Wiederholungskurs Analysis II

Alexander Klauer

Frühlingssemester 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Der $\mathbb{R}^n$

1.1 Der Betrag im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 1. Gegeben seien die Vektoren $v_1 := (1, 2, 4)$ und $v_2 := (2, -3, -9)$ des $\mathbb{R}^3$. Berechne den Abstand zwischen v_1 und v_2 bezüglich der 1-, 2- und der ∞-Norm.

Lösung zu Aufgabe 1. Der Abstand ist $\|v_1 - v_2\|$, wobei $\|\cdot\|$ die zugrundeliegende Norm ist. Berechnen wir zunächst die Differenz:

$$D := v_1 - v_2 = (1, 2, 4) - (2, -3, -9) = (-1, 5, 13).$$

Dann gilt nach der Definition der p-Normen

$$\begin{aligned} \|D\|_1 &= |-1| + |5| + |13| = 19, \\ \|D\|_2 &= \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 13^2} = \sqrt{1 + 25 + 169} = \sqrt{195}, \\ \|D\|_\infty &= \max\{|-1|, |5|, |13|\} = 13. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $M_1 := \mathbb{R}^{[0,1]}$ die Menge aller reellwertigen Abbildungen auf dem Intervall $[0,1]$ und $M_2 := C^0_{\mathbb{R}}([0,1])$ die Menge der stetigen Abbildungen in M_1 (d.h. $M_2 \subseteq M_1$). Ist

$$d_1(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

eine Metrik auf M_1? Ist

$$d_2(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$$

eine Metrik auf M_2? Ist d_1 eine Metrik auf M_2?

Lösung zu Aufgabe 2. Definiere $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(0) := 0$ und $f(x) = 1/x$ sonst. Dann gilt offenbar $d_1(f,0) = \infty$. Wegen $\infty \notin [0,\infty)$ kann also d_1 keine Metrik auf M_1 sein. Betrachte nun d_2. Seien $f,g,h\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Da stetige Abbildungen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt sind, sind sie integrierbar. Damit stimmt der Wertebereich von d_2. Offensichtlich gilt $d_2(f,g) = d_2(g,f)$ und aus $f = g$ folgt offensichtlich $d_2(f,g) = 0$. Sei nun umgekehrt $d_2(f,g) = 0$ vorgegeben. Angenommen, es gäbe ein $x_0 \in [0,1]$ so dass $f(x_0) \neq g(x_0)$. Da $f - g$ eine stetige Abbildung ist, wäre dann $f(x) - g(x) \neq 0$ für alle x aus einer kleinen Umgebung von x_0. Da der Integrand in $d_2(f,g)$ aber nicht negativ ist, wäre dann das Integral positiv, Widerspruch. Schließlich gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x) - h(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \mathrm{d}x \\ \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x + \int_0^1 |g(x) - h(x)| \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Also ist d_2 eine Metrik auf M_2. Betrachten wir nun d_1 eingeschränkt auf $M_2 \times M_2$. Da stetige Abbildungen auf $[0,1]$ beschränkt sind, stimmt diesmal der Wertebereich von d_1. Wieder ist $d_1(f,g) = d_1(g,f)$ offensichtlich, und aus $f = g$ folgt $d_1(f,g) = 0$. Sei nun umgekehrt $d_1(f,g) = 0$ vorgegeben. Angenommen, es gäbe ein $x_0 \in [0,1]$ so dass $f(x_0) \neq g(x_0)$. Dann wäre aber $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$ und damit $d_1(f,g) > 0$, Widerspruch. Also folgt $f = g$. Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} \left(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|\right) \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - h(x)|.\end{aligned}$$

Also ist d_1 hier eine Metrik.

