faser  $\mathbb{R}^m$ , und die obigen Diffeomorphismen  $\varphi_U$  sind lokale Trivialisierungen für dieses. Sind  $(U_1, x_1)$  und  $(U_2, x_2)$  zwei Karten von  $M$  mit  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , so ist die Übergangsfunktion  $\psi_{U_1, U_2} : U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^m)$  von  $\varphi_{U_1}$  nach  $\varphi_{U_2}$  gegeben durch

$$\forall p \in U_1 \cap U_2 : \psi_{U_1, U_2}(p) = d_p(x_2 \circ x_1^{-1}). \quad (*)$$

- (b) Sei  $N$  eine weitere  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, und  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Abbildung ( $r \geq 1$ ). Dann ist die *Tangentialabbildung* von  $f$ , das ist die Abbildung

$$Tf : TM \rightarrow TN ,$$

die durch

$$\forall p \in M : Tf|_{T_p M} = T_p f$$

charakterisiert ist, eine  $C^{r-1}$ -Abbildung, und zwar ein  $C^{r-1}$ -Vektorraumbündel-Morphismus von  $TM$  nach  $TN$  über  $f$ .

*Beweis.* Für (a). Die  $C^\infty$ -Struktur von  $M$  sei mit  $(U_i, x_i)_{i \in I}$  bezeichnet. Dann definieren wir für alle  $i_1, i_2 \in I$  mit  $U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$  die Funktion  $\psi_{i_1, i_2} : U_{i_1} \cap U_{i_2} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^m)$  durch die Gleichung (\*). Wegen der  $C^\infty$ -Verträglichkeit der Karten  $x_{i_1}$  und  $x_{i_2}$  ist  $\psi_{i_1, i_2}$  glatt, und aus der Kettenregel ergibt sich, dass die Gesamtheit der so definierten Funktionen  $(\psi_{i_1, i_2})_{i_1, i_2 \in I}$  die Kozykel-Bedingung ( $\ddagger$ ) aus dem Satz (b) aus Abschnitt 2.7 erfüllt. Nach diesem Satz existiert daher eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $E$  und ein Vektorraumbündel  $\tilde{\pi} : E \rightarrow M$  mit typischer Faser  $\mathbb{R}^m$ , das über den  $U_i$  trivial ist – sagen wir, mit lokalen Trivialisierungen  $\tilde{\varphi}_i : U_i \times \mathbb{R}^m \rightarrow E|_{U_i}$  – und diesbezüglich die Übergangsfunktionen  $\psi_{i_1, i_2}$  besitzt.

Nun ist für jedes  $p \in M$  und  $i \in I$  mit  $p \in U_i$  die Abbildung

$$T_p M \rightarrow E_p, v \mapsto \tilde{\varphi}_i(p, \cdot) \circ \varphi_i(p, \cdot)^{-1}(v) = \tilde{\varphi}_i(p, T_p x_i(v))$$

ein Vektorraum-Isomorphismus zwischen der Faser von  $TM$  und der Faser von  $E$ , und zwar ist dieser wegen der Definition der  $\psi_{i_1, i_2}$  unabhängig von der Wahl von  $i \in I$ . Verwenden wir diese Isomorphismen, um  $TM$  und  $E$  faserweise zu identifizieren, so erhalten wir die Behauptung.

Für (b). Seien  $(U, x)$  und  $(V, y)$  Karten von  $M$  bzw. von  $N$  mit  $f(U) \subset V$ , und

$$\varphi_U : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM|_U, (p, v) \mapsto (T_p x^{-1})(v) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_V : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow TN|_V, (p, v) \mapsto (T_p y^{-1})(v)$$

die zugehörigen lokalen Trivialisierungen von  $TM$  bzw.  $TN$ . Dann wird die Abbildung  $Tf|(TM|_U) : TM|_U \rightarrow TN|_V$  „bezüglich dieser lokalen Trivialisierungen beschrieben“ durch die Abbildung

$$\tau := \varphi_V^{-1} \circ (Tf|(TM|_U)) \circ \varphi_U ,$$

das heißt

$$\tau : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow V \times \mathbb{R}^n, (p, v) \mapsto (f(p), d_{x(p)}(y \circ (f|_U) \circ x^{-1})(v)) .$$

Da  $f$  eine  $C^r$ -Abbildung und  $x$  und  $y$  sogar  $C^\infty$ -Abbildungen sind, ist  $\tau$  eine  $C^{r-1}$ -Abbildung. Da  $\varphi_U$  und  $\varphi_V$   $C^\infty$ -Diffeomorphismen sind, folgt hiermit, dass auch  $Tf$  eine  $C^{r-1}$ -Abbildung ist. Für  $p \in M$  bildet  $Tf$  definitionsgemäß  $T_p M$  durch eine lineare Transformation in  $T_{f(p)} N$  hinein ab, deshalb ist  $Tf : TM \rightarrow TN$  ein Vektorraumbündel-Morphismus über  $f$ .  $\square$

### Aufgabe.

- (a) Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann ist das Tangentialbündel  $TV$  von  $V$  trivial.
- (b) Seien  $M, N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $f : M \rightarrow N$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Dann ist  $Tf : TM \rightarrow TN$  ein Vektorbündel-Isomorphismus über  $f$ .

## 2.9 Whitney-Summe von Vektorraumbündeln; Homomorphismenbündel

Aus der Linearen Algebra sind zwei wichtige Konstruktionen bekannt, mit denen sich aus zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$  „neue“ Vektorräume konstruieren lassen. Dies ist zum einen die *direkte Summe*

$$V \oplus W := \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \}$$

(aufgefasst als Vektorraum mit der „komponentenweisen“ Addition und skalaren Multiplikation) und zum anderen der *Homomorphismenraum*

$$L(V, W) := \{ f : V \rightarrow W \mid f \text{ ist linear} \}$$

(auf die übliche Weise als Vektorraum aufgefasst).

Ist nun  $B$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $\pi : E \rightarrow B$  sowie  $\pi' : E' \rightarrow B$  zwei  $C^\infty$ -Vektorraumbündel über  $B$  (mit typischer Faser  $F$  bzw.  $F'$ ), so können wir die beiden Konstruktionen insbesondere auf die Fasern dieser Bündel anwenden. Wir erhalten so für jedes  $b \in B$  Vektorräume  $E_b \oplus E'_b$  und  $L(E_b, E'_b)$ . Mit Hilfe von Satz (b) aus Abschnitt 2.7 werden wir diese neu konstruierten Vektorräume zu Vektorraumbündeln über  $B$  mit typischer Faser  $F \oplus F'$  bzw.  $L(F, F')$  zusammenfügen.

Wir definieren dazu „Bündelräume“

$$E \oplus E' := \bigcup_{b \in B} (E_b \oplus E'_b) \quad \text{und} \quad L(E, E') := \bigcup_{b \in B} L(E_b, E'_b)$$

und die zugehörigen „Bündelprojektionen“

$$\pi \oplus \pi' : E \oplus E' \rightarrow B \quad \text{und} \quad \pi'' : L(E, E') \rightarrow B,$$

die für  $b \in B$  jeweils die Elemente von  $E_b \oplus E'_b$  bzw. von  $L(E_b, E'_b)$  auf  $b$  abbilden.

Um  $\pi \oplus \pi'$  und  $\pi''$  als Vektorraumbündel über  $B$  zu erkennen, genügt es, für diese Abbildungen lokale Trivialisierungen anzugeben, so dass die Übergangsfunktionen zwischen ihnen die Kozykel-Bedingung von Satz (b) aus Abschnitt 2.7 erfüllen. Das dort konstruierte Vektorraumbündel ist dann nämlich zu  $\pi \oplus \pi'$  bzw. zu  $\pi''$  isomorph, was man analog wie im Beweis zur Konstruktion des Tangentialbündels in Abschnitt 2.8 sieht.

Dazu: Zu jedem  $b \in B$  existiert ein  $U_b \in \mathcal{U}^o(b, B)$  und lokale Trivialisierungen  $\varphi_b : U_b \times F \rightarrow E|_{U_b}$  und  $\varphi'_b : U_b \times F' \rightarrow E'|_{U_b}$  von  $\pi$  bzw.  $\pi'$ . Dann wird durch

$$\varphi_b \oplus \varphi'_b : U_b \times (F \oplus F') \rightarrow (E \oplus E')|_{U_b}, \quad (\tilde{b}, (q, q')) \mapsto (\varphi_b(\tilde{b}, q), \varphi'_b(\tilde{b}, q'))$$

bzw. durch

$$\varphi''_b : U_b \times L(F, F') \rightarrow L(E, E')|_{U_b}, \quad (\tilde{b}, q) \mapsto \varphi'_b(\tilde{b}, \cdot) \circ q \circ \varphi_b(\tilde{b}, \cdot)^{-1}$$

eine lokale Trivialisierung von  $\pi \oplus \pi'$  bzw. von  $\pi''$  über  $U_b$  definiert. Sind  $b_1, b_2 \in B$  mit  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \neq \emptyset$ , so bezeichnen wir die Übergangsfunktion von  $\varphi_{b_1}$  zu  $\varphi_{b_2}$  bzw. die Übergangsfunktion von  $\varphi'_{b_1}$  zu  $\varphi'_{b_2}$  mit  $\psi_{b_1, b_2} : U_{b_1} \cap U_{b_2} \rightarrow \text{GL}(F)$  bzw. mit  $\psi'_{b_1, b_2} : U_{b_1} \cap U_{b_2} \rightarrow \text{GL}(F')$ . Diesbezüglich wird die Übergangsfunktion von  $\varphi_{b_1} \oplus \varphi'_{b_1}$  zu  $\varphi_{b_2} \oplus \varphi'_{b_2}$  durch

$$\psi_{b_1, b_2} \oplus \psi'_{b_1, b_2} : U_{b_1} \cap U_{b_2} \rightarrow \text{GL}(F \oplus F'), \quad \tilde{b} \mapsto (\psi_{b_1, b_2}(\tilde{b}), \psi'_{b_1, b_2}(\tilde{b}))$$



gegeben, und die Übergangsfunktion von  $\varphi''_{b_1}$  zu  $\varphi''_{b_2}$  wird durch

$$\psi''_{b_1, b_2} : U_{b_1} \cap U_{b_2} \rightarrow \text{GL}(L(F, F')), \quad \tilde{b} \mapsto (q \mapsto \psi'_{b_1, b_2}(\tilde{b}) \circ q \circ \psi_{b_1, b_2}(\tilde{b})^{-1})$$

gegeben. An diesen Darstellungen liest man ab, dass diese Übergangsfunktionen der Kozykel-Bedingung genügen. Indem man Satz (b) aus Abschnitt 2.7 in analoger Weise wie bei der Konstruktion des Tangentialbündels in Abschnitt 2.8 anwendet, sieht man daher, dass es genau eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $E \oplus E'$  bzw. auf  $L(E, E')$  gibt, so dass  $\pi \oplus \pi'$  bzw.  $\pi''$  ein Vektorraumbündel über  $B$  mit typischer Faser  $F \oplus F'$  bzw.  $L(F, F')$  wird.  $\pi \oplus \pi'$  heißt die *Whitney-Summe* oder *direkte Summe* der Vektorraumbündel  $\pi$  und  $\pi'$ .  $\pi''$  heißt das *Homomorphismenbündel* zu  $\pi$  und  $\pi'$ .

### Beispiele.

- (a) Wählt man in der Konstruktion des Homomorphismenbündels  $\pi' = \pi : E \rightarrow B$ , so erhält man das *Endomorphismenbündel*  $\text{End}(E) \rightarrow B$ . Wählt man hingegen für  $\pi'$  das triviale Vektorraumbündel  $B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so erhält man als Homomorphismenbündel das sogenannte *duale Bündel* zu  $\pi : E \rightarrow B$ , dessen Fasern  $E_b^*$  aus den Linearformen auf  $E_b$  bestehen.
- (b) Natürlich sind diese Konstruktionen insbesondere anwendbar, wenn  $\pi$  bzw.  $\pi'$  das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit  $M$  sind. Auf diese Weise erhalten wir das *Endomorphismenbündel*  $\text{End}(TM) \rightarrow M$  der Mannigfaltigkeit  $M$ , sowie das duale Bündel zum Tangentialbündel von  $M$ . Letzteres heißt das *Cotangentialbündel* von  $M$ . Es wird mit  $T^*M \rightarrow M$  bezeichnet, seine Faser über  $p \in M$  mit  $T_p^*M$ .



## Kapitel 3

# Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden Vektorfelder behandelt. Zum einen haben sie eine geometrische Deutung als Schnitte des Tangentialbündels einer Mannigfaltigkeit. Deshalb werden durch sie gewöhnliche Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung beschrieben. Ihre „Integration“ führt zu dynamischen Systemen. Zum anderen können Vektorfelder als Differentialoperatoren erster Ordnung betrachtet werden. Aus diesen Gründen ist die Theorie der Vektorfelder für das Verständnis der Analysis auf Mannigfaltigkeiten von fundamentaler Bedeutung.

### 3.1 Vektorfelder

Es seien  $M$  und  $N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung.

**Definition.** Ein *Vektorfeld* von  $N$  längs  $f$  ist ein Schnitt des Tangentialbündels  $\pi : TN \rightarrow N$  längs  $f$ , also eine  $C^\infty$ -Abbildung  $X : M \rightarrow TN$  mit  $\pi \circ X = f$ .

$$\begin{array}{ccc} & & TN \\ & \nearrow X & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Anstelle von  $X(p)$  schreiben wir häufig  $X_p$ . Die Menge dieser Vektorfelder bezeichnen wir mit  $\mathfrak{X}_f(N)$ .

**Die wichtigsten Spezialfälle.** Wir kürzen ab  $\mathfrak{X}(N) := \mathfrak{X}_{\text{id}_N}(N)$ . Ist  $U$  eine offene Teilmenge von  $N$ , so ist  $\mathfrak{X}(U) = \mathfrak{X}_{U \hookrightarrow N}(N)$ . Ist hingegen  $M$  eine niederdimensionale Untermannigfaltigkeit von  $N$ , so ist  $\mathfrak{X}(M) \subsetneq \mathfrak{X}_{M \hookrightarrow N}(N)$ .

**Die  $C^\infty(M)$ -Modul-Struktur von  $\mathfrak{X}_f(N)$ .** Es seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$  und  $\varphi \in C^\infty(M)$ . Da für jedes  $p \in M$  die Vektoren  $X_p$  und  $Y_p$  Elemente des Vektorraumes  $T_{f(p)}N$  sind, können wir

$$(X + Y)_p := X_p + Y_p \quad \text{und} \quad (\varphi X)_p := \varphi(p) \cdot X_p$$

definieren, und erhalten hierdurch (differenzierbare) Vektorfelder längs  $f$

$$X + Y \quad \text{und} \quad \varphi X : M \rightarrow TN.$$

Auf diese Weise hat man in  $\mathfrak{X}_f(N)$  eine Addition und eine Multiplikation mit Funktionen aus  $C^\infty(M)$  definiert, wodurch  $\mathfrak{X}_f(N)$  zu einem  $C^\infty(M)$ -Modul wird, d.h.: für die beiden Operationen gelten die Vektorraum-Axiome, wobei der „Skalarbereich“  $C^\infty(M)$  allerdings nur ein Ring mit Eins (und kein Körper) ist. Insbesondere wird  $\mathfrak{X}_f(N)$  hierdurch zu einem (unendlich-dimensionalen)  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**Vektorfelder auf Produktmannigfaltigkeiten.** Es seien  $M$ ,  $N$  und  $L$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten,  $f : L \rightarrow M$  und  $g : L \rightarrow N$   $C^\infty$ -Abbildungen,  $P : M \times N \rightarrow M$  und  $Q : M \times N \rightarrow N$  die kanonischen Projektionen und  $h := (f, g) : L \rightarrow M \times N$ . In dieser Situation ergibt sich aus Abschnitt 2.3: Zu jedem Paar  $(Y, Z)$  von Vektorfeldern  $Y \in \mathfrak{X}_f(M)$  und  $Z \in \mathfrak{X}_g(N)$  existiert genau ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}_h(M \times N)$  mit  $P_*X = Y$  und  $Q_*X = Z$ ; und jedes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}_h(M \times N)$  erhält man auf diese Weise.

### Beispiele.

- (a) Ist  $\alpha : J \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Kurve, so ist  $\dot{\alpha} \in \mathfrak{X}_\alpha(N)$ .
- (b) Ist  $(U, x)$  eine  $C^\infty$ -Karte von  $N$ , so ist für  $i = 1, \dots, n := \dim N$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \rightarrow TN, \quad p \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p := (T_p x)^{-1}(e_i)$$

ein Element von  $\mathfrak{X}(U)$ , und für  $p \in U$  ist  $(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p)$  jeweils eine Basis von  $T_p N$ .  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  heißt *Gaußsches Basisfeld* (von  $TN$ ) zur Karte  $(U, x)$ .

*Warnung.* Das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  hängt von der gesamten Karte  $x = (x_1, \dots, x_n)$  (und nicht etwa bloß von ihrer  $i$ -ten Komponente  $x_i$ ) ab, obwohl dies aus dieser Notation nicht explizit deutlich wird.

Für  $p \in U$ ,  $v \in T_p N$  gilt

$$v = \sum_{i=1}^n T_p x_i(v) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Daher gilt: Eine Abbildung  $X : M \rightarrow TN$  mit  $\pi \circ X = f$  ist genau dann ein Vektorfeld von  $N$  längs  $f$ , wenn für jede  $C^\infty$ -Karte  $(U, x)$  von  $N$  die Funktionen  $f^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto T_{f(p)} x_i(X_p)$  ( $i = 1, \dots, n$ )  $C^\infty$ -differenzierbar sind.

Ist  $N = V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, so wird durch die Fixierung einer Basis  $(b_1, \dots, b_n)$  bekanntlich eine globale Karte  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sum_i c_i \cdot b_i \mapsto (c_1, \dots, c_n)$  von  $V$  definiert. Die Elemente des hierdurch bestimmten Gaußschen Basisfelds bezeichnet man auch mit  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Speziell für  $V = \mathbb{R}$  und  $b_1 = 1$  setzt man auch  $\partial := \partial_1$ .

- (c) Sind  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ , so sind

$$Y \circ f \quad \text{und} \quad f_* X := (Tf) \circ X : M \rightarrow TN, \quad p \mapsto T_p f(X_p)$$

Vektorfelder längs  $f$ . Falls  $f_* X = Y \circ f$  ist, so sagt man, dass  $X$  und  $Y$  *f-verbunden* sind.

- (d) Ist  $V$  ein Vektorraum, so hatten wir in Abschnitt 2.2 für  $p \in V$  den Tangentialraum  $T_p V$  mit  $V$  mittels eines Isomorphismus  $\Phi_p : T_p V \rightarrow V$  identifiziert. In dieser Situation ist

$$\varphi : V \times V \rightarrow TV, (p, v) \mapsto \Phi_p^{-1}(v)$$

eine globale Trivialisierung des Tangentialbündels  $\pi : TV \rightarrow V$  und daher gilt:

Ist  $f : M \rightarrow V$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, so ist eine Abbildung  $X : M \rightarrow TV$  genau dann ein Vektorfeld längs  $f$ , wenn  $\pi \circ X = f$  ist und die Funktion

$$\vec{X} : M \rightarrow V, p \mapsto \Phi_p(X_p)$$

$C^\infty$ -differenzierbar ist. Weiterhin gilt: Ist  $\xi : M \rightarrow V$  eine  $C^\infty$ -Funktion, so existiert genau ein Vektorfeld  $X$  längs  $f$  mit  $\vec{X} = \xi$ .

Durch diese Aussage wird die Verbindung zwischen der Theorie von Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten und dem Vektorfeldbegriff der Analysis und der „Kurven und Flächen“ hergestellt, wo wir die Funktion  $\vec{X}$  als Vektorfeld bezeichnet hatten.

- (e) Es sei  $M$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ ,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $f : M \rightarrow V$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Für jedes  $i = 1, \dots, m$  ist

$$f_* \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}_f(V) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \overrightarrow{f_* \frac{\partial}{\partial x_i}} : M \rightarrow V,$$

dabei bezeichnet in der rechten Gleichung  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  die partielle Ableitung von  $f$  nach der  $i$ -ten Komponente im Sinne der Analysis II. Dieser Zusammenhang ist der Hintergrund für die Bezeichnung  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  für die Elemente der Gaußschen Basisfelder.

Die folgende Definition und Aussage zeigt, dass die Vektorfelder auf  $N$  in ein-eindeutiger Beziehung zu den Derivationen, das heißt, zu den *linearen Differentialoperatoren erster Ordnung* auf  $N$  stehen. Zum Begriff der Derivation siehe auch den Abschnitt 2.4, wo wir die entsprechende Betrachtung punktweise durchgeführt haben.

