

Die DPW-Methode für CMC-Flächen

Sebastian Klein

17. März 2009

Saint Patrick's Day

Das zuvor beschriebene Konstruktionsverfahren für CMC-Immersionen durch Lösung eines Lax-Paars und Anwendung der Sym-Bobenko-Formel ist in zweierlei Hinsicht noch nicht optimal:

- Die Eigenschaft von Paaren (U, V) , ein Lax-Paar zu sein, ist durch eine partielle Differentialgleichung, nämlich die Maurer-Cartan-Gleichung, charakterisiert. Da man nicht ohne weiteres alle Lösungen dieser Gleichung „produzieren“ kann, eignet sich die Konstruktion von CMC-Immersionen durch Lax-Paare nicht gut als systematisches Verfahren zur Erzeugung „aller“ CMC-Immersionen $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- Die auf der Riemannschen Fläche Σ (lokal) definierten Daten, insbesondere das Lax-Paar (U, V) und der CMC-Rahmen F , sind in der Regel nicht holomorph, so dass sie nicht mit den Mitteln der Theorie Riemannscher Flächen untersucht werden können.

Um diesen Schwierigkeiten zu begegnen, wurde von DORFMEISTER, PEDIT und WU in [DPW] — auf Grundlage früherer Ideen von SYMES — eine Methode eingeführt, CMC-Immersionen durch holomorphe Daten zu beschreiben.* Diese Methode, die heute als DPW-Methode bezeichnet wird, wird im Folgenden beschrieben.

1 Schleifengruppen

Die DPW-Methode macht wesentlichen Gebrauch von der Tatsache, dass zu jeder CMC-Immersion $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine ganze Familie $(f_\lambda)_{\lambda \in S^1}$ derartiger Immersionen, die assoziierte Familie, gehört. Auch zum CMC-Rahmen $F : \Sigma \rightarrow \mathrm{SU}(3)$ gehört daher eine assoziierte Familie F_λ von CMC-Rahmen. Durch die letztere Familie wird an jedem Punkt $p \in \Sigma$ eine „Schleife“ $S^1 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ von unitären Matrizen gegeben. Solche „Schleifen“ hat man auch jeweils für andere, mit der Immersion f zusammenhängenden Größen.

Den Begriff dieser „Schleifen“ formalisieren wir nun:

*Tatsächlich handelt [DPW] von der Konstruktion harmonischer Abbildungen in symmetrische Räume. Wie wir aus dem ersten Vortrag wissen, sind harmonische Abbildungen $\Sigma \rightarrow S^2$ im Wesentlichen äquivalent zu CMC-Immersionen $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definition. Es sei $\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wir definieren die folgenden *Schleifengruppen*:

$$\begin{aligned} \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) &:= \{ \Phi : S^1 \xrightarrow{C^\infty} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mid \Phi(-\lambda) = \sigma_3 \Phi(\lambda) \sigma_3 \} \\ \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) &:= \{ B \in \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mid B \text{ kann holomorph auf } U_1(0) \text{ fortgesetzt werden} \} \\ \Lambda_+^{\mathbb{R}} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) &:= \{ B \in \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mid B|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix} \text{ mit } \rho > 0 \} \\ \Lambda \mathrm{SU}(2) &:= \{ F \in \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mid F(S^1) \subset \mathrm{SU}(2) \} \\ \Lambda \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &:= \{ A : S^1 \xrightarrow{C^\infty} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \mid A(-\lambda) = \sigma_3 A(\lambda) \sigma_3 \} \\ \Lambda \mathfrak{su}(2) &:= \{ A \in \Lambda \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \mid A(S^1) \subset \mathfrak{su}(2) \} \end{aligned}$$

Diese Schleifengruppen lassen sich auf natürliche Weise als (unendlich-dimensionale) reell-analytische Mannigfaltigkeiten auffassen (siehe [PS], Kapitel 3). — Die Verwendung der Bedingungen

$$\Phi(-\lambda) = \sigma_3 \Phi(\lambda) \sigma_3 \quad \text{bzw.} \quad A(-\lambda) = \sigma_3 A(\lambda) \sigma_3$$

in unseren Definitionen zeigt dabei, dass wir mit getwisteten Objekten arbeiten. Die Bedingungen besagen gerade, dass die Hauptdiagonalelemente (bzw. die Nebendiagonalelemente) von $\Phi(\lambda) \in \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ und von $A(\lambda) \in \Lambda \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ gerade (bzw. ungerade) Funktionen in λ sind.

