

Moving Frames, Laxpaare und die Sym-Bobenko-Formel

Seminar “Geometrische Analysis” FS 09

Matthias Leimeister

Moving Frames

Sei Σ eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche und $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine konforme Immersion. Es gilt

$$\langle f_z, f_z \rangle = \langle f_{\bar{z}}, f_{\bar{z}} \rangle = 0, \quad \langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle = 2e^{2u}$$

wobei $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ der konforme Faktor und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die komplex bilineare Fortsetzung des euklidischen Skalarproduktes sind. Im letzten Vortrag wurden bereits das Einheitsnormalenfeld

$$N = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|},$$

der Formoperator S und die mittlere Krümmung

$$S = \frac{1}{4e^{2u}} \begin{pmatrix} \langle f_{xx}, N \rangle & \langle f_{xy}, N \rangle \\ \langle f_{xy}, N \rangle & \langle f_{yy}, N \rangle \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2} \text{spur}(S) = \frac{1}{8e^{2u}} \langle f_{xx} + f_{yy}, N \rangle = \frac{1}{2e^{2u}} \langle f_{z\bar{z}}, N \rangle$$

sowie das Hopfdifferential $Q = \langle f_{zz}, N \rangle$ definiert.

Aus der Konformität der Immersion sowie den Formeln für H und Q ergeben sich durch Rechnung die folgenden **Gauss-Weingarten-Gleichungen**:

$$f_{zz} = 2u_z f_z + QN, \quad f_{z\bar{z}} = 2He^{2u}N, \quad f_{\bar{z}\bar{z}} = 2u_{\bar{z}}f_{\bar{z}} + \bar{Q}N \quad (1)$$

$$N_z = \frac{1}{2}(-2Hf_z - Qe^{-2u}f_{\bar{z}}), \quad N_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(-2Hf_{\bar{z}} - \bar{Q}e^{-2u}f_z)$$

Als Beispiel wird die erste Identität gezeigt:

$$\langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle = 2e^{2u} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle = \langle f_{zz}, f_{\bar{z}} \rangle + \langle f_z, f_{z\bar{z}} \rangle = 4e^{2u}u_z$$

Das zweite Skalarprodukt verschwindet, da aufgrund $\langle f_z, f_z \rangle = 0$ gilt, dass $\langle f_z, f_{z\bar{z}} \rangle = -\langle f_z, f_{z\bar{z}} \rangle$. Damit folgt $\langle f_{zz}, f_{\bar{z}} \rangle = 4e^{2u}u_z$.

Definiere

$$e_1 := \frac{f_x}{|f_x|} = \frac{1}{2}e^{-u}(f_z + f_{\bar{z}}), \quad e_2 := \frac{f_y}{|f_y|} = \frac{1}{2}ie^{-u}(f_z - f_{\bar{z}}) \quad (2)$$

(Wegen $\langle f_x, f_x \rangle = |f_x|^2 = 4e^{2u}$ gilt $|f_x| = 2e^u$, sowie $f_z + f_{\bar{z}} = f_x$ aufgrund der Definition der Wirtingeroperatoren.) Mit der orthogonalen Zerlegung von f_{zz} sowie $\langle f_{zz}, f_z \rangle = 0$ folgt

$$\begin{aligned} f_{zz} &= \langle f_{zz}, e_1 \rangle e_1 + \langle f_{zz}, e_2 \rangle e_2 + \langle f_{zz}, N \rangle N \\ &= \langle f_{zz}, f_z + f_{\bar{z}} \rangle \frac{1}{4e^{2u}}(f_z + f_{\bar{z}}) - \langle f_{zz}, f_z - f_{\bar{z}} \rangle \frac{1}{4e^{2u}}(f_z - f_{\bar{z}}) + QN \\ &= \langle f_{zz}, f_{\bar{z}} \rangle \frac{1}{4e^{2u}}2f_z + QN = 2u_z f_z + QN. \end{aligned}$$

Dies ist die erste Identität der Gauss-Weingarten-Gleichungen.

