

UNIVERSITÄT MANNHEIM

# Morsetheorie

vorgelegt von

**Felix Wolf**

geboren am 01.06.1995 in Worms

Matrikelnummer 1416155

Seminararbeit

am

Lehrstuhl für Mathematik III

Betreuer: Prof. Dr. Martin Schmidt

Abgabedatum: 18.09.2017

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Definitionen und Lemmas</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Homotopieklassen im Fall kritischer Werte</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Beispiel</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Quellen</b>	<b>17</b>

# 1 Einführung

Als erstes wird anhand eines spezifischen Beispiels die Situation, die später für beliebige Mannigfaltigkeiten betrachtet wird, untersucht. Dazu sei ein Torus  $M$  gegeben, der die Ebene  $V$  tangiert (siehe Abbildung 1).

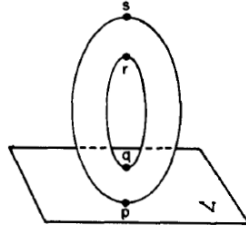


Abbildung 1

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  die Höhe über  $V$  und  $M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$ . Dann sind folgende Aussagen wahr:

- (1) Falls  $a < 0 < f(p)$ , dann ist  $M^a$  leer.
- (2) Falls  $f(p) < a < f(q)$ , dann ist  $M^a$  homöomorph zu einem 2-dimensionalen Intervall.
- (3) Falls  $f(q) < a < f(r)$ , dann ist  $M^a$  homöomorph zu einem Zylinder.



- (4) Falls  $f(r) < a < f(s)$ , dann ist  $M^a$  homöomorph zu einer kompakten Mannigfaltigkeit von Geschlecht 1 mit einem Kreis als Grenze.



- (5) Falls  $f(s) < a$ , dann ist  $M^a$  der ganze Torus.

Um die Veränderungen in  $M^a$  zu beschreiben kann man die Homotopieklassen anstelle der Homöomorphismusklassen betrachten. Hierbei nennt man 2 Abbildungen zueinander *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit der Eigenschaft  $H(x, 0) = f(x)$  und  $H(x, 1) = g(x)$  gibt.

Zum Beispiel nennt man zwei Abbildungen  $f(x)$  und  $g(x)$ , welche Kurven beschreiben, *homotop*, wenn sie den selben Definitionsbereich haben und durch eine stetige Abbildung die eine Abbildung zu der anderen Abbildung deformiert werden kann.

Die Räume  $M^a$  und  $M^b$  heißen homotopieäquivalent, beziehungsweise haben die selbe Homotopieklasse, wenn  $M^a$  und  $M^b$  topologische Räume sind und es stetige Abbildungen  $g : X \rightarrow Y$  und  $h : Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $g \circ h$  homotop zu  $id_x$  ist und  $h \circ g$  homotop zu  $id_y$  ist. Offensichtlich handelt es sich bei  $M^a$  und  $M^b$  um topologische Räume.

Für die Betrachtung der Homotopieklassen wird untersucht welche Dimension das Intervall hat, das angefügt werden muss um von einem Raum  $M^a$  zu einem Raum  $M^b$  zu kommen. Wird ein Intervall einer Dimension  $> 0$  angefügt, ändert sich die Homotopieklasse. Hierbei haben die Punkte  $p, q, r$  und  $s$  an denen die Homotopie von  $M^a$  sich ändert eine einfache Charakterisierung in Bezug auf  $f$ . Sie sind die kritischen Punkte von  $f$ . Befindet sich ein solcher kritischer Punkt zwischen den Punkten  $a$  und  $b$ , gibt es keine Funktionen  $g$  und  $h$ , die die geforderten Eigenschaften erfüllen, sodass  $M^a$  und  $M^b$  verschiedene Homotopieklassen haben.

Durch das Anfügen des Intervalls an  $M^a$ , wird eine Art Brücke über den kritischen Punkt angefügt, dadurch können wieder Funktionen  $g$  und  $h$  wie oben gefordert gefunden werden.