Wir können nun ein wesentliches Hilfsmittel für die DPW-Methode, nämlich die *Iwasawa-Zerlegung* für $\Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ formulieren. Sie ist analog zur bekannten Gram-Schmidt-Zerlegung für $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$:

Aussage. (*Gram-Schmidt-Zerlegung*) Sei $\Delta_2 := \{ \begin{pmatrix} r & a \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{C} \}$. Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{SU}(2) \times \Delta_2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), (F, B) \mapsto F \cdot B$$

ein bijektiver, reell-analytischer Diffeomorphismus.

Theorem. (*Iwasawa-Zerlegung für $\Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$*) Die Abbildung

$$\Lambda \mathrm{SU}(2) \times \Lambda_+^{\mathbb{R}} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), (F, B) \mapsto F \cdot B$$

ist ein bijektiver, reell-analytischer Diffeomorphismus. Die hierdurch für ein $\Phi \in \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ eindeutig bestimmte Zerlegung

$$\Phi = F \cdot B \quad \text{mit} \quad F \in \Lambda \mathrm{SU}(2) \text{ und } B \in \Lambda_+^{\mathbb{R}} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

nennen wir die *Iwasawa-Zerlegung* von Φ . Da der Diffeomorphismus reell-analytisch ist, gilt: Wenn Φ reell-analytisch (glatt, C^k) von einem Parameter z abhängt, so ist auch die Abhängigkeit von F und B von diesem Parameter reell-analytisch (glatt, C^k).

Tatsächlich läßt sich eine Iwasawa-Zerlegung für jede halb-einfache, komplexe Lie-Algebra G (an Stelle von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$) angeben. An die Stelle von $\mathrm{SU}(2)$ tritt dann die kompakte reelle Form von G . Die Einzelheiten hierzu sind ausführlich in [PS] dargelegt; eine Zusammenfassung findet man auch in Abschnitt 2 von [DPW].

Dass der Diffeomorphismus der Iwasawa-Zerlegung nur reell-analytisch und nicht holomorph ist, ist manchmal hinderlich. Dann bedient man sich stattdessen z.B. der Birkhoff-Zerlegung. Für unsere Zwecke ist diese Eigenschaft der Iwasawa-Zerlegung allerdings von wesentlichem Nutzen, denn ohne sie wäre es nicht möglich, von dem nicht-holomorphen Rahmen F zu einem holomorphen $\Phi = F \cdot B$ überzugehen.

Den *Beweis des Theorems über die Iwasawa-Zerlegung* findet man in [PS] oder in [G]. Eine Beweisskizze ist auch in Anhang D von [R] dargestellt.

2 Holomorphe Potentiale

Definition. Sei Σ eine Riemannsche Fläche. Eine $\Lambda \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -wertige holomorphe 1-Form ξ auf Σ heißt ein *holomorphes Potential (in getwisteter Form)*, wenn ξ um jedes $z_0 \in \Sigma$ eine lokale Darstellung der Form

$$\xi = A dz \quad \text{mit} \quad A = A(z, \lambda) = \sum_{k=-1}^{\infty} A_k(z) \lambda^k$$

besitzt, wobei der rechts-oben stehende Eintrag von $A_{-1}(z)$ nullstellenfrei sein soll.

Bemerkung. Die Bedingung, dass der rechts-oben stehende Eintrag von $A_{-1}(z)$ nullstellenfrei sein möge, benötigt man, damit die von ξ induzierte Abbildung $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ (siehe Abschnitt 3) eine Immersion wird. Die Nullstellen des links-unten stehenden Eintrags von $A_{-1}(z)$ sind die Nullstellen des Hopf-Differentials, also die Nabelpunkte dieser Immersion.

