

## Kapitel 4

### Räumliche Kurventheorie

Wir wenden uns nun der Theorie von Kurven im 3-dimensionalen Raum zu. Dementsprechend machen wir im gesamten Kapitel die folgenden *Generalvoraussetzungen*:

Es sei  $\mathbb{E}$  ein 3-dimensionaler, orientierter, euklidischer Raum,  $\mathbb{E}_L$  sein Richtungsvektorraum,  $\det : \mathbb{E}_L \times \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{R}$  die durch die Orientierung ausgezeichnete Determinatenfunktion und  $\mathbb{E}_L \times \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{E}_L$ ,  $(v, w) \mapsto v \times w$  das hierdurch definierte Kreuzprodukt, es gilt also

$$\forall u, v, w \in \mathbb{E}_L : \langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$$

(siehe Abschnitt 1.7). Ich erinnere daran, dass für zwei beliebige, zueinander senkrechte Einheitsvektoren  $u, v \in \mathbb{E}_L$  das Tupel  $(u, v, u \times v)$  eine ONB von  $\mathbb{E}_L$  ist.

Ist  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  eine positiv orientierte ONB von  $\mathbb{E}_L$ , so definieren wir das Einheitsvektorfeld

$$\Gamma_{\mathbf{a}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_L, t \mapsto \cos(t) a_1 + \sin(t) a_2 ;$$

damit ist dann für jedes  $t \in \mathbb{R}$  das Tupel  $(\Gamma_{\mathbf{a}}(t), \Gamma'_{\mathbf{a}}(t), a_3)$  eine positiv orientierte ONB von  $\mathbb{E}_L$ , deshalb gilt insbesondere  $\Gamma_{\mathbf{a}} \times \Gamma'_{\mathbf{a}} \equiv a_3$ . Außerdem gilt  $\Gamma'_{\mathbf{a}}(t) = \Gamma_{\mathbf{a}}(t + \frac{\pi}{2})$  und  $\Gamma''_{\mathbf{a}}(t) = -\Gamma_{\mathbf{a}}(t)$ .

#### 4.1 Die Frenet-Gleichungen für Raumkurven

In diesem Abschnitt werden wir für Kurven im  $\mathbb{E}^3$  ein angepasstes KKS-Feld einführen, und dessen Bewegung beschreiben, in analoger Weise, wie wir dies für Kurven in  $\mathbb{E}^2$  in Abschnitt 3.1 getan haben.

Dazu sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  eine *reguläre*  $C^k$ -Kurve mit  $k \geq 3$ . Ihr sind die folgenden, in den Abschnitten 2.2 und 2.3 eingeführten Größen zugeordnet:

- Die Bahngeschwindigkeit  $v_{\alpha} = \|\alpha'\|$ ,
- Das Einheitstangentenfeld  $T_{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds}$  und
- Die *absolute* Krümmung  $\varkappa_{\alpha} = \left\| \frac{d}{ds} T_{\alpha} \right\|$ .

Wir wollen im Folgenden stets voraussetzen, dass

$$\varkappa_\alpha > 0$$

gilt; diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass für jedes  $t \in I$  der Geschwindigkeitsvektor  $\alpha'(t)$  und der Beschleunigungsvektor  $\alpha''(t)$  linear unabhängig sind. Deswegen können wir das sogenannte *Hauptnormalenfeld*

$$N_\alpha := \frac{1}{\varkappa_\alpha} \cdot \frac{d}{ds} T_\alpha$$

und das sogenannte *Binormalenfeld*

$$B_\alpha := T_\alpha \times N_\alpha$$

von  $\alpha$  bilden. Damit ist für jedes  $t \in I$

$$(\alpha(t); T_\alpha(t), N_\alpha(t), B_\alpha(t))$$

ein der Geometrie von  $\alpha$  zum Zeitpunkt  $t$  besonders gut angepasstes, positiv orientiertes KKS von  $\mathbb{E}$ . Das Tripel  $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$  heißt das *Frenet-3-Bein* von  $\alpha$ .

Man nennt

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \text{Spann}\{T_\alpha(t), N_\alpha(t)\} &= \alpha(t) + \text{Spann}\{\alpha'(t), \alpha''(t)\} && \text{die Schmiegeebene,} \\ \alpha(t) + \text{Spann}\{N_\alpha(t), B_\alpha(t)\} &&& \text{die Normalebene und} \\ \alpha(t) + \text{Spann}\{T_\alpha(t), B_\alpha(t)\} &&& \text{die rektifizierende Ebene} \end{aligned}$$

von  $\alpha$  zum Zeitpunkt  $t$ . Eine Funktion  $X : I \rightarrow \mathbb{E}_L$  heißt ein *Normalenfeld* von  $\alpha$ , wenn für alle  $t \in I$  gilt:  $X(t) \perp \alpha'(t)$  (das heißt,  $X(t)$  ist tangential zur Normalebene von  $\alpha$  zur Zeit  $t$ ).

**Satz.** Die Bewegung des Frenet-3-Beins  $(T_\alpha(t), N_\alpha(t), B_\alpha(t))$  wird durch  $v_\alpha$ ,  $\varkappa_\alpha$  sowie eine weitere  $C^{k-3}$ -Funktion  $\tau_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  kontrolliert; es gilt nämlich

$$\frac{d}{ds} T_\alpha = \varkappa_\alpha N_\alpha, \quad (1)$$

$$\frac{d}{ds} N_\alpha = -\varkappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha, \quad (2)$$

$$\frac{d}{ds} B_\alpha = -\tau_\alpha N_\alpha. \quad (3)$$

Die Funktion  $\tau_\alpha = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle$  heißt die *Torsion* von  $\alpha$ . Es gilt

$$v_\alpha = \|\alpha'\|, \quad \varkappa_\alpha = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{v_\alpha^3} \quad \text{und} \quad \tau_\alpha = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}. \quad (4)$$

*Beweis.* Formel (1) folgt unmittelbar aus der Definition von  $N_\alpha$ . Zu Formel (2): Gemäß der Fourier-Entwicklung von  $\frac{d}{ds} N_\alpha$  bezüglich der ONB  $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$  gilt  $\frac{d}{ds} N_\alpha = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, T_\alpha \rangle T_\alpha + \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, N_\alpha \rangle N_\alpha + \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle B_\alpha$ . Wir rechnen nun die auftretenden Skalarprodukte aus: Es gilt  $\langle T_\alpha, N_\alpha \rangle = 0$  und somit  $0 = \frac{d}{ds} \langle T_\alpha, N_\alpha \rangle = \langle \frac{d}{ds} T_\alpha, N_\alpha \rangle + \langle T_\alpha, \frac{d}{ds} N_\alpha \rangle \stackrel{(1)}{=} \varkappa_\alpha + \langle T_\alpha, \frac{d}{ds} N_\alpha \rangle$ , also  $\langle \frac{d}{ds} N_\alpha, T_\alpha \rangle = -\varkappa_\alpha$ . Außerdem gilt  $\langle N_\alpha, N_\alpha \rangle = 1$  und somit

