

Elementares über CMC-Flächen

Sebastian Klein

24. Februar 2009

1 Erinnerung an einige Elemente der Flächentheorie

Im Folgenden sei stets Σ eine orientierte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion.*

Die 1. Fundamentalform. Das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{R}^3 induziert auf Σ die Riemannsche Metrik $g := f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h. ausführlich

$$g(v, w) = \langle d_p f(v), d_p f(w) \rangle \quad \text{für } p \in \Sigma, v, w \in T_p \Sigma.$$

g wird auch als *Maßtensor* oder *1. Fundamentalform* von f bezeichnet. Hiermit wird $f : (\Sigma, g) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zu einer isometrischen Immersion. Da in die Definition von g das Skalarprodukt von \mathbb{R}^3 nur in an f tangentialer Richtung eingeht, beschreibt g die „intrinsische Geometrie“ der Fläche $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$; differentialgeometrische Begriffe, die unter alleiniger Bezugnahme auf g definiert werden können, heißen intrinsische Begriffe.

Σ als Riemannsche Fläche. Für $p \in \Sigma$ gibt es genau einen Endomorphismus $J_p \in O(T_p \Sigma, g_p)$ mit $J_p^2 = -\text{id}_{T_p \Sigma}$ und $\det(J_p) = 1$ (bezüglich der Orientierung auf Σ). Indem wir die Anwendung von J_p mit der Multiplikation mit i identifizieren, wird der Tangentialraum $T_p \Sigma$ zu einem komplex-1-dimensionalen Vektorraum, und Σ läßt sich auf genau eine Weise mit der Struktur einer Riemannschen Fläche (also mit einem Atlas aus holomorph verträglichen, \mathbb{C} -wertigen Karten) ausstatten, die mit diesen komplexen Vektorraum-Strukturen auf den Tangentialräumen verträglich ist.

Diese Interpretation von Σ als Riemannsche Fläche wird das ganze Seminar hindurch eine zentrale Rolle spielen. Insbesondere wird z meistens eine komplexe Karte für Σ bezeichnen. Ist $z = x + iy$ eine solche, so induziert sie die 1-Formen $dz = dx + i dy$ und $d\bar{z} = dx - i dy$ sowie die partiellen Ableitungsoperatoren

$$\partial_z := \frac{1}{2} (\partial_x - i \partial_y) \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y).$$

Diese sind so definiert, dass

$$dz(\partial_z) = d\bar{z}(\partial_{\bar{z}}) = 1 \quad \text{und} \quad dz(\partial_{\bar{z}}) = d\bar{z}(\partial_z) = 0$$

gilt.

*In späteren Vorträgen werden wir allerdings gelegentlich auch (CMC-)Immersionen in die anderen beiden 3-dimensionalen Standardräume konstanter Krümmung, nämlich in die Sphäre S^3 und den hyperbolischen Raum H^3 , betrachten.

Konforme Parametrisierungen. Eine Karte $z = x + iy$ von Σ heißt bezüglich f *konform*, wenn

$$g(f_x, f_x) = g(f_y, f_y) \quad \text{und} \quad g(f_x, f_y) = 0$$

gilt, d.h. also, wenn der Maßtensor g bezüglich der Karte die Koordinatendarstellung

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$$

mit einer glatten Funktion $\varphi > 0$ besitzt, wenn also $g = \varphi \cdot (dx^2 + dy^2) = \varphi dz d\bar{z}$ gilt. In diesem Falle ist es nützlich, die Funktion φ als $\varphi = 4e^{2u}$ mit einer glatten Funktion u zu schreiben, dann gilt

$$g = 4e^{2u} \cdot (dx^2 + dy^2) = 4e^{2u} dz d\bar{z}. \quad (1)$$

Man kann zeigen, dass es in unserer Situation — und hier ist wesentlich, dass Σ *zweidimensional* ist — zu jeder Immersion f und um jedem Punkt $p \in \Sigma$ konforme Karten gibt. Im Folgenden werden wir stets derartige konforme Karten sowie die diesbezügliche Darstellung (1) des Maßtensors verwenden.