Wie man aus CMC-Immersionen holomorphe Potentiale erhält. Sei $f_\lambda : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine assoziierte Familie von CMC-Immersionen, und $F_\lambda : \Sigma \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ die zugehörige Familie von CMC-Rahmen. Wir fassen F nun als Schleifengruppen-wertige Abbildung $F : \Sigma \rightarrow \Lambda \mathrm{SU}(2)$ auf; in diesem Sinne ist F reell-analytisch.[†] Wie der folgende Satz zeigt, gibt es eine reell-analytische Abbildung $B : \Sigma \rightarrow \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, so dass $\Phi := F \cdot B : \Sigma \rightarrow \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ holomorph ist. In dieser Situation ist

$$\xi := \Phi^{-1} d\Phi = B^{-1} \alpha B + B^{-1} dB$$

ein holomorphes Potential. Wir nennen ξ ein *holomorphes Potential zu f* . Die zweite Beschreibung von ξ zeigt, dass der Zusammenhang $d + \alpha$ unter der durch B gegebenen Eichtransformation in den Zusammenhang $d + \xi$ transformiert wird.

Beispiele. In der folgenden Tabelle sind einige holomorphen Potentiale, und die CMC-Immersionen zu denen sie gehören, angegeben:

[†]Der zu f gehörende konforme Faktor u ist Lösung der Gauß-Gleichung, einer elliptischen partiellen Differentialgleichung mit reell-analytischen Koeffizienten. Daraus ergibt sich, dass die zu F gehörende Zusammenhangsform α reell-analytisch ist, und deshalb ist wegen $dF = \alpha F$ auch F selbst reell-analytisch.

Σ	Holomorphes Potential	CMC-Immersion
\mathbb{C}	$\xi = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dz$	Kreiszyylinder um die x_1 -Achse, Radius 1
\mathbb{C}	$\xi = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dz$	Sphäre vom Radius 2, Mittelpunkt $(0, 0, 1)$
\mathbb{C}	$\xi = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c z^k & 0 \end{pmatrix} dz$ mit $c \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}_0$	Smyth-Flächen „ $(k+2)$ -beiniger Mister Bubble“
$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\xi = \begin{pmatrix} r & s \lambda^{-1} + \bar{t} \lambda \\ \bar{s} \lambda + t \lambda^{-1} & -r \end{pmatrix} \frac{1}{z} dz$ mit $s, t \in \mathbb{C}, r, st \in \mathbb{R}, r^2 + s + \bar{t} ^2 = \frac{1}{4}$	Delaunay-Flächen (topologisch Zylinder)

Damit die beschriebene Konstruktion von holomorphen Potentialen aus CMC-Immersionen tatsächlich funktioniert, sind zwei Dinge zu beweisen:

Satz. Sei Σ eine einfach zusammenhängende, nicht-kompakte Riemannsche Fläche. Ist $F : \Sigma \rightarrow \Lambda \mathrm{SU}(2)$ der Rahmen einer assoziierten Familie von CMC-Immersionen, so gilt:

- (a) Es existiert eine reell-analytische Abbildung $B : \Sigma \rightarrow \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, so dass $\Phi := F \cdot B : \Sigma \rightarrow \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ holomorph ist.
- (b) Dann ist $\xi := \Phi^{-1} d\Phi$ ein holomorphes Potential.

Beweis. Vergleiche in [R] den Beweis von Lemma 4.5.1, S. 95ff. Zu (a). Ist $\Phi := F \cdot B$, so gilt

$$\Phi_{\bar{z}} = (FB)_{\bar{z}} = F_{\bar{z}} B + F B_{\bar{z}} = F V B + F B_{\bar{z}}$$

mit dem zu F gehörenden Lax-Paar (U, V) . Die Bedingung der Holomorphie von Φ ist also äquivalent zu

$$B_{\bar{z}} = -V B. \quad (1)$$

Wir zeigen nun zunächst, dass es um jedes $p \in \Sigma$ eine Umgebung $U_p \subset \Sigma$ und ein $B_p : U_p \rightarrow \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ gibt, so dass B_p Gleichung (1) erfüllt.

