

Kapitel 3

Ebene Kurventheorie

In diesem Kapitel wollen wir uns mit ebenen Kurven befassen. Dementsprechend gelten für das gesamte Kapitel die folgenden *Generalvoraussetzungen*:

Es sei \mathbb{E} ein 2-dimensionaler, orientierter, euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Determinantenform $\det(\cdot, \cdot)$ auf \mathbb{E}_L , ferner bezeichnen wir die Vierteldrehung von \mathbb{E} mit $J : \mathbb{E}_L \rightarrow \mathbb{E}_L$ (siehe Abschnitt 1.7). Für jeden Einheitsvektor $a \in \mathbb{E}_L$ ist also (a, Ja) eine positiv orientierte ONB von \mathbb{E}_L .

3.1 Die Frenet-Gleichungen für ebene Kurven

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Lösung geometrischer Probleme besteht in der Wahl eines dem Problem bestmöglich angepassten Bezugssystems. In diesem Abschnitt werden wir für reguläre C^2 -Kurven ein „mit der Kurve mitlaufendes“, an sie angepasstes KKS-Feld konstruieren.

Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine *reguläre* C^2 -Kurve. Dann setzen wir

$$T_\alpha := \frac{d\alpha}{ds} \quad \text{und} \quad N_\alpha := JT_\alpha.$$

$T_\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ heißt das (kanonische) *Einheitstangentenfeld* von α , $N_\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ heißt das (kanonische) *Einheitsnormalenfeld* von α . Für jedes $t \in I$ ist damit

$$(\alpha(t); T_\alpha(t), N_\alpha(t))$$

ein positiv orientiertes KKS von \mathbb{E} , das an die Geometrie von α zum „Zeitpunkt“ t besonders gut angepasst ist. Man nennt das Paar $(T_\alpha(t), N_\alpha(t))$ das (begleitende) *Frenet-2-Bein(feld)* von α (JEAN FRENET 1847).

Die Frenet-Gleichungen. Die Bewegung des Frenet-2-Beins in Abhängigkeit von t wird durch eine einzige Funktion kontrolliert. Es gelten nämlich die *Frenet-Gleichungen*

$$\frac{d}{ds}T_\alpha = \kappa_\alpha \cdot N_\alpha \quad \text{und} \quad \frac{d}{ds}N_\alpha = -\kappa_\alpha \cdot T_\alpha$$

mit der Funktion $\varkappa_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varkappa_\alpha := \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{v_\alpha^3}.$$

\varkappa_α heißt die *orientierte Krümmung* von α ; $|\varkappa_\alpha|$ ist die absolute Krümmung von α im Sinne von Abschnitt 2.3.

Beweis. Nach der Beobachtung aus Abschnitt 2.3 gilt $\langle T_\alpha, \frac{d}{ds} T_\alpha \rangle = 0$ und somit jeweils $\frac{d}{ds} T_\alpha(t) \in \mathbb{R} N_\alpha(t)$. Also existiert eine Funktion $\varkappa_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{d}{ds} T_\alpha = \varkappa_\alpha \cdot N_\alpha$. Da auch $\langle N_\alpha, \frac{d}{ds} N_\alpha \rangle = 0$ gilt, ergibt sich nun

$$\frac{d}{ds} N_\alpha = \langle \frac{d}{ds} N_\alpha, T_\alpha \rangle T_\alpha = \left(\frac{d}{ds} \langle N_\alpha, T_\alpha \rangle - \langle N_\alpha, \frac{d}{ds} T_\alpha \rangle \right) \cdot T_\alpha = -\langle N_\alpha, \varkappa_\alpha N_\alpha \rangle T_\alpha = -\varkappa_\alpha T_\alpha.$$

Mit dem so definierten \varkappa_α ist die absolute Krümmung von α : $\|\frac{d}{ds} T_\alpha\| = \|\varkappa_\alpha N_\alpha\| = |\varkappa_\alpha|$. Es bleibt also nur die Formel $\varkappa_\alpha = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{v_\alpha^3}$ zu zeigen. Dazu: Es gilt offenbar

$$\alpha' = v_\alpha T_\alpha,$$

woraus sich durch weitere Differentiation und Anwendung der ersten Frenet-Formel ergibt:

$$\alpha'' = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha T'_\alpha = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \frac{dT_\alpha}{ds} = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \varkappa_\alpha N_\alpha.$$

Damit erhalten wir

$$\det(\alpha', \alpha'') = \det(v_\alpha T_\alpha, v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \varkappa_\alpha N_\alpha) = \det(v_\alpha T_\alpha, v_\alpha^2 \varkappa_\alpha N_\alpha) = v_\alpha^3 \varkappa_\alpha \det(T_\alpha, N_\alpha) = v_\alpha^3 \varkappa_\alpha$$

und damit die behauptete Formel. \square

Beispiele.