1.2 Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

Aufgabe. Finde eine offene Überdeckung des Intervalls $I := [0,1)$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Lösung. Das Problem des Intervalls I ist, dass es rechts nicht abgeschlossen ist. Wir definieren deswegen

$$U_n := \left(-1, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann überdeckt die Vereinigung aller U_n das Intervall I, denn sei $x \in I$, dann ist $1 - x > 0$, also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N < 1 - x$ und daher ist dann $x \in U_N$. Andererseits kann es keine endliche Teilüberdeckung geben: denn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ ist $U_n \subseteq U_m$, so dass die Vereinigung endlich vieler $U_{n_1}, \ldots, U_{n_l}$ einfach $U_{\max\{n_1,\ldots,n_l\}}$ wäre. Das kann aber nicht sein, da $I \not\subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Stetigkeit

Aufgabe 1. Wo ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = 0, \\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

stetig, wo nicht?

Lösung zu Aufgabe 1. Lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen sind stetig. Daher sind Polynome als Multiplikationen und Additionen von linearen Abbildungen stetig. In der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist f als Quotient von Polynomen definiert und daher stetig. Bleibt noch, die Stetigkeit von f im Punkt $(0, 0)$ zu untersuchen. Sei nun $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, die gegen $(0, 0)$ konvergiert. Ist $y_n = 0$, dann ist $f(x_n, y_n) = 0$. Andernfalls haben wir die Abschätzung

$$|f(x_n, y_n)| = \left|\frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}\right| \leq \left|\frac{x_n y_n^2}{y_n^2}\right| = |x_n|.$$

Also folgt

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| \leq \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| = 0.$$

Wegen der Definitheit der Betragsfunktion folgt daher auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$. Also ist f auch in $(0, 0)$ und damit überall stetig.

Aufgabe 2. Wo ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = 0, \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

stetig, wo nicht?

Lösung zu Aufgabe 2. Da auch die Wurzel stetig ist, ist f wie bei Aufgabe 1 stetig in der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Bleibt noch, die Stetigkeit von f im Punkt $(0,0)$ zu untersuchen. Sei nun $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, die gegen $(0,0)$ konvergiert. Ist $x_n = 0$, dann ist $f(x_n, y_n) = 0$. Andernfalls haben wir die Abschätzung

$$|f(x_n, y_n)| = \left| \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \leq \left| \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2}} \right| = \left| \frac{x_n y_n}{|x_n|} \right| = |y_n|.$$

Also folgt

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| \leq \lim_{n\to\infty} |y_n| = 0$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| = 0.$$

Wegen der Definitheit der Betragsfunktion folgt daher auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$. Also ist f auch in $(0,0)$ und damit überall stetig.

2 Differentiation in mehreren Variablen

2.1 Totale und partielle Ableitungen

Aufgabe 1. Sei

$$S := \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A \text{ ist invertierbar}\}.$$

Definiere die Abbildung $f\colon S \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ via

$$f(A) := A^{-1}.$$

Ist f differenzierbar? Wenn ja, was sind Definitions- und Wertebereich von f'? Berechne ggf. f'.

Lösung zu Aufgabe 1. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$. Wir können die Elemente von S mit den invertierbaren $n \times n$-Matrizen identifizieren. Sei nun $A_0 \in S$. Da die Determinante stetig ist, existiert dann eine kleine offene Umgebung U von A_0, so dass $\det(A) \neq 0$ für alle $A \in U$. Also ist S eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Bekanntlich sind Identität und Inversenbildung differenzierbar, also ist f differenzierbar. Für die Ableitungsabbildung haben wir dann

$$f'\colon S' \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)).$$

Das entspricht also einer Abbildung, die invertierbare $n \times n$-Matrizen auf $(n \times n) \times (n \times n)$-„Matrizen“ abbildet, also effektiv auf Elemente im $\mathbb{R}^{n^4}$. Berechnen wir nun f'. Die Ableitung der Identität ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} A = \mathrm{id}_S = (B \mapsto B).$$