Dazu sei $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine konforme Karte von Σ um p mit $z(p) = 0$. Mit F ist auch $V = F^{-1} F_{\bar{z}}$ reell-analytisch, und kann daher lokal um $0 \in z(U)$ in der Form

$$V = \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} V_{k, \ell} z^k \bar{z}^\ell$$

dargestellt werden. Wir betrachten nun die Potenzreihe in zwei Variablen

$$\tilde{V}(z, w) := \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} V_{k, \ell} z^k w^\ell.$$

Weil V reell-analytisch ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass die \tilde{V} definierende Potenzreihe mindestens auf $U_\varepsilon(0) \times U_\varepsilon(0)$ konvergiert. Dann ist für jeden festen Wert von z

$$\partial_w \tilde{B}(z, w) = -\tilde{V}(z, w) \cdot \tilde{B}(z, w)$$

eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung; wir können also eine $\Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -wertige Lösung \tilde{B} auf $U_\varepsilon(0) \times U_\varepsilon(0)$ mit $\tilde{B}(0, 0) = \mathbf{1}$ erhalten. Damit ist $B_p(z) := \tilde{B}(z, \bar{z})$ auf $U_p := z^{-1}(U_\varepsilon(0))$ definiert, und erfüllt dort die Differentialgleichung (1).

Auf diese Weise erhalten wir also lokale Lösungen B_α von (1) auf offenen Teilmengen $U_\alpha \subset \Sigma$, die Σ überdecken. Ist $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, so definieren wir jeweils $h_{\alpha\beta} := B_\alpha^{-1} B_\beta$. Es gilt

$$(h_{\alpha\beta})_{\bar{z}} = -B_\alpha^{-1} (B_\alpha)_{\bar{z}} B_\alpha^{-1} B_\beta + B_\alpha^{-1} (B_\beta)_{\bar{z}} \stackrel{(1)}{=} B_\alpha^{-1} V B_\alpha B_\alpha^{-1} B_\beta - B_\alpha^{-1} V B_\beta = 0,$$

also ist $h_{\alpha\beta}$ holomorph; außerdem gilt offenbar die *Cozyklenrelation* $h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = h_{\alpha\gamma}$. Daher existiert für jeweils festes $\lambda \in S^1$ ein Vektorbündel $\pi_\lambda : E_\lambda \rightarrow \Sigma$ vom Rang 2, das über den U_α trivial ist, und die Übergangsfunktionen $h_{\alpha\beta}|_\lambda$ besitzt (siehe [F], Satz 29.7, S. 197); in diesem Bündel fügen sich die $B_\alpha|_\lambda$ zu einem globalen Schnitt in π_λ zusammen. Da Σ nicht-kompakt ist, ist das Bündel π_λ holomorph trivial (siehe [F], Satz 30.4, S. 204); das bedeutet, dass es holomorphe Abbildungen $h_{\alpha,\lambda} : U_\alpha \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ gibt mit $h_{\alpha\beta}|_\lambda = h_{\alpha,\lambda} h_{\beta,\lambda}^{-1}$. Man kann zeigen, dass die $h_{\alpha,\lambda}$ auch vom Parameter λ in reell-analytischer Weise abhängen; deshalb wird durch $h_\alpha(z)(\lambda) := h_{\alpha,\lambda}(z)$ eine holomorphe Abbildung $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ definiert. Nun können wir eine globale, reell-analytische Abbildung $B : \Sigma \rightarrow \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ widerspruchsfrei durch die Bedingungen

$$\forall \alpha : B|_{U_\alpha} = B_\alpha h_\alpha$$

definieren. Mit ihr gilt jeweils auf U_α

$$B_{\bar{z}} = (B_\alpha)_{\bar{z}} h_\alpha = -V B_\alpha h_\alpha = -V B$$

und somit (1).