- (a) **Geradlinige Bewegung.** Für $\alpha : t \mapsto p_0 + \varphi(t) \cdot a$ mit einem Einheitsvektor a und einer C^2 -Funktion φ mit $\varphi' > 0$ gilt

$$v_\alpha = \varphi', \quad T_\alpha \equiv a, \quad N_\alpha \equiv Ja \quad \text{und} \quad \varkappa_\alpha = 0.$$

- (b) **Kreisbewegung.** Für $\alpha : t \mapsto p_0 + r \cdot (\cos(\varphi(t))a + \sin(\varphi(t))Ja)$ mit einer C^2 -Funktion φ , so dass φ' nullstellenfrei ist, gilt

$$\begin{aligned} v_\alpha &= r \cdot |\varphi'|, \\ T_\alpha &= \text{sign}(\varphi') \cdot (-(\sin \circ \varphi)a + (\cos \circ \varphi)Ja), \\ N_\alpha &= -\text{sign}(\varphi') \cdot ((\cos \circ \varphi)a + (\sin \circ \varphi)Ja), \\ \varkappa_\alpha &= \text{sign}(\varphi')/r. \end{aligned}$$

- (c) **Der Graph einer C^2 -Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.** Als solchen bezeichnet man die reguläre Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$. Für ihn gilt $v_\alpha = \sqrt{1 + (f')^2}$, $T_\alpha = \frac{1}{v_\alpha}(1, f')$, $N_\alpha = \frac{1}{v_\alpha}(-f', 1)$ und

$$\varkappa_\alpha = \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}^3}.$$

3.2 Der Hauptsatz der ebenen Kurventheorie

Satz. Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^2 -Kurve, $a \in \mathbb{E}_L$ ein Einheitsvektor, und $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, die das Einheitstangentenfeld T_α von α durch

$$T_\alpha = R_\vartheta(a) = (\cos \circ \vartheta) \cdot a + (\sin \circ \vartheta) \cdot Ja \quad (*)$$

beschreibt, siehe den Satz in Abschnitt 1.8. Dann gilt für die orientierte Krümmung κ_α von α :

$$\kappa_\alpha = \frac{d}{ds} \vartheta.$$

Interpretation. Die orientierte Krümmung ist die Geschwindigkeit des „Tangentenschwenks“.

Beweis. Wir berechnen $\frac{d}{ds} T_\alpha$ auf zweierlei Art: Einerseits ist nach den Frenet-Gleichungen $\frac{d}{ds} T_\alpha = \kappa_\alpha N_\alpha$. Andererseits ergibt sich aus (*):

$$\frac{dT_\alpha}{ds} = \frac{1}{v_\alpha} T'_\alpha = \frac{1}{v_\alpha} (-(\sin \circ \vartheta) \cdot \vartheta' \cdot a + (\cos \circ \vartheta) \cdot \vartheta' \cdot Ja) = \frac{1}{v_\alpha} \cdot \vartheta' \cdot JT_\alpha = \frac{d\vartheta}{ds} \cdot N_\alpha.$$

Durch Vergleich dieser beiden Ergebnisse ergibt sich $\kappa_\alpha = \frac{d\vartheta}{ds}$. □

Theorem. Der Hauptsatz der ebenen Kurventheorie.

- (a) Es sei $k \geq 2$, $p_0 \in \mathbb{E}$, $a \in \mathbb{E}_L$ ein Einheitsvektor, $v : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine C^{k-1} -Funktion, $\varkappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{k-2} -Funktion und $t_0 \in I$. Dann existiert genau eine reguläre C^k -Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$, die die „Differentialgleichungen“

$$v_\alpha = v \quad \text{und} \quad \kappa_\alpha = \varkappa \quad (\dagger)$$

mit den „Anfangsbedingungen“

$$\alpha(t_0) = p_0 \quad \text{und} \quad T_\alpha(t_0) = a \quad (\ddagger)$$

erfüllt.

- (b) Sind $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}$ zwei reguläre C^2 -Kurven, so gilt genau dann $v_\alpha = v_\beta$ und $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$, wenn es eine Isometrie $f \in I(\mathbb{E})$ mit $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gibt, so dass $\beta = f \circ \alpha$ ist.

Beweis. Zu (a). Aus den „skalaren Beschreibungsgrößen“ v und \varkappa können wir durch insgesamt zweimalige Integration der Reihe nach ϑ (den Tangentenwinkel aus dem vorherigen Satz), T_α , α' und schließlich α selbst rekonstruieren. Dabei sorgen die Anfangsbedingungen (\ddagger) dafür, dass wir ein eindeutiges Ergebnis erhalten.

Im Einzelnen: Zunächst gilt $\vartheta' = v \cdot \varkappa$ nach dem Satz, und zwar mit $\vartheta(t_0) \in 2\pi\mathbb{Z}$ wegen $T_\alpha(t_0) = a$. Durch Integration erhält man eine C^{k-1} -Funktion $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$, die bis auf einen konstanten Summanden $\in 2\pi\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt ist. Daher können wir $T_\alpha = R_\vartheta(a)$ bilden, und T_α ist eindeutig bestimmt und C^{k-1} , und bestimmt die C^{k-1} -Funktion $\alpha' = v \cdot T_\alpha$. Hieraus erhalten wir schließlich durch eine weitere Integration die Kurve α selbst, die wegen der Anfangsbedingung $\alpha(t_0) = p_0$ eindeutig bestimmt ist. Sie ist C^k und offensichtlich (wegen $v_\alpha = v > 0$) regulär.

Zu (b). Ist $\beta = f \circ \alpha$ mit $f \in I(\mathbb{E})$, $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so ist $\beta' = f_L \circ \alpha'$ und daher $v'_\beta = \|f_L \circ \alpha'\| = \|\alpha'\| = v'_\alpha$, deshalb auch $T_\beta = f_L \circ T_\alpha$ und somit auch $N_\beta = f_L \circ N_\alpha$ wegen $\det(f_L) = 1$. Damit ergibt sich $\kappa_\beta N_\beta = \frac{d}{ds} T_\beta = \frac{d}{ds} (f_L \circ T_\alpha) = f_L \circ \frac{d}{ds} T_\alpha = \kappa_\alpha \cdot (f_L \circ N_\alpha) = \kappa_\alpha N_\beta$ und somit $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$.

