

Willmore-Funktional und Schleifengruppen

Jörg Zentgraf

12.05.2009

1 Das Willmore-Funktional

Wir wollen im Folgenden das Funktional

$$\widetilde{W}(X) = \int_M H^2 dA$$

für Immersionen $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ betrachten, wobei H die mittlere Krümmung der Immersion und dA das induzierte Flächenelement bezeichnet.

Ebenso kann man betrachten

$$\begin{aligned} W(X) = \int_M (H^2 - K) dA &= \int_M \left(\frac{1}{4} (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - \kappa_1 \cdot \kappa_2 \right) dA \\ &= \widetilde{W}(X) - 2\pi\chi(M) \end{aligned}$$

Hierbei benutzt man den Satz von Gauß-Bonnet und die Tatsache, dass $\chi(M)$ nur vom Geschlecht g von M abhängt. W und \widetilde{W} unterscheiden sich also nur um eine Konstante. Außerdem sieht man, dass der Integrand von $W(X)$ nicht-negativ ist und genau an den *Nabelpunkten* von X verschwindet, wenn also

$$\kappa_1 = \kappa_2$$

Eine Immersion heißt Willmore-Immersion, wenn sie ein Minimum unter diesem Funktional ist. Hierbei betrachten wir alle Variationen der Fläche.

Wir wollen nun wie folgt vorgehen:

1. Mithilfe des Lichtkegelmodells übertragen wir unsere Betrachtungen in den 5-dimensionalen Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{4,1}$. Damit lassen sich Willmore-Flächen auf S^3 durch stereographische Projektion konform auf Willmore-Flächen in \mathbb{R}^3 abbilden. Lokal kann man also auch Immersionen $X : U \rightarrow S^3$ betrachten.
2. Durch Einführung des Konzepts *bewegter Rahmen* untersuchen wir die Flächentheorie für S^3 und leiten die Strukturgleichungen in lokalen Koordinaten her.
3. Die Definition einer Folge von Rahmen-Bündeln \mathcal{F}_X erzwingt die Existenz einer 2-Form Ω_X , die invariant unter Rahmenverschiebungen ist.
4. Diese kanonische 2-Form Ω_X wird verwendet, um eine Immersion $X : U \rightarrow S^3$ als Willmore-Immersion zu charakterisieren, wenn $\delta\Omega_X \equiv 0$ gilt.
5. Diese Charakterisierung wird dann in eine andere Formulierung umgeschrieben, als Nullkrümmungsgleichung einer Familie von Zusammenhängen, dazu führen wir die benötigten Schleifengruppen ein.
6. Die Beziehung zwischen holomorphen Potentialen und Willmore-Immersionen wird untersucht.

1.1 Konforme Geometrie von Flächen in S^3

Definition 1.1. Der 5-dimensionale Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{4,1}$ ist der Vektorraum \mathbb{R}^5 versehen mit dem inneren Produkt

$$B = (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist nicht die Standardwahl für ein inneres Produkt. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{4,1}$ heißt Raum-, Licht- oder Zeitvektor, wenn entsprechend $\langle x, x \rangle > 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ oder $\langle x, x \rangle < 0$ gilt. Wir nennen $x \in \mathbb{R}^{4,1}$ positiv, wenn $x^0 > 0$ ist.

Um eine Orientierung zu erhalten, fordern wir

$$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 > 0$$

Indem man die positiven Lichtvektoren in $\mathbb{R}^{4,1}$ durch

$$\mathcal{L}^+ = \{x \in L^5 \mid \langle x, x \rangle = 0, x^0 > 0\}$$

definiert, erhält man folgende Proposition:

Proposition 1.2. Der Untervektorraum

$$E_y = \{x \in \mathcal{L}^+ \mid \langle x, y \rangle = -1\}$$

mit der induzierten Metrik ist isometrisch zu \mathbb{R}^3 .

Betrachtet man den Quotienten $\mathcal{L}^+/\mathbb{R}_+^*$, die Menge aller positiven Lichthalbgeraden, so bezeichnen wir für $x \in \mathcal{L}^+$ mit $[x]$ die Halbgerade, die durch x über \mathbb{R}_+^* aufgespannt wird. Somit ist S^3 diffeomorph zu $\mathcal{L}^+/\mathbb{R}_+^*$.

Wir wollen nun das Konzept bewegter Rahmen einführen.