Zu (b). Sei z eine konforme Karte für Σ , dann gilt auf der Kartenumgebung W zu $z : \xi := \Phi^{-1} d\Phi = A dz$ mit $A = \Phi^{-1} \Phi_z$; die Abbildung $A : W \rightarrow \Lambda \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist holomorph. Stellen wir A als Potenzreihe in λ dar: $A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(z) \lambda^k$, so sind auch die Funktionen $A_j : \Sigma \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ holomorph. Es gilt

$$A = B^{-1} U B + B^{-1} B_z, \quad (2)$$

wobei (U, V) das Lax-Paar zu F ist; insbesondere gilt

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_z & -2H e^u \lambda^{-1} \\ Q e^{-u} \lambda^{-1} & -u_z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Ferner ist B von der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \tilde{B} \quad (4)$$

mit einer Funktion $\rho : W \rightarrow \mathbb{C}^*$ und einer reell-analytischen Abbildung $\tilde{B} : W \rightarrow \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Aus den Gleichungen (2), (3) und (4) ergibt sich, dass $A_k = 0$ für alle $k \leq -2$, sowie dass

$$A_{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2H e^u \rho^{-2} \\ Q e^{-u} \rho^2 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt; insbesondere ist der rechts-oben stehende Eintrag $-2H e^u \rho^{-2}$ von A_{-1} nullstellenfrei. Damit ist gezeigt, dass ξ tatsächlich ein holomorphes Potential ist. \square

3 Wie man aus holomorphen Potentialen CMC-Immersionen erhält

Es ist für den Nutzen der DPW-Methode von zentraler Bedeutung, dass auf einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche Σ *jedes* holomorphe Potential ξ — ohne weitere Voraussetzung — zu einer CMC-Immersion gehört. In diesem Abschnitt sehen wir, auf welche Weise man aus einem gegebenen holomorphen Potential ξ die dazu gehörende CMC-Immersion f erhält.

Es sei also ein holomorphes Potential ξ auf Σ gegeben. Weil ξ holomorph ist, können wir die Gleichung $d\Phi = \Phi \xi$ als eine homogene, lineare Differentialgleichung in einer (komplexen) Variablen auffassen. Da Σ als einfach zusammenhängend vorausgesetzt war, besitzt das Anfangswertproblem

$$d\Phi = \Phi \xi, \quad \Phi(z_0) = \mathbf{1}$$

also (für festes $z_0 \in \Sigma$) eine eindeutig bestimmte Lösung $\Phi : \Sigma \rightarrow \Lambda \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Gemäß der Iwasawa-Zerlegung existieren nun eindeutig bestimmte reell-analytische Abbildungen $F : \Sigma \rightarrow \Lambda \mathrm{SU}(2)$ und $B : \Sigma \rightarrow \Lambda_+^{\mathbb{R}} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ mit $\Phi = F \cdot B$, und wir stellen die Frage, ob F der Rahmen einer CMC-Immersion $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist. Diese Frage wird durch den folgenden Satz positiv beantwortet; die CMC-Immersion f selbst kann man daher aus F durch Anwendung der Sym-Bobenko-Formel erhalten.

Leider ist es jedoch im Allgemeinen nicht so leicht, geometrische Eigenschaften von f am holomorphen Potential ξ abzulesen.

Satz. In der zuvor beschriebenen Situation sei $\xi = A dz = \sum_{k=-1}^{\infty} A_k(z) \lambda^k$ mit $A_{-1}(z) = \begin{pmatrix} 0 & a_{-1}(z) \\ b_{-1}(z) & 0 \end{pmatrix}$. Ferner sei die Funktion $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch $B|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}$. Es sei außerdem $H \neq 0$ vorgegeben. Dann erfüllt F das Lax-Paar zu der Metrik $4\rho^4 H^{-2} |a_{-1}|^2 dz d\bar{z}$ und dem Hopf-Differential $-2H^{-1} a_{-1} b_{-1} dz^2$. Daher ist F der Rahmen einer CMC- H -Immersion mit diesen Daten.