Aus Analysis I sind wir gewohnt, dass die Ableitung der Identität konstant ist. Dies gilt auch hier: die Ableitung der Identität ist zwar eine Abbildung; diese hängt aber nicht von A ab. Sie ist in diesem Sinne also konstant. Ferner sind wir aus Analysis I gewohnt, dass die Ableitung einer konstanten Abbildung gleich Null ist. Dasselbe gilt auch hier: es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} \mathrm{id}_S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}(B \mapsto B) = 0.$$

Jetzt können wir die Produktregel anwenden:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A} \mathrm{id}_S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}(AA^{-1}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}A\right) A^{-1} + A\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}A^{-1}\right) \\ = (B \mapsto B)A^{-1} + Af'(A). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung nun von links mit A^{-1} und lösen nach f' auf, so erhalten wir:

$$f'(A) = (B \mapsto -A^{-1}BA^{-1}).$$

Aufgabe 2. Seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ und definiere

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}, \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i x_i. \end{aligned}$$

Ist f überall differenzierbar? Falls ja, welche Dimensionen hat die Fundamentalmatrix? Berechne sie ggf. Wie steht es mit zweifacher Differenzierbarkeit und der Hessematrix?

Lösung zu Aufgabe 2. Offensichtlich ist f als Summe von Polynomen in den x_i partiell differenzierbar. Die i-te partielle Ableitung ist $\partial_i f(x) = c_i$. Also sind alle partiellen Ableitungen konstant, insbesondere stetig. Damit ist f stetig partiell differenzierbar und damit total differenzierbar. Per Definition ist die Fundamentalmatrix eine $1 \times n$-Matrix, die durch $(c_1, \ldots, c_n)^t$ gegeben ist. Die zweiten partiellen Ableitungen verschwinden alle. Die Hessematrix ist daher die $n \times n$-Nullmatrix.

Aufgabe 3. Wo ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = 0, \\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

partiell, wo total differenzierbar?

Lösung zu Aufgabe 3. Als Verkettung differenzierbarer Abbildungen (Polynome, Division) ist f auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar und damit auch partiell differenzierbar. Bleibt noch, die Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$ zu untersuchen. Für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = 0, \\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Also ist f partiell differenzierbar. Für die totale Differenzierbarkeit müsste es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und eine Abbildung $o\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben, so dass

$$f(x,y) = f(0,0) + A(x,y) + o(x,y), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o(x,y)}{|(x,y)|} = 0.$$

Nun ist $f(0,0) = 0$, und gemäß den oben ausgerechneten partiellen Ableitungen ist auch $A = 0$. Also ist f genau dann total differenzierbar, falls

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|(x,y)|} = 0.$$

Diese Gleichung ist wegen der Definition der 2-Norm äquivalent zu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Nehmen wir aber beispielsweise die Nullfolge $(x_n, y_n) := (1/n, 1/n)$, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n^2}{(x_n^2+y_n^2)^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-3}}{(2n^{-2})^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-3}}{2^{3/2}n^{-3}} = 2^{-3/2} \neq 0.$$

Also ist f nicht total differenzierbar im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 4. Wo ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ &(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = 0, \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

partiell, wo total differenzierbar?

Lösung zu Aufgabe 4. Da die Wurzel in $(0,\infty)$ differenzierbar ist, ist f aus ähnlichen Gründen wie in Aufgabe 3 in der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar. Bleibt noch, die Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$ zu untersuchen. Für die partiellen Ableitungen gilt wie in Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = 0, \\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Also ist f partiell differenzierbar. Wie oben ist die totale Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$ äquivalent zu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|(x,y)|} = 0.$$

Diese Gleichung ist wegen der Definition der 2-Norm äquivalent zu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Wieder mit der Nullfolge $(x_n, y_n) := (1/n, 1/n)$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2}}{2n^{-2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Also ist f wieder nicht total differenzierbar.