Gilt umgekehrt $v_\alpha = v_\beta$ und $\varkappa_\alpha = \varkappa_\beta$, so fixieren wir $t_0 \in I$. Dann sind $(\alpha(t_0); T_\alpha(t_0), N_\alpha(t_0))$ und $(\beta(t_0); T_\beta(t_0), N_\beta(t_0))$ zwei KKS von \mathbb{E} , also existiert nach der Folgerung aus 1.6 über die „freie Beweglichkeit“ in euklidischen Räumen ein $f \in I(\mathbb{E})$ mit

$$f(\alpha(t_0)) = \beta(t_0), \quad f_L(T_\alpha(t_0)) = T_\beta(t_0) \quad \text{und} \quad f_L(N_\alpha(t_0)) = N_\beta(t_0); \quad (\circ)$$

weil die beiden genannten KKS dieselbe Orientierung besitzen, gilt sogar $f_L \in \text{SO}(\mathbb{E}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Wir betrachten nun die Kurve $\tilde{\beta} := f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$. Nach der schon bewiesenen Richtung von (b) gilt $v_{\tilde{\beta}} = v_\beta$ und $\varkappa_{\tilde{\beta}} = \varkappa_\beta$; ferner gilt $\tilde{\beta}(t_0) = \beta(t_0)$ und $T_{\tilde{\beta}} = T_\beta(t_0)$ nach (\circ) . Mit der Eindeutigkeitsaussage von (a) folgt nun $\beta = \tilde{\beta} = f \circ \alpha$. \square

Folgerung. Die geradlinigen Bewegungen (siehe Beispiel (a) aus 3.1) sind die einzigen regulären, ebenen C^2 -Kurven mit $\varkappa_\alpha \equiv 0$; die Kreisbewegungen (Beispiel (b) aus 3.1) sind die einzigen regulären, ebenen C^2 -Kurven mit $\varkappa_\alpha \equiv \text{const.} \neq 0$.

3.3 Taylorentwicklung ebener Kurven, Krümmungskreise

Aussage. Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine C^2 -Kurve, $t_0 \in I$ ein Parameter mit $\varkappa_0 := \varkappa_\alpha(t_0) \neq 0$, $\varepsilon := \text{sign}(\varkappa_0)$, $r := \varepsilon / \varkappa_0$, $p_0 := \alpha(t_0) + \frac{1}{\varkappa_0} \cdot N_\alpha(t_0)$ und $a := \frac{\alpha(t_0) - p_0}{\|\alpha(t_0) - p_0\|} = -\varepsilon \cdot N_\alpha(t_0)$.

Dann gilt für den Kreis $\beta : t \mapsto p_0 + r \cdot \Gamma_a(\varepsilon t)$

$$\beta(0) = \alpha(t_0) \quad , \quad T_\beta(0) = T_\alpha(t_0) \quad \text{und} \quad \varkappa_\beta(0) = \varkappa_\alpha(t_0) .$$

Dieser Kreis ist also für (α, t_0) das geometrische Analogon zur Taylor-Approximation zweiter Ordnung. Er heißt der *Krümmungskreis* zu (α, t_0) .

Beweis. Klar! \square

Die folgende Aufgabe verdeutlicht, warum Krümmungskreise auch *Schmiegekreise* genannt werden.

Aufgabe. Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine reguläre C^2 -Kurve und $t_0 \in I$.

(a) *Lage einer Kurve relativ zu ihrer Tangente in t_0 .* Man betrachte die Höhenfunktion

$$h : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle p - \alpha(t_0), N_\alpha(t_0) \rangle$$

und die Halbebenen

$$H_+ := h^{-1}(\mathbb{R}_+) \quad , \quad \overline{H_+} := h^{-1}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \quad , \quad H_- := \mathbb{E} \setminus \overline{H_+} \quad , \quad \overline{H_-} := \mathbb{E} \setminus H_+ .$$

(i) Ist $\varkappa_\alpha(t_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\}) \subset \begin{cases} H_+ , & \text{falls } \varkappa_\alpha(t_0) > 0 \\ H_- , & \text{falls } \varkappa_\alpha(t_0) < 0 \end{cases} .$$

(ii) Gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\}) \subset \overline{H_+}$ (bzw. $\subset \overline{H_-}$), so gilt $\varkappa_\alpha(t_0) \geq 0$ (bzw. ≤ 0).

- (b) *Geometrische Bedeutung des Krümmungskreises.* Es sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $p_\lambda := \alpha(t_0) + \lambda \cdot N_\alpha(t_0)$. Gilt $\lambda \cdot \kappa_\alpha(t_0) > 1$ (bzw. $\lambda \cdot \kappa_\alpha(t_0) < 1$), so gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, so dass $\alpha(U_\delta(t_0) \cap I \setminus \{t_0\})$ ganz in (bzw. ganz außerhalb) der offenen Kreisscheibe um p_λ mit Radius $|\lambda|$ liegt. Was hat das mit dem Krümmungskreis zu tun?
- (c) Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ glatt geschlossen (das heißt: $I = [a, b]$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ und $\alpha''(a) = \alpha''(b)$) und verläuft α in einer abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius r , so gibt es ein $t_0 \in I$ mit $|\kappa_\alpha(t_0)| \geq 1/r$.

3.4 Enveloppen, Evoluten, Parallelkurven und Involuten

Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}$ eine C^2 -Kurve. In Teil (b)–(d) der folgenden Aufgabe wird α als regulär vorausgesetzt; ihr begleitendes Frenet-2-Bein bezeichnen wir kurz mit (T, N) , ihre orientierte Krümmung mit κ .

Aufgabe.