Die Gauß-Abbildung. Mithilfe der kanonischen Orientierung auf \mathbb{R}^3 können wir das *Kreuzprodukt* \times auf \mathbb{R}^3 einführen, es ist charakterisiert als diejenige bilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto u \times v$, für die für jedes Paar (u, v) orthogonaler Einheitsvektoren $(u, v, u \times v)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ist.

Ist nun (x, y) eine positiv orientierte Karte von Σ , so können wir auf der zugehörigen Karten-umgebung ein Einheitsnormalenfeld

$$N = \frac{f_x \times f_y}{\|f_x \times f_y\|}$$

für f definieren. Damit ist $(\frac{f_x}{\|f_x\|}, \frac{f_y}{\|f_y\|}, N)$ ein mit f mitlaufendes, positiv orientiertes Orthonormalbasen-Feld von \mathbb{R}^3 , ein sogenannter *Rahmen* (*frame*) für f .

Durch die Voraussetzung der *positiven Orientiertheit* der Karte ist N von der Wahl der Karte unabhängig, daher fügen sich diese lokalen Einheitsnormalenfelder zu einem globalen Einheitsnormalenfeld $N : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ für f , der sogenannten *Gauß-Abbildung* zusammen.

Die 2. Fundamentalform, das Hopf-Differential und Nabelpunkte. Die „extrinsische Geometrie“, d.h. die Art und Weise, wie $f(\Sigma)$ in \mathbb{R}^3 immersiert ist, wird durch die 2. *Fundamentalform* beschrieben. Die 2. Fundamentalform b von f misst den Normalenanteil von d^2f :

$$b(u, v) := \langle d^2f(u, v), N \rangle ;$$

offenbar handelt es sich um eine symmetrische Bilinearform auf Σ . In Koordinaten wird b durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \langle f_{xx}, N \rangle & \langle f_{xy}, N \rangle \\ \langle f_{yx}, N \rangle & \langle f_{yy}, N \rangle \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \langle f_x, N_x \rangle & \langle f_x, N_y \rangle \\ \langle f_y, N_x \rangle & \langle f_y, N_y \rangle \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

bzw. durch

$$b = b_{11} dx^2 + b_{12} dx dy + b_{21} dy dx + b_{22} dy^2 = Q dz^2 + \tilde{H} dz d\bar{z} + \bar{Q} d\bar{z}^2 \quad (2)$$

mit

$$Q := \frac{1}{4} (b_{11} - b_{22} - i(b_{12} + b_{21})) \quad \text{und} \quad \tilde{H} := \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22}) \quad (3)$$

beschrieben. Die (globale) 2-Form $Q dz^2$ heißt *Hopf-Differential* von f .

Gilt für ein $p \in \Sigma$: $b_p = c \cdot (d_p x^2 + d_p y^2)$ mit einem $c \in \mathbb{R}$, so wird f in p von 2. Ordnung durch die kanonische Einbettung eines Standardraums konstanter Krümmung in \mathbb{R}^3 approximiert; in diesem Fall heißt p ein *Nabelpunkt* von f . p ist genau dann ein Nabelpunkt von f , wenn $Q(p) = 0$ gilt.

Der Formoperator und die mittlere Krümmung. Die Bilinearform b_p kann bezüglich des Skalarprodukts g_p durch den selbstadjungierten Endomorphismus $S_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$, charakterisiert durch $g(S_p u, v) = b(u, v)$, beschrieben werden; das dadurch definierte Endomorphismenfeld S auf Σ heißt *Formoperator* oder *Weingarten-Operator* zu f . Ist (x, y) eine Karte für Σ , und ist $M(g)$ bzw. $M(b)$ die Matrix, die g bzw. b diesbezüglich beschreibt, so wird S durch die Matrix $M(g)^{-1} \cdot M(b)$ beschrieben.