2.2 Richtungsableitungen

Aufgabe. Definiere

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \left(1 - \cos \frac{x^2}{y}\right) \sqrt{x^2+y^2}, & y \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Welche Richtungsableitungen von f existieren beim Punkt $(0,0)$? Berechne sie! Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

Lösung. Die möglichen Richtungen (x,y) können wir durch Polarkoordinaten darstellen:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta, \\ y &= \sin\theta, \end{aligned}$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$. Da aber auch $t < 0$ sein darf, bekommen wir für jede Richtung auch die Gegenrichtung gleich mit. Es genügt daher, $0 \leq \theta < \pi$ zu betrachten. Nun ist

$$f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \text{ oder } \theta = 0, \\ \left(1 - \cos\left(t\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\right)|t| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\theta = 0$ ist $f(t\cos\theta, t\sin\theta)$ also konstant 0 und damit differenzierbar in t, die Richtungsableitung ist in diesen Fällen 0. Betrachten wir nun den Fall, dass $\theta \neq 0$. Wir berechnen die Ableitung in t zunächst für $t \neq 0$.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} f(t\cos\theta, t\sin\theta) \\ &\qquad = \left(1 + \sin\left(t\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)|t| + \left(1 - \cos\left(t\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\right)\operatorname{sgn}(t). \end{aligned}$$

Da $\operatorname{sgn}(t)$ beschränkt ist, ist

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial}{\partial t} f(t\cos\theta, t\sin\theta) = 0.$$

Damit ist 0 also ein Kandidat für die Richtungsableitung. Wir betrachten den Differenzenquotienten:

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(t\cos\theta, t\sin\cos\theta) - f(0,0) - 0\cdot t|}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{\left|\left(1 - \cos\left(t\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\right)|t|\right|}{|t|} = 0.$$

Also existieren alle Richtungsableitungen und sie sind 0.

Sei nun

$$(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right).$$

Wir überprüfen nun die Differenzierbarkeit bezüglich der 2-Norm und erhalten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n, y_n) - f(0,0)|}{\|(x_n, y_n)\|_2} &= \frac{\left|\left(1 - \cos\frac{x_n^2}{y_n}\right)\sqrt{x_n^2 + y_n^2}\right|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|1 - \cos\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} |1 - \cos n|
\end{aligned}$$

Dieser Limes existiert offenbar nicht. Also ist f nicht im Ursprung differenzierbar.

2.3 Taylorreihen

Aufgabe. Berechne die Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung der Abbildung

$$\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\
&(x, y) \mapsto \cos(xy/\pi + x + y)
\end{aligned}$$

im Punkt $(\pi, -\pi)$.

Lösung. Allgemein ist die Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung gegeben durch

$$(T_{2,v_0} f)(v) = f(v_0) + J(v_0)(v - v_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)^t Q(v_0)(v - v_0)$$

mit Fundamentalmatrix J und Hessematrix Q. Wir berechnen nun diese Matrizen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= -(y/\pi + 1)\sin(xy/\pi + x + y), \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= -(x/\pi + 1)\sin(xy/\pi + x + y), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) &= -(y/\pi + 1)^2\cos(xy/\pi + x + y), \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) &= -(x/\pi + 1)^2\cos(xy/\pi + x + y), \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) \\
&= -\frac{1}{\pi}\sin(xy/\pi + x + y) \\
&\quad - (x/\pi + 1)(y/\pi + 1)\cos(xy/\pi + x + y).
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$J(\pi, -\pi) = (0, -2\sin(-\pi + \pi - \pi))^t = (0, 0)^t$$

und

$$H(\pi, -\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
(T_{2,(\pi,-\pi)}f)(x,y) &= f(\pi,-\pi) + \frac{1}{2}(x-\pi, y+\pi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\pi \\ y+\pi \end{pmatrix} \\
&= -1 + (x-\pi, y+\pi)\begin{pmatrix} 0 \\ 2(y+\pi) \end{pmatrix} \\
&= -1 + 2(y+\pi)^2.
\end{aligned}$$