- (a) **Envelope.** Ist $X : I \rightarrow \mathbb{E}_L$ ein C^2 -Vektorfeld (längs α) mit $\|X\| = 1$ und $\|X'\| > 0$, so existiert zu der Geradenschar $g_t := \alpha(t) + \mathbb{R} \cdot X(t)$ (mit $t \in I$) genau eine C^1 -Kurve $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}$ mit

$$\forall t \in I : (\beta(t) \in g_t \quad \text{und} \quad \beta'(t) \in \mathbb{R} \cdot X(t)) ,$$

und zwar gilt

$$\beta = \alpha + \lambda \cdot X \quad \text{mit} \quad \lambda := -\frac{\langle \alpha', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} .$$

Die Kurve β heißt *Envelope* (oder *Einhüllende* oder auch *Brennkurve*) der Geradenschar g_t . (Der Name „Brennkurve“ hat den folgenden Hintergrund: Falls die g_t Lichtstrahlen repräsentieren, ist β eine Linie extrem starker Strahlungsintensität.)

- (b) **Evolute.** Hat die Krümmung κ keine Nullstellen, so heißt die Kurve $\beta := \alpha + (1/\kappa) \cdot N$ die *Evolute* von α . Man zeige:
- (i) $\beta(I)$ ist die Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise von α .
 - (ii) $\beta = \alpha + \frac{\langle \alpha', \alpha' \rangle}{\det(\alpha', \alpha'')} \cdot J\alpha'$.
 - (iii) Ist κ differenzierbar, so gilt $\beta' = -(\kappa'/\kappa^2) \cdot N$.
 - (iv) Ist κ differenzierbar, so ist β genau dann in $t \in I$ nicht regulär, wenn α in t einen *Scheitel* hat (d.h. wenn $\kappa'(t) = 0$ gilt).
 - (v) *Huygens'sche Konstruktion der Evolute.* β ist die Envelope der Geradenschar, die aus den Normalen $\alpha(t) + \mathbb{R} \cdot N(t)$ von α besteht.
- (c) **Parallelkurven.** Für $s \in \mathbb{R}$ heißt die Kurve $\alpha_s : I \rightarrow \mathbb{E}$, $t \mapsto \alpha(t) + s \cdot N(t)$ die *Parallelkurve* von α im orientierten Abstand s . Wir definieren

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}, (t, s) \mapsto \alpha_s(t) .$$

Man zeige:

- (i) $\alpha'_s = (1 - s\kappa) \cdot \alpha'$. Insbesondere ist α_s genau dann in $t \in I$ regulär, wenn $\kappa(t) \cdot s \neq 1$ ist. Daher gilt: Falls α_s in $t \in I$ nicht regulär ist, so liegt $\alpha_s(t)$ auf der Evolute von α .
- (ii) Die partiellen Ableitungen von F nach t und s sind in einem $(t_0, s_0) \in I \times \mathbb{R}$ genau dann linear unabhängig (für die Experten: das bedeutet gerade, dass F in (t_0, s_0) maximalen Rang hat), wenn α_{s_0} in t_0 regulär ist. Insbesondere ist dies in allen $(t_0, 0)$ mit $t_0 \in I$ der Fall.
- (iii) Ist α_s in $t \in I$ regulär, so ist $\kappa(t)/|1 - s\kappa(t)|$ die orientierte Krümmung von α_s .
- (d) **Involuten.** Ist $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von v_α , so heißt $\beta := \alpha - s \cdot T$ eine *Involute* von α . Da Stammfunktionen lediglich bis auf eine „Integrationskonstante“ eindeutig festgelegt sind, existiert zu α eine ganze „Ein-Parameter-Familie“ von Involuten. Man zeige

$$\beta' = -s \cdot \kappa \cdot v_\alpha \cdot N.$$

Daher gilt also

- (i) $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$.
- (ii) β ist genau dann in $t \in I$ regulär, wenn $s(t) \cdot \kappa(t) \neq 0$.

Man skizziere α mit mehreren Involuten, und beweise sodann: Ist die Involute β überall regulär, so ist die Ein-Parameter-Familie aller Involuten von α gerade die Ein-Parameter-Familie aller Parallelkurven von β , und α ist die Evolute von β , falls β C^2 -differenzierbar ist; und umgekehrt: Ist α Evolute einer regulären C^2 -Kurve γ , so ist γ eine Involute von α .

3.5 Die Umlaufzahl und der Jordansche Kurvensatz

Definition. Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^k -Kurve.

- (a) α heißt *geschlossen*, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$ ist.
- (b) α heißt *einfach geschlossen*, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$ und

$$\forall a \leq t_1 < t_2 \leq b : (\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \implies t_1 = a \text{ und } t_2 = b)$$

gilt.

- (c) α heißt eine *glatt geschlossene C^k -Kurve*, wenn

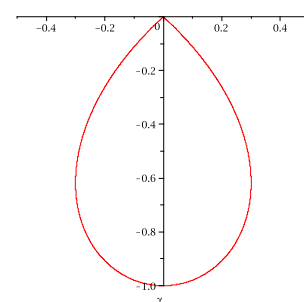
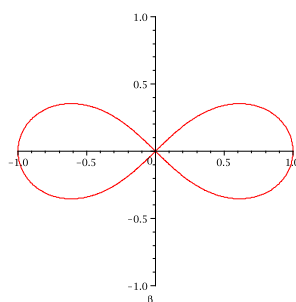
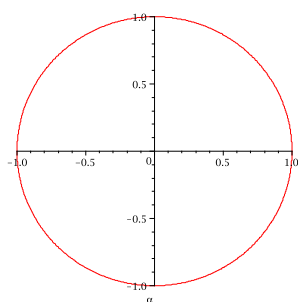
$$\forall r \in 0, \dots, k : \alpha^{(r)}(a) = \alpha^{(r)}(b)$$

gilt.