Definition 1. Mit den obigen Definitionen von e_1, e_2 und N heißt die Abbildung

$$\mathcal{F} : \Sigma \rightarrow SO_3, \quad \mathcal{F}(z, \bar{z}) = (e_1, e_2, N)$$

begleitendes Dreibein bzw. **Moving Frame** der Immersion $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Aus den Gauss-Weingarten-Gleichungen folgt unmittelbar das folgende Gleichungssystem für \mathcal{F} , das sogenannte **Laxpaar** in 3×3 -Form:

$$\mathcal{F}_z = \mathcal{F}\mathcal{U}, \quad \mathcal{F}_{\bar{z}} = \mathcal{F}\mathcal{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2iu_z & -Qe^{-u} - 2He^u \\ -2iu_z & 0 & -iQe^{-u} + 2He^u \\ Qe^{-u} + 2He^u & iQe^{-u} - 2He^u & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2iu_{\bar{z}} & -\bar{Q}e^{-u} - 2He^u \\ 2iu_{\bar{z}} & 0 & i\bar{Q}e^{-u} - 2He^u \\ \bar{Q}e^{-u} + 2He^u & -i\bar{Q}e^{-u} + 2He^u & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrixmodell für \mathbb{R}^3

Sei nun $H = \text{const.}$, d.h. f ist eine CMC-Fläche. Dann existiert die zu f assoziierte Familie $f_\lambda, \lambda \in S^1$. Betrachtet man zu jeder dieser Flächen den Moving Frame \mathcal{F}_λ , erhält man eine Abbildung

$$\mathcal{F} : S^1 \times \Sigma \rightarrow SO_3, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(z, \bar{z}, \lambda),$$

also eine Familie von Moving Frames parametrisiert durch $\lambda \in S^1$.

Für jedes λ und jeden Punkt $(z, \bar{z}) \in \Sigma$ sind die Vektoren $\{e_1(z, \bar{z}, \lambda), e_2(z, \bar{z}, \lambda)\}$ eine Basis des Tangentialraumes $T_{f(z, \bar{z}, \lambda)}M$, wobei M die immensierte Fläche

$f_\lambda(\Sigma)$ ist. Ergänzt durch den Normalenvektor N ist der Moving Frame somit eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 , die entlang der Fläche verschoben wird.

Als nächstes soll die Frage untersucht werden, wie man aus einem gegebenen Frame \mathcal{F} die Immersion f gewinnen kann. Um einfachere Rechnungen und eine einheitliche Theorie für die anderen Raumformen \mathbb{S}^3 und \mathbb{H}^3 zu bekommen, betrachtet man eine Darstellung des Frames durch 2×2 -Matrizen. Definiere hierzu die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Mit diesen erhält man eine Basis der Quaternionen als $\{Id, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3\}$. Der Imaginärteil der Quaternionen $Im(\mathbb{H}) = \{-i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3\}$ ist isomorph zur Liealgebra \mathfrak{su}_2 . Identifiziere \mathbb{R}^3 mit \mathfrak{su}_2 via

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto -x_1 \frac{i}{2} \sigma_1 + x_2 \frac{i}{2} \sigma_2 + x_3 \frac{i}{2} \sigma_3 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

In dieser Identifikation entspricht die Wirkung von SO_3 auf \mathbb{R}^3 der adjungierten Operation von SU_2 auf die Liealgebra \mathfrak{su}_2 .

$$X \mapsto AXA^{-1}, \quad X \in \mathfrak{su}_2, \quad A \in SU_2$$

SU_2 ist die universelle Überlagerung von SO_3 , daher einfach zusammenhängend. A und $-A$ entsprechen der gleichen Transformation. Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ entspricht in der Matrixdarstellung

$$\langle x, y \rangle = -2\text{spur}(XY),$$

wobei X und Y die entsprechenden Matrixdarstellungen sind.

Als nächstes soll der Frame in dieser Identifikation dargestellt werden. Sei dazu im \mathfrak{su}_2 -Modell $F \in SU_2$ diejenige Matrix, die die Basis $\{-\frac{i}{2}\sigma_1, -\frac{i}{2}\sigma_2, -\frac{i}{2}\sigma_3\}$ in (e_1, e_2, N) transformiert:

$$e_1 = F \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \sigma_1 \end{pmatrix} F^{-1}, \quad e_2 = F \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \sigma_2 \end{pmatrix} F^{-1}, \quad N = F \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \sigma_3 \end{pmatrix} F^{-1} \quad (5)$$

(Dieses F existiert, da beide Basen ONB sind und die adjungierte Operation von SU_2 einer Drehung entspricht.)