Definition 1.3. Sei \mathcal{F} der Raum der positiv orientierten Basen (Rahmen) $b = (e_0, e_1, \dots, e_4)$ von $\mathbb{R}^{4,1}$ mit

$$\langle e_i, e_j \rangle = B_{ij}, \quad e_0, e_4 \in \mathcal{L}^+.$$

Sei außerdem

$$O(B) = \{g \in M(5 \times 5, \mathbb{R}) \mid g^t B g = B\}$$

und definiere \mathfrak{G} als die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{1} \in O(B)$.

\mathfrak{G} ist isomorph zu den linearen Isometrien von $\mathbb{R}^{4,1}$, die das Skalarprodukt, die Orientierung und die Zeitorientierung erhalten und man kann ausrechnen:

$$\mathfrak{G} = \{g \in M(5 \times 5, \mathbb{R}) \mid g^t B g = B, \det(g) = 1, g_0^0 > 0\}$$

Außerdem wirkt \mathfrak{G} auf natürliche Weise von rechts auf \mathcal{F} und wir können \mathcal{F} mit \mathfrak{G} identifizieren, indem wir setzen

$$\mathcal{F} = \{b = (e_0, e_1, \dots, e_4) \mid \exists! g \in \mathfrak{G} : b = \epsilon g\},$$

wobei ϵ eine fest gewählte Basis von $\mathbb{R}^{4,1}$ ist. \mathfrak{G} ist insbesondere eine Lie-Gruppe.

1.2 Die Strukturgleichungen in lokalen Koordinaten und das Rahmen-Bündel 0-ter Ordnung $\mathcal{F}_X^{(0)}$

Zunächst fasse man die Komponenten e_a eines Elements b aus \mathcal{F} (den positiv orientierten Rahmen) auf als $\mathbb{R}^{4,1}$ -wertige Funktionen. Unter dieser Identifikation berechnet man

$$de_a = \sum_{c=0}^4 e_c \omega_a^c =: e_c \omega_a^c, \quad (1)$$

mit den eindeutig bestimmten 1-Formen ω_a^b . Differenziert man diesen Ausdruck erhält man unter Verwendung von (1)

$$\begin{aligned} 0 = d(de_a) &= de_c \wedge \omega_a^c + e_c d\omega_a^c &= e_b \omega_c^b \wedge \omega_a^c + e_c d\omega_a^c \\ &= e_b \omega_c^b \wedge \omega_a^c + e_b d\omega_a^b \end{aligned}$$

und somit

$$d\omega_b^a = -\omega_c^a \wedge \omega_b^c \quad (2)$$

Dies sind die Strukturgleichungen von É. Cartan. Wenn wir noch $\langle e_a, e_b \rangle = B_{ab}$ differenzieren erhalten wir mit $\omega_{ab} = B_{ac} \omega_b^c$

$$\begin{aligned} 0 = d\langle e_a, e_b \rangle &= \langle de_a, e_b \rangle + \langle e_a, de_b \rangle = \langle e_c \omega_a^c, e_b \rangle + \langle e_a, e_c \omega_b^c \rangle \\ &= B_{bc} \omega_a^c + B_{ac} \omega_b^c = \omega_{ba} + \omega_{ab} \end{aligned} \quad (3)$$

Daraus folgt, dass nur 10 der ω_b^a linear unabhängig sind und dass sie eine Basis für die links-invarianten Formen auf \mathfrak{G} bilden.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $(\epsilon g)_i$ den i -ten Vektor in der Basis ϵg . Dann ist $[(\epsilon g)_0]$ der Punkt in S^3 , der aufgespannt wird durch $(\epsilon g)_0$.

Proposition 1.4. *Sei $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow S^3$ eine Immersion. Wir können sie darstellen durch eine glatte Abbildung $e_0 : U \rightarrow \mathcal{L}^+$ mit $[e_0] = X$, diese Abbildung ist sicherlich nicht eindeutig, wir betrachten das Bündel*

$$\mathcal{F}_X^{(0)} = \{(z, e) \in U \times \mathcal{F} \mid [e_0(z)] = X\}$$

Die Gruppe, die auf diesem Bündel von rechts wirkt ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_0 &= \{g \in \mathfrak{G} \mid (\epsilon g)_0 = r^{-1} \epsilon_0 \text{ für ein } r \in \mathbb{R}_+^*\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} r^{-1} & c^t A & \frac{1}{2} r c^t c \\ 0 & A & r c \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \mid r > 0, c \in M(3 \times 1, \mathbb{R}), A \in SO(3, \mathbb{R}) \right\} \end{aligned}$$