$0 = \frac{d}{ds} \langle N_\alpha, N_\alpha \rangle = 2 \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, N_\alpha \rangle$ . Definieren wir ferner die Funktion  $\tau_\alpha$  durch  $\tau_\alpha := \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle$ , so ergibt sich die Formel (2) nun durch Einsetzen der berechneten Skalarprodukte in die obige Fourier-Entwicklung. Zu Formel (3): Durch analoge Rechnungen wie beim Beweis von Formel (2) ergibt sich aus den Beziehungen  $\langle B_\alpha, T_\alpha \rangle = 0$ ,  $\langle B_\alpha, N_\alpha \rangle = 0$  und  $\langle B_\alpha, B_\alpha \rangle = 1$  jeweils  $\langle \frac{d}{ds} B_\alpha, T_\alpha \rangle = -\langle B_\alpha, \frac{d}{ds} T_\alpha \rangle \stackrel{(1)}{=} 0$ ,  $\langle \frac{d}{ds} B_\alpha, N_\alpha \rangle = -\langle B_\alpha, \frac{d}{ds} N_\alpha \rangle \stackrel{(2)}{=} -\tau_\alpha$  und  $\langle \frac{d}{ds} B_\alpha, B_\alpha \rangle = 0$ . Durch Einsetzen dieser Skalarprodukte in die Fourier-Entwicklung von  $\frac{d}{ds} B_\alpha$  bezüglich der ONB  $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$  ergibt sich die Formel (3).

In (4) ist die Formel für  $v_\alpha$  einfach dessen Definition, siehe die Definition (b) in 2.2. Zur Formel für  $\varkappa_\alpha$ : Es gilt  $\alpha' = v_\alpha \cdot T_\alpha$  und deshalb

$$\alpha'' = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha T'_\alpha = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \frac{d}{ds} T_\alpha \stackrel{(1)}{=} v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \varkappa_\alpha N_\alpha.$$

Somit ergibt sich  $\alpha' \times \alpha'' = v_\alpha T_\alpha \times (v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \varkappa_\alpha N_\alpha) = v_\alpha^3 \varkappa_\alpha B_\alpha$  und daher  $\|\alpha' \times \alpha''\| = v_\alpha^3 \varkappa_\alpha$ , woraus die Formel für  $\varkappa_\alpha$  folgt. Um die Formel für  $\tau_\alpha$  zu beweisen, rechnen wir weiter:

$$\begin{aligned} \alpha''' &= v''_\alpha T_\alpha + v'_\alpha T'_\alpha + (v_\alpha^2 \varkappa_\alpha)' N_\alpha + v_\alpha^2 \varkappa_\alpha N'_\alpha = v''_\alpha T_\alpha + v'_\alpha v_\alpha \frac{d}{ds} T_\alpha + (v_\alpha^2 \varkappa_\alpha)' N_\alpha + v_\alpha^3 \varkappa_\alpha \frac{d}{ds} N_\alpha \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} v''_\alpha T_\alpha + v'_\alpha v_\alpha \varkappa_\alpha N_\alpha + (v_\alpha^2 \varkappa_\alpha)' N_\alpha + v_\alpha^3 \varkappa_\alpha (-\varkappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha) = * \cdot T_\alpha + * \cdot N_\alpha + v_\alpha^3 \varkappa_\alpha \tau_\alpha B_\alpha. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich  $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = \langle v_\alpha^3 \varkappa_\alpha B_\alpha, \alpha''' \rangle = v_\alpha^3 \varkappa_\alpha \cdot v_\alpha^3 \varkappa_\alpha \tau_\alpha = (v_\alpha^3 \varkappa_\alpha)^2 \tau_\alpha = \|\alpha' \times \alpha''\|^2 \cdot \tau_\alpha$ . Daraus folgt die Formel für  $\tau_\alpha$  in (4).  $\square$

**Beispiel.** Für die *Schraubenlinie*

$$\alpha(t) = p_0 + r \cdot \Gamma_{\mathbf{a}}(t) + \frac{h}{2\pi} \cdot t \cdot a_3$$

haben wir schon im Beispiel (c) in Abschnitt 2.3 die absolute Krümmung ausgerechnet:

$$\varkappa_\alpha = \frac{(2\pi)^2 r}{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Nun rechnen wir auch die Torsion von  $\alpha$  aus: Es gilt

$$\alpha'(t) = r \Gamma'_{\mathbf{a}}(t) + \frac{h}{2\pi} \cdot a_3, \quad \alpha''(t) = -r \Gamma_{\mathbf{a}}(t) \quad \text{und} \quad \alpha'''(t) = -r \Gamma'_{\mathbf{a}}(t);$$

hieraus ergibt sich

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = r^2 a_3 - \frac{h r}{2\pi} \Gamma'_{\mathbf{a}}(t)$$

und damit

$$\tau_\alpha = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{2\pi h}{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Wir sehen also: *Schraubenlinien haben konstante Krümmung und konstante Torsion*. In Abschnitt 4.5 werden wir sehen, dass die Schraubenlinien unter allen Kurven in  $\mathbb{E}^3$  durch diese Eigenschaft charakterisiert werden. Dabei kann jeder vorgegebene Wert der Krümmung und Torsion durch eine Schraubenlinie (mit geeigneten parametern  $r$  und  $h$ ) realisiert werden. In diesem Sinne repräsentiert die Schraubenlinie die allgemeinste Form einer Kurve im  $\mathbb{E}^3$  im ganz Kleinen.