Der Formoperator ermöglicht die Beschreibung des Differentials der Gauß-Abbildung N , es gilt nämlich die *Weingarten-Gleichung*

$$d_p N(v) = -f_* S_p(v) \quad \text{für } p \in \Sigma, v \in T_p \Sigma; \quad (4)$$

insbesondere ist $d_p N$ tangential an f .

Die Weingarten-Gleichung erlaubt es uns, die höheren Ableitungen von f und von N als Linearkombination von (f_x, f_y, N) oder von $(f_z, f_{\bar{z}}, N)$ auszudrücken. So gilt beispielsweise $f_{z\bar{z}} = 2He^{2u} N$, daher

$$\begin{aligned} \langle N_{z\bar{z}}, f_z \rangle &= \partial_{\bar{z}} \cdot \langle N_z, f_z \rangle - \langle N_z, f_{z\bar{z}} \rangle = -\partial_{\bar{z}} \cdot \langle f_* S_p(\partial_z), f_z \rangle + \langle f_* S_p(\partial_z), 2He^{2u} N \rangle \\ &= -\partial_{\bar{z}} \cdot g(S_p(\partial_z), \partial_z) = -\partial_{\bar{z}} \cdot b(\partial_z, \partial_z) = -Q_{\bar{z}} \end{aligned}$$

und analog

$$\langle N_{z\bar{z}}, f_{\bar{z}} \rangle = -(\bar{Q})_z,$$

woraus

$$\begin{aligned} N_{z\bar{z}} &= \frac{1}{8} e^{-2u} (\langle N_{z\bar{z}}, f_{\bar{z}} \rangle f_z + \langle N_{z\bar{z}}, f_z \rangle f_{\bar{z}}) + \langle N_{z\bar{z}}, N \rangle N \\ &= -\frac{1}{8} e^{-2u} ((\bar{Q})_z f_z + Q_{\bar{z}} f_{\bar{z}}) + \langle N_{z\bar{z}}, N \rangle N \end{aligned} \quad (5)$$

folgt.

Die Größe $H := \frac{1}{2} \text{tr}(S)$ heißt *mittlere Krümmung* von f ; ist $z = x + iy$ eine konforme Karte von Σ und \tilde{H} wie in Gleichungen (2) und (3), so gilt $\tilde{H} = 4e^{2u} \cdot H$.

Die Gleichungen von Gauß und Codazzi. Die beiden Fundamentalformen g und b von f erfüllen ein Paar von partiellen Differentialgleichungen, nämlich die *Gleichungen von Gauß und Codazzi*. Wir geben diese Gleichungen hier an bezüglich einer konformen Karte $z = x + iy$ und der zugehörigen Größen u , H und Q , die gemäß der Gleichungen (1) und (2) die Fundamentalformen g und b beschreiben:

$$4u_{z\bar{z}} - Q\bar{Q}e^{-2u} + 4H^2e^{2u} = 0, \quad (6)$$

$$Q_{\bar{z}} = 2e^{2u} H_z. \quad (7)$$

Der Hauptsatz der Flächentheorie. Die Gleichungen von Gauß und Codazzi sind die einzigen Bedingungen, die von den Fundamentalformen einer Immersion f im allgemeinen Fall erfüllt werden. Es gilt nämlich der folgende *Hauptsatz der Flächentheorie*:

Es sei Σ eine *einfach zusammenhängende* orientierte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, und $u, H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ und $Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen, die die Gleichungen von Gauss und Codazzi ((6) und (7)) lösen. Dann gibt es eine Immersion $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, deren Fundamentalformen g und b bezüglich der gegebenen Daten u, H, Q durch (1) bzw. (2) gegeben ist, und f ist bis auf eine starre Bewegung des \mathbb{R}^3 eindeutig bestimmt.

Das Problem der Konstruktion von Immersionen mit gegebenen Daten ist also äquivalent zur Lösung der Gleichungen von Gauss und Codazzi, einem System partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung. Ein zentrales Thema des Seminars ist es, Lösungen zu finden, die auf CMC-Immersionen führen.