Beweis. Da $(\epsilon g)_0 = r^{-1} \epsilon_0$ sein soll muss die erste Spalte von g nur im ersten Eintrag $g_0^0 > 0$ ungleich Null sein. Außerdem muss $\det(g) = 1$ sein und I_3 in $B = B_{ij}$ muss unter $g^t B g$ erhalten bleiben. Somit hat g zunächst die Gestalt

$$\begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, a, c \in M(3 \times 1, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}, A \in SO(3, \mathbb{R})$$

Es muss außerdem gelten

$$\begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & A^t & a \\ -r^{-1} & c^t & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & -r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} -r^{-1}b + c^t c - r^{-1}b &= 0 \\ -r^{-1}a^t + c^t A &= 0 \end{aligned}$$

und somit $b = \frac{1}{2}rc^t c$ sowie $a^t = rc^t A$. Substitution von c durch $\frac{1}{r}c'$ und anschließende Substitution $r' := \frac{1}{r}$ ergeben die Behauptung. \square

1.3 Die Unter-Rahmen-Bündel höherer Ordnung und die 2-Form Ω_X

Wir betrachten nun Rahmen, die die Gleichung $\langle de_0, e_3 \rangle = \omega_0^3 = 0$ erfüllen.

Definition 1.5. Definiere das Unter-Rahmen-Bündel 1-ter Ordnung $\mathcal{F}_X^{(1)}$ durch

$$\mathcal{F}_X^{(1)} = \left\{ (p, b) \in \mathcal{F}_X^{(0)} \mid \omega_{0| (p,b)}^3 = 0, (\omega_0^1 \wedge \omega_0^2) > 0 \right\}$$

Bemerkung 1.6. $\mathcal{F}_X^{(1)}$ wird via $p : \mathcal{F}_X^{(1)} \rightarrow M$ zu einem Prinzipal-Bündel über M mit Faser

$$\mathfrak{G}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r^{-1} & p^t A & \frac{1}{2} r p^t p \\ 0 & A & r p \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_0 \mid A = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c^2 + s^2 = 1, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right\}$$

Durch die Gleichungen (2) und (3) erhalten wir

$$0 = d\omega_0^3 = -\omega_1^3 \wedge \omega_0^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_0^2 \quad (4)$$

Mit Cartan's Lemma folgt dann, dass man ω_1^3 und ω_2^3 jeweils als Linearkombination von ω_0^1 und ω_0^2 schreiben kann:

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= h_{11}\omega_0^1 + h_{12}\omega_0^2 \\ \omega_2^3 &= h_{21}\omega_0^1 + h_{22}\omega_0^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Hierbei sind die h_{ij} glatte Funktionen auf $\mathcal{F}_X^{(1)}$ mit $h_{12} = h_{21}$.

Wir wählen nun einen neuen Schnitt $\tilde{e} = \epsilon Fg$ mit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_3 & \frac{1}{2}(p_3)^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $p_3 : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann hat man in den Koordinaten bzgl. \tilde{e} die Funktionen \tilde{h}_{ij}

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} - p_3 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - p_3 \end{pmatrix}$$

Man kann für $p_3 = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$ definieren

Definition 1.7. Definiere das Unter-Rahmen-Bündel $\mathcal{F}_X^{(\gamma)}$ durch

$$\mathcal{F}_X^{(\gamma)} = \left\{ (p, b) \in \mathcal{F}_X^{(1)} \mid h_{11} + h_{22} = 0 \right\}.$$

Dieses ist ein \mathfrak{G}_γ -Bündel mit

$$\mathfrak{G}_\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} r^{-1} & p^t A & \frac{1}{2} r p^t p \\ 0 & A & r p \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_1 \mid p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Man sieht, dass für jede glatte Abbildung $g' : U \rightarrow \mathfrak{G}_\gamma$ die Eichtransformation $\epsilon F \mapsto \epsilon F g'$ auf $\mathcal{F}_X^{(\gamma)}$ den Vektor $e_3(z)$ nicht verändert. Somit erhalten wir eine Abbildung $\gamma : U \rightarrow S^{3,1}$ mit

$$S^{3,1} = \{y \in \mathbb{R}^{4,1} \mid \|y\|^2 = 1\}$$

so dass für alle $z \in U$, $\gamma(z) = e_3(z)$ ist, wobei e_3 einem Schnitt in $\mathcal{F}_X^{(\gamma)}$ entspricht. Diese Abbildung γ nennen wir *konforme Gauss-Abbildung*. Geometrisch entspricht diese Abbildung der eindeutigen orientierten Sphäre in S^3 , die tangential zu $X(U)$ in $X(z)$ ist, dort auch die gleiche mittlere Krümmung mit der gleichen Orientierung besitzt. Die Entsprechung ist wie folgt. Für jedes $\gamma \in S^{3,1}$ ist $\gamma^\perp \subset L^5$ eine 4-dimensionale Ebene, auf der das innere Produkt den Typ (3,1) hat. Im speziellen schickt die Projektion $\Pi : \mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{L}^+/\mathbb{R}_+^* = S^3$ den dreidimensionalen Kegel $\mathcal{L}^+ \cap \gamma^\perp$ auf eine $S^2 \subset S^3$. Eine Orientierung auf dieser Sphäre kann man wählen, da γ und $-\gamma$ die gleiche Sphäre mit umgekehrten Orientierungen liefern.