Beweis. (Siehe [R], Abschnitt 4.3, S. 90ff.) Sei $\alpha := F^{-1} dF$, dann ist α von der Form

$$\alpha = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

mit matrix-wertigen 1-Formen $\alpha_k = \alpha_k(z, \bar{z})$. Ist $A = \xi/dz$, so gilt

$$\alpha = F^{-1} dF = BAB^{-1} dz - dB \cdot B^{-1} \quad (5)$$

und daher ist $\alpha_k = 0$ für $k \leq -2$. Wegen $F \in \Lambda \mathrm{SU}(2)$ ist $\alpha = F^{-1} dF$ schief-Hermiteisch, das heißt, es gilt $\bar{\alpha}^t = -\alpha$ und somit

$$\alpha_{-k} = -\bar{\alpha}_k^t. \quad (6)$$

Daher ist $\alpha_k = 0$ auch für $k \geq 2$, also gilt

$$\alpha = \alpha_{-1} \lambda^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 \lambda.$$

Zerlegen wir nun die α_k in ihre $(1, 0)$ - und $(0, 1)$ -Anteile, das heißt, schreiben wir

$$\alpha_k = \alpha'_k dz + \alpha''_k d\bar{z} \quad \text{für } k \in \{-1, 0, 1\},$$

so folgt aus Gleichung (6) weiter

$$\alpha''_{-1} = -\overline{\alpha'_1}^t, \quad \alpha''_0 = -\overline{\alpha'_0}^t, \quad \alpha''_1 = -\overline{\alpha'_{-1}}^t.$$

Aus Gleichung (5) ergibt sich weiter

$$\alpha'_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \rho^2 a_{-1} \\ \rho^{-2} b_{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha''_{-1} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha'_0 = \begin{pmatrix} \rho_z/\rho & 0 \\ 0 & -\rho_z/\rho \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha'_0 + \lambda^{-1} \alpha'_{-1}) dz + (-\overline{\alpha'_0}^t - \lambda \overline{\alpha'_{-1}}^t) d\bar{z} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_z/\rho & \lambda^{-1} \rho^2 a_{-1} \\ \lambda^{-1} \rho^{-2} b_{-1} & -\rho_z/\rho \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} -\rho_z/\rho & -\lambda \rho^{-2} \overline{b_{-1}} \\ -\lambda \rho^2 \overline{a_{-1}} & \rho_z/\rho \end{pmatrix} d\bar{z}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass dieses α ein Lax-Paar erfüllt, führen wir die neue konforme Koordinate

$$w := -\frac{1}{H} \int a_{-1}(z) dz$$

ein; weil a_{-1} als nullstellenfrei vorausgesetzt ist (siehe die Definition des holomorphen Potentials), ist die Abbildung $w(z)$ tatsächlich immersiv. Für den Koordinatenwechsel von z nach w gilt

$$dz = -\frac{H}{a_{-1}} dw, \quad d\bar{z} = -\frac{H}{\overline{a_{-1}}} d\bar{w}, \quad \rho_z = -\frac{a_{-1}}{H} \rho_w \quad \text{und} \quad \rho_{\bar{z}} = -\frac{\overline{a_{-1}}}{H} \rho_{\bar{w}}.$$

Daher ist die Darstellung von α bezüglich der Koordinate w

$$\alpha = \begin{pmatrix} \rho_w/\rho & -\lambda^{-1} \rho^2 H \\ -\lambda^{-1} \rho^{-2} H b_{-1}/a_{-1} & -\rho_w/\rho \end{pmatrix} dw + \begin{pmatrix} -\rho_{\bar{w}}/\rho & \lambda \rho^{-2} \overline{b_{-1}/a_{-1}} H \\ \lambda \rho^2 H & \rho_{\bar{w}}/\rho \end{pmatrix} d\bar{w}.$$