Überträgt man dies auf das Beispiel bedeutet das:

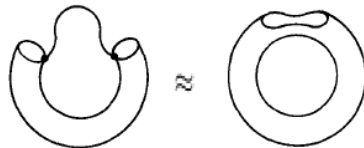
- (1)→(2) entspricht dem Anfügen eines 0-dimensionalen Intervalls. Solange die Homotopieklasse betrachtet wird, kann der Raum  $M^a$ ,  $f(p) < a < f(q)$  nicht von einem 0-dimensionalen Intervall unterschieden werden.



- (2)→(3) entspricht dem Anfügen eines 1-dimensionalen Intervalls, da es sich um ein lokales Maximum handelt, welches hinzugefügt wird.



- (3)→(4) entspricht wieder dem Anfügen eines 1-dimensionalen Intervalls.



- (4)→(5) entspricht dem Anfügen eines 2-dimensionalen Intervalls, da es sich um ein globales Maximum handelt, welches hinzugefügt wird.

## 2 Definitionen und Lemmas

Zunächst müssen einige grundlegende Begriffe wie der der Mannigfaltigkeit definiert werden, bevor zentrale Aussagen dieses Seminars, wie das Lemma von Morse, betrachtet werden können. Um Mannigfaltigkeiten definieren zu können werden Karten und Atlanten benötigt.

**Definition 2.1.** (Karte) Sei  $X$  ein topologischer Raum, dann heißt der Homöomorphismus  $\phi$  von einer offenen Teilmenge  $U$  von  $X$  auf eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  Karte.  $U$  heißt der Definitionsbereich und  $n$  die Dimension der Karte.

**Definition 2.2.** (Atlas) Eine Familie von paarweise verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche den topologischen Raum  $X$  überdecken, heißt *Atlas*.

Hierbei heißen zwei Karten  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  mit verschiedenen Definitionsbereichen  $U_1$  beziehungsweise  $U_2$  verträglich, wenn die beiden Einschränkungen von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  auf  $U_1 \cap U_2$ , die offenbar zwei Karten mit gleichem Definitionsbereich sind, miteinander verträglich sind. Zwei Karten mit dem gleichen Definitionsbereich werden verträglich genannt, wenn die Übergangsfunktionen  $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$  und  $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} = (\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1})^{-1}$  unendlich oft differenzierbare Abbildungen sind.

**Definition 2.3.** (Mannigfaltigkeit) Ein metrisierbarer separabler topologischer Raum  $X$  zusammen mit einem Atlas heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

Der Tangentialraum einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  an einem Punkt  $p$  wird geschrieben als  $TM_p$ .

**Definition 2.4.** Sei  $f$  eine glatte reellwertige Funktion auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Ein Punkt  $p \in M$  wird *kritischer Punkt* von  $f$  genannt, wenn die erzeugte Abbildung  $f_* : TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{f(p)}$  gleich null ist.

Wenn wir ein Koordinatensystem  $(x_1, \dots, x_n)$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$  wählen, bedeutet das:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$$

Der reelle Wert  $f(p)$  wird *kritischer Wert* von  $f$  genannt. Wenn  $a$  kein kritischer Wert von  $f$  ist folgt, dass  $M^a$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Der Rand  $f^{-1}(a)$  ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

**Definition 2.5.** Ein kritischer Punkt  $p$  wird *nicht-degeneriert* genannt, genau dann wenn die Matrix

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)$$

nicht singulär ist.

Der Punkt  $p$  ist offensichtlich ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von  $f$ , genau dann wenn die Dimension des Kerns von  $f_{**}$  auf  $TM_p$  gleich 0 ist. Der Index von  $f_{**}$  (der Hesse-Matrix) auf  $TM_p$  wird einfach verwiesen als der Index von  $f$  am Punkt  $p$ . Dabei ist der Index eines bilinearen Funktional  $H$  (z.B. die Hesse-Matrix) auf einen Vektorraum  $V$  definiert als die maximale Dimension eines Unterraums von  $V$  auf dem  $H$  negativ definit ist. Das Lemma von Morse zeigt, dass das Verhalten von  $f$  an der Stelle  $p$  komplett durch diesen Index beschrieben werden kann. Jedoch wird zum beweisen dieses Lemmas zunächst das folgende benötigt:

**Lemma 2.1.** Sei  $f$  eine  $C^\infty$  Funktion in einer konvexen Umgebung  $V$  von 0 in  $\mathbb{R}^n$ , mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

für passende in  $V$  definierte  $C^\infty$  Funktionen  $g_i$ , mit  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ .

**Lemma 2.2.** (Morse's Lemma) Sei  $p$  ein nicht-degenerierter Punkt von  $f$ . Dann gibt es eine Karte  $(y_1, \dots, y_n)$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$  mit  $y_i(p) = 0$  für alle  $i$  und

$$f = f(p) - (y_1)^2 - \dots - (y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + \dots + (y_n)^2$$

in ganz  $U$ . Dabei ist  $\lambda$  gleich dem Index von  $f$  bei  $p$ .

**Beweis:**

Zunächst ist zu zeigen, dass  $\lambda$  der Index von  $f$  bei  $p$  ist, falls es einen solchen Ausdruck für  $f$  gibt. Wenn für eine beliebige Karte  $(z_1, \dots, z_n)$

$$f(q) = f(p) - (z_1(q))^2 - \dots - (z_\lambda(q))^2 + (z_{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z_n(q))^2$$

gilt, erhält man für die zweite partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \begin{cases} -2 & \text{if } i = j \leq \lambda, \\ 2 & \text{if } i = j > \lambda, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

was zeigt, dass die Matrix, die  $f_{**}$  in Hinsicht auf die Basis  $\frac{\partial}{\partial z_1} |_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} |_p$  repräsentiert, folgende ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Somit gibt es einen Unterraum von  $TM_p$  der Dimension  $\lambda$ , indem  $f_{**}$  negativ definit ist und einen Unterraum  $V$  der Dimension  $n-\lambda$ , indem  $f_{**}$  positiv definit ist. Wenn es einen Unterraum von  $TM_p$  gäbe, mit einer Dimension größer als  $\lambda$  auf dem  $f_{**}$  negativ definit wäre, dann würde dieser Unterraum  $V$  schneiden, was offensichtlich unmöglich ist. Deshalb ist  $\lambda$  der Index von  $f_{**}$ .

Jetzt muss gezeigt werden, dass eine passende Karte  $(y_1, \dots, y_n)$  existiert. Es kann angenommen werden, dass  $p$  der Ursprung von  $\mathbb{R}^n$  ist und dass  $f(p) = f(0) = 0$  gilt. Dann folgt aus Lemma 2.1, dass

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x_1, \dots, x_n)$$

für  $(x_1, \dots, x_n)$  aus einer Umgebung von 0. Da 0 als kritischer Punkt angenommen wird gilt:

$$g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0.$$

Deshalb ergibt sich wieder aus 2.1

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

für bestimmte glatte Funktionen  $h_{ij}$ . Es folgt, dass

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

Es kann angenommen werden, dass  $h_{ij} = h_{ji}$ , da man  $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$  schreiben kann erhält man  $\bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ji}$  und  $f = \sum x_i x_j \bar{h}_{ij}$ . Außerdem ist die Matrix  $(\bar{h}_{ij}(0))$  gleich  $(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0))$  und dementsprechend nicht singulär.

Es gibt eine nicht-singuläre Transformation der Koordinatenfunktionen welche die benötigten Ausdrücke für  $f$ , in einer möglicherweise kleineren Umgebung von 0, liefern. Um dies zu sehen wird der gewöhnliche Diagonalisierungsbeweis

für quadratische Formen imitiert. Der Schlüsselschritt kann wie folgt beschrieben werden.