**Aufgabe 1. Eine Interpretation der Torsion.** Mit der Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  ist ein weiterer Differentialoperator  $\nabla_{\partial}^\perp$ , die *Normalendifferentiation*, verbunden, die jedem  $C^1$ -Normalenfeld  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  das Normalenfeld

$$\nabla_{\partial}^\perp X := X' - \langle X', T_\alpha \rangle \cdot T_\alpha = \text{normale Komponente von } X'$$

zuordnet. Ist  $\nabla_{\partial}^\perp X \equiv 0$ , so heißt  $X$  ein *paralleles* Normalenfeld von  $\alpha$ . Es gilt:

- (a)  $X$  ist genau dann parallel, wenn  $X' = -v_\alpha \kappa_\alpha \langle X, N_\alpha \rangle \cdot T_\alpha$  ist.
- (b) Zu jedem „Anfangswert“  $v \perp \alpha'(t_0)$  ( $t_0 \in I$ ) existiert genau ein paralleles Normalenfeld  $X$  von  $\alpha$  mit  $X(t_0) = v$ .
- (c) Sind  $X_1, X_2$  parallele Normalenfelder von  $\alpha$ , so ist  $\langle X_1, X_2 \rangle \equiv \text{const.}$
- (d) Ist  $E$  ein paralleles Einheitsnormalenfeld von  $\alpha$ , so ist auch  $T_\alpha \times E$  ein paralleles Einheitsnormalenfeld von  $\alpha$ , und zwar ist dieses orthogonal zu  $E$ , es existiert eine  $C^1$ -Funktion  $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$N_\alpha = (\cos \circ \vartheta) \cdot E + (\sin \circ \vartheta) \cdot (T_\alpha \times E)$$

ist, es gilt

$$B_\alpha = -(\sin \circ \vartheta) \cdot E + (\cos \circ \vartheta) \cdot (T_\alpha \times E)$$

und

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \tau_\alpha.$$

[Tipp: Man verwende die grundlegenden Sätze über gewöhnliche Differentialgleichungen, die Frenetschen Gleichungen und für die Existenz von  $\vartheta$  den Satz aus 1.8, den man auf das Einheitsvektorfeld  $(\langle N_\alpha, E \rangle, \langle N_\alpha, T_\alpha \times E \rangle) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  anwendet.]

**Aufgabe 2. Erste Charakterisierungen von Kurven auf Sphären.** Für jede nach der Bogenlänge parametrisierte  $C^3$ -Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $\alpha$  verläuft auf einer Sphäre.
- (b) Es existiert ein Punkt  $p_0 \in \mathbb{E}^3$ , so dass  $\alpha - p_0$  ein paralleles Normalenfeld von  $\alpha$  ist.
- (c) Es existiert ein paralleles Normalenfeld  $X$  von  $\alpha$ , so dass  $\langle T'_\alpha, X \rangle \equiv \text{const.} \neq 0$  ist.

## 4.2 Taylorentwicklung von Raumkurven

Das Taylorpolynom dritter Ordnung einer Raumkurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  in einem  $t_0 \in I$  hat die Gestalt

$$t \mapsto \alpha(t_0) + (t - t_0) \cdot \alpha'(t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \cdot \alpha''(t_0) + \frac{1}{6} (t - t_0)^3 \cdot \alpha'''(t_0).$$

Setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass  $\alpha$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, so gilt

$$\alpha' = T_\alpha, \quad \alpha'' = \kappa_\alpha \cdot N_\alpha$$

und

$$\alpha''' = \kappa'_\alpha \cdot N_\alpha + \kappa_\alpha \cdot N'_\alpha = -\kappa_\alpha^2 \cdot T_\alpha + \kappa'_\alpha \cdot N_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \cdot B_\alpha.$$

Hieraus ergibt sich für das Taylorpolynom dritter Ordnung von  $\alpha$  in  $t_0$ :

$$\begin{aligned} t \mapsto & \alpha(t_0) + ((t - t_0) - \frac{1}{6} \kappa_\alpha(t_0)^2 (t - t_0)^3) \cdot T_\alpha(t_0) \\ & + (\frac{1}{2} \kappa_\alpha(t_0) (t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \kappa'_\alpha(t_0) (t - t_0)^3) \cdot N_\alpha(t_0) \\ & + \frac{1}{6} \kappa_\alpha(t_0) \tau_\alpha(t_0) (t - t_0)^3 \cdot B_\alpha(t_0). \end{aligned}$$

Daher besitzen die Orthogonalprojektionen von  $\alpha$  in die drei ausgezeichneten Ebenen in  $t_0$  die folgenden Taylorentwicklungen:

(a) in der Schmiegenebene  $\alpha(t_0) + \text{Spann}\{T_\alpha(t_0), N_\alpha(t_0)\} :$

$$t \mapsto \alpha(t_0) + (t - t_0) \cdot T_\alpha(t_0) + \frac{1}{2} \kappa_\alpha(t_0) (t - t_0)^2 \cdot N_\alpha(t_0) + \dots$$

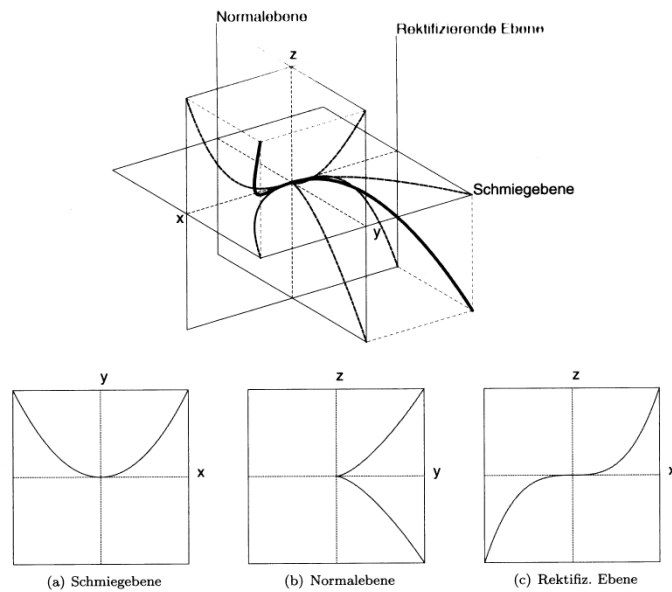
(b) in der rektifizierenden Ebene  $\alpha(t_0) + \text{Spann}\{T_\alpha(t_0), B_\alpha(t_0)\} :$

$$t \mapsto \alpha(t_0) + (t - t_0) \cdot T_\alpha(t_0) + \frac{1}{6} \kappa_\alpha(t_0) \tau_\alpha(t_0) (t - t_0)^3 \cdot B_\alpha(t_0) + \dots$$

(c) in der Normalebene  $\alpha(t_0) + \text{Spann}\{N_\alpha(t_0), B_\alpha(t_0)\} :$

$$t \mapsto \alpha(t_0) + \frac{1}{2} \kappa_\alpha(t_0) (t - t_0)^2 \cdot N_\alpha(t_0) + \frac{1}{6} \kappa_\alpha(t_0) \tau_\alpha(t_0) (t - t_0)^3 \cdot B_\alpha(t_0) + \dots$$