Verschwindet (h_{11}, h_{12}) nicht, so ist γ eine konforme Immersion. Es folgt aus (5)

$$\omega_1^3 - i\omega_2^3 = (h_{11} - ih_{12})(\omega_0^1 + i\omega_0^2)$$

Außerdem haben wir

$$d\gamma = de_3 = e_0\omega_3^0 + e_1\omega_3^1 + e_2\omega_3^2$$

Somit ist γ konform, wenn X konform ist, da e_0 ein isotroper Vektor ist.

Es folgt nun für R_g die Rechtsmultiplikation

$$R_g^* \begin{pmatrix} \omega_0^1 \\ \omega_0^2 \\ \omega_0^3 \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} \omega_0^1 \\ \omega_0^2 \\ \omega_0^3 \end{pmatrix} g = r^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} \omega_0^1 \\ \omega_0^2 \\ \omega_0^3 \end{pmatrix}$$

und

$$R_g^* \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} - p_3 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

Aus der obigen Betrachtung folgt nun für $g \in \mathfrak{G}_1$

$$\begin{aligned} R_g^*(\omega_0^1 \wedge \omega_0^2) &= R_g^*\omega_0^1 \wedge R_g^*\omega_0^2 = r^{-2} (c\omega_0^1 - s\omega_0^2) \wedge (s\omega_0^1 + c\omega_0^2) \\ &= r^{-2} (cs(\omega_0^1 \wedge \omega_0^1) - s^2\omega_0^2 \wedge \omega_0^1 + c^2\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 - sc(\omega_0^2 \wedge \omega_0^2)) \\ &\quad - sc(\omega_0^1 \wedge \omega_0^1) - c^2\omega_0^2 \wedge \omega_0^1 + s^2\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 + cs(\omega_0^2 \wedge \omega_0^2) \\ &= r^{-2} (s^2 + c^2) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \\ &= r^{-2} \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \end{aligned}$$

sowie

$$R_g^* \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) = r^2 \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right)$$

$$R_g^* \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 = \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2,$$
$$p^*(\Omega_X) = \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2,$$

Insbesondere gilt somit auf $\mathcal{F}_X^{(\gamma)}$ ($h_{22} = -h_{11}$):

$$\begin{aligned} p^*(\Omega_X) &= \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \\ &= -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \end{aligned}$$

$$\mathcal{U}_X = \{z \in U \mid k(z) = 0\}$$
$$\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = -|k^2| \omega_0^1 \wedge \omega_0^2$$
$$\mathcal{W}(X) = \int_U -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \equiv \int_U \Omega_X$$
$$\begin{cases} dh_1 + 2\omega_0^0 h_1 = \omega_1^1 h_2 + h_{11}\omega_1^0 + h_{12}\omega_2^0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + p_{11}\omega_0^1 + p_{12}\omega_0^2 & (a) \\ dh_2 + 2\omega_0^0 h_2 = \omega_2^1 h_1 + h_{21}\omega_1^0 + h_{22}\omega_2^0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + p_{21}\omega_0^1 + p_{22}\omega_0^2 & (b) \end{cases} \quad (6)$$
$$p_{11} + p_{22} = 0. \quad (7)$$

2 Formulierung mit Schleifengruppen

In diesem Abschnitt führen wir eine andere äquivalente Bedingung für Willmore-Immersionen ein. Dies wird eine Nullkrümmungsbedingung für eine Familie von Zusammenhängen sein.