2.4 Extremwerte ohne Nebenbedingungen

Aufgabe. Berechne die relativen und absoluten Extrema der Abbildung

$$\begin{aligned}
&f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\
&(x,y) \mapsto 3x(1-y^2) - x^3.
\end{aligned}$$

Lösung. Für $y = 0$ und $x \to -\infty$ geht $f(x,y) \to \infty$, und für $y = 0$ und $x \to \infty$ geht $f(x,y) \to -\infty$. Daher existieren keine absoluten Extrema. Die Abbildung ist als Polynom offenbar beliebig oft partiell differenzierbar. Daher kommen für relative Extrema nur stationäre Punkte in Frage. Diese berechnen wir jetzt. Zunächst ist

$$\partial_x f(x,y) = 3(1-y^2) - 3x^2, \qquad \partial_y f(x,y) = -6xy.$$

An einem stationären Punkt (x_0, y_0) ist $\partial_x f(x_0,y_0) = \partial_y f(x_0,y_0) = 0$. Wegen der zweiten Gleichung muss dafür $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$ gelten. Im ersten Fall erhalten wir durch die erste Gleichung die Lösung $y_0 = \pm 1$, im zweiten Fall erhalten wir $x_0 = \pm 1$. Insgesamt erhalten wir als mögliche Kandidaten für relative Extrema:

$$\begin{aligned}
P_1 &= (0,1), & P_2 &= (0,-1), \\
P_3 &= (1,0), & P_4 &= (-1,0).
\end{aligned}$$

An diesen Stellen berechnen wir nun die Hessematrix. Es gilt

$$\partial_x^2 f(x,y) = -6x, \quad \partial_y^2 f(x,y) = -6x, \quad \partial_x \partial_y f(x,y) = -6y.$$

Da f beliebig oft partiell differenzierbar ist, ist die Hessematrix symmetrisch. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
Q(P_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, & Q(P_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \\
Q(P_3) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, & Q(P_4) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es ist nun $\det(Q(P_1)) = \det(Q(P_2)) = -36 < 0$. Also sind P_1 und P_2 keine relativen Extremstellen von f. Andererseits ist $Q(P_3)$ bzw. $Q(P_4)$ offensichtlich negativ bzw. positiv definit. Also sind P_3 und P_4 relative Extremstellen, und die Extremwerte sind

$$f(P_3) = 2, \qquad f(P_4) = -4.$$

2.5 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Aufgabe. Gesucht werden die Extrema der Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto x-y \end{aligned}$$

unter der Zwangsbedingung, dass die Extrema auf dem Rand des Einheitskreises liegen sollen. Zeige, dass dieses Problem mit der Lagrangemultiplikatorenmethode lösbar ist und benutze sie, um alle Minima und Maxima zu berechnen.

Lösung. Der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung $x^2+y^2=1$ gegeben. Damit können wir die Zwangsbedingung also mit einer Gleichung beschreiben und benötigen daher einen Lagrangemultiplikator, λ. Der Gradient der Zwangsbedingung ist gegeben durch

$$\operatorname{grad}(x^2+y^2-1) = (2x, 2y) \neq 0.$$

Also ist die Lagrangemultiplikatorenmethode anwendbar.

Die das Problem beschreibende Abbildung ist dann gegeben durch

$$g(x,y) = x - y + \lambda(x^2+y^2-1).$$

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) &= -1 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} g(x,y) &= x^2+y^2-1 = 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \qquad y = \frac{1}{2\lambda}.$$

Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2}.$$

Damit erhalten wir die Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm 1/\sqrt{2}$. Also erhalten wir die beiden stationären Punkte

$$P_{1/2} = \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

An diesen nimmt f dann jeweils das gesuchte Minimum bzw. Maximum an, da f stetige auf dem kompakten Einheitskreis ist. Die Extremwerte sind nun

$$f(P_1) = -\sqrt{2}, \qquad f(P_2) = \sqrt{2}.$$

2.6 Lösen nichtlinearer Gleichungen

Aufgabe. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w^2 + x^2 - y^2 - z &= 0, \\ w^2 + 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Zeige, dass sich das System in einer offenen Umgebung des Punktes $(w, x, y, z) = (1/2, 0, 1/2, 0)$ nach (y, z) auflösen lässt. Bestimme auch die Tangente am Graphen von $(y(w, x), z(w, x))$ in diesem Punkt.