**Definition 2.** Eine *Derivation* auf  $C^\infty(N)$  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $D : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(N)$ , die zusätzlich die *Leibnizregel* erfüllt:

$$\forall f, g \in C^\infty(N) : D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g).$$

Den Vektorraum der Derivationen von  $N$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{D}(N)$ .

**Aussage.**

- (a) Sei  $X \in \mathfrak{X}(N)$ . Dann ist

$$D^X : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(N), f \mapsto X \cdot f := (p \mapsto T_p f(X_p))$$

eine Derivation auf  $C^\infty(N)$ .

- (b) Die Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{D}(N), X \mapsto D^X$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

*Beweis.* Für (a). Sei  $X \in \mathfrak{X}(N)$ . Dann ist die Abbildung  $D^X : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(N)$  offenbar  $\mathbb{R}$ -linear, und es gilt für  $f, g \in C^\infty(N)$  und  $p \in N$

$$D^X(f \cdot g)(p) = T_p(f \cdot g)(X_p) = T_p f(X_p) \cdot g(p) + f(p) \cdot T_p g(X_p) = D^X(f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot D^X(g)(p)$$

und somit  $D^X \in \mathfrak{D}(N)$ .

Für (b). Die Abbildung  $\Phi$  ist offenbar linear. Zum Beweis der Bijektivität von  $\Phi$  nutzen wir die Bezeichnungen und Erkenntnisse des Abschnitts 2.4. Insbesondere ist für  $D \in \mathfrak{D}(N)$  und  $p \in N$  die Abbildung  $C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto D(f)(p)$  jeweils eine Derivation von  $C^\infty(N)$  an der Stelle  $p$ , und nach dem Satz aus jenem Abschnitt ist die Abbildung  $\Phi_p : T_p M \rightarrow \mathfrak{D}_p(M)$ ,  $v \mapsto D^v := (f \mapsto T_p f(v))$  jeweils ein Vektorraum-Isomorphismus.

Zur Injektivität von  $\Phi$ : Es sei  $X \in \mathfrak{X}(N)$  mit  $\Phi(X) = 0$  gegeben. Für jedes  $p \in N$  ist dann  $0 = \Phi(X)(p) = \Phi_p(X_p)$  und somit wegen der Injektivität von  $\Phi_p : X_p = 0$ . Also ist  $X = 0$ .

Zur Surjektivität von  $\Phi$ : Es sei  $D \in \mathfrak{D}(N)$  gegeben. Dann ist für  $p \in N$  jeweils  $D_p : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto D(f)(p)$  eine Derivation an der Stelle  $p$ , und daher existiert wegen der Surjektivität von  $\Phi_p$  ein Vektor  $X_p \in T_p N$  mit  $\Phi_p(X_p) = D_p$ . Hierdurch wird eine Abbildung  $X : N \rightarrow TN$  definiert. Um den Beweis abzuschließen, dass  $X$  ein Vektorfeld ist und  $\Phi(X) = D$  gilt, verbleibt nur noch zu zeigen, dass die Abbildung  $X$   $C^\infty$ -differenzierbar ist.

Dazu sei  $(U, x)$  eine beliebige  $C^\infty$ -Karte von  $N$ . Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  ist dann die Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto T_p x_i(X_p) = (\Phi_p(X_p))(x_i) = D_p(x_i) = D(x_i)(p)$   $C^\infty$ -differenzierbar. Mit dem Kriterium aus dem obigen Beispiel (b) folgt hieraus, dass  $X$   $C^\infty$ -differenzierbar ist.  $\square$

### 3.2 Integralkurven und ihre lokale Existenz

Es sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definition.** Eine  $C^\infty$ -Kurve  $\alpha : J \rightarrow M$ , definiert auf einem offenen Intervall  $J \subset \mathbb{R}$ , heißt eine *Integralkurve* von  $X$ , wenn gilt:

$$\dot{\alpha} = X \circ \alpha.$$

**Beispiel.** Sei  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Karte von  $M$  und  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})$  das zugehörige Gaußsche Basisfeld. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $] - \varepsilon, \varepsilon[^m \subset x(U)$ , und für  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $q = (q_1, \dots, q_m) \in ] - \varepsilon, \varepsilon[^m$  mit  $q_i = 0$  ist die *Parameterlinie*

$$\alpha : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M, t \mapsto x^{-1}(q + te_i)$$

eine Integralkurve von  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

**Beobachtung. Invarianz von Integralkurven gegenüber Zeitverschiebung.** Ist  $\alpha : J \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $X$  und  $s \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $\beta : -s + J \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \alpha(t + s)$  eine Integralkurve von  $X$ .

*Beweis.*  $\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}(t + s) = X_{\alpha(t+s)} = X_{\beta(t)}$ .  $\square$

**Satz (von Picard/Lindelöf über die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven).** Es gilt:

- (a) **Lokale Existenz von Integralkurven.** Zu jedem Paar  $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times M$  existiert ein  $\varepsilon > 0$  und eine Integralkurve

$$\alpha : ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \rightarrow M$$

von  $X$  mit  $\alpha(t_0) = p_0$ .

- (b) **Eindeutigkeit von Integralkurven.** Sind  $\alpha : J \rightarrow M$  und  $\beta : I \rightarrow M$  zwei Integralkurven von  $X$  mit  $J \cap I \neq \emptyset$  und gibt es ein  $t_0 \in J \cap I$  mit  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ , so stimmen  $\alpha$  und  $\beta$  auf  $J \cap I$  überein.

- (c) **Differenzierbare Abhängigkeit der Integralkurven.** Zu jedem Paar  $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times M$  existiert ein  $\varepsilon > 0$ , eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}^o(p_0, M)$  und eine  $C^\infty$ -differenzierbare Funktion  $\Phi : ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times U \rightarrow M$ , so dass für  $p \in U$  jeweils  $\alpha_p : ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \Phi(t, p)$  eine Integralkurve von  $X$  mit  $\alpha_p(t_0) = p$  ist.

*Beweis.* Wir übertragen die Situation zunächst in den  $\mathbb{R}^m$  (dadurch geht die obige Formulierung des Satzes von Picard/Lindelöf in die in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen geläufige Formulierung über).

Dazu sei  $(U, x)$  eine Karte von  $M$  und  $G := x(U) \subset \mathbb{R}^m$ . Damit definieren wir

$$Y := x_*(X|U) \circ x^{-1} \in \mathfrak{X}(G) \quad \text{und} \quad f := \vec{Y} : G \rightarrow \mathbb{R}^m ;$$

siehe die Beispiele (c),(d) in Abschnitt 3.1. Ist dann  $p_0 \in U$  und  $\alpha : J \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\alpha(t_0) = p_0$  (wobei  $J$  ein offenes Intervall und  $t_0 \in J$  ist), so existiert ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , so dass  $I := ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \subset J$  und  $\alpha(I) \subset U$  ist. Für die „Funktion“  $x \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt dann

$$(x \circ \alpha)(I) \subset G \quad \text{und} \\ \forall t \in I : ((x \circ \alpha)'(t) = d_{\alpha(t)}x(\dot{\alpha}(t)) \quad \& \quad f((x \circ \alpha)(t)) = d_{\alpha(t)}x(X_{\alpha(t)}))$$

Daraus folgt:

$\alpha|I$  ist genau dann eine Integralkurve von  $X$  mit  $\alpha(t_0) = p_0$ , wenn die Funktion  $x \circ \alpha$  eine Lösung des Differentialgleichungs-Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = x(p_0) =: y_0 \tag{*}$$

ist.

Die Bestimmung von Integralkurven ist somit lokal zum Lösen einer (autonomen) gewöhnlichen Differentialgleichung äquivalent. Daher haben wir die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu (\*) zu beliebigen Anfangsdaten zu beweisen. Dies ist ein aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen wohlbekanntes Theorem (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard/Lindelöf für gewöhnliche Differentialgleichungen), weswegen wir uns hier mit einer Beweisskizze, die zudem auf die hier vorliegende Situation einer autonomen Differentialgleichung zugeschnitten ist, begnügen:

Da die Abbildung  $f$  in unserer Situation stetig differenzierbar ist, ist sie insbesondere lokal Lipschitz-stetig. Indem wir das Definitionsgebiet von  $G$  nötigenfalls verkleinern, dürfen wir daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $f$  Lipschitz-stetig ist. Das bedeutet: es existiert eine *Lipschitz-Konstante*  $L > 0$ , so dass

$$\forall u_1, u_2 \in G : \|f(u_1) - f(u_2)\| \leq L \cdot \|u_1 - u_2\|$$

gilt. Weiter können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $t_0 = 0$  und  $G = U_{2\delta}(0) \subset \mathbb{R}^m$  mit einem  $\delta > 0$  ist. Dann gilt auch

$$\forall u \in G : \|f(u)\| \leq \|f(0)\| + 2L\delta . \quad (\dagger)$$

Wir schreiben nun die Differentialgleichung (\*) in eine Fixpunktgleichung um, auf die wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden, um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Dazu betrachten wir für einen kompakten Hausdorffraum  $K$  und eine abgeschlossene Teilmenge  $Y$  eines normierten Raums den Raum  $C(K, Y)$  der stetigen Abbildungen  $K \rightarrow Y$  als metrischen Raum mit der Maximumsnorm  $\|f\|_\infty := \max_{x \in K} \|f(x)\|$ . Man kann zeigen, dass  $C(K, Y)$  vollständig ist, sofern  $Y$  vollständig ist.

Wir betrachten die stetige Abbildung

$$F : C([- \delta, \delta], \overline{U_\delta(0)}) \rightarrow C([- \delta, \delta], \mathbb{R}^n), \quad y \mapsto (t \mapsto y_0 + \int_0^t f(y(s)) ds) .$$

Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist  $y$  genau dann eine Lösung von (\*), wenn  $F(y) = y$  gilt. Ist  $0 < \varepsilon \leq \delta$  mit  $\varepsilon \cdot (\|f(0)\| + 2L\delta) \leq \delta$ , so ergibt sich wegen des Schrankensatzes aus ( $\dagger$ ), dass  $F$  den Raum  $C([- \varepsilon, \varepsilon], \overline{U_\delta(0)})$  auf sich selbst abbildet, und für  $y_1, y_2 \in C([- \varepsilon, \varepsilon], \overline{U_\delta(0)})$  gilt

$$\|F(y_1) - F(y_2)\|_\infty \leq \varepsilon \cdot L \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty .$$

Wählen wir

$$\varepsilon := \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{\|f(0)\| + 2L\delta}, \frac{1}{2L} \right\} ,$$

so ist daher  $F : C([- \varepsilon, \varepsilon], \overline{U_\delta(0)}) \rightarrow C([- \varepsilon, \varepsilon], \overline{U_\delta(0)})$  eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum  $C([- \varepsilon, \varepsilon], \overline{U_\delta(0)})$ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt daher  $F$  genau einen Fixpunkt  $y \in C([- \varepsilon, \varepsilon], \overline{U_\delta(0)})$ . Nach dem zuvor gesagten ist dann  $y$  auch eine Lösung der Differentialgleichung (\*), und aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes von  $F$  folgt auch die lokale Eindeutigkeit der Lösung von (\*).

Teil (c) des Satzes folgt durch entsprechende Übertragung aus dem Satz aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen über die differenzierbare Abhängigkeit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung von einem Parameter.  $\square$

### 3.3 Topologie: $\omega$ -Grenzpunkte und $\alpha$ -Grenzpunkte eines Weges

Es sei  $M$  ein topologischer Hausdorffraum,  $J$  ein nichtleeres offenes Intervall von  $\mathbb{R}$ ,  $\delta_- := \inf J$ ,  $\delta_+ := \sup J$  und  $c : J \rightarrow M$  ein Weg. Dann definieren wir die Menge der  $\alpha$ - und  $\omega$ -Grenzpunkte von  $c$  durch



$$\alpha_c := \bigcap_{t \in J} \overline{c([\delta_-, t])} \quad \text{und} \quad \omega_c := \bigcap_{t \in J} \overline{c([t, \delta_+])}$$

Offenbar stehen die Buchstaben  $\alpha$  und  $\omega$  für „Anfang“ und „Ende“.

**Aufgabe.** In der beschriebenen Situation setzen wir voraus, dass  $M$  lokal-kompakt ist und dem *ersten Abzählbarkeitsaxiom* genügt. Letzteres bedeutet: Zu jedem Punkt  $p \in M$  existiert eine Folge  $(U_n)_{n=1,2,\dots}$  von Umgebungen  $U_n \in \mathcal{U}^o(p, M)$ , so dass zu jedem  $U \in \mathcal{U}^o(p, M)$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $U_n \subset U$  existiert. Man kann dann jeweils  $U_{n+1} \subset U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  voraussetzen.

- (a) Für jedes  $p \in M$  gilt:  $p \in \omega_c \iff$  es existiert eine Folge  $(t_n)$  in  $J$  mit  $t_n \rightarrow \delta_+$ , so dass  $p = \lim c(t_n)$  ist. (Eine analoge Aussage gilt natürlich für  $\alpha_c$ .)
- (b)  $\alpha_c$  und  $\omega_c$  sind abgeschlossen.
- (c) Die folgenden Aussagen sind zueinander äquivalent:
- (i)  $\omega_c = \emptyset$
  - (ii)  $c$  läuft mit  $t \rightarrow \delta_+$  gegen den Rand von  $M$ , das soll heißen: Jede kompakte Teilmenge  $K \subset M$  wird schließlich endgültig von  $c$  verlassen, und das wiederum soll heißen: Es existiert ein  $t_K \in J$ , so dass

$$\forall t \in J : (t > t_K \Rightarrow c(t) \notin K) ;$$

mit anderen Worten:  $\sup c^{-1}(K) < \delta_+$ .

Eine analoge Aussage gilt natürlich für  $\alpha_c$ .

- (d) Ist  $c(J)$  in  $M$  relativ kompakt, so sind  $\alpha_c$  und  $\omega_c$  nicht leer.

**Bemerkung.** In der Situation der Aufgabe kann man auch zeigen: Ist  $M$  kompakt, so sind  $\alpha_c$  und  $\omega_c$  zusammenhängend.

### 3.4 Integration von Vektorfeldern

Es sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Theorem. (Globale Integration von Vektorfeldern.)**

- (a) **Existenz maximaler Integralkurven.** Zu jedem Paar  $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times M$  existiert eine Integralkurve  $\alpha : J \rightarrow M$  von  $X$  mit  $\alpha(t_0) = p_0$ , die in folgendem Sinn maximal und eindeutig ist: Ist  $\tilde{\alpha} : \tilde{J} \rightarrow M$  irgendeine Integralkurve von  $X$  mit  $\tilde{\alpha}(t_0) = p_0$ , so ist  $\tilde{J} \subset J$  und  $\tilde{\alpha} = \alpha|_{\tilde{J}}$ . Diese Integralkurve  $\alpha$  heißt die *maximale Integralkurve* von  $X$  zum Anfangswert  $(t_0, p_0)$ . Mit  $\alpha_p := \alpha_p^X : J_p \rightarrow M$  bezeichnen wir jeweils die maximale Integralkurve zum Anfangswert  $(0, p)$ .

- (b) **Invarianz von Integralkurven gegenüber Zeitverschiebung.** Ist  $\alpha : J \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $X$  und  $s \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $\beta : -s + J \rightarrow M, t \mapsto \alpha(t + s)$  eine Integralkurve von  $X$ .
- (c) **Randverhalten maximaler Integralkurven.** Ist  $\alpha : J \rightarrow M$  eine maximale Integralkurve und  $\sup J < \infty$ , so ist die Menge der  $\omega$ -Grenzpunkte von  $\alpha$  leer, siehe Abschnitt 3.3, insbesondere Teil (c) der dortigen Aufgabe. Im Falle  $\inf J > -\infty$  ist die Menge der  $\alpha$ -Grenzpunkte von  $\alpha$  leer.

**Folgerung.** Ist das Bild  $\alpha(J)$  einer maximalen Integralkurve in  $M$  relativ kompakt, so ist  $J = \mathbb{R}$ .

- (d) **Der maximale Fluß von  $X$ .** Die Menge

$$W := W^X := \bigcup_{p \in M} (J_p \times \{p\})$$

ist eine offene Umgebung von  $\{0\} \times M$  in  $\mathbb{R} \times M$ ; und der *maximale Fluß*

$$\Phi := \Phi^X : W \rightarrow M, (t, p) \mapsto \alpha_p(t)$$

ist eine  $C^\infty$ -Abbildung. (Im Sinne der bisherigen Terminologie ist  $\Phi^p := \Phi(\cdot, p) = \alpha_p$ .)

- (e) **Die von  $X$  erzeugte „lokale“ 1-Parametergruppe.** Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  sei  $W_t$  die offene Menge

$$W_t := \{p \in M \mid (t, p) \in W\}.$$

Ist  $W_t \neq \emptyset$ , so ist auch  $W_{-t} \neq \emptyset$  und die  $C^\infty$ -Abbildung

$$\Phi_t := \Phi_t^X : W_t \rightarrow M, p \mapsto \Phi(t, p)$$

ist ein Diffeomorphismus „auf“  $W_{-t}$ . Es ist  $W_0 = M$  und  $\Phi_0 = \text{id}_M$ . Weiterhin gilt:

- (i) ( $0 \leq t < s \Rightarrow W_s \subset W_t$ ) und  $M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} W_t$   
(ii) Für alle  $t, s \in \mathbb{R}$  und  $p \in W_s$  gilt ( $\Phi_s(p) \in W_t \iff p \in W_{t+s}$ ) und im Falle der Gültigkeit einer der Aussagen in dieser Äquivalenz

$$\Phi_t \circ \Phi_s(p) = \Phi_{t+s}(p).$$

Man beachte auch: Für  $t, s \in \mathbb{R}_+$  ist  $W_{t+s}$  auch der Definitionsbereich von  $\Phi_t \circ \Phi_s$ .

Die Familie  $(\Phi_t^X)_{t \in \mathbb{R}}$  heißt auch das von  $X$  erzeugte *dynamische System*.

*Beweis.* Zu (a). Zu vorgegebenem  $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times M$  definieren wir

$$\Sigma(t_0, p_0) := \left\{ \beta : J_\beta \rightarrow M \mid \begin{array}{l} J_\beta \subset \mathbb{R} \text{ ist ein offenes Intervall mit } t_0 \in J_\beta \text{ und} \\ \beta \text{ ist eine Integralkurve von } X \text{ mit } \beta(t_0) = p_0 \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Wegen des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes (Satz (a) aus Abschnitt 3.2) ist  $\Sigma(t_0, p_0) \neq \emptyset$ . Sind  $\beta, \gamma \in \Sigma(t_0, p_0)$ , so ist  $J_\beta \cap J_\gamma$  ein offenes Intervall, welches  $t_0$  enthält, und es gilt  $\beta|(J_\beta \cap J_\gamma) = \gamma|(J_\beta \cap J_\gamma)$  (weil nämlich  $A := \{t \in J_\beta \cap J_\gamma \mid \beta(t) = \gamma(t)\}$  eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge von  $J_\beta \cap J_\gamma$  ist, die wegen Eindeutigkeitsaussage im Satz aus Abschnitt 3.2 auch offen ist; daher folgt aus dem Zusammenhang von  $J_\beta \cap J_\gamma$ , dass  $A$  dieses ganze Intervall ist). Aufgrund dessen können wir nun die fragliche maximale Integralkurve  $\alpha : J \rightarrow M$  durch

$$J := \bigcup_{\beta \in \Sigma(t_0, p_0)} J_\beta \quad \text{und} \quad \forall \beta \in \Sigma(t_0, p_0) : \alpha|_{J_\beta} = \beta$$

definieren. Man beachte, dass wir mit  $\alpha$  „das“ maximale Element der Menge  $\Sigma(t_0, p_0)$  konstruiert haben.

Zu (b). Siehe die Beobachtung in Abschnitt 3.2.

Durch Kombination der Aussagen (a) und (b) erhalten wir

$$\boxed{\text{Ist } p \in M, s \in J_p \text{ (vgl. (a)) und } q := \alpha_p(s), \text{ so ist } J_q = -s + J_p \text{ und } \forall t \in J_q : \alpha_q(t) = \alpha_p(t + s).} \quad (2)$$

Denn es ist zunächst  $-s + J_p \subset J_q$  und  $\forall t \in -s + J_p : \alpha_q(t) = \alpha_p(t + s)$ . Wegen  $0 \in J_p$  ist daher  $-s \in J_q$  und somit umgekehrt  $s + J_q \subset J_p$ , also  $J_q \subset -s + J_p$ . Damit gilt tatsächlich  $J_q = -s + J_p$ .