Wegen  $\kappa_\alpha(t_0) \neq 0$  wird im Falle  $\tau_\alpha(t_0) \neq 0$  das qualitative Verhalten von  $\alpha$  in der Nähe von  $t_0$  durch diese Taylor-Entwicklungen beschrieben. Es ist dasselbe Verhalten, wie man es bei einer Schraubenlinie (also im Fall konstanter Krümmung und Torsion) auch im Großen antrifft. Man erhält bei dieser die folgenden Bilder für die drei Projektionen (entnommen aus KÜHNEL, *Differentialgeometrie*, Bild 2.5, S. 14):



**Geometrische Interpretation der Torsion.** Wegen

$$\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), B_\alpha(t_0) \rangle = \frac{1}{6} \kappa_\alpha(t_0) \tau_\alpha(t_0) (t - t_0)^3 + \dots$$

wird im Falle  $\tau_\alpha(t_0) \neq 0$  die Schmiegenebene  $\alpha(t_0) + \mathbb{R}B_\alpha(t_0)^\perp$  zur Zeit  $t = t_0$  von  $\alpha$  durchdrungen, und zwar von unten nach oben (das soll heißen: in Richtung von  $B_\alpha(t_0)$ ) falls  $\tau_\alpha(t_0) > 0$ , und von oben nach unten falls  $\tau_\alpha(t_0) < 0$ .

### 4.3 Der Hauptsatz der räumlichen Kurventheorie

#### Theorem.

- (a) Es sei  $(p_0; a_1, a_2, a_3)$  ein positiv orientiertes KKS von  $\mathbb{E}$ ,  $k \geq 3$  eine natürliche Zahl,  $v : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine  $C^{k-1}$ -Funktion,  $\varkappa : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine  $C^{k-2}$ -Funktion,  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^{k-3}$ -Funktion und  $t_0 \in I$ . Dann existiert genau eine reguläre  $C^k$ -Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ , die die „Differentialgleichungen“

$$v_\alpha = v, \quad \varkappa_\alpha = \varkappa \quad \text{und} \quad \tau_\alpha = \tau$$

mit der „Anfangsbedingung“

$$(\alpha; T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)|_{t=t_0} = (p_0; a_1, a_2, a_3)$$

erfüllt.

- (b) Sind  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}$  zwei reguläre  $C^3$ -Kurven mit  $\varkappa_\alpha > 0$  und  $\varkappa_\beta > 0$ , so gilt genau dann

$$v_\alpha \equiv v_\beta, \quad \varkappa_\alpha \equiv \varkappa_\beta \quad \text{und} \quad \tau_\alpha \equiv \tau_\beta,$$

wenn es eine orientierungserhaltende Isometrie  $f \in I(\mathbb{E})$  (d.h. eine Isometrie mit  $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ) mit  $\beta = f \circ \alpha$  gibt.

*Beweis.* Zu (a). Wir betrachten für Vektorfelder  $E_1, E_2, E_3 : I \rightarrow \mathbb{E}_L$  das lineare Differentialgleichungssystem

$$E_1' = +v \varkappa E_2, \tag{1}$$

$$E_2' = -v \varkappa E_1 + v \tau E_3, \tag{2}$$

$$E_3' = -v \tau E_2. \tag{3}$$

Da es sich hierbei um ein *lineares* Differentialgleichungssystem handelt, existiert zu den Anfangsbedingungen

$$E_k(t_0) = a_k \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}$$

genau eine auf ganz  $I$  ausgedehnte Lösung  $(E_1, E_2, E_3)$ . Um zu zeigen, dass es sich bei  $(E_1, E_2, E_3)$  um ein ONB-Feld handelt, betrachten wir die sechs Funktionen  $\langle E_k, E_\ell \rangle$  mit  $1 \leq k \leq \ell \leq 3$ . Aus dem obigen Differentialgleichungssystem ergibt sich für diese Funktionen das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \langle E_1, E_1 \rangle' &= 2 \langle E_1', E_1 \rangle &= 2 v \varkappa \langle E_1, E_2 \rangle \\ \langle E_1, E_2 \rangle' &= \langle E_1', E_2 \rangle + \langle E_1, E_2' \rangle &= v \varkappa \langle E_2, E_2 \rangle - v \varkappa \langle E_1, E_1 \rangle + v \tau \langle E_1, E_3 \rangle \\ \langle E_1, E_3 \rangle' &= \langle E_1', E_3 \rangle + \langle E_1, E_3' \rangle &= v \varkappa \langle E_2, E_3 \rangle - v \tau \langle E_1, E_2 \rangle \\ \langle E_2, E_2 \rangle' &= 2 \langle E_2', E_2 \rangle &= -2 v \varkappa \langle E_1, E_2 \rangle + 2 v \tau \langle E_2, E_3 \rangle \\ \langle E_2, E_3 \rangle' &= \langle E_2', E_3 \rangle + \langle E_2, E_3' \rangle &= -v \varkappa \langle E_1, E_3 \rangle + v \tau \langle E_3, E_3 \rangle - v \tau \langle E_2, E_2 \rangle \\ \langle E_3, E_3 \rangle' &= 2 \langle E_3', E_3 \rangle &= -2 v \tau \langle E_2, E_3 \rangle \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\langle E_k, E_k \rangle(t_0) = 1, \quad \langle E_k, E_\ell \rangle = 0 \quad \text{für } 1 \leq k < \ell \leq 3.$$

Dieses neue lineare Anfangswertproblem besitzt ebenfalls eine eindeutige Lösung; da durch

$$\langle E_k, E_k \rangle \equiv 1, \quad \langle E_k, E_\ell \rangle \equiv 0 \quad \text{für } 1 \leq k < \ell \leq 3.$$

offenbar eine Lösung gegeben wird, muss diese Lösung die tatsächlichen Verhältnisse zwischen den Vektorfeldern  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  wiedergeben, mit anderen Worten:  $(E_1, E_2, E_3)$  ist ein ONB-Feld. Da die ONB

$(E_1(t_0), E_2(t_0), E_3(t_0))$  positiv orientiert ist, ist aus Stetigkeitsgründen  $(E_1, E_2, E_3)$  sogar ein positiv orientiertes ONB-Feld.