- (d) Wir nennen α eine *C^k -Jordankurve*, wenn α eine einfach und glatt geschlossene C^k -Kurve ist.

Beispiel und Gegenbeispiele.

- (a) Die Kreisparametrisierung $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ ist eine C^∞ -Jordankurve.
- (b) Die *Lemniskate von Bernoulli* $\beta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)} \cdot (1, \sin(t))$ ist nicht einfach geschlossen.
- (c) Die *Tschirnhausen-Kubik* $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \frac{t^2-1}{t^2+1} \cdot (t, 1)$ ist geschlossen, aber nicht glatt geschlossen.



Theorem. Der Jordansche Kurvensatz. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{IE}$ ein einfach geschlossener Weg eines 2-dimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{IE} , so zerfällt die offene Menge $\mathbb{IE} \setminus \alpha([a, b])$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten G_i und G_a , und $\alpha([a, b])$ ist der Rand sowohl von G_i als auch von G_a .*

Bemerkung. Der Jordansche Kurvensatz gilt in gleicher Weise auch für Kurven auf der 2-dimensionalen Sphäre S^2 , jedoch (offensichtlich) nicht auf dem Torus oder dem Möbiusband.

Der Beweis des Jordanschen Kurvensatzes in seiner vollen Allgemeinheit ist sehr schwierig. Man benutzt Methoden der algebraischen Topologie. Wir können jedoch mit differentialgeometrischen Mitteln hier einen einfachen Beweis des Jordanschen Kurvensatzes in dem Fall, dass α eine C^2 -Jordankurve ist, geben. Wichtige Hilfsmittel sind der Begriff der Umlaufzahl, sowie die Konstruktion eines „Kragens“ um die Kurve.

Zunächst stellen wir die notwendigen Informationen über die Umlaufzahl zusammen.

Konstruktion der Umlaufzahl. Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{IE}$ ein geschlossener Weg. Die Menge $\alpha([a, b])$ ist kompakt, also ist $G := \mathbb{IE} \setminus \alpha([a, b])$ offen. Für jedes $p \in G$ definieren wir das Einheitsvektorfeld

$$E_p : [a, b] \rightarrow \mathbb{IE}_L, \quad t \mapsto \frac{\alpha(t) - p}{\|\alpha(t) - p\|}.$$

Ist dann $v \in \mathbb{IE}_L$ ein Einheitsvektor, so existiert nach dem Satz aus 1.8 eine stetige Funktion $\vartheta_p : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$E_p = \Gamma_v \circ \vartheta_p$$

*Man beachte, dass hier für α keine Differenzierbarkeit, noch viel weniger Regularität vorausgesetzt ist. — Die Indizes i und a in den Bezeichnungen der Zusammenhangskomponenten stehen für „innen“ bzw. „außen“.

ist. Die Zahl

$$I(\alpha, p) := \frac{\vartheta_p(b) - \vartheta_p(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z},$$

die von der Wahl von v und von ϑ_p unabhängig ist, heißt die *Umlaufzahl* von α um p .

Satz. In obiger Situation gilt:

- (a) Die Funktion $I_\alpha : G \rightarrow \mathbb{Z}$, $p \mapsto I(\alpha, p)$ ist stetig und somit auf jeder Zusammenhangskomponente von G konstant.
- (b) Es existiert genau eine Zusammenhangskomponente von G , welche unbeschränkt ist; wir bezeichnen sie mit $C_G(\infty)$. Auf dieser Zusammenhangskomponente verschwindet die Umlaufzahl von α .
- (c) **Das Schnittkriterium.** Für $p \in G$ kann man die Umlaufzahl $I(\alpha, p)$ nach folgendem Rezept bestimmen:

Man wähle einen Strahl

$$S := \{p + s \cdot a \mid s \in \mathbb{R}_+\}, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{E}_L \text{ ein Einheitsvektor ist,}$$

so dass

$$K := \{t \in [a, b] \mid \alpha(t) \in S\}$$

eine *endliche* Menge ist. Man achte bei der Wahl von S darauf, dass $\alpha(0) \notin S$ und dass für alle $t \in K$

α in t stetig differenzierbar und $(a, \alpha'(t))$ eine Basis von \mathbb{E}

ist. (Aufgrund dessen kreuzt α den Strahl S zu den Zeiten $t \in K$.) Dann berechne man für jedes $t \in K$ die Schnitzzahl

$$\sigma_t := \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}, \quad \text{wenn } (a, \alpha'(t)) \begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases} \text{ orientiert ist.}$$

Man merke sich: $\sigma_t = 1$ heißt, dass α zum Zeitpunkt t gegenüber dem Strahl S Vorfahrt, und $\sigma_t = -1$, dass α zum Zeitpunkt t gegenüber dem Strahl S Wartepflicht hat.