Vorbereitung für (c) und (d).  $W$  und  $\Phi$  seien wie in (d) definiert. Daneben führen wir jetzt

$$W^\infty := \left\{ (t, p) \in W \left| \begin{array}{l} \text{Es existieren } U \in \mathcal{U}^o(p, M) \text{ und } \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \text{ so dass} \\ ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \times U \subset W \text{ und } \Phi|_{(]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \times U)} \\ \text{C}^\infty\text{-differenzierbar ist} \end{array} \right. \right\} \quad (3)$$

ein und beweisen

$$W^\infty \text{ ist eine offene Umgebung von } \{0\} \times M \text{ und } \Phi|_{W^\infty} \text{ ist } \text{C}^\infty\text{-differenzierbar.} \quad (4)$$

Aufgrund der Definition von  $W^\infty$  ist es klar, dass  $W^\infty$  offen und  $\Phi|_{W^\infty}$   $\text{C}^\infty$ -differenzierbar ist. Es bleibt daher

$$\{0\} \times M \subset W^\infty \quad (5)$$

zu zeigen, und dies folgt aus Teil (c) des Satzes aus Abschnitt 3.2.

Zu (c). Ist  $p \in M$ ,  $\delta := \sup J_p < \infty$  und  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $M$ , so existiert nach dem „Tubenlemma“ ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , so dass  $] -\varepsilon, \varepsilon[ \times K \subset W^\infty \subset W$  ist. Wir zeigen nun

$$\forall t \in J_p : (t > \delta - \varepsilon \implies \alpha_p(t) \notin K); \quad (6)$$

womit aufgrund des Teiles (c) der Aufgabe aus Abschnitt 9.3 die  $\omega$ -Grenzpunktmenge von  $\alpha_p$  leer ist.

*Annahme.* Die Aussage (6) ist nicht wahr. Dann existiert ein  $s \in J_p$  mit  $\delta - \varepsilon < s$  und  $q := \alpha_p(s) \in K$ . Es ist  $] -\varepsilon, \varepsilon[ \times \{q\} \subset W$ , also  $] -\varepsilon, \varepsilon[ \subset J_q = -s + J_p$  wegen (2); daher ist  $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[ \subset J_p$ . Nun ist aber  $\delta - \varepsilon < s < \delta$ , also sicherlich  $\delta \in ]s, s + \varepsilon[ \subset J_p$ , was der Definition von  $\delta$  widerspricht.

Die Aussage über die  $\alpha$ -Grenzpunktmenge beweist man analog.

Die mengentheoretischen Eigenschaften von (e). Die Teilmengen  $W_t \subset M$  und die Abbildungen  $\Phi_t : W_t \rightarrow M$  seien so wie angegeben definiert. Wir rufen noch einmal in das Gedächtnis zurück:

$$t \in J_p \iff (t, p) \in W \iff p \in W_t \text{ und } \alpha_p(t) = \Phi(t, p) = \Phi_t(p).$$

Wegen  $\{0\} \times M \subset W$  ist  $W_0 = M$ , und wegen  $\alpha_p(0) = p$  ist  $\Phi_0 = \text{id}_M$ .

Zu (i): Ist  $0 \leq t < s$  und  $p \in W_s$ , so sind  $0, s \in J_p$ , also auch  $t \in J_p$ , d.h.  $p \in W_t$ . Weiterhin existiert zu jedem  $p \in M$  ein  $t \in J_p \cap \mathbb{R}_+$ , weswegen  $p \in W_t$  ist.

Zu (ii): Es seien  $t, s \in \mathbb{R}$  und  $p \in W_s$ . Dann folgt wegen (2) für  $q := \Phi_s(p)$ :

$$q \in W_t \iff t \in J_q = -s + J_p \iff t + s \in J_p \iff p \in W_{t+s}.$$

Und ist  $q \in W_t$ , d.h.  $t \in J_q$ , so gilt

$$\Phi_t \circ \Phi_s(p) = \Phi_t(q) = \alpha_q(t) = \alpha_p(t + s) = \Phi_{t+s}(p).$$

Schließlich zeigen wir: Ist  $W_t \neq \emptyset$ , so ist  $\Phi_t$  eine Bijektion  $W_t \rightarrow W_{-t}$ . Dazu wenden wir das Vorangegangene auf  $s := -t$  an. Da  $W_{-t} \subset M = W_0$  ist, gilt für jedes  $p \in W_{-t}$ :

$$\Phi_{-t}(p) \in W_t \quad \text{und} \quad \Phi_t \circ \Phi_{-t}(p) = \Phi_0(p) = p.$$

Also haben wir  $\Phi_{-t}(W_{-t}) \subset W_t$  und  $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \text{id}_{W_{-t}}$ . Durch Rollentausch der Parameter  $t$  und  $-t$  erhalten wir auch  $\Phi_t(W_t) \subset W_{-t}$  und  $\Phi_{-t} \circ \Phi_t = \text{id}_{W_t}$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

Die einzige Aussage aus (e), die noch nicht bewiesen ist, ist die, dass  $\Phi_t$  jeweils ein Diffeomorphismus ist. Dies ist aber nach dem Vorhergehenden bewiesen, wenn wir gezeigt haben werden, dass  $\Phi$  eine  $C^\infty$ -Abbildung ist. Dazu kommen wir jetzt:

Zu (d). Wegen (4) ist  $W = W^\infty$  zu zeigen. Sei  $p_0 \in M$  vorgegeben. Wir setzen

$$B := \{t \in J_{p_0} \cap \mathbb{R}_+ \mid (t, p_0) \notin W^\infty\}.$$

*Annahme.*  $B \neq \emptyset$ .

Dann setzen wir  $\tau := \inf B$ . Wegen (4) ist  $\tau > 0$ . Weiterhin existiert nach (4) ein  $U \in \mathcal{U}^o(\alpha_{p_0}(\tau), M)$  und ein  $\varepsilon \in ]0, \tau[$ , so dass

$$]-2\varepsilon, 2\varepsilon[ \times U \subset W^\infty \tag{7}$$

ist. Dann wählen wir ein  $s \in \mathbb{R}_+$  mit

$$\tau - \varepsilon < s < \tau \quad \text{und} \quad \alpha_{p_0}(s) \in U. \tag{8}$$

Es ist  $s \notin B$  und somit  $(s, p_0) \in W^\infty$ . Nach (4) existiert daher ein  $V \in \mathcal{U}^o(p_0, M)$  mit  $\{s\} \times V \subset W^\infty$ . Also ist dann wegen (3) insbesondere

$$V \subset W_s \quad \text{und} \quad \Phi_s|_V \text{ } C^\infty\text{-differenzierbar.} \tag{9}$$

☐ dürfen wir

$$\Phi_s(V) \subset U \tag{10}$$

voraussetzen. Ist dann  $(t, p) \in ]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[ \times V$ , so folgt  $|t - s| \leq |t - \tau| + |\tau - s| < 2\varepsilon$  wegen (8) und  $\Phi_s(p) \in U$  wegen (10). Wegen (7) ist daher  $(t - s, \Phi_s(p)) \in W$ , also  $\Phi_s(p) \in W_{t-s}$ . Andererseits ist  $p \in W_s$  nach (9). Somit gilt nach (e)(ii)  $p \in W_t$  und  $\Phi_{t-s} \circ \Phi_s(p) = \Phi_t(p)$ . Also haben wir

$$]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[ \times V \subset W$$

und

$$\forall (t, p) \in ]\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[ \times V : \Phi(t, p) = \Phi\left(\underbrace{t - s}_{\in ]-2\varepsilon, 2\varepsilon[}, \underbrace{\Phi_s(p)}_{\in U}\right).$$

Wegen (9) und (7) ist daher  $\Phi$  auf  $] \tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[ \times V$   $C^\infty$ -differenzierbar und somit  $] \tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[ \times V \subset W^\infty$  wegen (3), also insbesondere  $] \tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon[ \cap B = \emptyset$ . Das ist ein Widerspruch zur Konstruktion von  $\tau$ . Damit ist  $B = \emptyset$  bewiesen, d.h.  $(J_{p_0} \cap \mathbb{R}_+) \times \{p_0\} \subset W^\infty$ .

Entsprechend folgt  $(J_{p_0} \cap (-\mathbb{R}_+)) \times \{p_0\} \subset W^\infty$ . Da nach (4) auch  $(0, p_0) \in W^\infty$  ist, gilt sogar  $J_{p_0} \times \{p_0\} \subset W^\infty$ .

Variieren wir jetzt  $p_0$ , so erhalten wir  $W \subset W^\infty$ , also die Behauptung.  $\square$

**Beobachtung.** Für jedes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und jedes  $s \in \mathbb{R}$  gilt  $\Phi_{s^*}^X \circ X|_{W_s^X} = X \circ \Phi_s^X$ .

**Bemerkung.** Die Integrationstheorie von Vektorfeldern – erweitert durch Abschnitt 3.7 – ist exakt die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung auf Mannigfaltigkeiten. Somit gehören obige Resultate zu den fundamentalen Aussagen der gesamten Mathematik.

**Aufgabe 1. Über einzelne maximale Integralkurven.** Es sei  $\alpha : J \rightarrow M$  eine maximale Integralkurve von  $X$ .

- (a) Entweder ist  $\alpha \equiv \text{const.} = p$ , und zwar gilt dies genau dann, wenn  $X_p = 0$  ist; in diesem Fall ist  $J = \mathbb{R}$  (man sagt dann, dass  $p$  eine *Gleichgewichtslage* des dynamischen Systems  $(\Phi_t^X)_{t \in \mathbb{R}}$  ist);

oder  $\alpha$  ist reguläre Kurve (also eine Immersion); dann ist  $\alpha$  entweder injektiv oder periodisch; letzteres heißt:  $J = \mathbb{R}$  und es existiert  $d \in \mathbb{R}_+$ , so dass

$$(\forall t \in \mathbb{R} : \alpha(t + d) = \alpha(t)) \quad \text{und} \quad \alpha|_{[0, d[} \text{ ist injektiv;}$$

$d$  heißt die Periode der Integralkurve.

- (b) Das Bild  $\alpha(J)$  ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $M$ , wenn
- (i)  $\alpha \equiv p$  oder
  - (ii)  $\alpha$  periodisch ist, oder wenn
  - (iii)  $J$  beschränktes Intervall ist.

*Bemerkung.* In jedem Fall ist  $\alpha(J)$  eine „immersierte Untermannigfaltigkeit“ im Sinne von Bemerkung 1(d) aus Abschnitt 2.6.

- (c) Für die Menge  $\omega_\alpha$  der  $\omega$ -Grenzpunkte von  $\alpha$  gilt:

- (i)  $\omega_\alpha \neq \emptyset \implies \sup J = \infty$
- (ii)  $\omega_\alpha = \bigcup_{q \in \omega_\alpha} \alpha_q(J_q)$ , d.h.:  $\forall t \in \mathbb{R} : \Phi_t^X(\omega_\alpha \cap W_t^X) \subset \omega_\alpha$   
(Invarianz der  $\omega$ -Grenzpunktmenge von  $\alpha$  gegenüber der lokalen 1-Parametergruppe  $(\Phi_t^X)_{t \in \mathbb{R}}$ )
- (iii) Ist  $\omega_\alpha = \{p_0\}$ , so ist  $X_{p_0} = 0$ .

**Aufgabe 2.** Es sei  $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion, und für jedes  $p \in M$  bezeichne  $\alpha_p^\tau : J_p^\tau \rightarrow M$  die maximale Integralkurve von  $X$  zu dem Anfangswert  $(\tau(p), p)$ . Dann ist  $W^\tau := \bigcup_{p \in M} (J_p^\tau \times \{p\})$  eine offene Umgebung von  $\{(\tau(p), p) \mid p \in M\}$  in  $\mathbb{R} \times M$  und  $\Phi^\tau : W^\tau \rightarrow M$ ,  $(t, p) \mapsto \alpha_p^\tau(t)$  ist eine  $C^\infty$ -Abbildung.

**Aufgabe 3. Vektorfelder zu dynamischen Systemen.** Es sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $W \in \mathcal{U}^o(\{0\} \times M, \mathbb{R} \times M)$  und  $\Phi : W \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Wir setzen voraus, dass für jedes  $p \in M$  die Menge  $W^p := \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in W\}$  ein Intervall und  $\Phi(0, p) = p$  ist.

Dann ist also jeweils

$$\Phi^p : W^p \rightarrow M, t \mapsto \Phi(t, p)$$

eine  $C^\infty$ -Kurve, und mit

$$X : p \mapsto X_p := \dot{\Phi}^p(0)$$

erhalten wir ein  $C^\infty$ -differenzierbares Vektorfeld auf  $M$ .

[Tipp: Es existiert genau ein Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times M)$ , das durch  $P_* \frac{\partial}{\partial t} = \partial \circ P$  und  $Q_* \frac{\partial}{\partial t} = 0$  charakterisiert ist. Mit diesem gilt  $X_p = \Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0, p)}$ .]

Definieren wir weiterhin  $W_t := \{p \in M \mid (t, p) \in W\}$  und setzen wir für alle  $t, s \in \mathbb{R}$

$$\forall p \in W_s \cap W_{t+s} \cap \Phi_s^{-1}(W_t) : \Phi_{t+s}(p) = \Phi_t \circ \Phi_s(p)$$

voraus, so ist  $W \subset W^X$  und  $\Phi = \Phi^X|_W$ . Insbesondere sind also die Kurven  $\Phi^p$  Integralkurven von  $X$ .

**Aufgabe 4. Stabilität von Gleichgewichtslagen \* Ljapunow-Funktionen.** Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $p_0 \in M$  und  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $X_{p_0} = 0$ . Eine stetige Funktion  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $V|(M \setminus \{p_0\}) \in C^\infty(M \setminus \{p_0\})$  heißt *Ljapunow-Funktion* zu  $(X, p_0)$ , wenn gilt:

- (i)  $V$  hat in  $p_0$  ein strenges lokales Minimum,
- (ii)  $X \cdot V \leq 0$ .

Gilt sogar  $X \cdot V < 0$  in  $M \setminus \{p_0\}$ , so heißt  $V$  eine *strenge Ljapunow-Funktion* zu  $(X, p_0)$ . Man zeige:

- (a) Gibt es eine Ljapunow-Funktion zu  $(X, p_0)$ , so gilt: Für jede Integralkurve  $\alpha$  von  $X$  ist die Funktion  $V \circ \alpha$  monoton fallend, und  $p_0$  ist eine *stabile Gleichgewichtslage*, d.h.: Für die maximalen Integralkurven von  $X$  gilt: Zu jedem  $U_0 \in \mathcal{U}^o(p_0, M)$  gibt es ein  $U \in \mathcal{U}^o(p_0, U_0)$  mit

$$\forall p \in U : [0, \infty[ \subset J_p \quad \text{und} \quad \alpha_p([0, \infty[) \subset U_0 .$$

- (b) Gibt es eine strenge Ljapunow-Funktion zu  $(X, p_0)$ , so ist  $p_0$  sogar eine *asymptotisch stabile Gleichgewichtslage*, d.h.:

$$\exists U \in \mathcal{U}^o(p_0, M) \forall p \in U : [0, \infty[ \subset J_p \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_p(t) = p_0 .$$

### 3.5 Vollständige Vektorfelder

**Definition.** Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  heißt *vollständig*, wenn der Definitionsbereich  $W^X$  des Flusses  $\Phi = \Phi^X$  ganz  $\mathbb{R} \times M$  ist, anders ausgedrückt, wenn alle maximalen Integralkurven von  $X$  über ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind.

In diesem Falle ist also  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Operation der Liegruppe  $\mathbb{R}$  auf  $M$ . Die „Orbits“ dieser Operation sind genau die Bilder der Integralkurven.

**Satz.** In den folgenden beiden Fällen ist  $X \in \mathfrak{X}(M)$  vollständig:

- (a) wenn  $X$  einen kompakten Träger  $\text{Tr}(X) := \overline{\{p \in M \mid X_p \neq 0\}}$  hat,
- (b) wenn die Menge  $W^X$  einen „Streifen“  $] - \varepsilon, \varepsilon[ \times M$  (mit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ) enthält.

*Beweis.* Sei  $p \in M$  gegeben, und  $\alpha_p : J_p \rightarrow M$  die maximale Integralkurve von  $X$  mit  $\alpha(0) = p$ . Zu zeigen ist  $J_p = \mathbb{R}$ .

*Zu (a).* Existiert ein  $t \in J_p$  mit  $X_{\alpha_p(t)} = 0$ , so muss wegen der Eindeutigkeit der Integralkurve  $\alpha$  von  $X$  zur Anfangsbedingung  $\alpha(t) = \alpha_p(t)$  die Kurve  $\alpha_p$  konstant sein, und deshalb gilt  $J_p = \mathbb{R}$ . Andernfalls ist  $\alpha_p(J_p)$  in der kompakten Menge  $\text{Tr}(X)$  enthalten, und somit sind nach Teil (c) der Aufgabe aus Abschnitt 3.3 die Mengen der  $\alpha$ -Grenzpunkte und der  $\omega$ -Grenzpunkte von  $\alpha_p$  nicht-leer. Nach Theorem (c) aus Abschnitt 3.4 folgt  $J_p = \mathbb{R}$ .

*Zu (b).* Angenommen,  $r := \sup J_p < \infty$ . Dann ist  $] - \varepsilon, \varepsilon[ \subset J_{\alpha_p(r - \varepsilon/2)}$  und somit nach Theorem (e)(ii) aus Abschnitt 3.4  $]r - \frac{3\varepsilon}{2}, r + \frac{\varepsilon}{2}[ \subset J_p$  im Widerspruch zur Definition von  $r$ . Also ist  $\sup J_p = \infty$ , und analog zeigt man auch  $\inf J_p = -\infty$ . Somit ist  $J_p = \mathbb{R}$ .  $\square$

**Folgerung.** Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit sind alle (global definierten) Vektorfelder vollständig.

*Beweis.* Offenbar ist auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  für jedes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  die Bedingung des Satzes (a) (oder die Bedingung des Satzes (b)) erfüllt.  $\square$

### 3.6 Integration $f$ -verwandter Vektorfelder und Substitutionsmethode

Es seien  $M$  und  $N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten,  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ .

**Aussage.** Sind  $X$  und  $Y$   $f$ -verwandt, also  $f_*X = Y \circ f$ , und ist  $\alpha : J \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $X$ , so ist  $f \circ \alpha$  eine Integralkurve von  $Y$ .

*Beweis.* Sei  $\beta := f \circ \alpha$ . Dann gilt  $\dot{\beta}(t) = (f \circ \alpha)'(t) = f_*\dot{\alpha}(t) = f_*X_{\alpha(t)} = Y_{f(\alpha(t))} = Y_{\beta(t)}$ .  $\square$

**Folgerung.** Sei  $M$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $N$  und  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  ein Vektorfeld mit

$$\forall p \in M : Y_p \in T_p M .$$

Dann ist jede Integralkurve  $\beta : J \rightarrow N$  von  $Y$  mit  $\beta(J) \cap M \neq \emptyset$  eine  $C^\infty$ -Kurve in  $M$ .

*Beweis.* Sei  $I := \{t \in J \mid \beta(t) \in M\}$ . Es gilt  $I \neq \emptyset$ , und  $I = \beta^{-1}(M)$  ist abgeschlossen in  $J$ . Wir zeigen nun, dass  $I$  auch offen in  $J$  ist; da  $J$  zusammenhängend ist, folgt hieraus  $I = J$  und damit die Behauptung.