Weiter sei $z_0 \in \Sigma$ ein ausgezeichneter Punkt. Ohne Einschränkung gelte $F(z_0, \bar{z}_0, \lambda) = Id \quad \forall \lambda \in S^1$, d.h. bei z_0 ist der Moving Frame die Standardbasis des \mathbb{R}^3 . Dies kann durch eine Isometrie von $f(z, \bar{z}, \lambda)$ für jedes λ immer erreicht werden. Damit ist der Frame eine Abbildung

$$F_\lambda : \Sigma \rightarrow SU_2.$$

Die Frage am Anfang des Abschnitts kann tatsächlich positiv beantwortet werden. Ist der Frame einer CMC-H Immersion gegeben, so kann daraus die Immersion f zurückgewonnen werden durch die **Sym-Bobenko-Formel**

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2H} \left[F \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} F^{-1} - i\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} F^{-1} \right]_{\lambda=1}. \quad (6)$$

Ein Beweis dieser Tatsache muss auf später verschoben werden, da hierzu weitere Überlegungen und die Einführung der Laxpaare nötig sind. Das Erstaunliche an der Sym-Bobenko-Formel ist, dass man erwartet, integrieren zu müssen, da der Frame (e_1, e_2, N) die Ableitungen von f enthält. Eine geometrische Begründung, warum die Sym-Bobenko-Formel funktioniert wird ebenfalls später gegeben, nachdem CMC Immersion in die 3-Sphäre studiert wurden.

Das Laxpaar einer CMC-Immersion

Sei $F : \Sigma \rightarrow SU_2$ Frame einer CMC-Immersion. Man möchte darstellen, wie sich der Frame ändert, wenn er entlang der Fläche läuft. Jedoch liegen die Ableitungen $F_z(z, \bar{z}, \lambda)$ für $(z, \bar{z}) \in \Sigma$ in verschiedenen Tangentialräumen von SU_2 und können daher nicht direkt verglichen werden. Deshalb definiere

$$U := F^{-1}F_z, \quad V := F^{-1}F_{\bar{z}} \quad (7)$$

Durch den Faktor F^{-1} wird jeder Tangentialvektor zurückgezogen in den Tangentialraum der Identität von SU_2 , dies ist die Liealgebra \mathfrak{su}_2 . Um die Einträge von U und V zu berechnen schreibe

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$e_1 = \frac{f_x}{|f_x|} = \frac{f_x}{2e^u} = F \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} F^{-1}, \quad e_2 = \frac{f_y}{|f_y|} = \frac{f_y}{2e^u} = F \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{2}(f_x - if_y) = e^u e_1 - ie^u e_2 = F \left(\frac{1}{2} e^u \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^u \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) F^{-1} \\ &= -ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = e^u e_1 + ie^u e_2 = -ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^{-1}.$$

Berechne die zweiten Ableitungen und benutze die Integrabilitätsbedingung $f_{z\bar{z}} = f_{\bar{z}z}$. Dabei wird benutzt, dass per Definition $F_z = FU$, $F_{\bar{z}} = FV$, sowie $d(F^{-1}) = -F^{-1}(dF)F^{-1}$.

$$\begin{aligned} f_{z\bar{z}} &= -ie^u u_{\bar{z}} F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} - ie^u FV \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} + ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} FV F^{-1} \\ &= -ie^u u_{\bar{z}} F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} - ie^u F \begin{pmatrix} v_{12} & 0 \\ v_{22} & 0 \end{pmatrix} F^{-1} + ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_{11} & v_{12} \end{pmatrix} F^{-1} \\ &= -ie^u u_{\bar{z}} F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} + ie^u F \begin{pmatrix} -v_{12} & 0 \\ v_{11} - v_{22} & v_{12} \end{pmatrix} F^{-1} \end{aligned}$$

Durch eine analoge Rechnung ergibt sich

$$f_{\bar{z}z} = -ie^u u_z F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} + ie^u F \begin{pmatrix} u_{21} & u_{22} - u_{11} \\ 0 & -u_{21} \end{pmatrix} F^{-1}.$$

Die Integrabilitätsbedingung liefert

$$\begin{aligned} ie^u F \begin{pmatrix} -v_{12} & 0 \\ -u_{\bar{z}} + v_{11} - v_{22} & v_{12} \end{pmatrix} F^{-1} &= ie^u F \begin{pmatrix} u_{21} & -u_z + u_{22} - u_{11} \\ 0 & -u_{21} \end{pmatrix} F^{-1} \\ \Leftrightarrow v_{11} - v_{22} - u_{\bar{z}} &= 0, \quad u_{22} - u_{11} - u_z = 0, \quad u_{21} = -v_{12}. \end{aligned}$$