Die Umlaufzahl von α um p ergibt sich nun durch die Bilanz

$$I(\alpha, p) = \sum_{t \in K} \sigma_t.$$

- (d) Ist α eine geschlossene, stückweise C^1 -Kurve, so gilt jeweils

$$I(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b \langle E'_p(t), JE_p(t) \rangle dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_a^b \det(E_p(t), E'_p(t)) dt.$$

Beweis. Zu (a) und (d). Wir beweisen (a) hier nur für den Fall, dass α eine C^1 -Kurve ist. Dann ist auch das Einheitsvektorfeld $E_p = \Gamma_a \circ \vartheta_p = (\cos \vartheta_p) a + (\sin \vartheta_p) Ja$ stetig differenzierbar, und es gilt $E'_p = (\sin \vartheta_p) \vartheta'_p a - (\cos \vartheta_p) \vartheta'_p Ja = \vartheta'_p \cdot JE_p$ und somit $\det(E_p, E'_p) = \vartheta'_p$. Hieraus folgt $I(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi}(\vartheta_p(b) - \vartheta_p(a)) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \det(E_p, E'_p)$. Nun hängt E_p (aufgrund seiner Definition: $E_p(t) = \frac{\alpha(t) - p}{\|\alpha(t) - p\|}$) stetig von p ab; aus der vorherigen Darstellung von $I(\alpha, p)$ folgt daher mit dem Vererbungssatz der Integralrechnung, dass auch $I(\alpha, p)$ stetig von p abhängt.

Zu (b). Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, ist sein stetiges Bild $\alpha([a, b])$ ebenfalls kompakt, insbesondere beschränkt. Also existieren $p_0 \in \mathbb{E}$ und $r > 0$ mit $\alpha([a, b]) \subset B_r(p_0)$ und somit $\mathbb{E} \setminus B_r(p_0) \subset G$. Da jede unbeschränkte Zusammenhangskomponente von G mit $\mathbb{E} \setminus B_r(p_0)$ einen nicht-leeren Durchschnitt haben muss, folgt hieraus, dass G genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente $C_G(\infty)$ besitzt.

Ist $p \in \mathbb{E} \setminus B_r(p_0)$ und $a = p - p_0/\|p - p_0\|$, so gilt für alle $t \in [a, b]$: $\vartheta_p(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und somit $|I(\alpha, p)| = \frac{1}{2\pi} |\vartheta_p(b) - \vartheta_p(a)| \leq \frac{1}{2}$, mithin $I(\alpha, p) = 0$. Weil nach (a) $I(\alpha, p)$ auf Zusammenhangskomponenten von G konstant ist, folgt $I(\alpha, p) = 0$ für alle $p \in C_G(\infty)$. \square

Beweis des Jordanschen Kurvensatz für eine C^2 -Jordankurve. Mit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ bezeichnen wir eine reguläre L -periodische C^2 -Kurve, so dass $\alpha|[0, L]$ eine C^2 -Jordankurve ist. Wir betrachten zu α die Parallelkurven $\alpha_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ im Abstand $s \in \mathbb{R}$ und definieren außerdem eine C^1 -Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}$ durch

$$F(t, s) := \alpha_s(t) := \alpha(t) + s \cdot N_\alpha(t)$$

sowie ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ durch

$$\delta := 1/\varkappa_0 \quad \text{mit} \quad \varkappa_0 := \max_{t \in [0, L]} |\varkappa_\alpha(t)| = \max_{t \in \mathbb{R}} |\varkappa_\alpha(t)|.$$

Behauptung 1. $F|(\mathbb{R} \times U_\delta(0))$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, also eine offene Abbildung in \mathbb{E} .

Beweis zu Behauptung 1: Nach der Aufgabe über Parallelkurven in Abschnitt 3.4 hat F in einem $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ genau dann maximalen Rang, wenn $\varkappa_\alpha(t) \cdot s \neq 1$ ist. Nach der Definition von δ ist dies für alle $(t, s) \in \mathbb{R} \times U_\delta(0)$ der Fall; mit dem lokalen Umkehrsatz folgt, dass F auf $\mathbb{R} \times U_\delta(0)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Behauptung 2. Es existiert ein $\varepsilon \in]0, \delta]$, so dass gilt

$$\forall s \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\} : \alpha_s(\mathbb{R}) \cap \alpha(\mathbb{R}) = \emptyset.$$

Beweis zu Behauptung 2: Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann existieren reelle Folgen (s_n) mit $-\delta < s_n < \delta$, $s_n \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, sowie $(t_n), (t'_n)$ mit $t_n, t'_n \in [0, L]$, so dass jeweils $\alpha_{s_n}(t_n) = \alpha(t'_n)$, mit anderen Worten

$$F(t_n, s_n) = F(t'_n, 0), \quad (*)$$

gilt. Da (t_n) und (t'_n) im (folgen-)kompakten Intervall $[0, L]$ liegen, besitzen diese Folgen Häufungspunkte; indem wir ggfs. zu konvergenten Teilfolgen übergehen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass (t_n) und (t'_n) jeweils gegen einen Grenzwert $t_* \in [0, L]$ bzw. $t'_* \in [0, L]$ konvergieren. Nun gilt aufgrund der Stetigkeit von F , indem wir in $(*)$ den Grenzübergang durchführen: $F(t_*, 0) = F(t'_*, 0)$, also $\alpha(t_*) = \alpha(t'_*)$. Da $t_*, t'_* \in [0, L]$ gilt, und $\alpha|[0, L]$ als einfach geschlossen vorausgesetzt war, folgt hieraus entweder $t_* = t'_*$ oder $t_* = 0, t'_* = L$ oder $t_* = L, t'_* = 0$. Wir betrachten zunächst den Fall $t_* = t'_*$. Nach Behauptung 1 existiert eine Umgebung W von $(t_*, 0)$ in \mathbb{R}^2 , so dass $F|W$ injektiv ist. Weil die Folgen (t'_n, s_n) und $(t_n, 0)$ beide gegen $(t_*, 0)$ konvergieren und daher für große n in W liegen, folgt daher aus $(*)$ $(t_n, s_n) = (t'_n, 0)$ und somit insbesondere $s_n = 0$, im Widerspruch zur Konstruktion von (s_n) . Im Falle $t_* = 0, t'_* = L$ (bzw. $t_* = L, t'_* = 0$) hat man nur die vorherige Argumentation zu modifizieren, in dem man t'_n durch $t'_n - L$ (bzw. t_n durch $t_n - L$) ersetzt.