Lösung. Zunächst definieren wir eine Abbildung, die das Gleichungssystem beschreibt:

$$\begin{aligned} &f \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ &(w, x, y, z) \mapsto (w^2 + x^2 - y^2 - z, w^2 + 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 1). \end{aligned}$$

Die zu lösende Gleichung lautet damit $f(w, x, y, z) = 0$. Da sich f nur aus Polynomen zusammensetzt ist f beliebig oft partiell differenzierbar. Wir berechnen nun die ersten partiellen Ableitungen bezüglich der zweiten Komponente $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f(w, x, y, z) &= (-2y, 6y), \\ \frac{\partial}{\partial z} f(w, x, y, z) &= (-1, 8z). \end{aligned}$$

Die Fundamentalmatrix im Punkt $(1/2, 0, 1/2, 0)$ lautet also

$$J_2 \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist 3, also ist sie invertierbar. Damit lässt sich der Satz der impliziten Funktion anwenden. Es existiert also eine offene Umgebung U des Punktes $(1/2, 0)$, eine offene Umgebung V des Punktes $(1/2, 0)$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g \colon U \to V$, so dass das Gleichungssystem von $(w, x, g(w, x))$ für alle $(w, x) \in U$ gelöst wird. Die Tangente am Graphen von g ist allgemein gegeben durch

$$T(w, x) = g\left(\frac{1}{2}, 0 \right) + g'\left(\frac{1}{2}, 0 \right) \left((w, x) - \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right)$$

(genauer gesagt: die Tangente an den Graphen im Punkt $(1/2, 0, 1/2, 0)$ ist der Graph von T). Es ist nach Konstruktion $g(1/2, 0) = (1/2, 0)$. Nun müssen wir noch g' am Punkt $(1/2, 0)$ ausrechnen. Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen bezüglich der ersten Komponente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} f(w, x, y, z) &= (2w, 2w), \\ \frac{\partial}{\partial x} f(w, x, y, z) &= (2x, 4x). \end{aligned}$$

Damit ist die Fundamentalmatrix

$$J_1 \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt

$$J_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial(w,x)} f(w,x,g(w,x)) + \frac{\partial}{\partial(y,z)} f(w,x,g(w,x))g'(w,x) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} g'(1/2,0) &= -(\frac{\partial}{\partial(y,z)} f(1/2,0,g(1/2,0)))^{-1} \frac{\partial}{\partial(w,x)} f(1/2,0,g(1/2,0)) \\ &\cong (-{J_2^{-1}}^t J_1^t)^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Tangente

$$T(v) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\left(v - \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right),$$

und der Graph $(v, T(v))$ ist die Tangente am Graphen $(y(w,x), z(w,x))$ im Punkt $(1/2, 0, 1/2, 0)$.

3 Das Lebesgueintegral

3.1 Messbare Mengen

Aufgabe 1. Sei M die Menge aller reellen Zahlen, die Grenzwert einer Reihe der Form

$$2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-a_n}$$

sind, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge mit Werten in den natürlichen Zahlen ist. Zeige: M ist eine Nullmenge.