Sei also  $t_0 \in I$  gegeben, dann ist  $p_0 := \beta(t_0) \in M$ . Wir bezeichnen mit  $f : M \hookrightarrow N$  die Inklusionsabbildung; nach Voraussetzung ist  $X := Y \circ f \in \mathfrak{X}(M)$ , und die Vektorfelder  $X$  und  $Y$  sind  $f$ -verwandt. Es sei  $\alpha : \tilde{J} \rightarrow M$  die maximale Integralkurve von  $X$  mit  $\alpha(t_0) = p_0$ ; hierbei ist  $\tilde{J} \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $t_0 \in \tilde{J}$ . Nach Aussage 1 ist  $f \circ \alpha$  eine Integralkurve von  $Y$  mit  $(f \circ \alpha)(t_0) = p_0 = \beta(t_0)$ , also stimmen  $\beta$  und  $f \circ \alpha$  auf der offenen Umgebung  $J \cap \tilde{J}$  von  $t_0$  überein. Daher gilt  $J \cap \tilde{J} \subset I$ .  $\square$

**Aussage 2.** Die Vektorfelder  $X$  und  $Y$  sind genau dann  $f$ -verwandt, wenn für die maximalen Flüsse gilt:

$$(\text{id}_{\mathbb{R}} \times f)(W^X) \subset W^Y \quad \text{und} \quad f \circ \Phi^X = \Phi^Y \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times f)|_{W^X} . \quad (*)$$

In diesem Fall gilt also für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit  $W_t^X \neq \emptyset$ :

$$f(W_t^X) \subset W_t^Y \quad \text{und} \quad f \circ \Phi_t^X = \Phi_t^Y \circ f|_{W_t^X} .$$

*Beweis.* Sind die Vektorfelder  $X$  und  $Y$   $f$ -verwandt, so folgt die Gültigkeit der behaupteten Beziehungen aus Aussage 1. Gilt umgekehrt (\*), so folgt für  $p \in M$ , dass die maximalen Integralkurven  $\alpha : J \rightarrow M$  von  $X$  mit  $\alpha(0) = p$  und  $\beta : I \rightarrow N$  von  $Y$  mit  $\beta(0) = f(p)$  durch die Beziehung  $(f \circ \alpha)(I \cap J) = \beta(I \cap J)$  miteinander verbunden sind. Durch Differentiation dieser Gleichung an der Stelle  $t = 0$  ergibt sich  $f_* \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0)$ , also  $f_* X_p = Y_{f(p)}$ . Somit gilt  $f_* X = Y \circ f$ , d.h.  $X$  und  $Y$  sind  $f$ -verwandt.  $\square$

### 3.7 Zeitabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen

Es seien

$G$  eine offene, nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{R} \times M$ ,

$P : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $Q : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  die kanonischen Projektionen,

$X \in \mathfrak{X}_{Q|G}(M)$  und

$\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$  sei das Vektorfeld, das durch  $P_* \tilde{X} = \partial \circ P|_G$  und  $Q_* \tilde{X} = X$  charakterisiert ist, siehe Abschnitt 2.3 und die Bemerkung über Vektorfelder auf Produktmannigfaltigkeiten in Abschnitt 3.1.

Die Aussage „Das Vektorfeld  $X$  beschreibt eine zeitabhängige Differentialgleichung“ erhält dadurch einen Sinn, dass wir eine  $C^\infty$ -Kurve  $\beta : J \rightarrow M$  eine Lösung „dieser Differentialgleichung“



nennen, wenn

$$\forall t \in J : (t, \beta(t)) \in G \quad \text{und} \quad \dot{\beta}(t) = X(t, \beta(t))$$

gilt. In dieser Situation gilt:

**Aussage.**  $\beta : J \rightarrow M$  ist genau dann eine Lösung der durch  $X$  beschriebenen (zeitabhängigen) Differentialgleichung, wenn die Graphenabbildung

$$\tilde{\beta} : J \rightarrow \mathbb{R} \times M, \quad t \mapsto (t, \beta(t))$$

in  $G$  verläuft und eine Integralkurve von  $\tilde{X}$  ist.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} & \tilde{\beta} \text{ ist Integralkurve von } \tilde{X} \\ \iff & \dot{\tilde{\beta}}(t) = \tilde{X}_{\tilde{\beta}(t)} \\ \iff & P_* \dot{\tilde{\beta}}(t) = P_* \tilde{X}_{\tilde{\beta}(t)} \quad \text{und} \quad Q_* \dot{\tilde{\beta}}(t) = Q_* \tilde{X}_{\tilde{\beta}(t)} \\ \iff & \underbrace{(P \circ \tilde{\beta}) \cdot (t)}_{=\partial_t} = \underbrace{\partial \circ P \circ \tilde{\beta}(t)}_{=\partial_t} \quad \text{und} \quad (Q \circ \tilde{\beta}) \cdot (t) = Q_* \tilde{X}_{\tilde{\beta}(t)} \\ \iff & \dot{\beta}(t) = X(t, \beta(t)) \\ \iff & \beta \text{ ist Lösung der durch } X \text{ beschriebenen zeitabhängigen Differentialgleichung.} \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Durch Anwendung des Theorems aus Abschnitt 3.4 auf das Vektorfeld  $\tilde{X}$  erhält man Aussagen über das „Randverhalten“ und die „differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten“ für die maximalen Lösungen der durch  $X$  beschriebenen Differentialgleichung. Um sich davon zu überzeugen, löse man die

**Aufgabe.** Es sei in obiger Situation der Einfachheit halber  $G = \mathbb{R} \times M$ , also  $X \in \mathfrak{X}_Q(M)$ .

- (a) Zu jedem Anfangswert  $(s, p) \in \mathbb{R} \times M$  existiert eine eindeutige maximale Lösung

$$\beta_{(s,p)} : J_{(s,p)} \rightarrow M \quad \text{mit} \quad s \in J_{(s,p)} \quad \text{und} \quad \beta_{(s,p)}(s) = p$$

der durch  $X$  beschriebenen zeitabhängigen Differentialgleichung. Ist  $t \in J_{(s,p)}$  und  $q := \beta_{(s,p)}(t)$ , so ist

$$\beta_{(t,q)} = \beta_{(s,p)} \cdot \quad (*)$$

- (b)  $W := \bigcup_{(s,p) \in \mathbb{R} \times M} (J_{(s,p)} \times \{(s,p)\})$  ist eine offene Umgebung von  $\Delta \times M$  (mit  $\Delta = \{(s,s) | s \in \mathbb{R}\}$ ) in  $\mathbb{R}^2 \times M$ , und

$$\Phi : W \rightarrow M, \quad (t, s, p) \mapsto \beta_{(s,p)}(t)$$

ist eine  $C^\infty$ -Abbildung.

- (c) Es sei jeweils  $W_{(t,s)} := \{p \in M \mid (t, s, p) \in W\}$  und  $\Phi_{(t,s)} : W_{(t,s)} \rightarrow M, p \mapsto \Phi(t, s, p)$ . Dann ist für jedes Paar  $(t, s)$  mit  $W_{(t,s)} \neq \emptyset$  die Abbildung  $\Phi_{(t,s)}$  ein Diffeomorphismus von  $W_{(t,s)}$  auf  $W_{(s,t)}$  mit der Umkehrung  $\Phi_{(s,t)}$ . Insbesondere ist  $W_{(s,s)} = M$  und  $\Phi_{(s,s)} = \text{id}_M$  für alle  $s$ . Ist  $p \in W_{(t,s)}$  und  $\Phi_{(t,s)}(p) \in W_{(r,t)}$ , so ist

$$p \in W_{(r,s)} \quad \text{und} \quad \Phi_{(r,t)} \circ \Phi_{(t,s)}(p) = \Phi_{(r,s)}(p) .$$

[Tipp. Benutze (\*) aus (a).]

### 3.8 Die Lieklammer von Vektorfeldern

Es sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Für diesen Abschnitt rufen wir uns die am Ende von Abschnitt 3.1 beschriebene Deutung der Vektorfelder von  $M$  als Derivationen, also als lineare Differentialoperatoren auf  $C^\infty(M)$  in Erinnerung. Wie dort bezeichnen wir die zu einem Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  gehörende Derivation mit  $D^X$ , das heißt

$$D^X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), f \mapsto X \cdot f := (p \mapsto f_* X_p) .$$

**Theorem.** Der Raum  $\mathfrak{D}(M)$  der Derivationen auf  $C^\infty(M)$  ist eine *Liesche Unteralgebra* von  $\text{End}(C^\infty(M))$ , das bedeutet per Definition:  $\mathfrak{D}(M)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $\text{End}(C^\infty(M))$ , und für alle  $D, D' \in \mathfrak{D}(M)$  ist auch der *Kommutator*

$$[D, D'] := (f \mapsto D(D'(f)) - D'(D(f)))$$

ein Element von  $\mathfrak{D}(M)$ . Daher kann man in  $\mathfrak{X}(M)$  auf genau eine Weise einen „Kommutator“ einführen, der mit dem Vektorraum-Isomorphismus aus Abschnitt 3.1, Aussage (b) verträglich ist. Also:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \exists! [X, Y] \in \mathfrak{X}(M) : D^{[X, Y]} = [D^X, D^Y] ,$$

mit anderen Worten

$$\forall f \in C^\infty(M) : [X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f) .$$

$[X, Y]$  heißt die *Lieklammer* der Vektorfelder  $X$  und  $Y$ .

**Bemerkung.** Die wesentliche Aussage dieses Theorems ist, dass für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  der Kommutator  $[D^X, D^Y]$  wieder ein Differentialoperator erster und nicht zweiter Ordnung ist. Dieser überraschende Tatbestand liegt an der Differenzbildung.

*Beweis des Theorems.*  $\mathfrak{D}(M)$  ist offenbar ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $\text{End}(C^\infty(M))$ . Für  $D, D' \in \mathfrak{D}(M)$  ist offenbar  $[D, D'] \in \text{End}(C^\infty(M))$  und es gilt für  $f, g \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} [D, D'](fg) &= D(D'(fg)) - D'(D(fg)) \\ &= D(D'(f)g + fD'(g)) - D'(D(f)g + fD(g)) \\ &= D(D'(f))g + D'(f)D(g) + D(f)D'(g) + fD(D'(g)) \\ &\quad - D'(D(f))g - D(f)D'(g) - D'(f)D(g) - fD'(D(g)) \\ &= D(D'(f))g + fD(D'(g)) - D'(D(f))g - fD'(D(g)) \\ &= [D, D'](f)g + f[D, D'](g) . \end{aligned}$$

Also ist  $[D, D'] \in \mathfrak{D}(M)$  und somit ist  $\mathfrak{D}(M)$  eine Liesche Unteralgebra von  $\text{End}(C^\infty(M))$ . Die verbleibende Behauptung folgt aus der Tatsache, dass die Zuordnung  $\Phi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$ ,  $X \mapsto D^X$  nach der Aussage aus Abschnitt 3.1 ein Vektorraum-Isomorphismus ist.  $\square$

**Aussage.** Sei  $V$  ein Vektorraum. Dann gilt für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\forall f \in C^\infty(M, V) : [X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

*Beweis.* Wir beachten zunächst, dass für jeden weiteren Vektorraum  $W$  und jede lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$  gilt:

$$X \cdot (A \circ f) = A \circ (X \cdot f). \quad (*)$$

Es sei nun eine beliebige Linearform  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Im Folgenden wenden wir  $(*)$  auf  $\lambda$  und mit  $W = \mathbb{R}$  an. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \circ ([X, Y] \cdot f) &\stackrel{(*)}{=} [X, Y] \cdot (\lambda \circ f) \\ &= X \cdot (Y \cdot (\lambda \circ f)) - Y \cdot (X \cdot (\lambda \circ f)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lambda \circ (X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiele.**

- (a) Es sei  $(U, x)$  eine Karte von  $M$ . Indem wir  $U$  als eine offene Untermannigfaltigkeit von  $M$  auffassen, können wir die Lieklammer von Vektorfeldern auf  $U$  bilden. Es gilt für  $i, k \in \{1, \dots, m\}$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] \equiv 0.$$

[*Beweis.* Sei  $Z := [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}] \in \mathfrak{X}(U)$ . Dann gilt für  $f \in C^\infty(M)$  mit  $\hat{f} := f \circ x^{-1} \in C^\infty(x(U))$  nach Beispiel (e) aus Abschnitt 3.1:

$$\overrightarrow{D^Z}(f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_k \partial x_i} = 0$$

und somit  $D^Z = 0$ . Hieraus folgt  $Z = 0$ .  $\square$  ]

- (b) Für jede Untermannigfaltigkeit  $M$  eines Vektorraums  $V$  gilt

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) : \overrightarrow{[X, Y]} = d\overrightarrow{Y}(X) - d\overrightarrow{X}(Y).$$

Insbesondere gilt diese Formel natürlich, wenn  $M$  eine offene Teilmenge von  $V$  ist.

[*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $\iota : M \rightarrow V$  die Inklusionsabbildung. Dann gilt für  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ :

$$\overrightarrow{v \cdot \iota} = \overrightarrow{\iota_* v} = \overrightarrow{v}.$$

Daher ergibt sich mit Hilfe der obigen Aussage:

$$\overrightarrow{[X, Y]} = \overrightarrow{[X, Y] \cdot \iota} = \overrightarrow{X \cdot (Y \cdot \iota) - Y \cdot (X \cdot \iota)} = X \cdot \overrightarrow{Y} - Y \cdot \overrightarrow{X}$$

und damit die Behauptung.  $\square$  ]

**Aufgabe. Rechenregeln für die Lieklammer.**

- (a) Die Lieklammer auf  $\mathfrak{X}(M)$  ist  $\mathbb{R}$ -bilinear und schief-symmetrisch; letzteres bedeutet, dass für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  gilt:  $[Y, X] = -[X, Y]$ . Außerdem gilt die *Jacobi-Identität*

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) : [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 .$$

Das bedeutet per Definition, dass  $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$  eine *Lie-Algebra* ist.

- (b) Sind  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ , so ist

$$[\varphi X, \psi Y] = \varphi \psi [X, Y] + \varphi (X \cdot \psi) Y - \psi (Y \cdot \varphi) X .$$

$[\cdot, \cdot]$  ist also nicht  $C^\infty(M)$ -linear.

- (c) Ist  $N$  eine weitere  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, ist  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, sind  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ , und sind die Paare  $(X, \tilde{X})$  und  $(Y, \tilde{Y})$  jeweils  $f$ -verwandt, so sind auch  $[X, Y]$  und  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$   $f$ -verwandt.

- (d) Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ . Dann gilt für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ :

$$X|_M, Y|_M \in \mathfrak{X}(M) \implies [X|_M, Y|_M] = [X, Y]|_M .$$

**Bemerkung 1.** Man kann die folgende geometrische Deutung der Lieklammer beweisen: Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  und  $p \in M$ , und sei  $\varepsilon > 0$  so klein gewählt, dass die  $C^\infty$ -Kurve

$$\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M, t \mapsto (\Phi_t^Y)^{-1} \circ (\Phi_t^X)^{-1} \circ \Phi_t^Y \circ \Phi_t^X(p)$$

wohldefiniert ist. Dann gilt  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = 0$ , und der Beschleunigungsvektor  $w \in T_p M$  von  $\gamma$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist

$$w = 2 \cdot [X, Y]_p .$$

Insofern misst die Lieklammer von  $X$  und  $Y$  das Ausmaß, in dem die Flüsse dieser beiden Vektorfelder für kleine  $t$  nicht miteinander kommutieren.

Als eine Folgerung hieraus kann man weiter zeigen, dass  $[X, Y] \equiv 0$  genau dann gilt, wenn die Flüsse von  $X$  und  $Y$  kommutieren (d.h. wenn  $\Phi_t^X \circ \Phi_s^Y = \Phi_s^Y \circ \Phi_t^X$  für alle  $t, s \in \mathbb{R}$  gilt). Ist dies der Fall, so sagt man daher auch, dass *die Vektorfelder  $X$  und  $Y$  kommutieren*.

**Bemerkung 2.** Die Lieklammer von Vektorfeldern mag zunächst als ein künstliches Konstrukt erscheinen. Arbeitet man nur in lokalen Koordinaten (was der Sichtweise der Analysis I–II entspricht), so ist sie wegen  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}] = 0$  entbehrlich. Ich versichere: In der koordinatenfreien globalen Analysis kann man auf Lieklammern nicht verzichten.

# Kapitel 4

## Tensorfelder und Differentialformen

### 4.1 Tensorfelder

Es seien  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $r \in \mathbb{N}_0$ .

**Vorbemerkung.** Sind  $V$  und  $W$  reelle Vektorräume und ist  $r > 1$ , so bezeichne  $L^r(V, W)$  den Vektorraum der  $r$ -linearen Abbildungen  $V \times \cdots \times V \rightarrow W$ . Weiterhin sei  $L^0(V, W) = W$ . Für alle  $r \in \mathbb{N}_0$  werden die Elemente von  $L^r(V, \mathbb{R})$  bzw.  $L^r(V, V)$  auch *Tensoren* vom Typ  $(0, r)$  bzw.  $(1, r)$  genannt.

Man beachte: Tensoren vom Typ  $(0, 0)$  sind Zahlen (= Skalare),

vom Typ  $(1, 0)$  Vektoren,

vom Typ  $(1, 1)$  Endomorphismen,

vom Typ  $(0, 2)$  Bilinearformen.

In entsprechender Weise wie in der Konstruktion in Abschnitt 2.9 können wir über  $M$  die Vektorraumbündel  $L^r(TM, \mathbb{R}) \rightarrow M$  und  $L^r(TM, TM) \rightarrow M$  konstruieren, deren Faser über  $p \in M$  in dem Vektorraum  $L^r(T_pM, \mathbb{R})$  bzw.  $L^r(T_pM, T_pM)$  besteht.

**Definition.** Ist  $k \in \{0, 1\}$  und  $r \in \mathbb{N}$ , so ist ein *Tensorfeld vom Typ  $(k, r)$*  ein  $C^\infty$ -Schnitt im Vektorraumbündel  $L^r(TM, \mathbb{R}) \rightarrow M$  (falls  $k = 0$ ) bzw. in  $L^r(TM, TM)$  (falls  $k = 1$ ).

Funktionen werden auch Tensorfelder vom Typ  $(0, 0)$  oder *Skalarfelder* genannt, Vektorfelder heißen auch Tensorfelder vom Typ  $(1, 0)$ . Die Menge aller Tensorfelder vom Typ  $(k, r)$  bildet in kanonischer Weise einen  $C^\infty(M)$ -Modul (Addition und skalare Multiplikation werden „punktweise“ definiert); wir bezeichnen ihn mit  $\mathfrak{T}^{(k,r)}(M)$ . Offenbar gilt  $\mathfrak{T}^{(0,0)}(M) = C^\infty(M)$  und  $\mathfrak{T}^{(1,0)}(M) = \mathfrak{X}(M)$ .

**Beispiel.** Für jede Funktion  $\varphi \in C^\infty(M)$  ist  $d\varphi := T\varphi \in \mathfrak{T}^{(0,1)}(M)$ . Ein weiteres fundamentales Beispiel bilden die sogenannten *Riemannschen Metriken* auf  $M$ : Eine solche ist ein Tensorfeld  $g$  vom Typ  $(0, 2)$  auf  $M$ , so dass für jedes  $p \in M$  die Bilinearform  $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$

ein Skalarprodukt, d.h. symmetrisch und positiv definit ist. Weil es mit Hilfe einer Riemannschen Metrik möglich wird, auf  $M$  Längen und Winkel zu messen, eröffnen sie einen Zugang zur *geo-metrischen* Behandlung von Mannigfaltigkeiten. Ist auf  $M$  eine Riemannsche Metrik ausgezeichnet, so spricht man von einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit*. Diese werden in der kommenden Vorlesung „Riemannsche Geometrie“ im Mittelpunkt des Interesses stehen.

**Aufgabe 1.** Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Riemannsche Metrik.

[Tipp. Zuerst auf Kartenumgebungen, dann Zerlegung der Eins.]

**Aufgabe 2.** Ist  $A \in \mathfrak{T}^{(k,r)}(M)$  und  $f : N \rightarrow M$  eine weitere  $C^\infty$ -Abbildung, so ist für jedes  $r$ -Tupfel  $(X_1, \dots, X_r)$  von Vektorfeldern  $X_i \in \mathfrak{X}_f(M)$  auch

$$\left( A(X_1, \dots, X_r) : p \mapsto A_{f(p)}(X_1(p), \dots, X_r(p)) \right) \in \begin{cases} C^\infty(N) & \text{für } k = 0 \\ \mathfrak{X}_f(M) & \text{für } k = 1. \end{cases}$$

**Multiplikation von Tensorfeldern.** Ist  $a \in \mathfrak{T}^{(0,r)}(M)$  und  $B \in \mathfrak{T}^{(k,s)}(M)$ , so definiert man das *Tensorprodukt*

$$a \otimes B \in \mathfrak{T}^{(k,r+s)}(M)$$

durch

$$(a \otimes B)_p(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) := a_p(v_1, \dots, v_r) \cdot B_p(w_1, \dots, w_s).$$

Ist  $r = 0$  oder  $s = 0$ , so ersetzt man häufig das Symbol  $\otimes$  durch einen Punkt  $\cdot$ .

Gleich eine Anwendung!