Nun konstruieren wir den „Kragen“

$$U := F(\mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[)$$

und seine beiden Teilmengen

$$U_+ := F(\mathbb{R} \times]0, \varepsilon[) \quad \text{und} \quad U_- := F(\mathbb{R} \times]-\varepsilon, 0[).$$

Alle drei Mengen sind offen, U enthält $\alpha(\mathbb{R})$, und U_+ und U_- sind wegen Behauptung 2 zusammenhängende Teilmengen von $G := \mathbb{E} \setminus \alpha(\mathbb{R})$. Insbesondere existieren daher Zusammenhangskomponenten Z_+ und Z_- von G , die U_+ bzw. U_- enthalten. (Im Augenblick wissen wir noch nicht, dass $Z_- \neq Z_+$ ist.)

Behauptung 3. Außer Z_+ und Z_- besitzt G keine Zusammenhangskomponenten, weil für jede Zusammenhangskomponente Z von G gilt: $\emptyset \neq \partial Z \subset \alpha(\mathbb{R})$.

Beweis zu Behauptung 3: Sei Z eine Zusammenhangskomponente von G . Wir zeigen zunächst $\partial Z \neq \emptyset$. Wäre nämlich $\partial Z = \overline{Z} \setminus Z^0 = \emptyset$, so würde $\overline{Z} \subset Z^0$ und damit $Z = Z^0 = \overline{Z}$ gelten. $Z \neq \emptyset$ wäre damit eine

sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{E} . Da \mathbb{E} zusammenhängend ist, würde $Z = \mathbb{E}$ folgen, im Widerspruch zu $Z \subset G = \mathbb{E} \setminus \alpha(\mathbb{R})$. Wir nehmen nun an, dass $\partial Z \not\subset \alpha(\mathbb{R})$ gelten würde. Dann würde also ein $p \in \partial Z \cap G$ existieren. Da G offen und $p \in G$ ist, existiert daher ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $U_\delta(p) \subset G$; wegen $p \in \partial Z$ gilt $U_\delta(p) \cap Z \neq \emptyset$. Da $U_\delta(p)$ und Z beide zusammenhängend sind, folgt hieraus, dass auch $U_\delta(p) \cup Z$ zusammenhängend ist. Da Z eine Zusammenhangskomponente ist, folgt $U_\delta(p) \subset Z$ und somit $p \in Z^0$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $p \in \partial Z = \overline{Z} \setminus Z^0$. Damit ist $\emptyset \neq \partial Z \subset \alpha(\mathbb{R})$ gezeigt. Hieraus folgt insbesondere, dass für den Schnitt mit dem „Kragen“ U gilt: $\overline{Z} \cap U \neq \emptyset$, und daher, weil U offen ist, auch $Z \cap U \neq \emptyset$. Andererseits gilt $Z \subset G$ und daher $Z \cap \alpha(\mathbb{R}) = \emptyset$. Daher gilt entweder $Z \cap U_+ \neq \emptyset$ oder $Z \cap U_- \neq \emptyset$. Im Falle $Z \cap U_+ \neq \emptyset$ ist mit Z und U_+ auch $Z \cup U_+$ zusammenhängend, und daher gilt $U_+ \subset Z$, weil Z eine Zusammenhangskomponente ist. Daher gilt $Z = Z_+$. Im Fall $Z \cap U_- \neq \emptyset$ argumentiert man entsprechend.

Behauptung 4. Es gilt $\partial Z_+ = \partial Z_- = \alpha(\mathbb{R})$.

Beweis zu Behauptung 4: Aus Behauptung 3 wissen wir schon $\partial Z_+ \subset \alpha(\mathbb{R})$. Ist zum Beweis der umgekehrten Inklusion $t \in \mathbb{R}$ gegeben, so gilt $\alpha(t) = \lim_{s \searrow 0} \alpha_s(t) \in \overline{Z_+}$. Andererseits ist $\alpha(t) \notin Z_+ = Z_+^0$, somit ist $\alpha(t) \in \overline{Z_+} \setminus Z_+^0 = \partial Z_+$. Mit Z_- verfährt man wieder analog.

Behauptung 5. Es ist $Z_+ \neq Z_-$, somit hat G genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Zum Beweis dieser letzten Behauptung benutzt man die Umlaufzahl, und zwar wendet man das Schnittkriterium an, um zu zeigen, dass die Umlaufzahl-Funktion I_α auf U_+ und U_- verschiedene Werte annimmt. Dazu konstruiert man eine α tangierende Gerade g , so dass α ganz auf einer Seite von g liegt. \square

3.6 Die isoperimetrische Ungleichung

Satz. (Isoperimetrische Ungleichung) Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ ein einfach geschlossener rektifizierbarer Weg und G das von α berandete, beschränkte Gebiet (siehe den Jordanschen Kurvensatz). Dann gilt für dessen Flächeninhalt $\lambda^2(\overline{G})$ die Ungleichung

$$4\pi \cdot \lambda^2(\overline{G}) \leq L(\alpha)^2,$$

und zwar gilt Gleichheit genau dann, wenn α eine Kreislinie beschreibt.