2 CMC-Flächen

Definition. Sei $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion, und $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ihre mittlere Krümmungsfunktion. Man sagt, f habe *konstante mittlere Krümmung* oder sei *CMC* (*constant mean curvature*), wenn H konstant ist. f heißt *minimal*, wenn $H = 0$ gilt.

Beispiele für CMC-Flächen. Einfache Beispiele für CMC-Flächen sind Flächen mit (kovariant) konstanter zweiter Fundamentalform. Im \mathbb{R}^3 sind dies die (auf die übliche Art eingebetteten) Ebenen, Sphären, und (Kreis-)Zylinder. Interessantere Beispiele sind z.B. die *Delaunay-Flächen*, eine Familie von CMC-immersierten Zylindern. Lange Zeit kannte man, abgesehen von der Sphäre, keine Beispiele von *kompakten* CMC-Flächen im \mathbb{R}^3 . Erst 1986 hat WENTE (siehe [W]) Beispiele von kompakten CMC-Flächen von Geschlecht 1 entdeckt; seine Beispiele heißen heute *Wente-Tori*. PINKALL/STERLING (siehe [PS]) und unabhängig davon HITCHIN (siehe [Hi]) haben dann die kompakten CMC-Flächen von Geschlecht 1 vollständig klassifiziert. Mittlerweile weiß man, dass es in \mathbb{R}^3 auch kompakte CMC-Flächen von jedem Geschlecht $g \geq 2$ gibt (z.B. siehe KAPOULEAS, [K]). Klassifikationsresultate für diese CMC-Flächen sind jedoch noch nicht bekannt.

Erste Erkenntnisse über CMC-Flächen erhält man durch eine Untersuchung der Gleichungen von Gauß und Codazzi. Zunächst zeigen die Gleichung von Codazzi (7) und die aus der Weingarten-Gleichung folgende Gleichung (5) die folgende Äquivalenz für eine Immersion $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f \text{ ist CMC.} &\iff \text{Das Hopf-Differential } Q dz^2 \text{ von } f \text{ ist holomorph.} \\ &\iff \text{Die Gauß-Abbildung } N \text{ von } f \text{ erfüllt } N_{z\bar{z}} \parallel N. \end{aligned} \quad (8)$$

Die Tatsache, dass das Hopf-Differential einer CMC-Immersion holomorph ist, ist insbesondere deswegen wichtig, weil dadurch die Theorie der Differentialformen Riemannscher Flächen auf diese 2-Form anwendbar wird. Insbesondere ergibt sich, dass die CMC-Immersion einer kompakten Riemannschen Fläche nach \mathbb{R}^3 vom Geschlecht g genau $4g - 4$ Nabelpunkte (gezählt gemäß ihrer Vielfachheit) besitzt. Hieraus ergibt sich:

Theorem. Sei Σ eine 2-dimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit vom Geschlecht g .

- (a) (*Theorem von Hopf*) Ist $g = 0$, so ist f die übliche Einbettung einer Sphäre in \mathbb{R}^3 .
 (b) Ist $g \geq 1$, so besitzt f genau $4g - 4$ Nabelpunkte (gezählt gemäß ihrer Vielfachheit als Nullstellen des Hopf-Differentials).

CMC-Flächen und die sinh-Gordon-Gleichung. Ist eine CMC-Immersion mit $H \neq 0$ gegeben, so können wir durch Streckung und Spiegelung im \mathbb{R}^3 den Wert von H auf jeden gewünschten Wert $\neq 0$ „einstellen“, etwa auf $H = \frac{1}{2}$. Ist $p \in \Sigma$ ein Punkt, der kein Nabelpunkt von f ist, so existiert außerdem eine konforme Karte z von Σ in der Nähe von p , bezüglich derer das Hopf-Differential von f durch dz^2 gegeben wird (also mit $Q = 1$). In dieser Situation lautet die Gleichung von Gauß (6):

$$4u_{z\bar{z}} - e^{-2u} + e^{2u} = 0 \quad \text{bzw.} \quad 2u_{z\bar{z}} + \sinh(2u) = 0.$$

Also ist dann $2u$ eine Lösung der sinh-Gordon-Gleichung. — Ist umgekehrt $2u$ eine beliebige Lösung der sinh-Gordon-Gleichung, so wird durch $(u, Q = 1, H = \frac{1}{2})$ eine Lösung der Gleichungen von Gauß und Codazzi gegeben; wegen des Hauptsatzes der Flächentheorie erhält man daraus eine nabelpunkt-freie (lokale) CMC-Immersion mit $H = \frac{1}{2}$.