2.1 Umformulierung der Willmore-Bedingung

Die Rechnungen von Hélein [2] sind sehr ausführlich und werden deshalb hier auch nur wiedergegeben. Zunächst führen wir einige Matrizen

$$(A_+, A_-, A_0, B_+, B_-, B_0, C_+, C_-, D_+, D_-)$$

ein. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} A_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X_+ & 0 & 0 \\ 0 & X_+^t & 0 \end{pmatrix} & A_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X_- & 0 & 0 \\ 0 & X_-^t & 0 \end{pmatrix} \\ A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X_0 & 0 & 0 \\ 0 & X_0^t & 0 \end{pmatrix} & B_+ &= \begin{pmatrix} 0 & X_+^t & 0 \\ 0 & 0 & X_+ \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_- &= \begin{pmatrix} 0 & X_-^t & 0 \\ 0 & 0 & X_- \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & B_0 &= \begin{pmatrix} 0 & X_0^t & 0 \\ 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & C_- &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ D_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & D_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierbei ist (X_+, X_-, X_0) eine Basis von \mathbb{C}^3 , die gegeben ist durch

$$X_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun geben wir noch eine Tabelle von Lie-Klammern an von den Elementen dieser Basis, sie gibt $[X, Y]$ in Abhängigkeit von X und Y an.

	Y	A_+	A_-	A_0	B_+	B_-	B_0	C_+	C_-	D_+	D_-
X											
A_+		0	0	0	0	$-2C_+$	$-D_+$	$2A_+$	0	0	$-2A_0$
A_+		0	0	0	$-2C_-$	0	$-D_-$	0	$2A_-$	$-2A_0$	0
A_0		0	0	0	D_+	D_-	$-E$	A_0	A_0	A_+	A_-
B_+		0	$2C_-$	$-D_+$	0	0	0	0	$-2B_+$	0	$-2B_0$
B_-		$2C_+$	0	$-D_-$	0	0	0	$-2B_-$	0	$-2B_0$	0
B_0		D_+	D_-	E	0	0	0	$-B_0$	$-B_0$	B_+	B_-
C_+		$-2A_+$	0	$-A_0$	0	$2B_-$	B_0	0	0	$-D_+$	D_-
C_-		0	$-2A_-$	$-A_0$	$2B_+$	0	B_0	0	0	D_+	$-D_-$
D_+		0	$2A_0$	$-A_+$	0	$2B_0$	$-B_+$	D_+	$-D_-$	0	C_+-C_-
D_-		$2A_0$	0	$-A_-$	$2B_0$	0	$-B_-$	$-D_-$	D_-	C_--C_+	0

mit $E = \frac{1}{2}(C_+ - C_-)$.

Seien σ und τ die folgenden zwei Matrizen

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser zwei Matrizen lässt sich unsere Lie-Algebra \mathfrak{g} aufspalten. Es ist

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

mit

$$\mathfrak{k} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \sigma\xi\sigma^{-1} = \xi\} \quad \mathfrak{p} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \sigma\xi\sigma^{-1} = -\xi\}$$

Im Folgenden bezeichnet der Zusatz $\cdot^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung einer Lie-Algebra $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$. Die Lie-Algebra \mathfrak{k} wird aufgespannt durch (C_+, C_-, D_+, D_-) . Ebenso kann man die Matrix τ benutzen, um \mathfrak{g} aufzuspalten,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{q}$$

mit

$$\mathfrak{l} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \tau\xi\tau^{-1} = \xi\} \quad \mathfrak{q} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \tau\xi\tau^{-1} = -\xi\}$$

Die Lie-Algebra \mathfrak{l} wird aufgespannt durch $(A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-)$. Die homogene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{L}$ ist $S^{3,1}$.

Sei nun $X : M \rightarrow S^3$ eine glatte Immersion und $e = \epsilon F$ ein glatter Schnitt im Bündel $\mathcal{F}_X^{(1)}$. Zieht man die Maurer-Cartan-Form zurück, so ist $\omega = F^{-1}dF$, dies können wir in unserer Basis von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ schreiben als

$$\begin{aligned} \omega = & a^+ A_+ + a^- A_- + b^+ B_+ + b^- B_- + (b^0 + \overline{b^0}) B_0 \\ & + c^+ C_+ + c^- C_- + d^+ D_+ + d^- D_- \end{aligned}$$

Die einzelnen Koeffizienten sind hierbei

$$a^+ = \frac{1}{2}(\omega_0^1 + i\omega_0^2) \quad a^- = \frac{1}{2}(\omega_0^1 - i\omega_0^2) \quad (8)$$

$$b^+ = \frac{1}{2}(\omega_1^0 + i\omega_2^0) \quad b^- = \frac{1}{2}(\omega_1^0 - i\omega_2^0) \quad (9)$$

$$b^0 = (h_1 - ih_2)a^+ = 2ha^+ \quad (10)$$

wobei $h = \frac{1}{2}(h_1 - ih_2)$ definiert ist durch

$$\omega_3^0 = h_1\omega_0^1 + h_2\omega_0^2$$

$$c^+ = \frac{1}{2}(\omega_0^0 + i\omega_2^1) \quad c^- = \frac{1}{2}(\omega_0^0 - i\omega_2^1) \quad (11)$$

$$d^+ = \frac{1}{2}(\omega_1^3 + i\omega_2^3) \quad d^- = \frac{1}{2}(\omega_1^3 - i\omega_2^3) \quad (12)$$

Wegen $\omega_0^3 = 0$ gibt es keine A_0 -Komponente in ω .