Wir definieren nun die Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\alpha(t) := p_0 + \int_{t_0}^t v(s) E_1(s) ds$ . Damit gilt offenbar  $\alpha(t_0) = p_0$  und  $\alpha'(t) = v(t) E_1(t)$ , also  $v_\alpha = v$  und  $T_\alpha = E_1$ . Weiter gilt  $\frac{d}{ds} T_\alpha = \frac{1}{v_\alpha} E'_1 = \frac{1}{v} v \times E_2 = \times E_2$  und daher  $\kappa_\alpha = \left\| \frac{d}{ds} T_\alpha \right\| = \times$  und  $N_\alpha = \frac{1}{\kappa_\alpha} \frac{d}{ds} T_\alpha = E_2$ . Schließlich haben wir  $B_\alpha = T_\alpha \times N_\alpha = E_1 \times E_2 = E_3$ , weil  $(E_1, E_2, E_3)$  ein positiv orientiertes ONB-Feld ist, und daher  $\tau_\alpha = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle = \frac{1}{v} \langle E'_2, E_3 \rangle = \frac{1}{v} v \tau = \tau$ . Deswegen hat  $\alpha$  alle gewünschten Eigenschaften. Die Eindeutigkeit von  $\alpha$  folgt aus der Eindeutigkeit des ONB-Feldes  $(E_1, E_2, E_3)$ .

Zu (b). Gilt  $\beta = f \circ \alpha$  mit einer orientierungserhaltenden Isometrie  $f$ , so ist  $\beta' = (f \circ \alpha)' = f_L \circ \alpha'$ , und somit  $v_\beta = v_\alpha$  und  $T_\beta = f_L \circ T_\alpha$ . Insbesondere spielt es keine Rolle, ob wir Differentiationen nach der Bogenlänge bezüglich  $\alpha$  oder bezüglich  $\beta$  ausführen. Durch Differentiation der Beziehung  $T_\beta = f_L \circ T_\alpha$  nach der Bogenlänge erhält man  $\frac{d}{ds} T_\beta = f_L \circ \frac{d}{ds} T_\alpha$ , und daher  $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$  und  $N_\beta = f_L \circ N_\alpha$ . Schließlich gilt  $B_\beta = T_\beta \times N_\beta = (f_L \circ T_\alpha) \times (f_L \circ N_\alpha) = f_L \circ (T_\alpha \times N_\alpha) = f_L \circ B_\alpha$ ; für diese Rechnung war wichtig, dass  $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist. Damit ergibt sich  $\tau_\beta = \langle \frac{d}{ds} N_\beta, B_\beta \rangle = \langle f_L \circ \frac{d}{ds} N_\alpha, f_L \circ B_\alpha \rangle = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, B_\alpha \rangle = \tau_\alpha$ .

Der Nachweis der umgekehrten Implikation von (b) verläuft analog wie im zweidimensionalen Fall, siehe das Theorem (b) aus Abschnitt 3.2.  $\square$

#### 4.4 Infinitesimale Charakterisierung ebener Kurven im $\mathbb{E}^3$

**Satz.** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  eine reguläre  $C^3$ -Kurve mit  $\kappa_\alpha > 0$ . Dann gilt

$$\alpha \text{ ist eine ebene Kurve} \iff \tau_\alpha \equiv 0.$$

Genauer gesagt: Gilt  $\tau_\alpha \equiv 0$  und ist  $t_0 \in I$ , so verläuft die Kurve  $\alpha$  in der Ebene  $\mathbb{E}' := p_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$  mit  $p_0 := \alpha(t_0)$  und  $a := B_\alpha(t_0)$ . Versehen wir  $\mathbb{E}'_L$  mit der durch  $\det_{\mathbb{E}'_L} := \det_{\mathbb{E}_L}(\cdot, \cdot, a)|_{\mathbb{E}'_L} \times \mathbb{E}'_L$  gegebenen Orientierung, so ist  $\kappa_\alpha$  die orientierte Krümmung und  $(T_\alpha, N_\alpha)$  das Frenet-2-Beinfeld der Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}'$  im Sinne der ebenen Kurventheorie.

*Beweis.* Es gelte, dass die Kurve  $\alpha$  in einer Ebene  $\mathbb{E}' \subset \mathbb{E}$ , etwa  $\mathbb{E}' = p_0 + (\mathbb{R}a)^\perp$  mit  $p_0 \in \mathbb{E}$  und  $a \in \mathbb{E}_L$ ,  $\|a\| = 1$ , verläuft. Wir betrachten nun die Höhenfunktion  $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \langle p - p_0, a \rangle$ . Damit gilt  $\mathbb{E}' = h^{-1}(\{0\})$ , und deshalb ist  $h \circ \alpha \equiv 0$ . Somit gilt auch  $0 \equiv (h \circ \alpha)' = \langle \alpha', a \rangle = v_\alpha \langle T_\alpha, a \rangle$  und somit  $T_\alpha \perp a$ . Deswegen gilt weiter  $0 \equiv \langle T_\alpha, a \rangle' = \langle T'_\alpha, a \rangle = v_\alpha \langle \frac{d}{ds} T_\alpha, a \rangle = v_\alpha \kappa_\alpha \langle N_\alpha, a \rangle$  und somit auch  $N_\alpha \perp a$ . Also wird  $(\mathbb{R}a)^\perp$  jeweils von  $T_\alpha(t)$  und  $N_\alpha(t)$  aufgespannt, und somit gilt  $B_\alpha = T_\alpha \times N_\alpha = \pm a$ ; aus Stetigkeitsgründen folgt, dass  $B_\alpha$  konstant ist. Damit ist  $0 = B'_\alpha = v_\alpha \tau_\alpha N_\alpha$  und somit  $\tau_\alpha = 0$ .

Gelte nun umgekehrt  $\tau_\alpha = 0$ . Dann gilt nach der dritten Frenet-Gleichung  $\frac{d}{ds} B_\alpha = -\tau_\alpha N_\alpha = 0$ . Also ist  $B_\alpha$  konstant, etwa gleich  $a \in \mathbb{E}_L$  mit  $\|a\| = 1$ . Wir fixieren nun  $t_0 \in I$ , setzen  $p_0 := \alpha(t_0)$  und betrachten wieder die Höhenfunktion  $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \langle p - p_0, a \rangle$ . Damit gilt  $(h \circ \alpha)' = \langle \alpha', a \rangle = v_\alpha \langle T_\alpha, B_\alpha \rangle = 0$ , also ist  $h \circ \alpha$  konstant, und zwar gleich  $(h \circ \alpha)(t_0) = 0$ . Somit ist  $\alpha(I) \subset h^{-1}(\{0\}) = p_0 + (\mathbb{R}a)^\perp =: \mathbb{E}'$ .