Die assoziierte Familie einer CMC-Immersion. Gehören die Daten $(u, Q dz^2, H)$ zu einer CMC-Immersion $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, so ist für jedes $\lambda \in S^1$ das Datum $(u, \lambda^{-2} Q dz^2, H)$ eine weitere Lösung der Gleichungen von Gauß und Codazzi, man erhält also zu diesem Datum eine weitere CMC-Immersion $f_\lambda : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$. Die dadurch entstehende Familie $(f_\lambda)_{\lambda \in S^1}$ von CMC-Immersionen heißt *assoziierte Familie* oder *Spektralfamilie* zu f . Sie spielt bei der Untersuchung von f eine zentrale Rolle.

Ist f minimal, so bewirkt der Faktor λ^{-2} lediglich eine starre Drehung der zweiten Fundamentalförm von f . In diesem Falle parametrisieren die Mitglieder f_λ der assoziierten Familie deshalb alle dieselbe Minimalfläche $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$. Ist hingegen $H \neq 0$, so sind die $f_\lambda(\Sigma)$ tatsächlich unterschiedliche CMC-Flächen in \mathbb{R}^3 .

CMC-Flächen als Extremale des Flächenfunktionals. Sei $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $K \subset \Sigma$ ein kompaktes Gebiet. Dann ist $\text{Area}(f(K)) = \int_K dA$ mit dem „2-Volumenelement“ $dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dx dy$ der Flächeninhalt der Fläche $f(K) \subset \mathbb{R}^3$. Betrachten wir eine glatte, ∂K festhaltende Variation f_t von f über K , d.h. $f_t : (-1, 1) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine glatte Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- $f_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist für jedes $t \in (-1, 1)$ eine Immersion,
- $f_0 = f$,
- $f_t|_{\partial K} = f|_{\partial K}$ für jedes $t \in (-1, 1)$.

Dann ist die erste Variation des Flächeninhalts von $f_t(K) \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\left. \frac{d}{dt} \text{Area}(f_t(K)) \right|_{t=0} = - \int_K \left\langle H N, \left. \frac{d}{dt} f_t \right|_{t=0} \right\rangle dA_0,$$

wohingegen die erste Variation des β -Volumens auf einer Seite von $f(K)$ gegeben ist durch

$$v_t := \int_K \left\langle N, \frac{d}{dt} f_t \Big|_{t=0} \right\rangle dA_0 .$$

Diesen Formeln entnehmen wir: Ist f minimal, so ist f ein kritischer Punkt des Flächenfunktionalen bezüglich beliebiger Rand-festhaltenden Variationen auf einem Kompaktum K . Ist f CMC, aber nicht minimal, so ist f ein kritischer Punkt des Flächenfunktionalen bezüglich solcher Rand-festhaltenden Variationen auf einem Kompaktum K , für die v_t konstant ist.

In beiden Fällen kann man weiter zeigen, dass f ein Minimum des jeweiligen Funktionalen ist, sofern K „klein genug“ ist. Aus diesem Grunde sind CMC-Flächen Modelle für Seifenblasen, und zwar die Minimalflächen für Seifenblasen, die kein Luftvolumen umschließen, und CMC- $(H \neq 0)$ -Flächen für solche Seifenblasen, die ein Luftvolumen umschließen.