Annahme durch Induktion, dass es Koordinaten  $u_1, \dots, u_n$  in einer Umgebung  $U_1$  von 0 gibt, so dass

$$f = \pm(u_1)^2 \pm \dots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n)$$

auf ganz  $U_1$ ; wobei die Matrizen  $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))$  symmetrisch sind. Nach einer linearen Änderung in den letzten  $n - r + 1$  Koordinaten können wir annehmen, dass  $H_{rr}(0) \neq 0$ . Sei  $g(u_1, \dots, u_n)$  die Wurzel von  $|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|$ . Diese ist eine glatte, nicht Null-Funktion von  $u_1, \dots, u_n$  auf einer kleineren Umgebung  $U_2 \subset U_1$  von 0. Nun werden neue Koordinaten  $v_1, \dots, v_n$  eingeführt mit

$$v_i = u_i \quad \text{für} \quad i \neq r$$

$$v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left[ u_r + \sum_{i>r} u_i H_{ir}(u_1, \dots, u_n) / H_{rr}(u_1, \dots, u_n) \right].$$

Es folgt mit dem Satz der inversen Funktion, dass  $v_1, \dots, v_n$  als Karte innerhalb einer ausreichend kleinen Umgebung  $U_3$  von 0 dient. Berechnet man  $\pm(v_r)^2$  ist leicht zu erkennen, dass  $f$  wie folgt auf ganz  $U_3$  geschrieben werden kann

$$f = \sum_{i \leq r} \pm(v_i)^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n)$$

denn

$$\begin{aligned} \pm(v_r)^2 &= \pm |H_{rr}| \left[ u_r^2 + 2u_r \sum_{i>r} \frac{u_i H_{ir}}{H_{rr}} + \left( \sum_{i>r} \frac{u_i H_{ir}}{H_{rr}} \right)^2 \right] \\ &= \pm |H_{rr}| u_r^2 \pm 2 \sum_{i>r} u_i u_r H_{ir} \pm \frac{\sum_{i,j>r} u_i u_j H_{ir} H_{jr}}{H_{rr}} \end{aligned}$$

wobei die Notation  $H_{rr} = H_{rr}(u_1, \dots, u_n)$  der Einfachheit halber gewählt wird. Der erste und der zweite Term entsprechen hierbei dem Term für die  $r$ -te Koordinate  $u_r$  die aus der Summe herausgezogen wurde. Der letzte Term kann in  $H'_{ij}(v_1, \dots, v_n)$  aufgenommen werden und somit stimmt die Schreibweise für  $f$ . Dies vervollständigt die Induktion und beweist Lemma 2.2.



### 3 Homotopieklassen im Fall kritischer Werte

In diesem Abschnitt sei, wenn  $f$  eine reellwertige Funktion auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist,

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M : f(p) \leq a\}$$

**Theorem 3.1.** Sei  $f$  eine glatte reellwertige Funktion auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Sei  $a < b$  und es wird angenommen, dass die Menge  $f^{-1}[a, b]$ , bestehend aus allen  $p \in M$  mit  $a \leq f(p) \leq b$ , kompakt ist und keine kritischen Punkte von  $f$  enthält. Dann ist  $M^a$  diffeomorph zu  $M^b$ . Des Weiteren ist  $M^a$  eine Deformationsretraktion von  $M^b$ , so dass die Inklusionsabbildung  $M^a \rightarrow M^b$  eine Homotopieäquivalenz ist.

Die Beweisidee ist  $M^b$  auf  $M^a$  entlang der orthogonalen Trajektorien der Hyperflächen  $f = \text{constant}$  zu verschieben (siehe Abbildung 2).

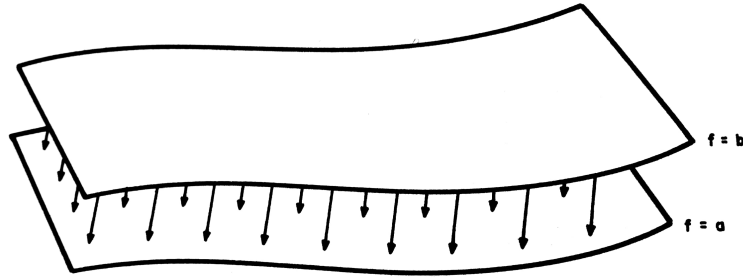


Abbildung 2

Sei nun  $e^\lambda = \{x \in \mathbb{R}^\lambda : \|x\| \leq \varepsilon\}$ .