Aus den Gauss-Weingarten-Gl. erhält man

$$f_{z\bar{z}} = 2He^{2u}N = 2He^{2u}F \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix} F^{-1}.$$

In der vorherigen Formel für $f_{z\bar{z}}$ ist der Eintrag links oben $-ie^u v_{12}$. Damit folgt

$$v_{12} = He^u = -u_{21}.$$

Für die restlichen Einträge von U und V berechne

$$f_{zz} = F \begin{pmatrix} -ie^u u_{12} & 0 \\ -ie^u(u_z + u_{22} - u_{11}) & ie^u u_{12} \end{pmatrix} F^{-1}$$

und vergleiche mit den Gauss-Weingarten-Gl.

$$\begin{aligned} f_{zz} &= 2u_z f_z + \lambda^{-2} Q N = F \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \lambda^{-2} Q & 0 \\ -2iu_z e^u & \frac{i}{2} \lambda^{-2} Q \end{pmatrix} F^{-1} \\ \Rightarrow u_{12} &= \frac{1}{2} e^{-u} \lambda^{-2} Q. \end{aligned}$$

Mit einer analogen Rechnung für $f_{\bar{z}\bar{z}}$ und Vergleich mit der Gauss-Weingarten-Gl. folgt

$$v_{21} = -\frac{1}{2} e^{-u} \lambda^2 \bar{Q}$$

Da $F \in SU_2$ gilt $\det(F) = 1$ und wegen $F^{-1}F_z, F^{-1}F_{\bar{z}} \in \mathfrak{su}_2$ gilt $\text{spur}(U) = \text{spur}(V) = 0$. Deshalb

$$u_{22} - u_{11} = u_z, \quad u_{11} + u_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{11} = -\frac{u_z}{2}, \quad u_{22} = \frac{u_z}{2}$$

$$v_{11} - v_{22} = u_{\bar{z}}, \quad v_{11} + v_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{11} = \frac{u_{\bar{z}}}{2}, \quad v_{22} = -\frac{u_{\bar{z}}}{2}.$$

Damit ist das Laxpaar U, V vollständig charakterisiert. Zusammengefasst ergibt sich

Proposition 1. *Sei $F_\lambda : \Sigma \rightarrow SU_2, \lambda \in S^1$, Frame einer konformen CMC Immersion. Dann gilt*

$$F_z = FU, \quad F_{\bar{z}} = FV$$

mit dem Laxpaar

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_z & e^{-u}\lambda^{-2}Q \\ -2He^u & u_z \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{\bar{z}} & 2He^u \\ -e^{-u}\lambda^2\bar{Q} & -u_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

Beweis der Sym-Bobenko-Formel

Zunächst erinnern wir an die schon eingeführte Sym-Bobenko-Formel. Wir bezeichnen die ursprüngliche Immersion mit \hat{f} und deren Rahmen mit $F : \Sigma \rightarrow SU_2$. Die Sym-Bobenko-Formel ist definiert als

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2H} \left[F \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} F^{-1} - i\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} F^{-1} \right]_{\lambda=1}.$$

Um zu zeigen, dass die so gewonnene Abbildung (bis auf Isometrie) mit \hat{f} übereinstimmt, berechnen wir die Tangentialebene in jedem Punkt und verwenden die eben gezeigte Gestalt des Laxpaares.

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{2H} \left[F_z \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} F^{-1} - F \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} F^{-1} F_z F^{-1} - i\lambda \frac{\partial F_z}{\partial \lambda} F^{-1} + i\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} F^{-1} F_z F^{-1} \right]_{\lambda=1} \\ &= \frac{1}{2H} \left[FU \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} F^{-1} - F \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} F^{-1} FUF^{-1} - i\lambda \frac{\partial(FU)}{\partial \lambda} F^{-1} + i\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} F^{-1} FUF^{-1} \right]_{\lambda=1} \\ &= \frac{1}{2H} \left[F \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iu_z & -ie^{-u}\lambda^{-2}Q \\ -2iHe^u & -iu_z \end{pmatrix} F^{-1} - F \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iu_z & ie^{-u}\lambda^{-2}Q \\ 2iHe^u & -iu_z \end{pmatrix} F^{-1} - i\lambda F \frac{\partial U}{\partial \lambda} F^{-1} \right]_{\lambda=1} \\ &= \frac{1}{2H} \left[F \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-u}\lambda^{-2}Q \\ -2iHe^u & 0 \end{pmatrix} F^{-1} - i\lambda F \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2e^{-u}\lambda^{-3}Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} \right]_{\lambda=1} \\ &= \frac{1}{2H} F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2iHe^u & 0 \end{pmatrix} F^{-1} = -ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} = \hat{f}_z \end{aligned}$$