**Aussage 1. Die Komponenten eines Tensorfeldes.** Es seien  $A \in \mathfrak{T}^{(k,r)}(M)$  und  $(U, x)$  eine  $C^\infty$ -Karte von  $M$ . Dann setzt man (für  $r > 0$ )

$$A_{i_1 \dots i_r} := A\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right) \quad \text{im Fall } k = 0$$

bzw.

$$A_{i_1 \dots i_r}^j := dx_j\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right)\right) \quad \text{im Fall } k = 1.$$

Damit gilt für  $A|_U$ :

$$A|_U = \sum_{i_1, \dots, i_r} A_{i_1 \dots i_r} \cdot dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r} \quad \text{im Fall } k = 0 \quad (*_0)$$

bzw.

$$A|_U = \sum_{j, i_1, \dots, i_r} A_{i_1 \dots i_r}^j \cdot dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} |U \quad \text{im Fall } k = 1. \quad (*_1)$$

*Beweis.* Man beachte, dass die Komponentenfunktionen  $A_{i_1 \dots i_r}$  bzw.  $A_{i_1 \dots i_r}^j$  aufgrund von Aufgabe 2 beliebig oft differenzierbar sind. Die Formeln  $(*_k)$  beweist man, indem man jeweils auf beiden Seiten die Gaußschen Basisfelder  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  einsetzt.  $\square$

**Bemerkung.** Indem man den Zusammenhang zwischen den Komponenten eines Tensors bezüglich unterschiedlicher Karten benutzt, kommt man zu der gängigen Definition eines Tensors in der Physik: „Ein Tensor  $A$  ist eine Größe, welche sich bezüglich fixierter Koordinaten jeweils durch Zahlen  $A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$  beschreiben läßt; bei Koordinatenwechsel transformieren sich diese Zahlen folgendermaßen: ...“. — Wenn es sein muß, können wir das auch; jedoch ist oftmals unsere von der Koordinatenwahl unabhängige Beschreibung übersichtlicher.

**Aussage 2.** Es seien  $k \in \{0, 1\}$ ,  $r \in \mathbb{N}$  und  $A : M \rightarrow L^r(TM, \mathbb{R})$  ( $k = 0$ ) bzw.  $A : M \rightarrow L^r(TM, TM)$  ( $k = 1$ ) eine Abbildung mit  $A_p \in L^r(T_p M, \mathbb{R})$  für  $k = 0$  bzw.  $\in L^r(T_p M, T_p M)$  für  $k = 1$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $A$  ist ein (differenzierbares) Tensorfeld.
- (b) Für beliebige Karten  $(U, x)$  von  $M$  sind die Komponenten  $A_{i_1 \dots i_r}$  bzw.  $A_{i_1 \dots i_r}^j$  von  $A$   $C^\infty$ -Funktionen.
- (c) für  $k = r = 1$ :  $TM \rightarrow TM$ ,  $v \mapsto A_{\pi(v)}v$  ist eine  $C^\infty$ -Abbildung.
- (d) für  $k = 0$  und  $r = 2$ :  $TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto A_{\pi(v)}(v, w)$  ist eine  $C^\infty$ -Funktion.
- (e) für  $k = 1$  und  $r = 2$ :  $TM \times_M TM \rightarrow TM$ ,  $(v, w) \mapsto A_{\pi(v)}(v, w)$  ist eine  $C^\infty$ -Abbildung.

*Beweis.* Die Äquivalenz von (a) und (b) ergibt sich aus Aussage 1. Ist  $k = r = 1$ , so folgt „(a)  $\Rightarrow$  (c)“ aus einer Untersuchung der Abbildung  $\underline{A} : TM \rightarrow TM$ ,  $v \mapsto A_{\pi(v)}v$  mittels lokaler Trivialisierungen der Bündel  $TM \rightarrow M$  und  $\text{End}(TM) \rightarrow M$ . „(c)  $\Rightarrow$  (b)“ folgt aus der Gleichung  $A_i^j = dx_j \circ \underline{A}(\frac{\partial}{\partial x_i})$ . In den Fällen  $(k, r) = (0, 2)$  und  $(k, r) = (1, 2)$  verfährt man entsprechend, um die Äquivalenz von (d) bzw. (e) zu (a), (b) zu zeigen.  $\square$

**Satz.** Es seien  $k \in \{0, 1\}$ ,  $r \in \mathbb{N}$  und

$$L : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \begin{cases} C^\infty(M) & \text{für } k = 0 \\ \mathfrak{X}(M) & \text{für } k = 1. \end{cases}$$

eine  $C^\infty(M)$ - $r$ -lineare Abbildung. Dann existiert genau ein Tensorfeld  $A \in \mathfrak{T}^{(k,r)}(M)$ , so dass

$$\forall X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M) : A(X_1, \dots, X_r) = L(X_1, \dots, X_r)$$

gilt.

Der Beweis erfolgt durch Induktion mit Hilfe des folgenden Lemmas.

**Lemma.** Ist  $p \in M$ ,  $V$  ein Vektorraum und  $\lambda : \mathfrak{X}(M) \rightarrow V$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varphi \in C^\infty(M), X \in \mathfrak{X}(M) : \lambda(\varphi X) = \varphi(p) \cdot \lambda(X),$$

so gilt

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) : (X_p = Y_p \implies \lambda(X) = \lambda(Y)).$$

*Beweis des Lemmas.* Aus Linearitätsgründen genügt es,

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) : (X_p = 0 \implies \lambda(X) = 0)$$

zu beweisen. Dazu sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $X_p = 0$  gegeben. Wir nutzen die Darstellung von  $X$  bezüglich Gaußscher Basisfelder von  $M$ . Danach existiert eine Karte  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  und Funktionen  $\psi_1, \dots, \psi_m \in C^\infty(U)$  mit

$$X|_U = \sum_i \psi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i};$$

wegen  $X_p = 0$  gilt  $\psi_1(p) = \dots = \psi_m(p) = 0$ . Nachdem man  $U$  erforderlichenfalls verkleinert, kann man die Vektorfelder  $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$  zu Vektorfeldern  $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$  fortsetzen, und ebenfalls kann man die Funktionen  $\psi_i \in C^\infty(U)$  zu Funktionen  $\tilde{\psi}_i \in C^\infty(M)$  fortsetzen. Weiterhin existiert eine Funktion  $\varphi \in C^\infty(M)$  mit  $\varphi(p) = 1$  und  $\text{Tr}(\varphi) \subset U$ . Dann ist  $\varphi \cdot X = \sum \varphi \psi_i \cdot Z_i$  und daher nach Voraussetzung

$$\lambda(X) = \varphi(p) \cdot \lambda(X) = \lambda(\varphi X) = \lambda(\sum \varphi \psi_i \cdot Z_i) = \sum \varphi(p) \psi_i(p) \cdot \lambda(Z_i) = 0. \quad \square$$

*Beweis des Satzes.* Aus dem Lemma ergibt sich mittels eines Induktionsargumentes, dass es genau eine Abbildung  $A : M \rightarrow L^r(TM, \mathbb{R})$  bzw.  $A : M \rightarrow L^r(TM, TM)$  mit  $\pi \circ A = \text{id}_M$  gibt, so dass

$$\forall X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M) : A(X_1, \dots, X_r) = L(X_1, \dots, X_r)$$

gilt, und aus Aussage 2, (b)  $\implies$  (a) folgt, dass  $A$  differenzierbar ist.  $\square$

**Der Pullback von Tensorfeldern.** Es seien  $f : N \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und  $r \in \mathbb{N}_0$ . Dann wird für jedes  $A \in \mathfrak{T}^{(0,r)}(M)$  der Pullback  $f^*A \in \mathfrak{T}^{(0,r)}(N)$  folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \text{Fall } r > 0: & (f^*A)_p(v_1, \dots, v_r) := A_{f(p)}(f_*v_1, \dots, f_*v_r) \text{ für alle } p \in N, v_1, \dots, v_r \in T_pN, \\ \text{Fall } r = 0: & f^*A := A \circ f. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Zuordnung  $A \mapsto f^*A$   $C^\infty(M)$ -linear. Zu beachten ist, dass der Pullback-Operator *kontravariant* ist, das bedeutet: Ist  $g : L \rightarrow N$  eine weitere  $C^\infty$ -Abbildung, so gilt für  $A \in \mathfrak{T}^{(0,r)}(M)$

$$(f \circ g)^*A = g^*(f^*A).$$

## 4.2 Differentialformen

**Vorbemerkung.** Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $r \in \mathbb{N}$ , so ist eine *alternierende  $r$ -Form* auf  $V$  eine  $r$ -lineare Abbildung  $\mu : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für jede Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, r\}$  gilt:

$$\forall v_1, \dots, v_r \in V : \mu(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \mu(v_1, \dots, v_r). \quad (*)$$

Man kann zeigen, dass (\*) zur Bedingung äquivalent ist, dass  $\mu(v_1, \dots, v_r) = 0$  gilt, wann immer die Vektoren  $v_1, \dots, v_r \in V$  linear abhängig sind.



Wir bezeichnen den Vektorraum der alternierenden  $r$ -Formen auf  $V$  mit  $\text{Alt}^r(V)$ . Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, gilt  $\dim \text{Alt}^r(V) = \binom{n}{r}$ , insbesondere ist  $\text{Alt}^r(V) = \{0\}$  für  $r > n$ .

Es sei nun  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $r, s \in \mathbb{N}$ . Dann können wir in entsprechender Weise wie in Abschnitt 2.9 das Vektorraumbündel  $\text{Alt}^r(TM) \rightarrow M$ , dessen Faser über  $p \in M$  der Raum  $\text{Alt}^r(T_p M)$  ist, konstruieren. Dieses hat die typische Faser  $\text{Alt}^r(\mathbb{R}^m)$  und deshalb die Faserdimension  $\binom{m}{r}$ .

**Definition.** Ein Tensorfeld  $\omega$  vom Typ  $(0, r)$  heißt eine (*alternierende*) *Differentialform* vom Grad  $r$ , wenn

$$\forall p \in M : \omega_p \in \text{Alt}^r(T_p M)$$

gilt. Die Differentialformen vom Grad  $r$  sind also genau die Schnitte im Vektorraumbündel  $\text{Alt}^r(TM) \rightarrow M$ .

Mit  $\Omega^r(M)$  bezeichnen wir den  $C^\infty(M)$ -Modul aller alternierenden Differentialformen vom Grad  $r$ . Wir definieren zusätzlich  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ . Offenbar gilt  $\Omega^1(M) = \mathfrak{T}^{(0,1)}(M)$  und  $\Omega^r(M) = \{0\}$  für alle  $r > m$ .

**Wichtiges Beispiel.** Ist  $\varphi \in C^\infty(M)$ , so ist  $d\varphi := T\varphi \in \Omega^1(M)$ . Insbesondere gilt für eine Karte  $x = (x_1, \dots, x_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  von  $M$ :  $dx_i \in \Omega^1(U)$ .

**Bemerkung.** Die Konstruktionen aus Abschnitt 4.1 lassen sich auf Differentialformen  $\omega \in \Omega^r(M)$ : anwenden. Im Einzelnen gilt:

- (a) Die Aussage 2 aus 4.1 über den Nachweis der Differenzierbarkeit von Tensorfeldern läßt sich insbesondere auf Differentialformen anwenden.
- (b) Ist in der Situation des Satzes aus Abschnitt 4.1  $k = 0$  und die Funktion  $L$  alternierend, so ist  $A \in \Omega^r(M)$ .
- (c) Der *Pullback*  $f^*\omega$  unter einer  $C^\infty$ -Funktion  $f : N \rightarrow M$  ist eine Differentialform  $\in \Omega^r(N)$ .
- (d) Hingegen ist das Produkt  $\omega \otimes \mu$  von Differentialformen auf  $M$  in aller Regel *keine* Differentialform.
- (e) Man kann die Differentialform  $\omega$  zwar als spezielles Tensorfeld wie in Aussage 1 aus Abschnitt 4.1 lokal in Koeffizienten bezüglich einer Karte beschreiben. Die Eigenschaft von  $\omega$ , alternierend zu sein, äußert sich dann in bestimmten Symmetrieeigenschaften für die Koeffizienten. Weil  $dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r}$  aber keine Differentialform ist, ist eine Darstellung von  $\omega$  als  $C^\infty(U)$ -Linearkombination von *Differentialformen* praktischer als diese Darstellung. Eine solche findet sich in der untenstehenden Aussage.

**Die  $C^\infty(M)$ -Modul-Struktur von  $\Omega^r(M)$ .**  $\Omega^r(M)$  ist ein  $C^\infty(M)$ -Untermodul von  $\mathfrak{T}^{(0,r)}(M)$ , und zwar sind *Addition* und *skalare Multiplikation* punktweise definiert; also: Für

$\omega, \mu \in \Omega^r(M)$  und  $\varphi \in C^\infty(M)$  ist

$$(\omega + \mu)_p := \omega_p + \mu_p \quad \text{und} \quad (\varphi\omega)_p = \varphi(p) \cdot \omega_p \quad \text{für alle } p \in M .$$

**Das alternierende Produkt von Differentialformen.** Sei  $\omega \in \Omega^r(M)$  und  $\mu \in \Omega^s(M)$ . Als Ersatz für das Tensorfeld-Produkt  $\omega \otimes \mu$ , das wie gesagt im Allgemeinen keine Differentialform ergibt, definieren wir das *alternierende Produkt* oder *äußere Produkt*  $\omega \wedge \mu \in \Omega^{r+s}(M)$  durch

$$(\omega \wedge \mu)_p(v_1, \dots, v_{r+s}) := \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) \cdot \omega_p(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}) \cdot \mu_p(v_{\pi(r+1)}, \dots, v_{\pi(r+s)}) ,$$

wobei über **alle** Permutationen  $\pi$  der Menge  $\{1, \dots, r+s\}$  summiert wird. Es gilt dann

$$(\omega \wedge \mu)_p(v_1, \dots, v_{r+s}) = \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) \cdot \omega_p(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}) \cdot \mu_p(v_{\pi(r+1)}, \dots, v_{\pi(r+s)}) ,$$

wobei **nur über diejenige** Permutationen  $\pi$  der Menge  $\{1, \dots, r+s\}$  summiert wird, für die  $\pi(1) < \dots < \pi(r)$  und  $\pi(r+1) < \dots < \pi(r+s)$  gilt.

Wir geben hierfür noch eine andere Beschreibung, die zeigt, in welchem Sinne  $\omega \wedge \mu$  der „alternierende Anteil“ von  $\omega \otimes \mu$  ist. Dazu führen wir folgende „Projektion“

$$\text{alt} : \mathfrak{T}^{(0,r)}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$$

ein: Für  $A \in \mathfrak{T}^{(0,r)}(M)$  sei  $\text{alt}(A) \in \Omega^r(M)$  die Differentialform mit

$$\text{alt}(A)_p(v_1, \dots, v_r) := \frac{1}{r!} \cdot \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \text{sign}(\pi) \cdot A_p(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}) ;$$

hierbei bezeichnet  $\mathfrak{S}_r$  die Gruppe der Permutationen von  $\{1, \dots, r\}$ . Der Faktor  $1/r!$  sorgt dafür, dass  $\text{alt}$  eine Projektion ist, d.h. dass  $\text{alt} \circ \text{alt} = \text{alt}$  ist. Insbesondere ist

$$\forall \omega \in \Omega^r(M) : \text{alt}(\omega) = \omega .$$

Nun kann man unter Benutzung der Projektion  $\text{alt} : \mathfrak{T}^{(0,r+s)}(M) \rightarrow \Omega^{r+s}(M)$  für  $\omega \in \Omega^r(M)$  und  $\mu \in \Omega^s(M)$  schreiben

$$\omega \wedge \mu = \frac{(r+s)!}{r! \cdot s!} \cdot \text{alt}(\omega \otimes \mu) . \quad (\dagger)$$

### Wichtige Spezialfälle.

(a) Für  $\alpha \in \Omega^1(M)$  und  $\omega \in \Omega^r(M)$  ist

$$(\alpha \wedge \omega)_p(v_0, \dots, v_r) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \cdot \alpha_p(v_i) \cdot \omega_p(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_r) ;$$

das Dach über dem  $v_i$  signalisiert, dass dieser Eintrag zu streichen ist. Insbesondere gilt im Fall  $r=2$

$$(\alpha \wedge \omega)_p(u, v, w) = \mathfrak{S}_{u,v,w} \alpha_p(u) \cdot \omega_p(v, w) ;$$

dabei beinhaltet  $\mathfrak{S}_{u,v,w}$  die Anleitung, dass man zu  $\alpha_p(u) \cdot \omega_p(v, w)$  die beiden Terme addieren soll, die aus  $\alpha_p(u) \cdot \omega_p(v, w)$  durch zyklische Vertauschung von  $u, v, w$  entstehen.

(b) Sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Omega^1(M)$  so ist

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r)_p(v_1, \dots, v_r) = \det(\alpha_{i,p}(v_k)) .$$

**Aufgabe. Rechenregeln für  $\wedge$ .**

(a) Das Produkt  $\wedge$  ist bilinear, assoziativ und antikommutativ; letzteres heißt:

$$\forall \omega \in \Omega^r(M), \mu \in \Omega^s(M) : \mu \wedge \omega = (-1)^{r \cdot s} \omega \wedge \mu .$$

(b)  $\wedge$  vertauscht mit dem Pullback, das soll heißen: Ist  $f : N \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und  $\omega \in \Omega^r(M)$ ,  $\mu \in \Omega^s(M)$ , so gilt

$$f^*(\omega \wedge \mu) = (f^*\omega) \wedge (f^*\mu) .$$

**Warnung.** Leider wird an einigen Stellen in der Literatur, beispielsweise in KOBAYASHI/NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, das äußere Produkt unterschiedlich zu unserem definiert, und zwar fehlt dort der Faktor  $\frac{(r+s)!}{r!s!}$  in obiger Formel (†) (siehe z.B. Kobayashi/Nomizu, S. 28). Man kann zeigen, dass es genau zwei Wahlen von Faktoren gibt (die unsere und die in Kobayashi/Nomizu), so dass das  $\wedge$ -Multiplizieren von Differentialformen assoziativ ist. Wir haben uns der Konvention angeschlossen, die von den meisten Differentialgeometern benutzt wird. Leider muß man bei den unterschiedlichen Wahlen der Faktoren auch die äußere Ableitung  $d\omega$  und die „innere Multiplikation“  $\iota_X\omega$  unterschiedlich definieren, damit die wichtigsten Formeln eine einfache Gestalt bekommen.

**Aussage. Lokale Darstellung von Differentialformen.** Ist  $(U; x_1, \dots, x_n)$  eine  $C^\infty$ -Karte von  $M$ , so gilt für jedes  $\omega \in \Omega^r(M)$

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \quad \text{mit} \quad a_{i_1 \dots i_r} := \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right) ;$$

dabei bedeutet  $\omega|_U = (\omega_p)_{p \in U}$ .

*Beweis.* Man nutzt aus, dass zwei Differentialformen vom Grad  $r$  auf  $M$  genau dann übereinstimmen, wenn sie für alle Karten  $(U, x)$  von  $M$  bei Einsetzen von  $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}$  für alle  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  übereinstimmen. Außerdem benutzt man, dass für alle  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  und  $1 \leq i'_1 < \dots < i'_r \leq n$  gilt:

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r})\left(\frac{\partial}{\partial x_{i'_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i'_r}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } i_k = i'_k \text{ für alle } k = 1, \dots, r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \square$$

**4.3 Äußere Ableitung von Differentialformen**

**Satz 1. Die äußere Ableitung von Differentialformen.** Zu jeder Differentialform  $\omega \in \Omega^r(M)$  existiert genau eine Differentialform  $d\omega \in \Omega^{r+1}(M)$ , so dass für  $X_0, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$  jeweils gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \cdot X_i \cdot (\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_r)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \cdot \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_r) ; \end{aligned}$$

das Dach über  $X_i$  und  $X_j$  bedeutet, dass diese Vektorfelder in der Formel auszulassen sind.  $d\omega$  heißt die *äußere Ableitung* oder die *Cartansche Ableitung* von  $\omega$ .

Ist  $r = 0$ , so haben wir insbesondere  $d\varphi(X) = X \cdot \varphi$ . Ist  $r = 1$ , so haben wir

$$d\omega(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]) .$$

Ist  $r = 2$ , so gilt

$$d\omega(X, Y, Z) = \underset{X, Y, Z}{\mathfrak{S}} (X \cdot \omega(Y, Z) - \omega([X, Y], Z)) .$$

Folglich gilt  $\forall \varphi \in C^\infty(M) : d(d\varphi) = 0$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildung  $L : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , die durch

$$\begin{aligned} L(X_0, \dots, X_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \cdot X_i \cdot (\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_r)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \cdot \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_r) ; \end{aligned}$$

gegeben ist. Offensichtlich ist  $L$  alternierend; zu zeigen ist daher nur, dass  $L$  ein Tensorfeld (vom Typ  $(0, r+1)$ ) auf  $M$  definiert. Wegen des Satzes aus Abschnitt 4.1 genügt es dafür zu zeigen, dass  $L$   $C^\infty(M)$ -linear ist. Wir zeigen dies exemplarisch für  $r = 1$ . Dann gilt für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\lambda \in C^\infty(M)$ :

$$\begin{aligned} L(\lambda X, Y) &= (\lambda X) \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(\lambda X) - \omega([\lambda X, Y]) \\ &= \lambda (X \cdot \omega(Y)) - ((Y \cdot \lambda) \omega(X) + \lambda (Y \cdot \omega(X))) - \omega(\lambda [X, Y] - (Y \cdot \lambda) X) \\ &= \lambda L(X, Y) . \end{aligned}$$

(Wegen der Produktregel für die Lieklammer siehe Aufgabe (b) in Abschnitt 3.8.) □

**Aussage 1.** Für  $\varphi \in C^\infty(M)$  und  $\omega \in \Omega^r(M)$  ist  $d(\varphi \cdot \omega) = d\varphi \wedge \omega + \varphi \cdot d\omega$ .

