

(Abgabe: A5, C, Eingang Ost, Postfach 46236, Montag, 11. September 2018 bis 16 Uhr)

### 1. Wirklich gleich.

Seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

Zeige, dass  $f$  im Sinne der  $\epsilon$ - $\delta$ -Stetigkeit genau dann stetig ist, wenn  $f$  im Sinne der topologischen Stetigkeit stetig ist.

(Hierbei sind natürlich die durch die Metriken induzierten Topologien gemeint!)

(8 Punkte)

### 2. Eine Äquivalenz.

Sei  $X$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1)  $X$  ist zusammenhängend.

(2) Es existieren keine zwei nicht-leere offene Teilmengen  $U, V$  von  $X$  mit  $U \cup V = X$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

(6 Punkte)

### 3. Zusammenhängend und doch nicht wegzusammenhängend.

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ :

$$A := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ und } y \in [-1, 1] \}$$

$$B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}_+ \text{ und } y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \}$$

$$M := A \cup B.$$

(a) Zeige, dass  $B$  zusammenhängend ist. (4 Punkte)

(b) Zeige, dass  $\overline{B} = M$  gilt, und folgere, dass  $M$  zusammenhängend ist. (6 Punkte)

[Tipp. Satz 1.10(i).]

(c) Es sei  $y \in [-1, 1]$  und  $\varepsilon < 1$  gegeben. Man zeige, dass es  $x \in \mathbb{R}_+$  gibt mit

$$(x, \sin(\frac{1}{x})) \in (0, \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon).$$

Man bestimme weiter für jedes solche  $x$  die Zusammenhangskomponente von  $M \cap ((0, \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon))$ , die den Punkt  $(x, \sin(\frac{1}{x})) \in B$  enthält. (10 Punkte)

[Tipp. Satz 1.9.]

(d) Folgere aus (c), dass  $M$  nicht lokal zusammenhängend ist. (6 Punkte)

(e) Zeige, dass es keinen stetigen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  mit Anfangspunkt  $\gamma(0) \in A$  und Endpunkt  $\gamma(1) \in B$  gibt. Also ist  $M$  nicht wegzusammenhängend. (10 Punkte)

Hierbei heißt ein metrischer Raum  $(M, d)$  wegzusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte  $p, q \in M$  einen stetigen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(1) = q$  gibt.

[Tipp. Man nehme entgegen der Behauptung an, dass es einen stetigen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) \in A$  und  $\gamma(1) \in B$  gibt. Dann ist die Menge  $\gamma^{-1}[A]$  abgeschlossen in  $[0, 1]$  und besitzt daher ein Maximum  $t_0 \in [0, 1]$ . Ist etwa  $\gamma(t_0) = (0, y)$  mit  $y \in [-1, 1]$ , so kann man durch Anwendung von (c) auf dieses  $y$  einen Widerspruch erhalten.]