**Theorem 3.2.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion und  $p$  ein nicht-degenerierter kritischer Punkt mit Index  $\lambda$ . Setzt man  $f(p) = c$  und nimmt an, dass  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  kompakt ist und keine weiteren kritischen Punkte von  $f$  als  $p$  für irgendein  $\varepsilon > 0$  enthält, dann hat die Menge  $M^{c+\varepsilon}$  für alle genügend kleinen  $\varepsilon$  die gleiche Homotopieklasse wie  $M^{c-\varepsilon}$  mit einem angefügten  $\lambda$ -dimensionalen Intervall  $e^\lambda$ .

Die Beweisidee dieses Theorems ist in Abbildung 3 für den speziellen Fall der Höhenfunktion auf einem Torus dargestellt. Der Bereich

$$M^{c-\varepsilon} = f^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$$

ist stark schraffiert. Wir führen eine neue Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  ein, welche mit der Höhenfunktion  $f$  übereinstimmt, bis auf, dass gilt  $F < f$  in einer

kleinen Umgebung von  $p$ . Deshalb wird der Bereich  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  aus  $M^{c-\varepsilon}$  zusammen mit dem Bereich  $H$  nahe  $p$  bestehen. In Abbildung 3 ist  $H$  der horizontal schraffierte Bereich.

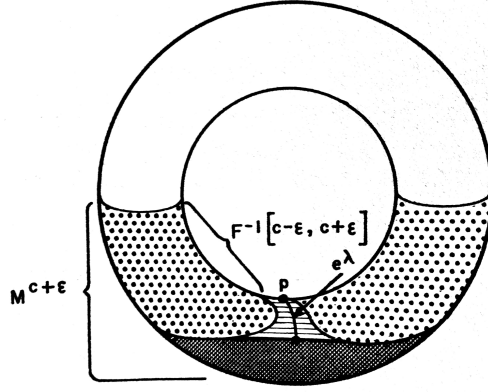


Abbildung 3

Indem man ein passendes mehrdimensionales Intervall  $e^\lambda \subset H$  wählt, zeigt ein direktes Argument, dass  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  eine Deformationsretraktion von  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  ist. Schließlich erhält man durch einsetzen von Theorem 3.1 in die Funktion  $F$  und die Region  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , dass  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  eine Deformationsretraktion von  $M^{c+\varepsilon}$  ist. Dies wird den Beweis vervollständigen.

Sei eine Karte  $u_1, \dots, u_n$  in einer Umgebung  $U$  von  $p$  so, dass das neutrale Element

$$f = c - (u_1)^2 - \dots - (u_\lambda)^2 + (u_{\lambda+1})^2 + \dots + (u_n)^2$$

für ganz  $U$  gilt.

Deshalb wird der kritische Punkt  $p$  folgende Koordinaten haben

$$u_1(p) = \dots = u_n(p) = 0.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  klein genug, so dass gilt

- (1) Der Bereich  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  ist kompakt und beinhaltet keine kritischen Punkte außer  $p$ .

- (2) Das Bild von  $U$  unter der diffeomorphen Einbettung

$$(u_1, \dots, u_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

beinhaltet den geschlossenen Ball

$$\{(u_1, \dots, u_n) : \sum (u_i)^2 \leq 2\varepsilon\}.$$

Nun sei  $e^\lambda$  als die Menge der Punkte in  $U$  definiert, mit

$$(u_1)^2 + \dots + (u_\lambda)^2 \leq \varepsilon \text{ und } u_{\lambda+1} = \dots = u_n = 0$$

Die daraus entstehende Situation ist in Abbildung 4 schematisch dargestellt.