3 CMC-Flächen und harmonische Abbildungen

Seien zunächst (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n und $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, deren *Energiedichte* (hier beschrieben in lokalen Koordinaten x_1, \dots, x_m von M und y_1, \dots, y_n von N)

$$\|df\|^2 = \sum_{i,j=1}^m \sum_{k,\ell=1}^n g^{ij} h_{k\ell} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}$$

kompakten Träger D hat. Dann nennen wir

$$E(f) := \frac{1}{2} \int_M \|df\|^2 d\text{vol}_M$$

das *Energiefunktional* von f , wobei

$$d\text{vol}_M = \sqrt{\det(g)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

die *Volumenform* von M ist.

Definition. In dieser Situation nennen wir f *harmonisch*, wenn f ein kritischer Punkt des Energiefunktionalen ist, wenn also für jede Variation f_t von f , bei der $\|df_t\|^2$ jeweils kompakten Träger besitzt, gilt:

$$\frac{d}{dt} E(f_t) \Big|_{t=0} = 0 .$$

Aussage. Sei Σ eine Riemannsche Fläche, und $N : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Abbildung, so dass $\|dN\|^2$ kompakten Träger D besitzt. Dann ist N genau dann harmonisch (als Abbildung nach S^2), wenn $\triangle N = N_{xx} + N_{yy} = N_{z\bar{z}}$ parallel zu N ist.

Beweis. Es sei zunächst eine Variation N_t von N gegeben, so dass der Träger von N_t jeweils in D enthalten ist, und so dass das Vektorfeld $V := \dot{N}_0$ senkrecht zu N ist. Dann gilt $V|_{\partial D} = 0$.

Um $\frac{d}{dt}E(N_t)|_{t=0}$ zu berechnen, wählen wir eine Karte $z = x + iy$ von Σ , bezüglich derer N konform ist; der Maßtensor g von N wird also durch $g_{ij} = 4e^{2u} \delta_{ij}$ mit einer Funktion $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt $\|dN_t\|^2 = \frac{1}{4}e^{-2u} (\|(N_t)_x\|^2 + \|(N_t)_y\|^2)$, daher

$$\frac{d}{dt}\|dN_t\|^2 = \frac{1}{2}e^{-2u} (\langle \frac{d}{dt} \partial_x N_t, \partial_x N_t \rangle + \langle \frac{d}{dt} \partial_y N_t, \partial_y N_t \rangle)$$

und somit

$$\frac{d}{dt}\|dN_t\|^2 \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}e^{-2u} (\langle V_x, N_x \rangle + \langle V_y, N_y \rangle) .$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(N_t) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_D \frac{d}{dt} \|dN_t\|^2 d\text{vol}_\Sigma \\ &= \frac{1}{4} \int_D e^{-2u} (\langle V_x, N_x \rangle + \langle V_y, N_y \rangle) 4e^{2u} dx dy \\ &= \int_D (\langle N_x, V \rangle_x + \langle N_y, V \rangle_y) dx dy - \int_D (\langle N_{xx}, V \rangle + \langle N_{yy}, V \rangle) dx dy . \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden der letzten Zeile ergibt sich mithilfe des Satzes von Green

$$\int_D (\langle N_x, V \rangle_x + \langle N_y, V \rangle_y) dx dy = \int_{\partial D} (\langle N_x, V \rangle dy - \langle N_y, V \rangle dx) \Big|_{\partial D=0} = 0 .$$

Somit erhalten wir

$$\frac{d}{dt}E(N_t) \Big|_{t=0} = - \int_\Sigma \langle N_{xx} + N_{yy}, V \rangle dx dy = - \int_\Sigma \langle \Delta N, V \rangle dx dy . \quad (9)$$

Sei nun N harmonisch, und V ein Vektorfeld längs N mit $V \perp N$ und $V|_{\partial D} = 0$. Dann existiert eine Variation N_t von N von der Form $N_t = N + tV + O(t^2)$, und nach Gleichung (9) gilt daher $0 = \int_\Sigma \langle \Delta N, V \rangle dx dy$. Dies ist aber nur für alle solchen V möglich, wenn stets $\langle \Delta N, V \rangle = 0$, wenn also $\Delta N \parallel N$ gilt.