Setzen wir nun $H := \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$ und $k := \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - ih_{12}$, so erhalten wir

$$d^- = ka^+ + Ha^- \quad d^+ = \bar{k}a^- + Ha^+ \quad (13)$$

und $a^- = \overline{a^+}$, $b^- = \overline{b^+}$, $c^- = \overline{c^+}$, $d^- = \overline{d^+}$, $\omega_3^0 = b^0 + \overline{b^0}$. Nutzen wir nun die Strukturgleichungen $d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0$ aus, so erhalten wir folgende Beziehungen zwischen den Koeffizienten

$$dc^+ - 2a^+ \wedge b^- - d^- \wedge d^+ = 0 \quad (14)$$

$$d(d^-) + (c^+ - c^-) \wedge d^- + b^0 \wedge a^- = 0 \quad (15)$$

$$a^+ \wedge d^- + a^- \wedge d^+ = 0 \quad (16)$$

$$da^+ + 2a^+ \wedge c^+ = 0 \quad (17)$$

$$db^+ + 2c^- \wedge b^+ + (b^0 + \overline{b^0}) \wedge d^+ = 0 \quad (18)$$

und durch eine etwas längere Rechnung auch

$$db^0 + (c^+ + c^-) \wedge b^0 - 2b^+ \wedge d^- = 2H(b^- \wedge a^+ - b^+ \wedge a^-) + 2Pa^- \wedge a^+ \quad (19)$$

Diese Gleichungen liefern uns nun auch eine zwei Parameter Familie von ω , indem wir für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ setzen

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda, \mu} = & \lambda^{-1} \mu^{-1} b^0 B_0 + \lambda^{-1} (a^+ A_+ + b^+ B_+) + \mu^{-1} d^- D_- \\ & + c^+ C_+ + c^- C_- + \lambda \mu \overline{b^0} B_0 + \lambda (a^- A_- + b^- B_-) + \mu d^+ D_+ \end{aligned} \quad (20)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \omega_\lambda = \omega_{\lambda, 1} = & \lambda^{-1} (b^0 B_0 + a^+ A_+ + b^+ B_+) \\ & + c^+ C_+ + c^- C_- + d^- D_- + d^+ D_+ \\ & \lambda (\overline{b^0} B_0 + a^- A_- + b^- B_-) \\ =: & \lambda^{-1} \alpha'_1 + \alpha_0 + \lambda \alpha''_1 \end{aligned} \quad (21)$$

und

$$\begin{aligned} \omega_\mu = \omega_{1, \mu} = & \mu^{-1} (b^0 B_0 + d^- D_-) \\ & + a^+ A_+ + a^- A_- + b^- B_- + b^+ B_+ + c^+ C_+ + c^- C_- \\ & + \mu (\overline{b^0} B_0 + d^+ D_+) \\ =: & \mu^{-1} \beta'_1 + \beta_0 + \mu \beta''_1 \end{aligned} \quad (22)$$

Es gilt auch weiterhin $\omega = F^{-1}dF = \omega_{1,1}$.

Theorem 2.1. *Die folgenden vier Aussagen sind äquivalent.*

(a) $e = \epsilon F$ ist ein Schnitt von $\mathcal{F}_X^{(\gamma)}$, d.h. $H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}) = 0$ und X ist eine Willmore Immersion, d.h. $P = \frac{1}{2}(p_{11} + p_{22}) = 0$.

(b) Für alle $\mu, \lambda \in \mathbb{C}^*$ hat $\omega_{\lambda, \mu}$ Krümmung Null, d.h.

$$d\omega_{\lambda, \mu} + \frac{1}{2}[\omega_{\lambda, \mu} \wedge \omega_{\lambda, \mu}] = 0$$

(c) Für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ hat ω_λ Krümmung Null, d.h.

$$d\omega_\lambda + \frac{1}{2}[\omega_\lambda \wedge \omega_\lambda] = 0$$

(d) Für alle $\mu \in \mathbb{C}^*$ hat ω_μ Krümmung Null, d.h.