In dieser Situation stimmt offenbar das Einheitstangentenfeld  $T_\alpha$  der räumlichen Theorie mit dem der ebenen Theorie überein. Außerdem gilt für die Vierteldrehung  $J' : \mathbb{E}'_L \rightarrow \mathbb{E}'_L$  von  $\mathbb{E}'_L$  (bezüglich der im Satz beschriebenen Orientierung):  $\langle J'v, w \rangle = \det_{\mathbb{E}'_L}(v, w) = \det_{\mathbb{E}_L}(v, w, a) = \det_{\mathbb{E}_L}(a, v, w) = \langle a \times v, w \rangle$  und somit  $J'v = a \times v$ . Also ist  $N_\alpha = B_\alpha \times T_\alpha = a \times T_\alpha = J'(T_\alpha)$ , und somit stimmt auch das Einheitsnormalenfeld der räumlichen Theorie mit dem Einheitsnormalenfeld der ebenen Theorie überein. Schließlich lautet die erste Frenet-Gleichung sowohl in der ebenen als auch in der räumlichen Kurventheorie  $\frac{d}{ds} T_\alpha = \kappa_\alpha N_\alpha$ , deswegen stimmt auch die absolute Krümmung von  $\alpha$  im Sinne der räumlichen Kurventheorie mit der orientierten Krümmung von  $\alpha$  im Sinne der ebenen Kurventheorie überein.  $\square$

## 4.5 Kurven mit spezieller Krümmung und Torsion

**Aussage.** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eine reguläre  $C^3$ -Kurve.

- (a) Es gilt genau dann  $\kappa_\alpha \equiv 0$ , wenn  $\alpha$  auf einer Geraden von  $\mathbb{E}$  verläuft.
- (b) Es gilt genau dann  $\tau_\alpha \equiv 0$ , wenn  $\alpha$  in einer Ebene von  $\mathbb{E}$  verläuft.
- (c) Es gilt genau dann  $\kappa_\alpha \equiv \text{const.} > 0$  und  $\tau_\alpha \equiv 0$ , wenn  $\alpha$  auf einem Kreis in einer Ebene von  $\mathbb{E}$  verläuft.
- (d) Es gilt genau dann  $\kappa_\alpha \equiv \text{const.} > 0$  und  $\tau_\alpha \equiv \text{const.} \neq 0$ , wenn  $\alpha$  eine *Schraubenlinie* ist, d.h. wenn bis auf Umparametrisierung

$$\alpha(t) = p_0 + r \cos(t) a_1 + r \sin(t) a_2 + \frac{h}{2\pi} t a_3$$

mit einem geeigneten KKS  $(p_0; a_1, a_2, a_3)$  von  $\mathbb{E}$  sowie  $r > 0$  und  $h \neq 0$  ist.

*Beweis. Für (a).* Ist  $\kappa_\alpha \equiv 0$ , so gilt  $\frac{d}{ds}T_\alpha \equiv 0$  und somit  $T_\alpha \equiv \text{const.} =: a$ . Damit ist  $\alpha'(t) = v_\alpha \cdot a$  und daher  $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \varphi(t) \cdot a$  mit der Funktion  $\varphi(t) := \int_{t_0}^t v_\alpha(s) ds$ . Also verläuft  $\alpha$  auf der Geraden  $\alpha(t_0) + \mathbb{R}a$ . Die umgekehrte Richtung ist klar.

*Für (b).* Dies ist nur eine Neuformulierung des Satzes aus Abschnitt 4.4.

*Für (c).* Wegen  $\tau_\alpha \equiv 0$  verläuft  $\alpha$  nach (b) in einer Ebene  $\mathbb{E}'$  von  $\mathbb{E}$ , und zwar stimmt nach dem Satz aus Abschnitt 4.4 die absolute Krümmung von  $\alpha$  als Kurve in  $\mathbb{E}$  mit der orientierten Krümmung von  $\alpha$  als Kurve in  $\mathbb{E}'$  überein. Nach der Folgerung aus dem Hauptsatz der ebenen Kurventheorie in Abschnitt 3.2 ergibt sich daher, dass  $\alpha$  tatsächlich auf einem Kreis in  $\mathbb{E}'$  verläuft. Die umgekehrte Richtung ist wieder klar.

*Für (d).* Man berechnet zunächst für die Kurve  $\alpha(t) = p_0 + r \cos(t)a_1 + r \sin(t)a_2 + \frac{h}{2\pi} t a_3$  (mit  $r > 0$ ,  $h \neq 0$  und einem KKS  $(p_0; a_1, a_2, a_3)$ ) die geometrischen Größen  $\kappa_\alpha$  und  $\tau_\alpha$  mittels der Formeln (4) aus dem Satz aus Abschnitt 4.1 aus, und erhält für  $\kappa_\alpha$  und  $\tau_\alpha$  jeweils konstante Ergebnisse in Abhängigkeit von  $r$  und  $h$  (siehe auch das Beispiel in Abschnitt 4.1). Ist umgekehrt  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  eine reguläre  $C^3$ -Kurve mit konstanter Krümmung und Torsion, so zeigt die vorherige Berechnung der Krümmung und Torsion der Schraubenlinie, dass Zahlen  $r > 0$  und  $h \neq 0$  gewählt werden können, so dass die dazu gehörige Schraubenlinie dieselbe Krümmung und dieselbe Torsion wie die gegebene Kurve  $\alpha$  besitzt. Daher zeigt der Hauptsatz der räumlichen Kurventheorie: Parametrisiert man diese Schraubenlinie so um, dass auch ihre Bahngeschwindigkeit mit der Bahngeschwindigkeit von  $\alpha$  übereinstimmt, und wählt man das KKS  $(p_0; a_1, a_2, a_3)$  geeignet, so stimmt diese umparametrisierte Schraubenlinie mit  $\alpha$  überein. — Die Durchführung der Rechnungen im Einzelnen überlasse ich als *Übungsaufgabe*.  $\square$

**Aufgabe.** Eine reguläre  $C^3$ -Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  heißt eine *Böschungslinie* (oder *Helix*), wenn  $\kappa_\alpha > 0$  ist, und wenn ein Einheitsvektor  $a \in \mathbb{E}_L$  existiert, so dass der Winkel zwischen  $e$  und  $T_\alpha$  konstant ist.