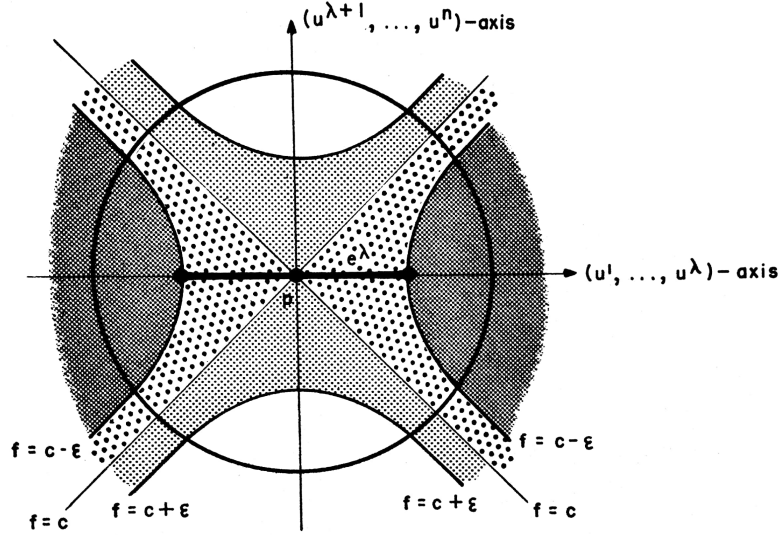


Abbildung 4

Die Koordinatenlinien repräsentieren die Ebenen  $u_{\lambda+1} = \dots = u_n = 0$ , beziehungsweise  $u_1 = \dots = u_\lambda = 0$ . Der Kreis repräsentiert den Rand des Balles mit Radius  $\sqrt{2}\varepsilon$  und die Hyperbeln repräsentieren die Hyperflächen  $f^{-1}[c - \varepsilon]$  und  $f^{-1}[c + \varepsilon]$ . Der Bereich  $M^{c-\varepsilon}$  ist stark schattiert, der Bereich  $f^{-1}[c - \varepsilon, c]$  ist stark gepunktet und der Bereich  $f^{-1}[c, c + \varepsilon]$  ist leicht gepunktet. Die horizontale dunkle Linie durch  $p$  repräsentiert den Quader  $e^\lambda$ .

Dabei ist  $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$  exakt der Rand  $\partial e^\lambda$ , so dass  $e^\lambda$  wie verlangt angeschlossen ist an  $M^{c-\varepsilon}$ .

Es muss bewiesen werden, dass  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  eine Deformationsretraktion von  $M^{c+\varepsilon}$  ist.

Hierzu konstruiert man eine neue glatte Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt. Sei

$$\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine  $C^\infty$  Funktion, die die Bedingungen

$$\begin{aligned} \mu(0) &> \varepsilon \\ \mu(r) &= 0 \quad \text{für } r \geq 2\varepsilon \\ -1 < \mu'(r) &\leq 0 \quad \text{für alle } r \end{aligned}$$

erfüllt, wobei  $\mu'(r) = \frac{d\mu}{dr}$ .  $F$  stimme mit  $f$  außerhalb der Koordinatenumgebung  $U$  überein und es sei

$$F = f - \mu((u_1)^2 + \dots + (u_\lambda)^2 + 2(u_{\lambda+1})^2 + \dots + 2(u_n)^2)$$

innerhalb dieser Koordinatenumgebung.  $F$  ist eine wohldefinierte glatte Funktion auf  $M$ .

Es passt zwei Funktionen zu definieren

$$\xi, \eta : U \rightarrow [0, \infty)$$

mit

$$\begin{aligned}\xi &= (u_1)^2 + \dots + (u_\lambda)^2 \\ \eta &= (u_{\lambda+1})^2 + \dots + (u_n)^2\end{aligned}$$

Dann ist  $f = c - \xi + \eta$  so dass:

$$F(q) = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q))$$

für alle  $q \in U$ .

**Behauptung 3.1.** Der Bereich  $F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon]$  stimmt mit dem Bereich  $M^{c+\varepsilon} = f^{-1}(-\infty, c+\varepsilon]$  überein.