Ebenso berechnet man

$$f_{\bar{z}} = -ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} = \hat{f}_{\bar{z}}.$$

Da $\hat{f}_z = f_z$ und $\hat{f}_{\bar{z}} = f_{\bar{z}}$ gilt, unterscheiden sich \hat{f} und f höchstens durch eine Konstante. Dies entspricht einer Translation in \mathbb{R}^3 .

Die Gauss-Codazzi-Gleichungen

Sei eine CMC-Immersion $\hat{f} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Moving Frame $F : \Sigma \rightarrow SU_2$ gegeben. Oben haben wir gesehen, dass F das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$F_z = FU, \quad F_{\bar{z}} = FV$$

mit dem Laxpaar U, V erfüllt. Die Integrabilitätsbedingung für dieses System ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_{z\bar{z}} = F_{\bar{z}z} &\Leftrightarrow (FU)_{\bar{z}} = (FV)_z \\ \Leftrightarrow FVU + FU_{\bar{z}} &= FUV + FV_z \Leftrightarrow F(U_{\bar{z}} - V_z - UV + VU) = 0 \\ \Leftrightarrow U_{\bar{z}} - V_z - [U, V] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Die letzte Gleichung heißt **Maurer-Cartan-Gleichung** des Laxpaares. Setzt man in diese die konkrete Gestalt von U und V ein, erhält man

$$U_{\bar{z}} - V_z - [U, V] = \begin{pmatrix} -u_{z\bar{z}} - H^2 e^{2u} + \frac{1}{4} e^{-2u} Q \bar{Q} & \frac{1}{2} e^{-u} \lambda^{-2} Q_{\bar{z}} \\ \frac{1}{2} e^{-u} \lambda^2 \bar{Q}_z & u_{z\bar{z}} - \frac{1}{4} e^{-2u} Q \bar{Q} + H^2 e^{2u} \end{pmatrix} = 0$$

Dies ist äquivalent zu den **Gauss-Codazzi-Gleichungen** für CMC-Flächen:

$$4u_{z\bar{z}} - Q \bar{Q} e^{-2u} + 4H^2 e^{2u} = 0, \quad Q_{\bar{z}} = 0. \quad (9)$$

Somit sind für CMC-Immersionen die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- Der Frame F erfüllt das DGL-System mit dem Laxpaar U, V .
- Der konforme Faktor u , das Hopfdifferential Q und die mittlere Krümmung H erfüllen die Gauss-Codazzi-Gleichungen.

Um die umgekehrte Aussage zu erhalten, d.h. von gegebenen Daten (u, H, Q) ein Moving Frame und die zugehörige Immersion durch die Sym-Bobenko-Formel zu erhalten benötigen wir folgendes

Lemma 1. *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit $0 \in \mathcal{U}$. Zu gegebenen $U, V : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{sl}_n \mathbb{C}$ existiert eine Lösung $F = F(z, \bar{z}) : \mathcal{U} \rightarrow SL_n \mathbb{C}$ des Laxpaares*

$$F_z = FU, \quad F_{\bar{z}} = FV$$

zu jedem Anfangswert $F(0) \in SL_n \mathbb{C}$ genau dann, wenn

$$U_{\bar{z}} - V_z - [U, V] = 0.$$

Weiterhin gilt für zwei Lösungen F, \tilde{F} , dass $\tilde{F} = GF$ mit einer konstanten Matrix G .

Beweis : Aus der Existenz einer Lösung des Laxpaares folgt wie oben beschrieben die Maurer-Cartan-Gleichung.