*Beweis.* Für  $X_0, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$  gilt

$$\begin{aligned} d(\varphi \cdot \omega)(X_0, \dots, X_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i X_i \cdot (\varphi \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_r)) - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varphi \omega([X_i, X_j], \dots) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i ((X_i \cdot \varphi) \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_r) + \varphi (X_i \cdot \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_r))) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varphi \omega([X_i, X_j], \dots) \\ &= (d\varphi \wedge \omega)(X_0, \dots, X_r) + (\varphi \cdot d\omega)(X_0, \dots, X_r) . \end{aligned} \quad \square$$

**Aussage 2.** Sind  $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ , so gilt für jede Karte  $(U; x_1, \dots, x_n)$  von  $M$

$$d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}) = 0 .$$

*Beweis.* Sei  $\omega := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \in \Omega^r(U)$ . Für  $i'_0, \dots, i'_r \in \{1, \dots, m\}$  gilt dann

$$\begin{aligned} d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i'_0}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i'_r}}\right) &= \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{\partial}{\partial x_{i'_k}} \cdot \underbrace{\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i'_0}}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{i'_k}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i'_r}}\right)}_{=\text{const.} \in \{-1, 0, 1\}} + \sum_{k < \ell} \omega\left(\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_{i'_k}}, \frac{\partial}{\partial x_{i'_\ell}}\right]}_{=0}, \dots\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Lokale Darstellung.** Ist wie in der Aussage aus Abschnitt 4.2

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} a_{i_1 \dots i_r} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r},$$

so ist

$$d\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} da_{i_1 \dots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt durch Anwendung von Aussage 1 auf die lokale Darstellung von  $\omega$  unter Berücksichtigung von Aussage 2.  $\square$

**Satz 2.**

$$\forall \omega \in \Omega^r(M) : d^2\omega := d(d\omega) = 0.$$

*Beweis.* Wir verwenden für  $\omega$  die obige lokale Darstellung. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega|_U &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} da_{i_1 \dots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \\ &= \sum_k \sum_{i_1 < \dots < i_r} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} d^2\omega|_U &= \sum_{k, \ell} \sum_{i_1 < \dots < i_r} \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k \partial x_\ell} dx_k \wedge dx_\ell \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \\ &= \sum_{k < \ell} \sum_{i_1 < \dots < i_r} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_k \partial x_\ell} - \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_\ell \partial x_k} \right)}_{=0} dx_k \wedge dx_\ell \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung.** Die Gültigkeit von Satz 2 beruht wesentlich auf dem Schwarzschen Vertauschungssatz, der besagt, dass die partiellen Ableitungen reellwertiger Funktionen vertauschen. Der geometrische Hintergrund für diesen Tatbestand liegt darin, dass der Werteraum  $\mathbb{R}$  unserer Differentialformen „ungekrümmt“ ist.

**Aufgabe.** Ist  $\omega \in \Omega^r(M)$  und  $\mu \in \Omega^s(M)$ , so gilt

$$d(\omega \wedge \mu) = (d\omega) \wedge \mu + (-1)^r \cdot \omega \wedge (d\mu).$$

**Aussage 2<sup>+</sup>.** Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^\infty(M)$ , so gilt  $d(d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_r) = 0$ .

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich durch Kombination der Aufgabe mit Satz 2.  $\square$

**Satz 3.** Ist  $f : N \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, so gilt für alle  $\omega \in \Omega^r(M)$ :

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

*Beweis.* Für  $r = 0$  bedeutet die Behauptung einfach

$$f^*(d\varphi) = d(\varphi \circ f) \quad \text{für jedes } \varphi \in C^\infty(M),$$

was eine andere Beschreibung der Kettenregel ist.

Ist  $r \geq 1$ , so verwendet man für  $\omega$  und  $d\omega$  die lokale Darstellung und die Aufgabe dieses Abschnitts, um diesen Fall induktiv auf den zuerst diskutierten Fall  $r = 0$  zurückzuführen.  $\square$

**Bemerkung. Der de Rham'sche Kohomologie-Vektorraum.** Man definiert

$$\begin{aligned} Z^r(M) &:= \{ \omega \in \Omega^r(M) \mid d\omega = 0 \} \quad \text{für } r \in \mathbb{N}_0, \\ B^r(M) &:= \{ \omega \in \Omega^r(M) \mid \exists \eta \in \Omega^{r-1}(M) : \omega = d\eta \} \quad \text{für } r \in \mathbb{N} \text{ und} \\ B^0(M) &:= \{0\}. \end{aligned}$$

$Z^r(M)$  ist ein Untervektorraum von  $\Omega^r(M)$ , und (wegen  $d^2 \equiv 0$ ) ist  $B^r(M)$  ein Untervektorraum von  $Z^r(M)$ . Daher kann man den *r-ten de Rham'schen Kohomologie-Vektorraum*

$$H^r(M) := Z^r(M)/B^r(M)$$

bilden. Dieser hängt nicht von der  $C^\infty$ -Struktur von  $M$ , sondern nur von der Topologie von  $M$  ab. Ist z. B.  $M$  homöomorph zu einem sternförmigen Gebiet des  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $H^0(M)$  zu  $\mathbb{R}$  isomorph und  $H^r(M) = \{0\}$  (Poincarésches Lemma!) für jedes  $r \in \mathbb{N}$ . Die Differentialformen aus  $Z^r(M)$  bzw.  $B^r(M)$  heißen *geschlossen* bzw. *exakt*.

**Der Funktor  $H^r$ .** Ist  $f : N \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung, so gibt es für jedes  $r \in \mathbb{N}_0$  eine lineare Abbildung  $H^r(f) : H^r(M) \rightarrow H^r(N)$ , welche folgende Eigenschaft hat:

$$\forall \omega \in Z^r(M) : H^r(f)([\omega]) = [f^*\omega].$$

Die Zuordnung  $M \mapsto H^r(M)$ ,  $f \mapsto H^r(f)$  ist ein *kontravarianter Funktor*, d.h., es gilt

$$H^r(\text{id}_M) = \text{id}_{H^r(M)} \quad \text{und} \quad H^r(f \circ g) = H^r(g) \circ H^r(f).$$

#### 4.4 Volumenformen und orientierte Mannigfaltigkeiten

Es sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

**Beobachtung.** Sind  $(U, x)$  und  $(V, y)$  zwei Karten auf  $M$  mit  $U, V$  zusammenhängend und  $U \cap V \neq \emptyset$ , so ist die Determinante des Differentials des Kartenwechsels

$$\det(d_p(y \circ x^{-1})) \in \mathbb{R}$$

entweder für alle  $p \in U \cap V$  positiv, oder für alle  $p \in U \cap V$  negativ.

*Beweis.* Die Funktion  $\varphi : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \det(d_p(y \circ x^{-1}))$  ist offensichtlich stetig. Da sie wegen  $d_p(y \circ x^{-1}) \in \text{GL}(\mathbb{R}^m)$  auch nullstellenfrei ist, und  $U \cap V$  als Schnitt zusammenhängender Mengen selbst zusammenhängend ist, folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.  $\square$

Die Teile (a)–(c) der folgenden Definition vergleiche man mit Definition 1(b)–(d) aus Abschnitt 1.3.

##### Definition 1.

- (a) Zwei Karten  $(U, x)$  und  $(V, y)$  von  $M$  heißen *gleich orientiert*, wenn entweder  $U \cap V = \emptyset$  ist, oder für alle  $p \in U \cap V$  gilt:

$$\det(d_p(y \circ x^{-1})) > 0.$$

- (b) Ein Atlas  $\mathfrak{A}$  von  $M$  heißt *orientiert*, wenn je zwei Karten aus  $\mathfrak{A}$  gleich orientiert sind.

- (c) Ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ein orientierter Atlas von  $M$ , so heißt der „maximale orientierte Atlas“

$$\mathfrak{A} := \{ (U, x) \text{ } C^\infty\text{-Karte von } M \mid (U, x) \text{ ist mit allen } (U', x') \in \tilde{\mathfrak{A}} \text{ gleich orientiert} \}$$

eine *orientierte*  $C^\infty$ -Struktur auf  $M$ .

- (d) Ist  $M$  mit einer orientierten  $C^\infty$ -Struktur versehen, so heißt  $M$  *orientiert*; die Elemente der  $C^\infty$ -Struktur heißen *orientierte*  $C^\infty$ -Karten von  $M$ .  $M$  heißt *orientierbar*, wenn es eine orientierte  $C^\infty$ -Struktur auf  $M$  gibt.

- (e) Sind  $M$  und  $N$  orientierte Mannigfaltigkeiten, so heißt ein lokaler Diffeomorphismus  $f : M \rightarrow N$  *orientierungserhaltend*, wenn für jede orientierte Karte  $(U, x)$  von  $M$  und  $(V, y)$  von  $N$  mit  $f(U) \subset V$  gilt:

$$\forall p \in U : \det(d_p(y \circ f \circ x^{-1})) > 0.$$

##### Beispiele 1.

- (a) Jede Mannigfaltigkeit, die eine globale Karte besitzt, ist orientierbar. Insbesondere sind Vektorräume orientierbar.

- (b) Jede eindimensionale Mannigfaltigkeit ist orientierbar.
- (c) Jedoch ist der Totalraum des nicht-trivialen Linienbündels aus Abschnitt 2.7, Beispiel 2, das 2-dimensionale „unendlich ausgedehnte Möbiusband“, nicht orientierbar. Generell gibt es viele nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten von jeder Dimension  $\geq 2$ . Beispielsweise ist der reell-projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  für kein  $n \geq 2$  orientierbar.

**Aussage.**  $M$  ist genau dann orientierbar, wenn jede Zusammenhangskomponente von  $M$  orientierbar ist.

*Beweis.* Ist  $\mathfrak{A} = \{(U_i, x_i) \mid i \in I\}$  ein beliebiger  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ , so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Definitionsbereiche  $U_i$  der Karten zusammenhängend, und somit jeweils in einer Zusammenhangskomponente von  $M$  enthalten sind. Bezeichnen wir die Zusammenhangskomponenten von  $M$  mit  $M_j$  ( $j \in J$ ), so gilt daher  $\mathfrak{A} = \bigcup_{j \in J} \mathfrak{A}_j$ , wobei für jedes  $j \in J$

$$\mathfrak{A}_j := \{(U, x) \in \mathfrak{A} \mid U \subset M_j\}$$

ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M_j$  ist.

Da  $\mathfrak{A}$  offenbar genau dann orientiert ist, wenn alle  $\mathfrak{A}_j$  orientiert sind, folgt aus dieser Beschreibung von  $\mathfrak{A}$  die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.** Eine *Volumenform* auf einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Differentialform  $\omega \in \Omega^m(M)$  mit  $\omega_p \neq 0$  für alle  $p \in M$ .

**Beispiel 2.** Ist  $(U, x)$  eine Karte einer Mannigfaltigkeit  $M$ , so ist  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  eine Volumenform auf der Kartenumgebung  $U$ . Wie der folgende Satz zeigt, ergibt sich hieraus, dass  $U$  orientierbar ist.

**Bemerkung.** Ist auf einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  eine Volumenform  $\omega \in \Omega^m(M)$  gegeben, so können wir jede weitere Differentialform  $\mu \in \Omega^m(M)$  in der Form  $\mu = \varphi \cdot \omega$  mit einer eindeutig bestimmten Funktion  $\varphi \in C^\infty(M)$  schreiben, und zwar gilt: Ist für  $p \in M$  eine Basis  $(v_1, \dots, v_m)$  von  $T_p M$  gegeben, so ist  $\varphi(p) = \mu_p(v_1, \dots, v_m) / \omega_p(v_1, \dots, v_m)$ .  $\mu$  ist genau dann eine weitere Volumenform von  $M$ , wenn  $\varphi$  nullstellenfrei ist. Insbesondere:

**Definition 3.** Sei  $M$  eine orientierbare,  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \Omega^m(M)$  eine Volumenform auf  $M$ . Ist  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , so ist  $\iota_X \omega := \omega(X, \cdot, \dots, \cdot) \in \Omega^{m-1}(M)$  und daher  $d(\iota_X \omega) \in \Omega^m(M)$ . Also existiert eine Funktion  $\operatorname{div}^\omega X \in C^\infty(M)$  mit

$$\operatorname{div}^\omega X \cdot \omega = d(\iota_X \omega).$$

Die Funktion  $\operatorname{div}^\omega X$  heißt die *Divergenz* des Vektorfelds  $X$  bezüglich der Volumenform  $\omega$ .



**Aufgabe 1.** In der Situation von Definition 3 sei  $(U, x)$  eine derartige Karte von  $M$ , dass  $\omega|_U = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  gilt. Ferner sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  lokal dargestellt als

$$X|_U = \sum_{i=1}^m \varphi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit Funktionen  $\varphi_i \in C^\infty(U)$ . Zeige, dass dann gilt:

$$(\operatorname{div}^\omega X)|_U = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \varphi_i.$$

**Satz.** Sei  $M$  zusammenhängend. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $M$  ist orientierbar.
- (b) Es existiert eine Volumenform auf  $M$ .
- (c) Das Linienbündel  $\operatorname{Alt}^m(TM) \rightarrow M$  ist über  $M$  trivial.

Gelten sie, so gibt es auf  $M$  genau zwei verschiedene Orientierungen.

*Beweis.* Zu (a)  $\Rightarrow$  (b). Ist  $(U, x)$  eine beliebige Karte von  $M$ , so ist  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  offenbar eine Volumenform auf  $U$ . Ist  $(V, y)$  eine weitere Karte von  $M$  mit  $U \cap V = \emptyset$ , so gilt

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = \varphi \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)$$

mit einer  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ . Indem man in diese Gleichung die Gaußschen Basisfelder  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})$  einsetzt, ergibt sich

$$\varphi = (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m)(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}) = \det(dy_j(\frac{\partial}{\partial x_k}))_{j,k} = \det(d(y \circ x^{-1}))$$

und somit

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = \det(d(y \circ x^{-1})) \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m).$$

Man beachte: Sind die Karten gleich orientiert, so ist die Funktion  $\varphi$  positiv.

Weil  $M$  orientierbar ist, existiert eine Überdeckung von  $M$  durch Karten  $(U_i, x_i)_{i \in I}$ , die paarweise gleich orientiert sind. Nach dem Vorangegangenen existiert auf  $U_i$  jeweils eine Volumenform  $\omega_i$ , und für  $i, j \in I$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  ist  $\omega_j|(U_i \cap U_j) = \varphi_{ij} \cdot \omega_i|(U_i \cap U_j)$  mit einer positiven Funktion  $\varphi_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j)$ .

Nach dem Theorem über  $C^\infty$ -Zerlegungen der Eins (Abschnitt 1.8) existiert eine an  $(U_i)_{i \in I}$  angepasste Zerlegung der Eins  $(f_i)_{i \in I}$ . Wir definieren nun

$$\omega := \sum_{i \in I} f_i \cdot \omega_i.$$

Wegen der Eigenschaften der Zerlegung der Eins ist  $\omega$  eine wohldefinierte Differentialform vom Grad  $m$  auf  $M$ , und für jedes  $p \in M$  gilt

$$\omega_p = \sum_{i \in I} f_i(p) \cdot (\omega_i)_p = \underbrace{\left( \sum_{i \in I_p} f_i(p) \cdot \varphi_{i_0, i}(p) \right)}_{>0} \cdot (\omega_{i_0})_p \neq 0,$$

wobei wir  $I_p := \{i \in I \mid p \in U_i\}$  setzen und  $i_0 \in I_p$  fixieren. Also ist  $\omega$  eine Volumenform auf  $M$ .

Zu (b)  $\Rightarrow$  (c). Ist  $\omega$  eine Volumenform von  $M$ , so ist  $\omega$  ein nullstellenfreier Schnitt im Linienbündel  $\text{Alt}^m(M) \rightarrow M$ . Dieses ist daher nach der Aufgabe 1 aus Abschnitt 2.7 trivial.

Zu (c)  $\Rightarrow$  (a). Weil das Linienbündel  $\text{Alt}^m(M) \rightarrow M$  trivial ist, besitzt es nach Aufgabe 1 aus Abschnitt 2.7 einen globalen, nullstellenfreien Schnitt  $\omega$ ;  $\omega$  ist eine Volumenform auf  $M$ .

Ist  $(U, x)$  eine Karte von  $M$ , so sind  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  und  $\omega|_U$  zwei Volumenformen auf  $U$ , daher existiert eine nullstellenfreie  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi_x : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = \varphi_x \cdot \omega|_U$ ; und zwar ist nach der analogen Rechnung wie im Beweisteil (a)  $\Rightarrow$  (b):  $\varphi_x = 1/\omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ . Ist  $U$  zusammenhängend, so gilt entweder  $\varphi_x > 0$  oder  $\varphi_x < 0$ , und wir bezeichnen mit  $\varepsilon_x \in \{\pm 1\}$  das Vorzeichen von  $\varphi_x$ .

Sei weiter  $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(u_1, \dots, u_m) \mapsto (u_1, \dots, u_{m-1}, -u_m)$  die Spiegelung in  $\mathbb{R}^m$  an der Hyperebene  $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ . Man beachte, dass  $\rho$  ein Vektorraum-Isomorphismus mit  $\det(\rho) = -1$  ist. Daher ist für jede Karte  $(U, x)$  von  $M$  die Abbildung  $\tilde{x} := \rho \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine weitere Karte von  $M$ , und zwar gilt  $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}$  für  $k \leq m-1$ , aber  $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} = -\frac{\partial}{\partial x_m}$ . Deshalb ist  $\varphi_{\tilde{x}} = -\varphi_x$ , also  $\varepsilon_{\tilde{x}} = -\varepsilon_x$ .

Es sei nun  $\mathfrak{A}$  ein  $C^\infty$ -Atlas von  $M$ , so dass  $U$  für alle  $(U, x) \in \mathfrak{A}$  zusammenhängend ist. Dann definieren wir

$$\tilde{\mathfrak{A}} := \{(U, x) \in \mathfrak{A} \mid \varepsilon_x = 1\} \cup \{(U, \rho \circ x) \mid (U, x) \in \mathfrak{A}, \varepsilon_x = -1\}.$$

Nach unseren bisherigen Überlegungen ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ein Atlas von  $M$ , und es gilt  $\varepsilon_x = 1$  für alle  $(U, x) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Daher sind je zwei Karten aus  $\tilde{\mathfrak{A}}$  gleich orientiert, also ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ein orientierter Atlas für  $M$ .  $\square$

**Aufgabe 2.** Ist  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist die  $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $TM$  in jedem Falle orientierbar.

# Kapitel 5

## Integration auf Mannigfaltigkeiten

### 5.1 Integration von Differentialformen im $\mathbb{R}^r$

Ist  $G \subset \mathbb{R}^r$  eine offene nichtleere Teilmenge und  $\omega \in \Omega^r(G)$  ( $r > 0$ ), so existiert genau eine Funktion  $\varphi \in C^\infty(G)$  mit  $\omega = \varphi \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r$ , wenn  $x_1, \dots, x_r$  die kanonischen Koordinatenfunktionen des  $\mathbb{R}^r$  bezeichnen. Für jede kompakte Menge  $K \subset G$  definieren wir dann das Integral

$$\int_K \omega := \int_K \varphi d\lambda^r, \quad (*)$$

wobei  $d\lambda^r$  die (Riemann- oder Lebesgue-)Integration bezüglich des üblichen Volumenmaßes im  $\mathbb{R}^r$  signalisieren soll.

**Ein Spezialfall des Satzes von Stokes.** Ist in der beschriebenen Situation  $Q \subset G$  ein kompakter Quader (d.h.  $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_r, b_r]$  mit  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  und  $a_i \leq b_i$  für alle  $i = 1, \dots, r$ ), so gilt für  $\omega \in \Omega^{r-1}(G)$

$$\text{Tr}(\omega) := \overline{\{p \in G \mid \omega_p \neq 0\}} \subset Q^\circ \implies \int_Q d\omega = 0;$$

hierbei ist  $Q^\circ := ]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_r, b_r[$  der *offene Kern* von  $Q$ .