Definieren wir nun $u := 2 \log(\rho)$ (also $\rho^2 = e^u$ und $u_w = 2 \rho_w/\rho$) und $Q := -2H b_{-1}/a_{-1}$, so gilt

$$\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_w & -2H e^u \lambda^{-1} \\ Q e^u \lambda^{-1} & -u_w \end{pmatrix} dw + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_{\bar{w}} & -\overline{Q} e^{-u} \lambda \\ 2H e^u \lambda & u_{\bar{w}} \end{pmatrix} d\bar{w}.$$

Somit erfüllt das Frame F , das ja die Lösung der Differentialgleichung $dF = \alpha F$ ist, das Lax-Paar zur konformen Metrik

$$4e^{2u} dw d\bar{w} = 4\rho^4 \frac{1}{H^2} |a_{-1}|^2 dz d\bar{z},$$

Hopf-Differential

$$Q dw^2 = -\frac{2}{H} a_{-1} b_{-1} dz^2$$

und mittlerer Krümmung H . □

4 Eichung und Dressing

Eichung. Das holomorphe Potential ξ ist durch den Rahmen $F : \Sigma \rightarrow \Lambda \mathrm{SU}(2)$ einer CMC-Immersion nicht eindeutig bestimmt. Das liegt daran, dass $B : \Sigma \rightarrow \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ durch die Bedingung, dass $\Phi := F \cdot B$ holomorph sein möge, nicht eindeutig bestimmt ist. Ist nämlich ein derartiges B gegeben, so wird die genannte Bedingung auch von $\widehat{B} := B \cdot p_+$, wobei $p_+ : \Sigma \rightarrow \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ eine beliebige *holomorphe* Abbildung ist, erfüllt.

Wir sehen also: Wenn wir Φ von *rechts* mit einer holomorphen Abbildung $p_+ : \Sigma \rightarrow \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ multiplizieren, also zu $\widehat{\Phi} := \Phi \cdot p_+$ übergehen, so ist

$$\widehat{\xi} := \widehat{\Phi}^{-1} d\widehat{\Phi} = p_+^{-1} \xi p_+ + p_+^{-1} dp_+$$

ein weiteres holomorphes Potential, das zur selben CMC-Immersion wie ξ gehört. Eine derartige Transformation nennt man *Eichung* oder *Gauging* von ξ , denn wie die vorherige Formel zeigt, entspricht sie einer Eichtransformation des Zusammenhangs $d + \xi$.

Dressing. Die Lösung Φ der Differentialgleichung $d\Phi = \Phi \xi$ ist (ohne die Anfangswertbedingung $\Phi(z_0) = \mathbf{1}$) nicht eindeutig bestimmt. Tatsächlich gilt: Ist Φ eine Lösung und $h_+ \in \Lambda_+ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ein *von z unabhängiges* Element, so entsteht durch Multiplikation *von links* eine weitere Lösung $\widetilde{\Phi} := h_+ \cdot \Phi$. Sie erzeugt durch die Iwasawa-Zerlegung $\widetilde{\Phi} = \widetilde{F} \cdot \widetilde{B}$ einen weiteren – in der Regel von F verschiedenen – CMC-Rahmen \widetilde{F} , der zum selben holomorphen Potential ξ gehört. Man bezeichnet eine derartige Transformation als *Dressing*.

Die Auswirkung der Anwendung eines Dressing auf F ist auf direktem Wege nicht so leicht zu durchschauen, weil in den Übergang von F zu \widetilde{F} die Iwasawa-Zerlegung involviert ist: \widetilde{F} ist der $\Lambda \mathrm{SU}(2)$ -Anteil der Iwasawa-Zerlegung von $h_+ \cdot F$. Leichter ist das Dressing anhand der sogenannten *Monodromie* zu verstehen, die unter Anwendung des Dressings einfach durch Konjugation mit h_+ transformiert wird.

5 Alternative Beschreibungen des holomorphen Potentials

Es gibt einige Variationen der Definition des holomorphen Potentials, die auf eng verwandte Theorien führen.