**Beweis:**

Außerhalb des Ellipsoids  $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$  stimmen die Funktionen  $f$  und  $F$  überein. Innerhalb dieses Ellipsoids gilt

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon$$

Dies vervollständigt den Beweis.

**Behauptung 3.2.** Die kritischen Punkte von  $F$  sind die selben wie die von  $f$ .

**Beweis:**

Es gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1.\end{aligned}$$

da

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$$

wobei die Kovektoren  $d\xi$  und  $d\eta$  gleichzeitig nur im Ursprung 0 sind. Daraus folgt, dass  $F$  keine anderen kritischen Punkte in  $U$  außer dem Ursprung hat.

Jetzt wird der Bereich  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  betrachtet. Mit Behauptung 3.1 zusammen mit der Ungleichung  $F \leq f$  sieht man, dass

$$F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon].$$

Deshalb ist dieser Bereich kompakt. Er kann keine kritischen Punkte von  $F$  beinhalten außer vielleicht  $p$ . Aber

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon.$$

Deshalb beinhaltet  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  keine kritischen Punkte. Zusammen mit Theorem 3.1 beweist dies das Folgende.

**Behauptung 3.3.** Der Bereich  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  ist eine Deformationsretraktion von  $M^{c+\varepsilon}$ .

Es wird helfen diesen Bereich  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  mit  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  zu bezeichnen; wobei  $H$  den Abschluss von  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$  bezeichnet.

*Bemerkung:* In der Terminology von Smale, ist der Bereich  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  beschrieben als  $M^{c-\varepsilon}$  mit einem angefügten "Griff". Es folgt aus Theorem 3.1, dass die Mannigfaltigkeit mit Rand  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  diffeomorph zu  $M^{c+\varepsilon}$  ist. Dieser Fakt ist wichtig in Smale's Theorie von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Nun wird das mehrdimensionale Intervall  $e^\lambda$  betrachtet, das aus allen Punkten  $q$  besteht, mit

$$\xi(q) \leq \varepsilon, \quad \eta(q) = 0.$$

Hierbei gilt zu beachten, dass  $e^\lambda$  im "Griff"  $H$  enthalten ist. Tatsächlich gilt, weil  $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$  ist,

$$F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon$$

aber  $f(q) \geq c - \varepsilon$  für  $q \in e^\lambda$ .

Die gegenwärtige Situation wird in Abbildung 5 dargestellt. Der Bereich  $M^{c-\varepsilon}$  ist stark schattiert, der "Griff"  $H$  ist mit vertikalen Pfeilen schraffiert und der Bereich  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  ist gepunktet.

**Behauptung 3.4.**  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  ist eine Deformationsretraktion von  $M^{c-\varepsilon} \cup H$ .

**Beweis:**

Eine Deformationsretraktion  $r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$  wird durch die vertikalen Pfeile in Abbildung 5 angedeutet. Genauer sei  $r_t$  die Identität außerhalb von  $U$  und innerhalb von  $U$  folgendermaßen definiert. Es ist wie es in Abbildung 6 zu erkennen ist notwendig, in drei Fälle zu unterscheiden.

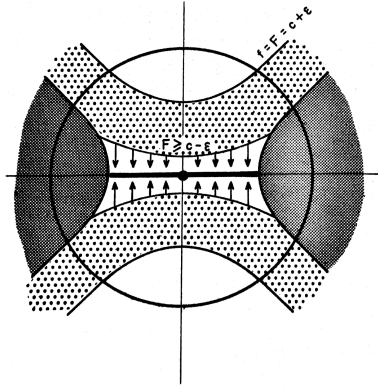


Abbildung 5

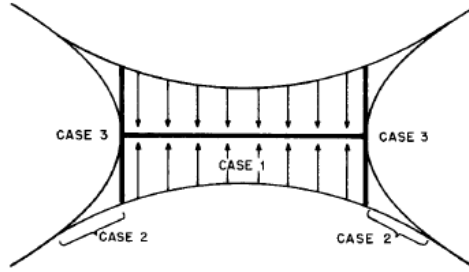


Abbildung 6

**Fall 1:**

Für  $\xi \leq \varepsilon$  stimmt  $r_t$  mit der Transformation

$$(u_1, \dots, u_n) \rightarrow (u_1, \dots, u_\lambda, tu_{\lambda+1}, \dots, tu_n)$$