Lösung zu Aufgabe 1. Sei $\epsilon > 0$. Wähle N so groß, dass

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{N-1} < \epsilon.$$

Definiere nun

$$Q := [0, 3^{-N+1}].$$

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge mit $a_1 \geq N$. Dann gilt:

$$0 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-a_n} \leq 2\sum_{k=N}^{\infty} 3^{-k} = 2 \cdot 3^{-N} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3^{-N+1}.$$

Also ist die zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörende Zahl Element von Q. Betrachten wir jetzt eine beliebige streng monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt

$$2\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-a_n} = 2\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n<N}} 3^{-a_n} + 2\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a_n\geq N}} 3^{-a_n}.$$

Also ist

$$M \subseteq \bigcup_{\substack{\text{endl. streng monoton steigende} \\ \text{Folgen } (a_n) \text{ in } \mathbb{N} \text{ mit Werten } < N}} \left(Q + 2\sum 3^{-a_n}\right).$$

Nun gibt es aber genau 2^{N-1} solche endlichen Folgen. Also gilt

$$\mu(M) \leq 2^{N-1}\mu(Q) = 2^{N-1}3^{-N+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{N-1} < \epsilon.$$

Also ist M eine Nullmenge.

Aufgabe 2. Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar mit $m(M) < \infty$ und $r > 0$. Definiere $rM := \{rx : x \in M\}$. Zeige, dass rM messbar mit $m(rM) = r^n m(M)$ ist.

Lösung zu Aufgabe 2. Sei $\epsilon > 0$. Da M messbar ist, existieren messbare Mengen A, E, die abzählbare Vereinigungen von Quadern sind, so dass $m(E) < \epsilon/r^n$, $M \subseteq A$ und $A \setminus M \subseteq E$ gilt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass A und E Vereinigungen disjunkter Quader sind, d.h.

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i, \qquad E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i,$$

wobei die A_i und E_i, $i \in \mathbb{N}$ jeweils Quader sind. Nun gilt für einen beliebigen Quader $Q(a,b)$ aber offensichtlich $rQ(a,b) = Q(ra, rb)$, d.h.

$$m(rQ(a,b)) = \prod_{i=1}^{n}(rb_i - ra_i) = r^n \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = r^n m(Q(a,b)).$$

Also folgt aus den Eigenschaften eines Maßes:

$$m(rE) = m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} rE_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} m(rE_i) = r^n \sum_{i\in\mathbb{N}} m(rE_i) = r^n m(E) < \epsilon.$$

Da aus $M \subseteq A$ und $A \setminus M \subseteq E$ jedenfalls $rM \subseteq rA$ und $rA \setminus rM \subseteq rE$ folgt, zeigt die letzte Abschätzung, dass rM messbar ist. Für das Maß gilt dann:

$$|m(rA) - m(rM)| < \epsilon.$$

Wie bei E ist $m(rA) = r^n m(A)$. Die Aussage ergibt sich somit für $\epsilon \to 0$, da $m(rM)$ per Definition das Infimum der $m(rA)$ ist.

3.2 Integrabilitätskriterien

Aufgabe. Sei

$$f\colon (0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x).$$

Zeige: f ist lebesgueintegrabel. Berechne das Integral.

Lösung zu Aufgabe 2. Das Problem ist, dass f für $x \to 0$ divergiert. Wir definieren daher zunächst

$$f_n := f\chi_{[\frac{1}{n},1]}$$

und $f_n(x) = 0$ wo immer f nicht definiert ist. Da f negativ ist, konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton gegen f. Außerdem sind die f_n stetig auf den Intervallen $[1/n, 1]$, haben also nur eine Unstetigkeitsstelle auf $[0, 1]$ und sind daher lebesgueintegrabel. Wir erhalten:

$$\int f_n \mathrm{d}\mu = \int\limits_{1/n}^{1} \ln(x)\mathrm{d}x = [x \ln x - x]_{1/n}^{1} = -1 - \frac{-\ln n - 1}{n}.$$

Da der Logarithmus langsamer steigt als n, sind die Integrale beschränkt. Daher folgt aus dem Satz der monotonen Konvergenz, dass f lebesgueintegrabel ist, und das Integral ist

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(-1 - \frac{-\ln n - 1}{n}\right) = -1.$$