Ungetwistete Potentiale. Wir haben in unserer Darstellung der DPW-Methode bisher die Schleifengruppen in getwisteter Form, das heißt mit den Bedingungen

$$\Phi(-\lambda) = \sigma_3 \Phi(\lambda) \sigma_3 \quad \text{bzw.} \quad A(-\lambda) = \sigma_3 A(\lambda) \sigma_3, \quad (7)$$

verwendet. Die Folge davon ist, dass der von einem holomorphen Potential ξ hergeleitete Rahmen F ein Lax-Paar in getwisteter Form erfüllt, und man folglich die getwistete Form der Sym-Bobenko-Formel verwenden muss, um schließlich die CMC-Immersion zu gewinnen.

Man kann stattdessen die Schleifengruppen auch in ungetwisteter Form, das heißt ohne die Bedingungen (7), definieren. Für die ungetwisteten Schleifengruppen gilt die Iwasawa-Zerlegung

wörtlich wie in Abschnitt 1 angegeben, und daher erhält man aus einem ungetwisteten holomorphen Potential einen Rahmen F , von dem es sich zeigt, dass es ein Lax-Paar in ungetwisteter Form erfüllt, und daher über die ungetwistete Sym-Bobenko-Formel eine CMC-Immersion definiert.

Die getwistete und die ungetwistete Theorie sind im Wesentlichen äquivalent. Manche Autoren verwenden die getwistete, manche die ungetwistete Konvention; beim Lesen sollte man darauf achten, welche Form verwendet wird. Insbesondere verlangt das Programmpaket `cmclab`, das die DPW-Methode implementiert um CMC-Flächen zu visualisieren, bei der Eingabe der holomorphen Potentiale die ungetwistete Form.

Ein gegebenes holomorphes Potential ξ in getwisteter Form läßt sich durch die Transformation

$$\xi/dz = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a(\sqrt{\lambda}) & \sqrt{\lambda}^{-1} b(\sqrt{\lambda}) \\ \sqrt{\lambda} c(\sqrt{\lambda}) & d(\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix}$$

in ein ungetwistetes Potential für dieselbe CMC-Immersion überführen. (Die Twist-Bedingung sorgt gerade dafür, dass diese Definition von der Wahl des Vorzeichens der Quadratwurzel unabhängig ist.) Die inverse Transformation, vom ungetwisteten zum getwisteten Potential, wird durch

$$\xi/dz = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a(\lambda^2) & \lambda b(\lambda^2) \\ \lambda^{-1} c(\lambda^2) & d(\lambda^2) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Normalisierte Potentiale. Wie wir gesehen haben, ist das holomorphe Potential ξ zu einem CMC-Rahmen F nicht eindeutig bestimmt. Es ist daher naheliegend, zu F ein holomorphes Potential von möglichst einfacher Form zu finden.

Es gilt die folgende Aussage (siehe [R], Abschnitt 4.6): Zu jedem CMC-Rahmen F gehört *lokal* ein holomorphes Potential der Form

$$\xi = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & a(z) \\ b(z) & 0 \end{pmatrix} dz \quad (8)$$

wobei $a, b : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen auf einer offenen Umgebung $U \subset \Sigma$ sind.

Will man eine derartige Darstellung auch global erreichen, muss man zulassen, dass die Funktionen a, b Polstellen besitzen. Ein „Potential“ von der Form (8) mit *meromorphen* Funktionen $a, b : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ nennt man daher *normalisiertes Potential*. (Gelegentlich wird auch von *meromorphen Potentialen* gesprochen, jedoch kann es hier zu Verwechslungen mit anderen Verwendungen dieser Bezeichnung kommen.)

Literatur

- [DPW] J. DORFMEISTER, F. PEDIT, H. WU, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. 6(4) (1998), 633–668.
- [F] O. FORSTER, *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag Berlin 1977.

- [G] M. GUEST, *Harmonic maps, loop groups and integrable systems*, London Mathematical Society Student Texts 38, Cambridge University Press 1997.
- [PS] A. PRESSLEY, G. SEGAL, *Loop Groups*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press 1986.
- [R] W. ROSSMAN, *Imperfect draft of a supplement for “Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces” written with Shoichi Fujimori and Shimpei Kobayashi.*