Für die andere Richtung identifiziere $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und schreibe $z = x + iy$. Das obige Gleichungssystem ist dann äquivalent zu

$$F_x = F(U + V) = FA, \quad F_y = F(iU - iV) = FB.$$

Löse zunächst zum Anfangswert $F(0)$ die lineare Differentialgleichung $F_x(x, 0) = F(x, 0)A(x, 0)$ und anschließend für festes x_0 die Gleichung $F_y(x_0, y) = F(x_0, 0)B(x_0, 0)$. Dann gilt $\forall(x, y)$ die Gleichung $F_y = FB$. Um zu zeigen, dass dadurch F wohldefiniert ist und $F_x = FA$ erfüllt, betrachte

$$G = F_x - FA$$

Es gilt

$$\begin{aligned} G_y &= F_{xy} - F_y A - F A_y = (FB)_x - F_y A - F A_y = F_x B + F B_x - F B A - F A_y + F A B - F A B \\ &= (F_x - FA)B + F(B_x - A_y - BA + AB) \end{aligned}$$

Der zweite Term verschwindet genau dann, wenn U und V die Maurer-Cartan-Gleichung erfüllen. Damit gilt $G_y = GB$ mit Anfangswert $G(0) = 0$, somit auch $(F + G)_y = (F + G)B$ mit Anfangswert $F(0)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt $G \equiv 0$ und damit $F_x = FA$. Damit ist das Laxpaar erfüllt.

□

Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich nun die Umkehrung obiger Aussage formulieren. Seien $u, Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ und $H = \text{const.}$ gegeben, die die Gauss-Codazzi-Gleichungen lösen. Das zugehörige Laxpaar U, V erfüllt für jedes $\lambda \in S^1$ die Integrabilitätsbedingung

$$U_{\bar{z}} - V_z - [U, V] = 0.$$

Daher existiert zum Anfangswert $F(0, 0, \lambda) = Id \ \forall \lambda \in S^1$ eine lokale Lösung des Laxpaares $F_\lambda : \Sigma \rightarrow SU_2$. Nun muss noch gezeigt werden, dass die Sym-Bobenko-Formel angewandt auf diesen Frame tatsächlich eine konforme Immersion mit den gesuchten Daten liefert.

Proposition 2. *Die gegebene CMC-H-Fläche \hat{f} und die durch die Sym-Bobenko-Formel gewonnene Abbildung f unterscheiden sich nur durch eine Translation des \mathbb{R}^3 .*

Umgekehrt ist für Funktionen $u, Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ und $H = \text{const.}$, die die Gauss-Codazzi-Gleichungen erfüllen und die entsprechende Lösung des Laxpaares mit $F(z, \bar{z}, \lambda) \in SU_2 \ \forall \lambda \in S^1$ die durch die Sym-Bobenko-Formel definierte Abbildung $f_\lambda, \lambda \in S^1$, eine konforme CMC-H-Immersion mit konformem Faktor u und Hopf-Differential $\lambda^{-2}Q$. Somit produziert die Sym-Bobenko-Formel die assoziierte Familie f_λ .

Beweis : Der erste Teil wurde bereits gezeigt. Ebenso folgt aus dem Lemma, dass lokal eine Lösung des Laxpaares gefunden werden kann. Da $U, V \in \mathfrak{su}_2$ gilt $F_\lambda \in SU_2 \forall \lambda$. Um zu zeigen, dass die Sym-Bobenko-Formel eine konforme Immersion mit den gewünschten Invarianten liefert, berechne die folgenden Ableitungen. Mit den Formeln für f_z und $f_{\bar{z}}$ von oben folgt

$$f_x = (f_z + f_{\bar{z}}) = e^u F \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} F^{-1}, \quad f_y = i(f_z - f_{\bar{z}}) = e^u F \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1}.$$

Das Vektorprodukt des \mathbb{R}^3 ist in der \mathfrak{su}_2 -Darstellung gegeben durch die Lieklammer $[A, B] = AB - BA$, sowie das Skalarprodukt durch $\langle A, B \rangle = -2\text{spur}(AB)$. Damit folgt für das Normalenfeld

$$N = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|}$$

$$f_x \times f_y = e^{2u} F \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] F^{-1}$$

$$= 2e^{2u} F \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} F^{-1}$$

sowie

$$|f_x \times f_y| = \sqrt{-2\text{spur}((f_x \times f_y)(f_x \times f_y))} = \sqrt{8e^{4u}\text{spur}(Id)} = 4e^{2u},$$

also

$$N = \frac{2e^{2u} F \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} F^{-1}}{4e^{2u}} = \frac{1}{2} F \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} F^{-1}.$$