Zeige:  $\alpha$  ist genau dann eine Böschungslinie, wenn  $\kappa_\alpha > 0$  gilt und  $\tau_\alpha / \kappa_\alpha$  konstant ist. (LANCRET, 1802)

Man überlege sich, wie man Papiermodelle für Böschungslinien im anschaulichen Raum konstruieren kann.



## 4.6 Sphärische Kurven

Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eine reguläre  $C^3$ -Kurve, die auf einer Sphäre  $S_R^2(p_0) := \{q \in \mathbb{E}^3 \mid \|q - p_0\| = R\}$  ( $R \in \mathbb{R}_+$ ) verläuft.

Differenziert man die Gleichung  $R^2 = \langle \alpha - p_0, \alpha - p_0 \rangle$  zweimal nach der Bogenlänge, so erhält man  $0 = \langle \frac{d}{ds} T_\alpha, \alpha - p_0 \rangle + \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = \kappa_\alpha \cdot \langle N_\alpha, \alpha - p_0 \rangle + 1$ . Beachten wir nun die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, so erhalten wir als erstes Ergebnis die

**Aussage 1.**  $\kappa_\alpha \geq 1/R$ .

Daher können wir auf  $\alpha$  die Frenet-Theorie anwenden. Zunächst sieht man aber

**Aussage 2.**  $E := \frac{1}{R} \cdot (\alpha - p_0)$  ist ein paralleles Einheitsnormalenfeld, siehe die Aufgaben 1 und 2 aus Abschnitt 4.1.

Die in der Aufgabe 1(d) aus Abschnitt 4.1 angegebenen Formeln für  $N_\alpha$  und  $B_\alpha$  mittels  $E$  und einer Winkelfunktion  $\vartheta$  kann man nun nach  $E$  auflösen und erhält dadurch

$$\alpha - p_0 = R \cdot (\cos \circ \vartheta \cdot N_\alpha - \sin \circ \vartheta \cdot B_\alpha).$$

Indem wir diese Gleichung nach der Bogenlänge differenzieren, erhalten wir unter Ausnutzung der Frenetschen Gleichungen  $T_\alpha = -\kappa_\alpha R \cos \circ \vartheta \cdot T_\alpha$ , also

$$0 < \frac{1}{\kappa_\alpha R} = -\cos \circ \vartheta \leq 1. \quad (*)$$

Diese Gleichung ist recht informativ. Zunächst erhalten wir aus ihr erneut die Aussage 1. Sodann zeigt (\*), dass  $\kappa_\alpha$  genau dann konstant ist, wenn dies für  $\vartheta$  gilt; somit gilt wegen  $\frac{d\vartheta}{ds} = \tau_\alpha$  die

**Aussage 3.**  $\kappa_\alpha$  ist genau dann konstant, wenn  $\tau_\alpha \equiv 0$  ist; dann verläuft  $\alpha$  also in einem Kreis der Sphäre.

Ist hingegen  $\tau_\alpha$  nullstellenfrei, so folgt wegen  $\frac{d}{ds}\vartheta = \tau_\alpha$  durch Differentiation von (\*) die Gleichung  $\sin \circ \vartheta = (\frac{d}{ds}(1/\kappa_\alpha)) / (\tau_\alpha R)$  und somit wegen  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  die vielzitierte Beziehung

$$\varrho^2 + (\tilde{\varrho} \cdot \frac{d}{ds}\varrho)^2 = R^2 \quad \text{mit} \quad \varrho := 1/\kappa_\alpha \quad \text{und} \quad \tilde{\varrho} := 1/\tau_\alpha. \quad (\dagger)$$

Schließlich geben wir einen kurzen Beweis für den

**Satz.** Ist  $I = [a, b]$  und  $\alpha$  glatt geschlossen, so gilt für die „Totaltorsion“ der sphärischen Kurve  $\alpha$

$$\int_a^b \tau_\alpha ds := \int_a^b \tau_\alpha(t) \cdot v_\alpha(t) dt = 0.$$

*Beweis.* Wegen  $(\alpha(a); T_\alpha(a), N_\alpha(a), B_\alpha(a)) = (\alpha(b); T_\alpha(b), N_\alpha(b), B_\alpha(b))$  existiert ein  $n \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\vartheta(b) - \vartheta(a) = 2n\pi$  ist; weiterhin existiert wegen (\*) ein  $m \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\frac{\pi}{2} + 2m\pi < \vartheta(t) < \frac{3\pi}{2} + 2m\pi$  für alle  $t \in I$  gilt. Daher ist  $|\vartheta(b) - \vartheta(a)| < \pi$  und somit  $n = 0$ , also  $\vartheta(b) = \vartheta(a)$ . Damit folgt die Behauptung wegen  $\vartheta' = v_\alpha \cdot \tau_\alpha$ .  $\square$

**Aufgabe.** Jede reguläre  $C^4$ -Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  mit  $\kappa_\alpha \cdot \tau_\alpha^2 \cdot \left(\frac{d}{ds}\kappa_\alpha\right)^2 > 0$ , für welche obige Beziehung (†) gilt, verläuft auf einer Sphäre vom Radius  $R$ .

[Tipp: Man zeige, dass  $\alpha + \varrho \cdot N_\alpha + \tilde{\varrho} \cdot \frac{d}{ds}\varrho \cdot B_\alpha$  konstant ist.]

#### 4.7 Anhang: Die Frenet-Gleichungen und der Hauptsatz der Kurventheorie in $n$ Dimensionen

Zum Abschluss unserer Einführung in die Kurventheorie stellen wir dar, wie die Fundamente unserer Untersuchungen, nämlich das eine Kurve begleitende Frenet-KKS und die dazu gehörigen Frenet-Gleichungen für Kurven im  $n$ -dimensionalen Raum, aussehen.

Es sei  $\mathbb{E}$  ein  $n$ -dimensionaler, orientierter euklidischer Raum.

##### Definition.

- (a) Eine reguläre  $C^n$ -Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  heißt eine *Frenet-Kurve*, wenn für jedes  $t \in I$  die Vektoren  $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n-1)}(t)$  linear unabhängig sind.
- (b) Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  eine Frenet-Kurve. Dann ist das *Frenet- $n$ -Beinfeld*  $(E_1, \dots, E_n)$  zu  $\alpha$  das  $n$ -Tupel von Vektorfeldern  $E_k : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ , das dadurch eindeutig charakterisiert ist, dass für jedes  $t \in I$  gilt:
  - (i)  $(E_1(t), \dots, E_n(t))$  ist eine positiv orientierte ONB von  $\mathbb{E}_L$ ,
  - (ii) für jedes  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  gilt

$$\text{span}\{E_1(t), \dots, E_k(t)\} = \text{span}\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(k)}(t)\}.$$

- (iii)  $\langle \alpha^{(k)}(t), E_k(t) \rangle > 0$  für jedes  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

**Bemerkung.** Im Fall  $n = 2$  ist jede reguläre  $C^2$ -Kurve eine Frenet-Kurve. Im Fall  $n = 3$  ist jede reguläre  $C^3$ -Kurve  $\alpha$  mit  $\kappa_\alpha > 0$  eine Frenet-Kurve.