*Beweis.* Gemäß der Aussage aus Abschnitt 4.2 gilt für  $\omega = \sum_i a_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_r$  mit Funktionen  $a_i \in C^\infty(G)$ , wobei  $\widehat{dx}_i$  wieder die Auslassung von  $dx_i$  aus dem Produkt bezeichnet. Nach Aussage 2 aus Abschnitt 4.3 ist dann

$$d\omega = \sum_i da_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_r = \sum_i (-1)^{i-1} \cdot \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r.$$

Nun integriert man nach (\*) mittels des Satzes von Fubini, und zwar bestimmt man  $\int_Q \frac{\partial a_i}{\partial x_i} d\lambda^r$ , indem man als erstes bezüglich der Variablen  $x_i$  integriert; diese Integration ergibt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bereits 0, weil  $a_i$  auf dem Rand von  $Q$  verschwindet.  $\square$

## 5.2 Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Wir übertragen nun das in Abschnitt 5.1 eingeführte „Integral für lokale Differentialformen“ (lokal im Sinne von: auf Gebieten des  $\mathbb{R}^r$  definiert) auf Mannigfaltigkeiten. Dafür definieren wir zunächst einen Integrationsprozeß, der auf eine bestimmte „Parametrisierung“, d.h. auf eine  $C^\infty$ -Abbildung  $f : G \rightarrow M$  mit einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^r$ , bezogen ist. Anschließend untersuchen wir, unter welchen Voraussetzungen der Wert dieses Integral unabhängig ist von einem Wechsel der Parametrisierung. Das Ergebnis dieser Untersuchung wird es uns ermöglichen, uns für die Integration von  $m$ -Formen von der Wahl der Abbildung  $f$  zu lösen, und so ein Integral von Differentialformen vom Grad  $m$  auf Mannigfaltigkeiten zu definieren.

Im Folgenden sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ .

**Definition 1. Integration längs Abbildungen.** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^r$  ( $r > 0$ ) eine offene nicht-leere Teilmenge,  $f : G \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und  $\omega \in \Omega^r(M)$ . Dann setzen wir für jede kompakte Teilmenge  $K \subset G$

$$\int_{f|K} \omega := \int_K f^* \omega ;$$

wobei das rechte Integral nach Abschnitt 5.1 zu berechnen ist. Ist insbesondere  $f = \alpha : J \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Kurve und  $Q = [a, b] \subset J$ , so ist dadurch für jede 1-Form  $\omega \in \Omega^1(M)$  das *Kurvenintegral*

$$\int_{\alpha|_{[a,b]}} \omega = \int_a^b \omega_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t)) dt$$

eingeführt.

**Aussage 1.** In der Situation der Definition 1 ist

$$\Omega^r(M) \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto \int_{f|K} \omega \quad \text{eine Linearform.}$$

**Satz 1. Invarianz des Integrals gegenüber Parametertransformationen.** Es seien  $G$  und  $\tilde{G}$  offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^r$ ,  $F : \tilde{G} \rightarrow G$  ein Diffeomorphismus und es werde vorausgesetzt, dass  $\det(d_p F)$  ein von  $p \in \tilde{G}$  unabhängiges Vorzeichen habe, nennen wir es  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  ( $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow F$  orientierungserhaltend). Ist dann  $f : G \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und  $\tilde{K} \subset \tilde{G}$  eine kompakte Teilmenge, so gilt

$$\forall \omega \in \Omega^r(M) : \int_{(f \circ F)|\tilde{K}} \omega = \varepsilon \cdot \int_{f|F(\tilde{K})} \omega .$$

*Beweis.* Es sei  $\omega \in \Omega^r(M)$ . Wir bezeichnen mit  $(e_1, \dots, e_r)$  die Standard-Basis von  $\mathbb{R}^r$ , und mit  $x_1, \dots, x_r$  die zugehörigen Koordinatenfunktionen des  $\mathbb{R}^r$ , außerdem setzen wir  $\varphi := (f^* \omega)(e_1, \dots, e_r)$ . Dann gilt  $f^* \omega = \varphi \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_r$  und  $(f \circ F)^* \omega = F^*(f^* \omega) = (\varphi \circ F) \cdot F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_r)$ . Da für Vektoren  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^r$  gilt

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_r)_p(v_1, \dots, v_r) = \det(v_1, \dots, v_r),$$

erhält man weiter:

$$\begin{aligned}
 F^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r)_p(v_1, \dots, v_r) &= (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r)_{F(p)}(F_*v_1, \dots, F_*v_r) \\
 &= \det(d_p F(v_1), \dots, d_p F(v_r)) = \det(d_p F) \cdot \det(v_1, \dots, v_r) \\
 &= \det(d_p F) \cdot (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r)_p(v_1, \dots, v_r) .
 \end{aligned}$$

Mit dem Transformationssatz der Analysis ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
 \int_{(f \circ F)|_{\tilde{K}}} \omega &= \int_{\tilde{K}} (\varphi \circ F) \cdot F^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r) = \int_{\tilde{K}} (\varphi \circ F)(p) \cdot \det(d_p F) \, d\lambda^r(p) \\
 &= \varepsilon \cdot \int_{\tilde{K}} (\varphi \circ F)(p) \cdot |\det(d_p F)| \, d\lambda^r(p) \\
 &= \varepsilon \cdot \int_{F(\tilde{K})} \varphi \, d\lambda^r = \varepsilon \cdot \int_{f|_{F(\tilde{K})}} \omega . \quad \square
 \end{aligned}$$

Von jetzt an sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale orientierte  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit (siehe Abschnitt 4.4) und  $\mathfrak{A}$  der zugehörige orientierte Atlas. Für jedes  $r \in \{0, \dots, m\}$  bezeichne  $\Omega_c^r(M)$  den  $C^\infty(M)$ -Modul der  $r$ -Differentialformen  $\omega \in \Omega^r(M)$  mit kompaktem Träger

$$\text{Tr}(\omega) := \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}} .$$

Ist  $M$  kompakt, so ist natürlich  $\Omega_c^r(M) = \Omega^r(M)$ .

**Aussage 2.** Für alle orientierten Karten  $(U, x), (V, y) \in \mathfrak{A}$  und alle Differentialformen  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  mit  $K := \text{Tr}(\omega) \subset U \cap V$  gilt

$$\int_{x^{-1}|_x(K)} \omega = \int_{y^{-1}|_y(K)} \omega .$$

*Beweis.* Man wende Satz 1 in folgender Situation an:  $\tilde{G} := x(U \cap V)$ ,  $G := y(U \cap V)$  und  $F := y \circ x^{-1}$ . Da die Karten  $(U, x)$  und  $(V, y)$  gleich orientiert sind, ist  $\varepsilon = 1$ .  $\square$

**Satz 2.** Es existiert genau eine  $\mathbb{R}$ -Linearform

$$\lambda_M : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R} ,$$

so dass für jede orientierte Karte  $(U, x) \in \mathfrak{A}$  und jede Differentialform  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  gilt

$$K := \text{Tr}(\omega) \subset U \implies \lambda_M(\omega) = \int_{x^{-1}|_x(K)} \omega . \quad (*)$$

Wegen dieser Gleichung nennt man für alle  $\omega \in \Omega_c^m(M)$

$$\int_M \omega := \lambda_M(\omega)$$

das *Integral von  $\omega$* .

*Beweis. Eindeutigkeit von  $\lambda_M$ .* Wir setzen für diesen Beweisteil voraus, dass eine derartige Linearform  $\lambda_M$  existiert. Sei  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  und  $K := \text{Tr}(\omega)$ . Dann existieren endlich viele Karten  $(U_\alpha, x_\alpha) \in \mathfrak{A}$  (etwa  $\alpha = 1, \dots, k$ ), so dass  $K \subset \bigcup_{\alpha=1}^k U_\alpha$  ist. Sei außerdem  $U_0 := M \setminus K$ . Dann ist  $(U_\alpha)_{\alpha=0, \dots, k}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Ist nun  $(\varphi_\alpha)_{\alpha=0, \dots, k}$  eine  $C^\infty$ -Zerlegung der Eins zu dieser Überdeckung (siehe Abschnitt 1.8), so ist  $\omega = \sum_{\alpha=1}^k \varphi_\alpha \cdot \omega$  (denn für  $p \in \text{Tr}(\omega)$  ist  $\varphi_0(p) = 0$ ) und daher  $\lambda_M(\omega) = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_M(\varphi_\alpha \cdot \omega)$ . Weiterhin gilt jeweils  $K_\alpha := \text{Tr}(\varphi_\alpha \omega) \subset \text{Tr}(\varphi_\alpha) \cap K \subset U_\alpha \cap K$ , weswegen insbesondere  $\varphi_\alpha \omega \in \Omega_c^m(M)$  ist. Daher gilt nach (\*)

$$\lambda_M(\omega) = \sum_{\alpha=1}^k \int_{x_\alpha^{-1}|_{x_\alpha(K_\alpha)}} \varphi_\alpha \cdot \omega, \quad (\dagger)$$

womit gezeigt ist, dass  $\lambda_M(\omega)$  durch (\*) festgelegt ist.

*Existenz von  $\lambda_M$ .* Wir erheben Formel ( $\dagger$ ) zur Definition von  $\lambda_M$ , genauer: Ist  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  gegeben, so wählen wir endlich viele Karten  $(U_\alpha, x_\alpha) \in \mathfrak{A}$  und dazu Funktionen  $\varphi_\alpha$  wie in dem ersten Teil des Beweises und definieren damit  $\lambda_M(\omega)$  gemäß ( $\dagger$ ). Nun ist die Wohldefiniertheit von  $\lambda_M(\omega)$  nachzuweisen. Dazu nehmen wir an, dass ein anderes derartiges endliches System von Karten  $(V_\beta, y_\beta) \in \mathfrak{A}$  und von Funktionen  $\psi_\beta$  gegeben ist. Dann gilt jeweils  $\varphi_\alpha \omega = \sum_\beta \psi_\beta \varphi_\alpha \omega$  und  $\psi_\beta \omega = \sum_\alpha \psi_\beta \varphi_\alpha \omega$  und daher nach Aussage 2 wegen  $K_{\alpha\beta} := \text{Tr}(\psi_\beta \varphi_\alpha \omega) \subset U_\alpha \cap V_\beta$

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \int_{x_\alpha^{-1}|_{x_\alpha(K_\alpha)}} \varphi_\alpha \omega &= \sum_{\alpha, \beta} \int_{x_\alpha^{-1}|_{x_\alpha(K_\alpha)}} \psi_\beta \varphi_\alpha \omega \stackrel{\text{Tr}(\psi_\beta \varphi_\alpha \omega) \subset K_{\alpha\beta}}{=} \sum_{\alpha, \beta} \int_{x_\alpha^{-1}|_{x_\alpha(K_{\alpha\beta})}} \psi_\beta \varphi_\alpha \omega \\ &\stackrel{(!)}{=} \sum_{\alpha, \beta} \int_{y_\alpha^{-1}|_{y_\alpha(K_{\alpha\beta})}} \psi_\beta \varphi_\alpha \omega = \sum_\beta \int_{y_\alpha^{-1}|_{y_\alpha(K_\beta)}} \psi_\beta \omega. \end{aligned}$$

Damit ist die Wohldefiniertheit von  $\lambda_M$  nachgewiesen.

*Zur Linearität von  $\lambda_M$ .* Für  $c \in \mathbb{R}$  folgt  $\lambda_M(c\omega) = c\lambda_M(\omega)$  sofort mit ( $\dagger$ ). Sind  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_c^m(M)$ , so wähle man im ersten Teil dieses Beweises die Familie der Karten  $(U_\alpha, x_\alpha)$  derartig, dass  $\text{Tr}(\omega_1) \cup \text{Tr}(\omega_2) \subset \bigcup_{\alpha=1}^k U_\alpha$  ist. Dann gilt ( $\dagger$ ) mutatis mutandis sowohl für  $\omega_1$  als auch für  $\omega_2$ , womit auch  $\lambda_M(\omega_1 + \omega_2) = \lambda_M(\omega_1) + \lambda_M(\omega_2)$  folgt.  $\square$

**Aussage 3.** Ein Wechsel der Orientierung auf der Mannigfaltigkeit  $M$  bewirkt einen Vorzeichenwechsel für die Integrale.

*Beweis.* Man kopiere den letzten Beweis für die Wohldefiniertheit von  $\lambda_M$ , wobei allerdings die Karten  $(V_\beta, y_\beta)$  nun die zu  $\mathfrak{A}$  entgegengesetzte Orientierung haben sollen. Nach Satz 1 ergibt sich dann an der Stelle (!) in der Rechnung ein Vorzeichenwechsel, denn aufgrund dieses Satzes ist die „Integralgleichung“ von Aussage 2 im Falle von entgegengesetzt orientierten Karten  $(U, x)$  und  $(V, y)$  zu modifizieren zu:

$$\int_{x^{-1}|_x(K)} \omega = - \int_{y^{-1}|_y(K)} \omega. \quad \square$$

**Satz von Stokes (für unberandete Mannigfaltigkeiten).** Ist  $M$  eine orientierte  $m$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, so gilt

$$\forall \omega \in \Omega_c^{m-1}(M) : \int_M d\omega = 0.$$

*Beweis.* Für jedes  $\alpha \in K := \text{Tr}(\omega)$  wählen wir eine Karte  $(U_\alpha, x_\alpha) \in \mathfrak{A}$  mit  $\alpha \in U_\alpha$ ,  $x_\alpha(\alpha) = 0$  und  $Q := [-1, 1]^m \subset x(U_\alpha)$ . Dann bilden die Urbilder  $G_\alpha := x_\alpha^{-1}(Q^\circ)$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Somit existiert eine endliche Teilmenge  $A \subset K$ , so dass  $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  gilt. Weiterhin setzen wir  $G_0 := M \setminus K$  und wählen eine Zerlegung der Eins  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A \cup \{0\}}$  zu der offenen Überdeckung  $(G_\alpha)_{\alpha \in A \cup \{0\}}$  von  $M$ . Dann gilt  $\omega = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha \omega$  und somit auch  $d\omega = \sum_{\alpha \in A} d(\varphi_\alpha \omega)$ , wobei jeweils  $K_\alpha := \text{Tr}(d(\varphi_\alpha \omega)) \subset G_\alpha \subset U_\alpha$  und somit  $x_\alpha(K_\alpha) = \text{Tr}(d((x_\alpha^{-1})^*(\varphi_\alpha \omega))) \subset Q^\circ$  ist. Wegen der Linearität des Integrals gilt nach Satz 2:

$$\int_M d\omega = \sum_{\alpha \in A} \int_M d(\varphi_\alpha \omega) = \sum_{\alpha \in A} \int_{x_\alpha(K_\alpha)} (x_\alpha^{-1})^* d(\varphi_\alpha \omega) = \sum_{\alpha \in A} \int_{Q^\circ} d((x_\alpha^{-1})^*(\varphi_\alpha \omega)).$$

Nach dem Spezialfall des Stokeschen Satzes aus Abschnitt 5.1 verschwinden die Integrale in der letzten Summe.  $\square$

**Transformationsatz.** Ist  $N$  eine weitere orientierte  $m$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow N$  ein orientierungserhaltender  $C^\infty$ -Diffeomorphismus, so gilt

$$\forall \omega \in \Omega_c^m(N) : \int_M f^* \omega = \int_N \omega.$$

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{A}_M$  bzw.  $\mathfrak{A}_N$  den orientierten Atlas von  $M$  bzw.  $N$  und mit  $\lambda_M$  bzw.  $\lambda_N$  die Linearform aus Satz 2 für  $M$  bzw.  $N$ . Dann haben wir zu zeigen, dass die Linearform

$$\lambda : \Omega_c^m(N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \lambda_M(f^* \omega)$$

mit  $\lambda_N$  übereinstimmt. Nach Satz 2 genügt es, für  $(U, x) \in \mathfrak{A}_N$  und  $\omega \in \Omega_c^m(N)$  mit  $K := \text{Tr}(\omega) \subset U$

$$\lambda(\omega) = \lambda_N(\omega) \quad (\diamond)$$

zu beweisen. Dazu beachte man, dass  $(f^{-1}(U), x \circ f) \in \mathfrak{A}_M$  und  $\text{Tr}(f^* \omega) = f^{-1}(K) \subset f^{-1}(U)$  ist. Daher folgt  $(\diamond)$  folgendermaßen mit der Charakterisierung  $(*)$  von  $\lambda_M$  bzw.  $\lambda_N$  aus Satz 2:

$$\begin{aligned} \lambda(\omega) &= \lambda_M(f^* \omega) \stackrel{(*)}{=} \int_{(x \circ f)^{-1}|_{(x \circ f)^{-1}(K)}} f^* \omega \\ &= \int_{x(K)} ((x \circ f)^{-1})^* f^* \omega = \int_{x(K)} (x^{-1})^* \omega = \int_{x^{-1}|_{x(K)}} \omega \stackrel{(*)}{=} \lambda_N(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung.** Der *Kroneckersche Integralsatz* besagt in Verallgemeinerung des Transformationsatzes: Seien  $M$  und  $N$  zusammenhängende, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeiten derselben Dimension  $m$  und  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Dann existiert eine Zahl  $\text{deg}(f) \in \mathbb{Z}$ , der sogenannte *Brouwersche Abbildungsgrad* von  $f$ , so dass gilt:

$$\forall \omega \in \Omega_c^m(N) : \int_M f^* \omega = \text{deg}(f) \cdot \int_N \omega.$$

Aus dem Transformationsatz ergibt sich offenbar: Ist  $f$  ein Diffeomorphismus, so gilt

$$\text{deg}(f) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } f \text{ orientierungserhaltend ist,} \\ -1, & \text{wenn } f \text{ orientierungsändernd ist.} \end{cases}$$

**Volumenmessung auf Mannigfaltigkeiten.** Auf einer orientierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  wird eine Volumen-Messung durch Spezifikation einer Volumenform  $\mu$  etabliert. Damit führt man zunächst die Integration von Funktionen  $\varphi \in C^\infty(M)$  mit kompaktem Träger ein:

$$\int_M \varphi := \int_M \varphi \cdot \mu ,$$

wobei das rechte Integral am Anfang dieses Abschnittes eingeführt wurde. Ohne Schwierigkeit läßt sich dann das „Integral“ auf stetige Funktionen mit kompaktem Träger ausdehnen (da man jede derartige Funktion gleichmäßig durch  $C^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger approximieren kann, siehe Aufgabe 2 aus Abschnitt 1.8). Damit hat man den Einstieg in die allgemeine Integrationstheorie á la Bourbaki geschafft (vgl. J. DIEUDONNÉ: *Treatise on Analysis*, Bd. 2). Insbesondere kann man dann jeder kompakten Menge  $K \subset M$  ein Volumen zuordnen. – Aus der letzten Version des Satzes von Stokes folgt insbesondere der

**Integralsatz von Gauß.** Es sei  $M$  eine orientierbare  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jede Volumenform  $\mu$  von  $M$  und jedes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mit kompaktem Träger

$$\int_M \operatorname{div}^\mu X \cdot \mu = 0 ,$$

siehe Definition 3 aus Abschnitt 4.4 zur Definition der Divergenz.

### 5.3 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Um den Satz von Stokes in maximaler Allgemeinheit formulieren zu können, müssen wir unseren Mannigfaltigkeitsbegriff erweitern, indem wir Mannigfaltigkeiten zulassen, die einen „Rand“ besitzen. Dies erreichen wir, indem wir als „lokale Modelle“ (das heißt, als die Bilder der Karten) nicht mehr nur offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^m$ , sondern offene Teilmengen des (*abgeschlossenen*) *oberen Halbraums*

$$\mathbb{H}^m := \{ (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_m \geq 0 \}$$

zulassen. Indem wir  $\mathbb{H}^m$  als topologischen Teilraum von  $\mathbb{R}^m$  auffassen, ist klar, was die offenen Teilmengen von  $\mathbb{H}^m$  sind, und wann eine Abbildung nach  $\mathbb{H}^m$  stetig bzw. ein Homöomorphismus ist. Ferner ist durch Anwendung der Analysis auf dem  $\mathbb{R}^m$  klar, wann eine Abbildung auf  $\mathbb{H}^m$  differenzierbar bzw. ein Diffeomorphismus ist.

**Definition 1.** Es sei  $M$  ein separabler Hausdorffraum und  $m \in \mathbb{N}$ .

- (a) Eine *berandete Karte* auf einer offenen Teilmenge  $U$  von  $M$  ist ein Homöomorphismus  $x : U \rightarrow \mathbb{H}^m$  in  $\mathbb{H}^m$ .
- (b) Zwei berandete Karten  $x : U \rightarrow \mathbb{H}^m$  und  $y : V \rightarrow \mathbb{H}^m$  heißen *verträglich*, wenn entweder  $U \cap V = \emptyset$  ist, oder die Koordinatentransformation

$$y \circ x^{-1} : x(U_1 \cap U_2) \rightarrow y(U_1 \cap U_2)$$

ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist.