$$d\omega_\mu + \frac{1}{2}[\omega_\mu \wedge \omega_\mu] = 0$$

Beweis. Wir berechnen zunächst unter Berücksichtigung aller Beziehungen und der Tabelle der Kommutatoren

$$\begin{aligned}
d\omega_{\lambda,\mu} &+ \frac{1}{2}[\omega_{\lambda,\mu} \wedge \omega_{\lambda,\mu}] \\
&= -(\lambda^{-1}\mu^{-1}a^+ \wedge d^- + \lambda\mu a^- \wedge d^+)A_0 \\
&\quad + (\lambda\mu^2 - \lambda^{-1})\bar{b}^0 \wedge d^+B_+ + (\lambda^{-1}\mu^{-2} - \lambda)b^0 \wedge d^-B_- \\
&\quad + (\lambda^{-1}\mu^{-1} - \lambda\mu)[2H(b^- \wedge a^+ - b^+ \wedge a^-) + 2Pa^- \wedge a^+]B_0
\end{aligned}$$

Benutzen wir nun noch die Gleichungen (10) und (13), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
d\omega_{\lambda,\mu} &+ \frac{1}{2}[\omega_{\lambda,\mu} \wedge \omega_{\lambda,\mu}] \\
&= -(\lambda^{-1}\mu^{-1} - \lambda\mu)Ha^+ \wedge a^-A_0 \\
&\quad + (\lambda\mu^2 - \lambda^{-1})2\bar{h}Ha^- \wedge a^+B_+ \\
&\quad + (\lambda^{-1}\mu^{-2} - \lambda)2hHa^+ \wedge a^-B_- \\
&\quad + (\lambda^{-1}\mu^{-1} - \lambda\mu)[(2H(b^- \wedge a^+ - b^+ \wedge a^-) + 2Pa^- \wedge a^+)B_0]
\end{aligned}$$

Gilt also eine der drei Aussage (b) - (d), so muss insbesondere der Koeffizient vor A_0 verschwinden, dies passiert aber nur, wenn $H = 0$ ist. Für $H = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$d\omega_{\lambda,\mu} + \frac{1}{2}[\omega_{\lambda,\mu} \wedge \omega_{\lambda,\mu}] = (\lambda^{-1}\mu^{-1} - \lambda\mu)Pa^- \wedge a^+B_0$$

Somit ist auch $P = 0$ und die Aussage (a) folgt.

Ist umgekehrt $H = P = 0$, so folgen aus (23) die drei Aussagen (b) - (d). \square

Im Folgenden nehmen wir an, dass X eine konforme Immersion ist. Dann folgt aus der Bedingung $\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 > 0$, dass a^+ eine $(1,0)$ -Form ist.

Man könnte nach dem obigen Theorem annehmen, dass man eine komplette $S^1 \times S^1$ -Familie von Willmore-Immersionen erhält. Dies ist aber nicht der Fall. Eine der beiden Torusaktionen ist trivial, nur die andere ist nichttrivial.

2.2 Schleifengruppen

Hier noch einmal zur Erinnerung die Definition von Schleifengruppen.

Definition 2.2. Eine Schleifengruppe zu einer Lie-Gruppe \mathfrak{G} ist gegeben durch

$$\Lambda\mathfrak{G} = \{g_\circ : S^1 \rightarrow \mathfrak{G} \mid g_\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (g_\circ)_k \lambda^k\}$$

Getwistete Schleifengruppen sind

$$\Lambda_\sigma\mathfrak{G} = \{g_\circ : S^1 \rightarrow \mathfrak{G} \mid g_{-\lambda} = \sigma g_\lambda \sigma^{-1}\}$$

Elemente der Schleifengruppen bezeichnen wir mit g_\circ . Wir betrachten im Folgenden nur messbare Funktionen, die beschränkt bzgl. der Norm

$$\|g_\circ\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s |(g_\circ)_k|^2 \right)^{1/2}$$

für ein $s > 1/2$ sind. Zusätzlich führen wir noch die Schleifengruppen

$$\Lambda^+\mathfrak{G}^\mathbb{C} = \{g_\circ \mid g_\circ \text{ lässt sich holomorph auf } |\lambda| < 1 \text{ fortsetzen}\}$$

$$\Lambda^-\mathfrak{G}^\mathbb{C} = \{g_\circ \mid g_\circ \text{ lässt sich holomorph auf } |\lambda| > 1 \text{ fortsetzen}\}$$

ein.

Ebenso können wir Schleifengruppen von Lie-Algebren $\Lambda \mathfrak{g}$ definieren. Die Multiplikation ist immer punktweise für ein λ definiert, dadurch erhalten wir auch eine Lie-Klammer.