Um zu zeigen, dass die Immersion konform ist, berechne

$$\langle f_x, f_x \rangle = -2\text{spur}(f_x f_x) = -2\text{spur} \left[e^{2u} F \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} F^{-1} \right] = 4e^{2u}$$

Ebenso ergibt sich $\langle f_y, f_y \rangle = 4e^{2u}$. Schließlich gilt

$$\langle f_x, f_y \rangle = -2\text{spur} \left[F \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} F^{-1} \right] = 0.$$

Damit ist die Immersion konform und die Metrik gegeben durch $g = 4e^{2u}(dx^2 + dy^2)$, d.h. u ist der konforme Faktor. Das Hopf-Differential ist gegeben durch $\langle f_{zz}, N \rangle$. Berechne zunächst

$$f_{zz} = -ie^u u_z F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} - ie^u F U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} + ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} F U F^{-1}$$

$$= -ie^u u_z F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^{-1} - ie^u F \left[U, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] F^{-1}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\langle f_{zz}, N \rangle &= 2ie^u \text{spur} \left[\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_z & 0 \end{pmatrix} + \left[U, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right] \\ &= ie^u \text{spur} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -iu_z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}e^{-u}\lambda^{-2}Q & 0 \\ -iu_z & -\frac{i}{2}e^{-u}\lambda^{-2}Q \end{pmatrix} \right] = \lambda^{-2}Q.\end{aligned}$$

Die mittlere Krümmung ist gegeben durch

$$\frac{1}{2}e^{-2u}\langle f_{z\bar{z}}, N \rangle = ie^{-u} \text{spur} \left[\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \left[V, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = H.$$

Somit ist das Hopf-Differential der konformen Immersion gegeben durch $\lambda^{-2}Q$ und die mittlere Krümmung durch H . Das beweist die zweite Aussage.

□

Das Laxpaar in getwisteter Form

Für das obige System von DGL für den Moving Frame gibt es verschiedene Varianten. Das bisher behandelte ist das sogenannte ungetwistete Laxpaar. Daneben gibt es noch die getwistete Form. Diese ist zur vorherigen äquivalent, da die damit konstruierten Flächen sich von den ungetwisteten nur durch eine Immersion unterscheiden. Jedoch ist es für die Lektüre von Artikeln oder der Arbeit mit CMClab wichtig zu wissen, in welcher Notation gearbeitet wird.

Bezeichne nun \hat{F} den bisher betrachteten Moving Frame in ungetwisteter Form. Dann gilt

$$\hat{F}_z = \hat{F}\hat{U}, \quad \hat{F}_{\bar{z}} = \hat{F}\hat{V}$$

mit dem oben beschriebenen Laxpaar. Definiere nun einen transformierten Frame F durch

$$\hat{F} = -\sigma_3(F^{-1})^t \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \sigma_3$$

Mit dieser Definition von F erhält man ein Laxpaar von der Form

$$\begin{aligned}F_z &= FU, & F_{\bar{z}} &= FV \\ U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_z & -2He^u\lambda^{-1} \\ Qe^{-u}\lambda^{-1} & -u_z \end{pmatrix}, & V &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_{\bar{z}} & -\bar{Q}e^{-u}\lambda \\ 2He^u\lambda & u_{\bar{z}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In dieser Notation lautet die **Sym-Bobenko-Formel**

$$f(z, \bar{z}, \lambda) = \frac{1}{2H} \left[-\frac{1}{2}F \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} F^{-1} - i\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} F^{-1} \right].$$

Diese Abbildung hängt mit der durch die ungetwistete Sym-Bobenko-Formel mit dem Laxpaar \hat{U}, \hat{V} gewonnenen Abbildung \hat{f} zusammen durch

$$\hat{f}(z, \bar{z}, \lambda) = -\sigma_3(f(z, \bar{z}, \lambda))^t \sigma_3.$$

Dies entspricht im \mathfrak{su}_2 -Modell für \mathbb{R}^3 einer Drehung, wobei die Paulimatrix σ_3 genau einer Drehung um den Winkel π um die x_1 -Achse entspricht. Daher gilt obige Propostition auch für das Laxpaar in getwisteter Form, d.h. die Sym-Bobenko-Formel erzeugt die zu einer CMC-Fläche assoziierte Familie.

Literatur

[R] W. ROSSMAN, Imperfect draft of a supplement for ‘Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces’ written with Shoichi Fujimori and Shimpei Kobayashi.