Der Beweis des Satzes über die isoperimetrische Ungleichung in dieser allgemeinen Form kann man nachlesen bei DINGHAS/SCHMIDT: *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n -dimensionalen Euklidischen Raum.*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. **1943**, (1944), no. 7. Einen Beweis für den Fall, dass α eine C^2 -Kurve ist, findet man auch in DO CARMO, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, 3. Auflage, Braunschweig 1993, S. 26ff.

3.7 Der Vierscheitelsatz

Definition. Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ eine reguläre C^1 -Kurve.

- (a) Ist α eine C^1 -Jordankurve, so heißt sie *konvex*, wenn für jedes $t_0 \in [a, b]$ die Kurve α jeweils ganz auf einer Seite der Tangenten $\alpha(t_0) + \mathbb{R} \cdot T_\alpha(t_0)$ liegt, das soll heißen, wenn für die Funktion $g_{t_0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N_\alpha(t_0) \rangle$ entweder überall $g_{t_0} \geq 0$ oder überall $g_{t_0} \leq 0$ gilt.
- (b) Ist α eine konvexe C^2 -Jordankurve, so nennt man α auch eine *Eilinie*.
- (c) Ist α in einem $t_0 \in [a, b]$ dreimal differenzierbar und besitzt κ_α in t_0 ein lokales Extremum, so sagt man, dass α in t_0 einen *Scheitel* hat.

Aufgabe. Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine C^3 -Eilinie, so trifft jede Gerade die Kurve α , wenn überhaupt, entweder in einer Strecke (die auch zu einem einzelnen Punkt degenerieren kann), oder in genau zwei Punkten.

Vierscheitel-Satz. Jede C^3 -Eilinie $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ hat mindestens vier Scheitel in $[a, b[$.

Beweis. (nach KÜHNEL, *Differentialgeometrie*, S. 31) Falls κ auf einem Teilintervall I von $[a, b]$ positiver Länge konstant ist, so sind alle inneren Punkte von I Scheitelpunkte und deshalb ist in diesem Fall nichts zu zeigen. Daher können wir im Folgenden voraussetzen, dass κ auf keinem Teilintervall von $[a, b]$ positiver Länge konstant ist. Dann sind die lokalen Extrema von κ gerade die Nullstellen von κ' , an denen κ' das Vorzeichen wechselt.

Wir begründen nun zunächst, dass α mindestens *zwei* Scheitelpunkte besitzt. Dazu beachten wir, dass die stetige Funktion κ auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt, etwa in $s_1 \in [a, b]$ bzw. in $s_2 \in [a, b]$. Dann gilt $s_1 \neq s_2$ wegen der Voraussetzung an die Nicht-Konstanz von κ , und nach Definition sind s_1 und s_2 insbesondere lokale Extrema von κ und somit Scheitelpunkte von α . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $s_1 < s_2$ voraus.

Wir betrachten nun das positiv orientierte KKS $(\alpha(s_1); a_1, a_2)$ von \mathbb{E}^2 , wobei wir $a_1 := \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{\|\alpha(s_2) - \alpha(s_1)\|}$ und $a_2 := J a_1$ setzen (und J die Vierteldrehung von \mathbb{E}^2 ist), außerdem seien $x_1, x_2 : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die zu diesem KKS gehörenden Koordinatenfunktionen. Damit gilt also $x_2(\alpha(s_1)) = x_2(\alpha(s_2)) = 0$, und es gibt kein weiteres $s \in [a, b]$ mit $x_2(\alpha(s)) = 0$, denn anderenfalls würde nach der Aufgabe dieses Abschnitts $x_2 \circ \alpha$ auf einem ganzen Teilintervall von $[a, b]$ verschwinden, wo dann auch κ verschwinden würde. Daher wechselt $x_2 \circ \alpha$ das Vorzeichen nur in s_1 und s_2 .

Wir setzen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert sei, und machen die Annahme, dass α in s_1 und s_2 seine einzigen Scheitelpunkte hat. Dann wechselt κ' sein Vorzeichen nur in s_1 und s_2 , und daher wechselt die Funktion $s \mapsto \kappa'(s) \cdot x_2(\alpha(s))$ ihr Vorzeichen überhaupt nicht. Weil α nach Bogenlänge parametrisiert ist, lautet die erste Frenet-Gleichung in dieser Situation $\alpha'' = \kappa \cdot J \alpha'$, woraus insbesondere $(x_1 \circ \alpha)'' = -\kappa \cdot (x_2 \circ \alpha)'$ folgt. Mit dieser Gleichung ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_a^b \kappa'(s) \cdot (x_2 \circ \alpha)(s) ds = \underbrace{\kappa(s) \cdot (x_2 \circ \alpha)(s)}_{\stackrel{(*)}{=} 0} \Big|_a^b - \int_a^b \kappa(s) \cdot (x_2 \circ \alpha)'(s) ds = \int_a^b (x_1 \circ \alpha)''(s) ds = (x_1 \circ \alpha)'(s) \Big|_a^b \stackrel{(*)}{=} 0,$$

wobei die mit $(*)$ markierten Gleichheitszeichen beide aus der Periodizität von α folgen. Der Integrand $\kappa' \cdot (x_2 \circ \alpha)$ auf der linken Seite hat jedoch keinen Vorzeichenwechsel. Wenn das Integral gleich Null ist, muss daher der Integrand identisch verschwinden, also $\kappa' = 0$. Damit ist κ konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung am Anfang des Beweises.

Somit besitzt α noch einen dritten Scheitelpunkt, also eine dritte Nullstelle von κ' mit Vorzeichenwechsel. Wegen der Periodizität kann die Anzahl der Vorzeichenwechsel von κ' aber nicht ungerade sein, also muss es auch noch einen vierten Scheitelpunkt geben. \square