überein. Deshalb ist  $r_1$  die Identität und  $r_0$  bildet den gesamten Bereich auf  $e^\lambda$  ab. Der Fakt, dass jedes  $r_t$   $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  auf sich selbst abbildet, folgt aus der Ungleichung  $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$ .

**Fall 2:**

Für  $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$  stimmt  $r_t$  mit der Transformation

$$(u_1, \dots, u_n) \rightarrow (u_1, \dots, u_\lambda, s_t u_{\lambda+1}, \dots, s_t u_n)$$

überein, wobei die Zahl  $s_t \in [0, 1]$  definiert wird durch

$$s_t = t + (1 - t)((\xi - \varepsilon)/\eta)^{1/2}.$$

Also ist  $r_1$  wieder die Identität und  $r_0$  bildet den gesamten Bereich auf die Hyperfläche  $f^{-1}(c - \varepsilon)$  ab. Hierbei ist zu beachten, dass diese Definitionen mit denen von Fall 1 übereinstimmen, wenn  $\xi = \varepsilon$ .

**Fall 3:**

Für  $\eta + \varepsilon \leq \xi$  (das heißt innerhalb von  $M^{c-\varepsilon}$ ) sei  $r_t$  die Identität. Dies stimmt mit den vorhergehenden Definitionen überein, wenn  $\xi = \eta + \varepsilon$ .

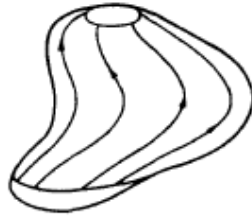
Dies vervollständigt den Beweis, dass  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  eine Deformationsretraktion von  $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$  ist. Zusammen mit Behauptung 3 vervollständigt es den Beweis von Theorem 3.2.

*Anmerkung:* Nimmt man allgemeiner an, dass es  $k$  nicht-degenerierte kritische Punkte  $p_1, \dots, p_k$  mit Indizes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  in  $f^{-1}(c)$  gibt, dann zeigt ein ähnlicher Beweis, dass  $M^{c+\varepsilon}$  die Homotopieklasse von  $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$  hat.

## 4 Beispiel

Als eine Anwendung der vorherigen Theoreme kann man folgendes Theorem beweisen:

**Theorem 4.1.** (Reeb) Wenn  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit und  $f$  eine differenzierbare Funktion auf  $M$  mit nur 2 kritischen Punkten, welche beide nicht degeneriert sind, ist, dann ist  $M$  homöomorph zu einer Sphäre.



### Beweis:

Dies folgt aus Theorem 3.1 zusammen mit dem Lemma von Morse (2.2). Die zwei kritischen Punkte müssen das Minimum und das Maximum sein. Sei  $f(p) = 0$  das Minimum und  $f(q) = 1$  das Maximum. Wenn  $\varepsilon$  klein genug ist, dann sind die Mengen  $M^\varepsilon = f^{-1}[0, \varepsilon]$  und  $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$  nach 2.2 n-dimensionale Quader. Aber  $M^\varepsilon$  ist nach 3.1 homöomorph zu  $M^{1-\varepsilon}$ . Also ist  $M$  die Vereinigung zweier geschlossener n-dimensionaler Intervalle,  $M^{1-\varepsilon}$  und  $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ , zusammengefügt entlang ihres gemeinsamen Randes. Jetzt ist es einfach einen Homöomorphismus zwischen  $M$  und  $S^n$  zu konstruieren.



## 5 Quellen

- [1] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1969.
- [2] Matthias Schwarz. *Morse Homology*. Birkhäuser, 1993