Ist umgekehrt ΔN parallel zu N , so gilt für jede Variation von N — ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $\dot{N}_0 \perp N$ — nach Gleichung (9): $\frac{d}{dt}E(N_t)|_{t=0} = 0$, somit ist N dann harmonisch. \square

Harmonizität der Gauß-Abbildung. Es sei nun $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $N : \Sigma \rightarrow S^2$ ihre Gauß-Abbildung. Indem man die vorherige Aussage mit (8) kombiniert, erhält man den folgenden

Satz. (Ruh/Vilms) Die Immersion f ist genau dann CMC, wenn ihre Gauß-Abbildung N als Abbildung nach S^2 harmonisch ist.

Konstruktion von CMC-Immersionen aus harmonischen Abbildungen $\Sigma \rightarrow S^2$. Zum letzten Satz gibt es eine Art Umkehrung. Wie nämlich der folgende Satz zeigt, läßt sich lokal jede harmonische Abbildung $N : \Sigma \rightarrow S^2$ als Gauß-Abbildung einer fast-CMC-Immersion

$f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ realisieren. Hierbei nennen wir eine glatte Abbildung $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine *fast-CMC-Immersion*, wenn f in den Punkten CMC ist, in denen f immersiv ist (d.h. in denen $d_p f : T_p \Sigma \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^3$ injektiv ist).

Satz. Sei Σ eine *einfach zusammenhängende* Riemannsche Fläche, und $N : \Sigma \rightarrow S^2$ eine harmonische Abbildung. Dann ist N die Gauß-Abbildung einer fast-CMC-Immersion $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, und zwar gibt es bis auf starre Bewegungen des \mathbb{R}^3 genau zwei solche f mit $H = \frac{1}{2}$.

Beweisskizze und Konstruktion von f . (Nach [He], Abschnitt 2.2.) Nach dem vorangegangenen Satz ist $\triangle N = N_{xx} + N_{yy}$ parallel zu N . Deshalb ist die 1-Form

$$\omega := (N \times N_y) dx - (N \times N_x) dy$$

auf Σ geschlossen. (Mit \times wird hier wieder das Kreuzprodukt von \mathbb{R}^3 bezeichnet.) Da Σ einfach zusammenhängend ist, ist ω daher sogar exakt, d.h. es gibt eine Abbildung $B : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $dB = \omega$, also

$$B_x = N \times N_y \quad \text{und} \quad B_y = N \times N_x.$$

Wir setzen nun $f^\pm := B \pm N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\langle f_x^\pm, N \rangle = \langle B_x, N \rangle \pm \langle N_x, N \rangle = \langle N \times N_x, N \rangle = 0$$

und analog $\langle f_y^\pm, N \rangle = 0$. Daher ist N an den immersiven Stellen von f^\pm die Gauß-Abbildung von f^\pm (bei geeigneter Wahl der Orientierung von Σ und damit des Vorzeichens der Gauß-Abbildung). Eine explizite Rechnung zeigt, dass f^\pm fast-konform ist, und mit einer weiteren Rechnung ergibt sich

$$\triangle f^\pm = \frac{\partial f^\pm}{\partial x} \times \frac{\partial f^\pm}{\partial y};$$

hieraus folgt (siehe [He], Corollary 1.1), dass f CMC mit $H = \frac{1}{2}$ ist. □

Literatur

- [He] F. HÉLEIN, *Constant Mean Curvature Surfaces, Harmonic Maps and Integrable Systems*, Birkhäuser, Basel, 2001.
- [Hi] N. J. HITCHIN, *Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere*, J. Diff. Geom. 31 (1990), 627–710.
- [K] N. KAPOULEAS, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three space*, J. Diff. Geom. 33 (1991), 683–715.
- [PS] U. PINKALL, I. STERLING, *On the classification of constant mean curvature tori*, Annals of Math. 130 (1989), 407–451.
- [R] W. ROSSMAN, *Imperfect draft of a supplement for “Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces” written with Shoichi Fujimori and Shimpei Kobayashi*.
- [W] H. C. WENTE, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pac. J. Math. 121 (1986), 193–243.