3.3 Mehrfachintegrale und Jacobitransformation

Aufgabe 1. Berechne das Integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) \exp(-x^2 - y^2)\mathrm{d}\mu.$$

Lösung zu Aufgabe 1. Hier lohnt es sich, in die Polarkoordinaten zu gehen. Wir setzen

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

mit $r \geq 0$ und $0 \leq \theta < 2\pi$. Bis auf die durch $r = 0$ beschriebene Nullmenge ist dies eine diffeomorphe Transformation. Wir berechnen die ersten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\sin\theta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Die Determinante der Jacobimatrix ist damit

$$|J| = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Wir können nun das Integral berechnen:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)\exp(-x^2-y^2)\mathrm{d}\mu \\
=&\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\exp(-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)|J|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
=&\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} r^3 e^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
=&2\pi\int\limits_0^{\infty} r^3 e^{-r^2}\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

Wir substituieren $s = r^2$, dann ist $s' = 2r$.

$$
\begin{aligned}
=&2\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{2}se^{-s}\mathrm{d}x \\
=&\pi([s(-e^{-s})]_0^{\infty} - \int\limits_0^{\infty}(-e^{-s})\mathrm{d}s \\
=&\pi([-e^{-s}]_0^{\infty} = \pi(-(-1)) = \pi.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Zeige, dass die Abbildung

$$
\begin{aligned}
f\colon K(0,1) &\to \mathbb{R}, \\
(x,y) &\mapsto xy,
\end{aligned}
$$

integrierbar ist. Berechne das Integral einmal ohne und einmal mit Jacobitransformation.

Lösung zu Aufgabe 2. Die Abbildung ist offenbar stetig. Da $K(0,1)$ messbar und beschränkt, und auch f dort beschränkt ist, ist f lebesgueintegrierbar. Das gilt auch auf dem kompakten Quader $\bar{Q}((-1,-1),(1,1))$, wenn man f außerhalb des Einheitskreises gleich Null setzt (der Kreisrand ist eine Nullmenge). Aus denselben Gründen ist auch $(x,y)\mapsto |xy|$ integrierbar. Aus dem Satz von Fubini folgt dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{K(0,1)} xy\mathrm{d}(x,y) &= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{1} x \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x(1-x^2-(1-x^2))\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Wir können sogar noch ein bisschen abstrakter vorgehen. Offenbar gilt

$$f(x,y) = -f(-x,y).$$

Aufgefasst als Abbildung auf dem o.g. Quader haben wir dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(-x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = -x$ erhalten wir:

$$= \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1} f(z,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

Nun zur Lösung per Jacobitransformation. Wie benutzen wieder Polarkoordinaten

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Wie oben ist die Jacobideterminante gleich r. Der Integrationsbereich ist diesmal $0 \leq r < 1$ und $0 \leq \theta < 2\pi$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{K(0,1)} xy\mathrm{d}(x,y) &= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1} r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(\int\limits_{0}^{\pi} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)
\end{aligned}$$

Nun können wir $u = \cos\theta$ substituieren. Dann ist $u' = -\sin\theta$ und wir erhalten:

$$= -\frac{1}{4}\left(\int\limits_{1}^{-1} \mathrm{d}\theta + \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\theta\right) = 0.$$

Aufgabe 3. Ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y)=0, \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst,} \end{cases}$$

auf $\bar{K}(0,1)$ integrierbar? Falls ja, was ist das Integral?

Lösung zu Aufgabe 3. Wir haben bereits weiter oben gesehen, dass diese Abbildung überall stetig ist. Somit ist sie auf der kompakten Menge $\bar{K}(0,1)$ integrierbar. Wir benutzen wieder Polarkoordinaten

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Die Jacobideterminante ist r. wegen $r = \sqrt{x^2+y^2}$ haben wir also

$$\begin{aligned} \int\limits_{\bar{K}(0,1)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}(x,y) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0 \end{aligned}$$

wie oben.