- (c) Ein *berandeter Atlas* von  $M$  ist eine Menge  $\mathfrak{A}$  von miteinander verträglichen berandeten Karten, so dass es für jedes  $p \in M$  ein  $(x : U \rightarrow \mathbb{H}^m) \in \mathfrak{A}$  mit  $p \in U$  gibt.
- (d) Ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ein berandeter Atlas von  $M$ , so nennen wir den „maximalen“ berandeten Atlas  $\mathfrak{A}$ , der aus allen zu  $\tilde{\mathfrak{A}}$  verträglichen berandeten Karten besteht, eine *berandete  $C^\infty$ -Struktur* auf  $M$ .
- (e) Ist auf  $M$  eine berandete  $C^\infty$ -Struktur ausgezeichnet, so nennen wir  $M$  eine  *$m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand*.

Wir werden im Folgenden die für Mannigfaltigkeiten eingeführten Begriffe mutatis mutandis auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand  $M$  anwenden. Insbesondere konstruieren wir für  $p \in M$  den Tangentialraum  $T_p M$ ; zu beachten ist, dass dieser auch in den Randpunkten von  $M$  (d.h. in den Punkten  $p \in M$  mit  $x_m(p) = 0$  für eine Karte  $(U, x) \in \mathcal{U}(p, M)$ ) ein voller, mittels  $T_p x : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$  zu  $\mathbb{R}^m$  diffeomorpher Vektorraum (und nicht etwa nur ein Halbraum) ist.

### Beispiele 1.

- (a) Jede Mannigfaltigkeit im Sinne von Abschnitt 1.3 ist auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand.
- (b)  $\mathbb{H}^m$  ist eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Allgemeiner: Ist  $V$  ein  $m$ -dimensionaler Vektorraum und  $\lambda \in V^* \setminus \{0\}$ , so ist der abgeschlossene Halbraum  $\{v \in V \mid \lambda(v) \geq 0\}$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.
- (c) Jedes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ist eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.
- (d) Der *abgeschlossene Einheitsball*

$$B^m := \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| \leq 1\}$$

ist eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.

- (e) Ist  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, und  $N$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, so ist  $M \times N$  eine  $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.

(Will man auch das Produkt  $M_1 \times M_2$  zweier Mannigfaltigkeiten mit Rand betrachten, tritt eine technische Schwierigkeit auf, weil  $\mathbb{H}^{m_1} \times \mathbb{H}^{m_2}$  kein Halbraum, sondern eher ein „Viertelraum“ ist. Um  $M_1 \times M_2$  zu behandeln, kann man entweder eine analoge Theorie für „Mannigfaltigkeiten mit Kanten“ entwickeln, oder man verwendet einen nicht-differenzierbaren Homöomorphismus  $\mathbb{H}^{m_1} \times \mathbb{H}^{m_2} \rightarrow \mathbb{H}^{m_1+m_2}$ , um die Kanten zu „glätten“. Wir verfolgen diese Idee hier nicht weiter.)

**Aussage 1.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand,  $p \in M$  und  $x : U \rightarrow \mathbb{H}^m$  und  $y : V \rightarrow \mathbb{H}^m$  zwei berandete Karten von  $M$  mit  $p \in U \cap V$ . Dann gilt

$$x_m(p) = 0 \iff y_m(p) = 0.$$

*Beweis.* Die inneren Punkte  $u$  von  $\mathbb{H}^m$ , also die Elemente der Menge  $(\mathbb{H}^m)^o := \{(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_m > 0\}$ , lassen sich dadurch eindeutig charakterisieren, dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass die  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(u)$  von  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{H}^m$  enthalten ist. Deshalb bildet jeder Diffeomorphismus offener Teilmengen von  $\mathbb{H}^m$  innere Punkte von  $\mathbb{H}^m$  auf innere Punkte ab, und deshalb auch Randpunkte (d.h. die Elemente von  $\mathbb{H}^m \setminus (\mathbb{H}^m)^o = \{(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_m = 0\}$ ) auf Randpunkte.

Die Behauptung folgt, indem man diesen Tatbestand auf den Diffeomorphismus  $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  anwendet.  $\square$

**Definition 2.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein Punkt  $p \in M$  heißt ein *Randpunkt* von  $M$ , wenn für eine (und damit nach Aussage 1 für jede) berandete Karte  $x : U \rightarrow M$  mit  $p \in U$  gilt:  $x_m(p) = 0$ . Die Menge der Randpunkte von  $M$  wird der *Rand von  $M$*  genannt und mit  $\partial M$  bezeichnet.

### Beispiele 2.

- (a) Eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $M$  ist genau dann eine Mannigfaltigkeit ohne Rand (d.h. eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit im Sinne von Abschnitt 1.3), wenn  $\partial M = \emptyset$  gilt.
- (b)  $\partial \mathbb{H}^m = \{(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_m = 0\} = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ . Ist  $V$  ein Vektorraum und  $\lambda \in V^* \setminus \{0\}$ , so ist der Rand des abgeschlossenen Halbraums  $\{v \in V \mid \lambda(v) \geq 0\}$  die Hyperebene  $\lambda^{-1}(\{0\}) = \{v \in V \mid \lambda(v) = 0\}$ .
- (c) Ist  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , so ist  $\partial([a, b]) = \{a, b\}$ ,  $\partial([a, b[) = \{a\}$ ,  $\partial(]a, b]) = \{b\}$  und  $\partial(]a, b[) = \emptyset$ .
- (d) Der Rand des abgeschlossenen Einheitsballs  $B^m$  ist die Sphäre  $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ .
- (e) Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand, und  $N$  eine Mannigfaltigkeit ohne Rand, so gilt  $\partial(M \times N) = (\partial M) \times N$ .

**Aussage 2.** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist der Rand  $\partial M$  von  $M$  eine abgeschlossene,  $(m-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$  ohne Rand. Ist  $M$  kompakt, so auch  $\partial M$ .

*Beweis.* Sei  $(U, x)$  eine berandete Karte von  $M$ . Dann ist  $\partial M \cap U = \{p \in U \mid x_m(p) = 0\}$  eine gleichungsdefinierte,  $(m-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand von  $U$ . Nach der Folgerung 1 aus Abschnitt 2.6 (Lokale Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten) folgt, dass  $\partial M$  eine  $(m-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand von  $M$  ist.

Ist  $p \in M \setminus \partial M$  und  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$ , so ist  $x^{-1}(x(U) \cap \{u \in \mathbb{R}^m \mid u_m > 0\})$  eine offene Umgebung von  $p$  in  $M \setminus \partial M$ . Daher ist  $M \setminus \partial M$  offen in  $M$ , und somit  $\partial M$  abgeschlossen in  $M$ .

Ist  $M$  kompakt, so ist daher die abgeschlossene Teilmenge  $\partial M$  von  $M$  ebenfalls kompakt.  $\square$

**Vektoren, die nach innen oder nach außen zeigen.** Sei  $p \in \partial M$  und  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$  eine Karte. Für einen Vektor  $v \in T_p M$  gilt dann offenbar genau dann  $v \in T_p(\partial M)$ , wenn  $d_p x_m(v) = 0$  ist. Wir sagen im Folgenden:

$$v \text{ zeigt nach } \left\{ \begin{array}{l} \text{innen} \\ \text{außen} \end{array} \right\}, \text{ wenn } \left\{ \begin{array}{l} d_p x_m(v) > 0 \\ d_p x_m(v) < 0 \end{array} \right\} \text{ gilt.}$$

Diese Begriffsbildung ist von der Wahl der Karte  $(U, x)$  unabhängig.

*Beweis.* Seien  $(U, x), (V, y)$  zwei berandete Karten von  $M$  mit  $p \in U \cap V$ . Dann gilt

$$d_p y_m(v) = d_p(y_m \circ x^{-1} \circ x)(v) = d_{x(p)}(y_m \circ x^{-1})(d_p x(v)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(y_m \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p)) \cdot d_p x_i(v).$$

Für  $i \leq m-1$  und hinreichend kleine  $t$  ist  $x^{-1}(x(p) + t e_i) \in \partial M$  und daher  $(y_m \circ x^{-1})(x(p) + t e_i) = 0$ . Somit ist für  $t \leq m-1$ :  $\frac{\partial(y_m \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p)) = 0$ . Andererseits gilt für die Funktion  $f(t) := (y_m \circ x^{-1})(x(p) + t e_m)$ :  $f(0) = 0$  und für alle hinreichend kleinen  $t \geq 0$ :  $f(t) \geq 0$ . Daher ist  $\frac{\partial(y_m \circ x^{-1})}{\partial x_m}(x(p)) = f'(0) \geq 0$ . Wäre  $\frac{\partial(y_m \circ x^{-1})}{\partial x_m}(x(p)) = 0$ , so wäre  $d_{x(p)}(y_m \circ x^{-1}) = 0$  im Widerspruch dazu, dass  $y \circ x^{-1}$  ein Diffeomorphismus ist. Also gilt  $\frac{\partial(y_m \circ x^{-1})}{\partial x_m}(x(p)) > 0$ . Damit ergibt sich

$$d_p y_m(v) = \underbrace{\frac{\partial(y_m \circ x^{-1})}{\partial x_m}(x(p))}_{>0} \cdot d_p x_m(v).$$

Also ist  $d_p y_m(v)$  genau dann größer (kleiner) als Null, wenn  $d_p x_m(v)$  größer (kleiner) als Null ist.  $\square$

**Beispiel 3.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand,  $p \in \partial M$  und  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$ . Dann ist das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x_k}|_{(\partial M \cap U)}$  für  $1 \leq k \leq m-1$  tangential zu  $\partial M$ , wohingegen das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial x_m}|_{(\partial M \cap U)}$  an jeder Stelle nach innen zeigt.

**Aussage 3.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt:

- Es existiert ein Vektorfeld  $N \in \mathfrak{X}(M)$ , so dass für jedes  $p \in \partial M$  der Vektor  $N_p \in T_p M$  nach innen (außen) zeigt. Insbesondere ist  $N|_{\partial M}$  nullstellenfrei.
- Ist  $M$  orientierbar, so auch  $\partial M$ , und zwar gilt: Ist  $\omega \in \Omega^m(M)$  eine Volumenform auf  $M$  und  $N \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld wie in (a), so ist

$$(\iota_N \omega)|_{(\partial M)} := \omega(N, \cdot, \dots, \cdot)|_{(\partial M)} \in \Omega^{m-1}(\partial M)$$

eine Volumenform auf  $\partial M$ .

*Beweis.* Für (a). Sei  $\{(U^i, x^i)\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $M$  durch Umgebungen zu berandeten Karten und  $\{\varphi^i\}_{i \in I}$  eine angepasste Zerlegung der Eins. Dann wird durch

$$N := \sum_{i \in I} \varphi^i \cdot \frac{\partial}{\partial x_m^i}$$

ein differenzierbares Vektorfeld auf  $M$  definiert. Für  $p \in \partial M$  und  $i \in I_p := \{i \in I \mid p \in U^i\}$  zeigt der Vektor  $\frac{\partial}{\partial x_m^i}$  nach Beispiel 3 jeweils nach innen, und deshalb gilt (mit einer Karte  $(U, x) \in \mathcal{U}^\infty(p, M)$ )

$$d_p x_m(N_p) = \sum_{i \in I_p} \underbrace{\varphi^i(p)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{d_p x_m\left(\frac{\partial}{\partial x_m^i}(p)\right)}_{> 0} > 0$$

(die Möglichkeit  $d_p x_m(N_p) = 0$  ist wegen  $\sum \varphi^i(p) = 1$  ausgeschlossen). Also zeigt  $N_p$  nach innen, insbesondere ist  $N_p \neq 0$ .

Entsprechend zeigt das Vektorfeld  $-N$  an jeder Stelle  $p \in \partial M$  nach außen.

Für (b). Sei  $M$  orientierbar, also existiert nach dem Satz aus Abschnitt 4.4 eine Volumenform  $\omega \in \Omega^m(M)$ . Ist weiter  $N \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld wie in (a), so ist offenbar  $\tilde{\omega} := (\iota_N \omega)|(\partial M) \in \Omega^{m-1}(\partial M)$ . Wir zeigen, dass  $\tilde{\omega}$  eine Volumenform auf  $\partial M$  ist. Dazu sei  $p \in \partial M$  gegeben und  $(v_1, \dots, v_{m-1})$  eine Basis von  $T_p(\partial M)$ . Weil  $N_p$  nach innen bzw. außen zeigt, ist  $N_p \in T_p M \setminus T_p(\partial M)$  und daher ist  $(N_p, v_1, \dots, v_{m-1})$  eine Basis von  $T_p M$ . Weil  $\omega_p \in \text{Alt}^m(T_p M) \setminus \{0\}$  ist, gilt daher

$$\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_{m-1}) = \omega_p(N_p, v_1, \dots, v_{m-1}) \neq 0$$

und somit  $\tilde{\omega}_p \in \text{Alt}^{m-1}(T_p(\partial M)) \setminus \{0\}$ . Also ist  $\tilde{\omega}$  eine Volumenform auf  $\partial M$ .  $\square$

## 5.4 Der Satz von Stokes

**Theorem. (Satz von Stokes.)** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und  $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ . Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (*)$$

Dabei soll  $\partial M$  mit der Orientierung versehen werden, die von der Orientierung von  $M$  und einem nach außen weisenden Vektorfeld  $N \in \mathfrak{X}(M)$  gemäß Aussage 3(b) aus Abschnitt 5.3 induziert wird.

*Beweis.* Da  $M$  kompakt ist, können wir  $M$  durch endlich viele orientierte Karten  $x_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^m$  (mit  $i = 1, \dots, \nu$ ) überdecken. Ist  $(\varphi_i)_{i=1, \dots, \nu}$  eine der Überdeckung  $(U_i)_{i=1, \dots, \nu}$  angepasste Zerlegung der Eins auf  $M$ , so gilt

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega_i \quad \text{mit} \quad \omega_i := \varphi_i \cdot \omega,$$

wobei der Träger von  $\omega_i$  jeweils in  $U_i$  enthalten ist. Aus diesem Grunde genügt es, die Gleichung (\*) für solche Differentialformen  $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$  zu verifizieren, für die es eine berandete, orientierte Karte  $x : U \rightarrow \mathbb{H}^m$  mit  $\text{Tr}(\omega) \subset U$  gibt.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem, ob die Umgebung  $U$  Randpunkte von  $M$  enthält, oder nicht.

Enthält  $U$  keine Randpunkte, so ist  $U$  (als offene Untermannigfaltigkeit von  $M$ ) eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand und  $\omega|U \in \Omega_c^{m-1}(U)$ . Aus der Version des Satzes von Stokes für unberandete Mannigfaltigkeiten (in Abschnitt 5.2) folgt  $\int_M d\omega = \int_U d\omega|U = 0$ .

Andererseits ist wegen  $\text{Tr}(\omega) \subset U$ ,  $\text{Tr}(\omega) \cap (\partial M) = \emptyset$  und somit  $\int_{\partial M} \omega = 0$ . Also ist (\*) für diesen Fall gezeigt.

Wir betrachten daher nun den Fall, dass  $U$  Randpunkte von  $M$  enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass  $x(U)$  einen Quader der Form

$$Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{m-1}, b_{m-1}] \times [0, b_m]$$

mit  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ,  $a_k \leq b_k$  für  $1 \leq k \leq m-1$  und  $0 \leq b_m$  enthält, und  $x(\text{Tr}(\omega))$  sogar in

$$]a_1, b_1[ \times \dots \times ]a_{m-1}, b_{m-1}[ \times [0, b_m[$$

enthalten ist. Wir dürfen weiter voraussetzen, dass das nach außen weisende Vektorfeld  $N$  durch  $N|U = -\frac{\partial}{\partial x_m}$  gegeben wird. Dann wird nach Aussage 3(b) aus Abschnitt 5.3 die Orientierung von  $\partial M$  auf  $U$  durch die Volumenform

$$\begin{aligned} \iota_N(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m) &= (-1)^{m-1} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)(\cdot, \dots, \cdot, N) \\ &= (-1)^{m-1} \underbrace{dx_m(N)}_{=-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1} = (-1)^m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1} \quad (\dagger) \end{aligned}$$

beschrieben.

Die Differentialform  $\omega$  läßt sich auf  $U$  in der Form

$$\omega|U = \sum_{k=1}^m \alpha_k dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \dots \wedge dx_m$$

mit Funktionen  $\alpha_k \in C^\infty(U)$  schreiben, wobei  $\widehat{\phantom{x}}$  wieder bedeutet, dass der entsprechende Faktor im Produkt weggelassen wird. Dann gilt

$$d\omega|U = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

und daher

$$(x^{-1})^* d\omega = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\partial(\alpha_k \circ x^{-1})}{\partial u_k} \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_m,$$

wobei wir mit  $u_1, \dots, u_m$  die Koordinatenfunktionen des  $\mathbb{R}^m$  bezeichnen. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{x^{-1}(Q)} d\omega = \int_Q (x^{-1})^* d\omega \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \int_Q \frac{\partial(\alpha_k \circ x^{-1})}{\partial u_k} \cdot (du_1 \wedge \dots \wedge du_m) \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \int_Q \frac{\partial(\alpha_k \circ x^{-1})}{\partial u_k} d\lambda^m. \end{aligned}$$

Für  $1 \leq k \leq m-1$  ergibt sich aus  $\text{Tr}(\omega) \subset x^{-1}(Q)$  mit demselben Argument wie im Beweis des Spezialfalls des Satzes von Stokes aus Abschnitt 5.1, dass  $\int_Q \frac{\partial(\alpha_k \circ x^{-1})}{\partial u_k} d\lambda^m = 0$  gilt. Für  $k = m$

haben wir jedoch im Allgemeinen nicht  $\alpha_m(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) = 0$ , weswegen sich stattdessen mit Hilfe des Satzes von Fubini und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial(\alpha_m \circ x^{-1})}{\partial u_m} d\lambda^m &= \int_{u_1=a_1}^{b_1} \cdots \int_{u_{m-1}=a_{m-1}}^{b_{m-1}} \int_{u_m=0}^{b_m} \frac{\partial(\alpha_m \circ x^{-1})}{\partial u_m} du_m du_{m-1} \cdots du_1 \\ &= - \int_{u_1=a_1}^{b_1} \cdots \int_{u_{m-1}=a_{m-1}}^{b_{m-1}} (\alpha_m \circ x^{-1})(u_1, \dots, u_{m-1}, 0) du_{m-1} \cdots du_1 \\ &= - \int_{Q'} (\alpha_m \circ x^{-1}) d\lambda^{m-1} = - \int_{Q'} (\alpha_m \circ x^{-1}) (du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1}), \end{aligned}$$

wobei wir mit  $Q' := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{m-1}, b_{m-1}] \times \{0\}$  den Teil von  $Q$  bezeichnen, der auf dem Rand von  $\mathbb{H}^m$  liegt. Also ergibt sich

$$\int_M d\omega = -(-1)^{m-1} \int_{Q'} (\alpha_m \circ x^{-1}) (du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1}) = (-1)^m \int_{Q'} (\alpha_m \circ x^{-1}) (du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1}). \quad (\ddagger)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M \cap x^{-1}(Q)} \omega = \sum_{k=1}^m \int_{\partial M \cap x^{-1}(Q)} \alpha_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_m \\ &\stackrel{(!)}{=} \int_{\partial M \cap x^{-1}(Q)} \alpha_m dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m-1} \\ &\stackrel{(!!)}{=} (-1)^m \int_{Q'} (\alpha_m \circ x^{-1}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{m-1}, \end{aligned}$$

dabei hat man für das Gleichheitszeichen (!) zu berücksichtigen, dass  $dx_m$  für Tangentialvektoren an  $\partial M$  verschwindet, und deshalb in der Summe nur der Term für  $k = m$  von Null verschieden ist; die Korrektheit des Vorzeichens bei (!! ) ergibt sich daraus, dass die Orientierung von  $\partial M$  durch ( $\ddagger$ ) gegeben ist. Durch Vergleich des letzten Ergebnisses mit ( $\ddagger$ ) erhalten wir nun die Behauptung (\*).  $\square$

**Korollar. Der Integralsatz von Gauß.** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand,  $\omega \in \Omega^m(M)$  eine Volumenform von  $M$  und  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div}^\omega(X) \omega = \int_{\partial M} \iota_X \omega.$$

Dabei soll  $\partial M$  mit derselben Orientierung wie im Satz von Stokes versehen werden.

*Beweis.* Nach der Definition der Divergenz (Definition 3 aus Abschnitt 4.4) und dem Satz von Stokes gilt:

$$\int_M \operatorname{div}^\omega(X) \omega = \int_M d(\iota_X \omega) = \int_{\partial M} \iota_X \omega. \quad \square$$