Ist eine Frenet-Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  gegeben, so konstruiert man das zugehörige Frenet- $n$ -Beinfeld  $(E_1, \dots, E_n)$  auf die folgende Weise: Zunächst gewinnt man  $E_1, \dots, E_{n-1}$  aus  $\alpha', \dots, \alpha^{(n-1)}$  durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \alpha' / \|\alpha'\| = T_\alpha \\ E_2 &:= (\alpha'' - \langle \alpha'', E_1 \rangle E_1) / \|\dots\| \\ &\vdots \\ E_{n-1} &:= \left( \alpha^{(n-1)} - \sum_{k=1}^{n-2} \langle \alpha^{(n-1)}, E_k \rangle E_k \right) / \|\dots\|; \end{aligned}$$

die Bedingung an eine Frenet-Kurve, dass  $\alpha'(t), \dots, \alpha^{(n-1)}(t)$  jeweils linear unabhängig sein möge gewährleistet, dass man hierdurch tatsächlich ein Orthonormalsystem-Feld  $(E_1, \dots, E_{n-1})$  erhält. Das noch verbleibende Vektorfeld  $E_n$  ist nun durch die Bedingung (i) in der Definition eindeutig bestimmt.

**Satz.** Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  eine Frenet-Kurve. Dann wird die Bewegung ihres Frenet- $n$ -Beinfeldes  $(E_1, \dots, E_n)$  durch  $n-1$  Funktionen kontrolliert, genauer: Es existieren Funktionen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\kappa_k$  für  $k \leq n-1$  jeweils  $(n-1-k)$ -mal stetig differenzierbar ist und  $\kappa_k > 0$  für  $k \leq n-2$  gilt, und so dass

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ E_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

gilt. Diese Gleichungen heißen die *Frenet-Gleichungen* zu  $\alpha$ ; die Funktion  $\kappa_k$  nennt man die  $k$ -te *Frenet-Krümmung* von  $\alpha$ . Die erste Frenet-Krümmung  $\kappa_1$  ist die absolute Krümmung von  $\alpha$  im Sinne der Definition aus Abschnitt 2.3. Die letzte Krümmung  $\kappa_{n-1}$  heißt auch die *Torsion* der Kurve.

*Beweis.* Da  $(E_1, \dots, E_n)$  ein ONB-Feld ist, gilt

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

mit der  $(n \times n)$ -Matrix  $A = (a_{k\ell})$ , deren Einträge die Funktionen  $a_{k\ell} := \langle \frac{d}{ds} E_k, E_\ell \rangle$  sind. Wegen  $\langle E_k, E_\ell \rangle \equiv \text{const.}$  gilt  $0 = \frac{d}{ds} \langle E_k, E_\ell \rangle = \langle \frac{d}{ds} E_k, E_\ell \rangle + \langle E_k, \frac{d}{ds} E_\ell \rangle = a_{k\ell} + a_{\ell k}$ , also ist  $A$  schief-symmetrisch. Weiter gilt nach Konstruktion jeweils  $E_k(t) \in \text{span}\{\alpha'(t), \dots, \alpha^{(k)}(t)\}$ , und daher  $\frac{d}{ds} E_k(t) \in \text{span}\{\alpha'(t), \dots, \alpha^{(k+1)}(t)\}$ . Somit ist  $a_{k\ell} = 0$  für  $\ell \geq k+2$ , und daher gilt (\*) mit  $\kappa_k := a_{k, (k+1)} = \langle \frac{d}{ds} E_k, E_{k+1} \rangle$ .

Für  $k \leq n-2$  ist das Vorzeichen von  $\kappa_k = \langle \frac{d}{ds} E_k, E_{k+1} \rangle$  dasselbe wie das Vorzeichen von  $\langle \alpha^{(k+1)}, E_{k+1} \rangle$ , und dieses ist nach Eigenschaft (iii) aus der Definition des Frenet- $n$ -Beinfeldes positiv.

Schließlich gilt  $E_1 = T_\alpha$  und deshalb  $\kappa_\alpha = \|\frac{d}{ds} T_\alpha\| = \|\frac{d}{ds} E_1\| = \|\kappa_1 E_2\| = \kappa_1$ .  $\square$

### Hauptsatz der Kurventheorie.

- (a) Es sei  $(p_0; a_1, \dots, a_n)$  ein positiv orientiertes KKS von  $\mathbb{E}$ ,  $t_0 \in I$ ,  $r \geq n$  eine natürliche Zahl, und  $v, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, so dass  $v$   $(r-1)$ -mal und  $\kappa_k$  jeweils  $(r-1-k)$ -mal stetig differenzierbar ist und  $v > 0$  sowie  $\kappa_k > 0$  für  $k \leq n-2$  gilt. Dann existiert genau eine  $C^r$ -Frenet-Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) (*Differentialgleichungen*) Es gilt  $v_\alpha = v$  und die Funktionen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  sind die Frenet-Krümmungen von  $\alpha$ .

- (ii) (*Anfangsbedingung*) Es gilt  $\alpha(t_0) = p_0$  und  $(a_1, \dots, a_n)$  ist das Frenet- $n$ -Bein von  $\alpha$  zum Zeitpunkt  $t_0$ .
- (b) Sind  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}$  zwei Frenet-Kurven, so sind äquivalent:
  - (i) Es gilt  $v_\alpha = v_\beta$  und alle Frenet-Krümmungen von  $\alpha$  und  $\beta$  stimmen überein.
  - (ii) Es existiert eine orientierungserhaltende Isometrie  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  mit  $\beta = f \circ \alpha$ .

*Beweis.* Für (a). Siehe KÜHNEL, *Differentialgeometrie*, den Beweis von Satz 2.15, S. 19ff. Für (b). Der Beweis verläuft (unter Verwendung von (a)) ähnlich wie im 2-dimensionalen bzw. 3-dimensionalen Fall (siehe die Abschnitte 3.2 und 4.3).  $\square$