Die Familie ω_λ von 1-Formen, die Koeffizienten in $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ besitzt und von $\lambda \in \mathbb{C}^*$ abhängt, können wir nun mit Hilfe dieser Schleifengruppen darstellen.

Aus Frobenius Theorem folgt, dass $d\omega_\lambda + \frac{1}{2}[\omega_\lambda \wedge \omega_\lambda] = 0$ die hinreichende und notwendige Bedingung ist, dass lokal eine Abbildung F_\circ von U nach $\Lambda \mathfrak{G}$ existiert, die

$$dF_\circ = F_\circ \omega_\circ$$

erfüllt. Ist nun U einfach zusammenhängend, was wir im Folgenden annehmen, so existiert F_\circ sogar global. Wir wählen nun einen Basispunkt $p \in U$ und setzen den Startwert $F_\circ(p) = \mathbb{1}$. Dieses F_\circ nennen wir nun "Extending conformal Willmore Immersion" (ECWI). Die Menge aller ECWI ist sicherlich *nicht* bijektiv zur Menge aller Abbildungen von U nach $\Lambda \mathfrak{G}$, wir suchen nun nach Bedingungen, die die ECWIs charakterisieren.

Wir hatten die Gleichungen

$$F_\lambda^{-1} dF_\lambda = \omega_\lambda = \alpha'_1 \lambda^{-1} + \alpha_0 + \alpha''_1 \lambda$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= a^+ A_+ + b^+ B_+ + b^0 B_0 \\ \alpha_0 &= c^+ C_+ + c^- C_- + d^+ D_+ + d^- D_- \\ \alpha''_1 &= a^- A_- + b^- B_- + \overline{b^0} B_0 = \overline{\alpha'_1} \end{aligned}$$

Im Folgenden versuchen wir nun diese Gleichungen auszunutzen, um Bedingungen zu erhalten, die Willmore-Immersionen charakterisieren. Wir starten mit einigen Beobachtungen.

- (i) $F_\circ \in \Lambda \mathfrak{G}$, d.h. es ist eine Abbildung mit Werten in $\Lambda \mathfrak{G}^\mathbb{C}$, die die Realitätsbedingung

$$F_{\overline{\lambda^{-1}}} = \overline{F_\lambda}$$

erfüllt.

- (ii) $F_\lambda^{-1} dF_\lambda$ ist eine Linarkombination von $\lambda, \lambda^0, \lambda^{-1}$.
(iii) α'_1 und α''_1 haben Koeffizienten in $\mathfrak{p}^\mathbb{C}$ und α_0 hat Koeffizienten in \mathfrak{k} .
(iv) Die Struktur von α'_1 kann geschrieben werden als

$$\alpha'_1 = \begin{pmatrix} 0 & (\eta dz + \gamma d\bar{z})^t & 0 \\ \nu dz & 0 & \eta dz + \gamma d\bar{z} \\ 0 & \nu^t dz & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

wobei η, ν, γ glatte Abbildungen von U nach \mathbb{C}^3 sind, mit

$$\nu^t \cdot \nu = \nu^t \cdot \eta = 0 \quad (24)$$

$$\nu \text{ verschwindet nie} \quad (25)$$

$$\exists \beta : U \rightarrow \mathbb{C}, \gamma = \beta \nu \quad (26)$$

In unserem Fall sind

$$\begin{aligned} \nu dz &= a^+ X_+ \\ \gamma d\bar{z} &= b^+ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) X_+ d\bar{z} \\ \eta dz &= b^+ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) X_+ dz + b^0 X_0 \end{aligned}$$

Lemma 2.3. *Die obigen Bedingungen (i) bis (iii) sind äquivalent zu den folgenden Bedingungen*

$$\forall z \in U \quad F_\circ(z) \in \Lambda \mathfrak{G}_\sigma \quad (27)$$

$$\lambda \mapsto \lambda F_\lambda^{-1} dF_\lambda \in \Lambda^+ \mathfrak{g}^\mathbb{C} \quad (28)$$

Beweis. Die Richtung (i)-(iii) \Rightarrow (27),(28) folgt sofort. Nehmen wir nun (28) an, dann haben wir

$$F_\lambda^{-1} dF_\lambda = \sum_{k \geq -1} \theta_k \lambda^k$$

und die Bedingung (27) impliziert zwei Dinge: Eine Realitätsbedingung $\theta_{-k} = \overline{\theta_k}$, aus der wir (i) folgern und

$$F_\lambda^{-1} dF_\lambda = \theta_{-1} \lambda^{-1} + \theta_0 + \overline{\theta_{-1}} \lambda$$

(somit gilt auch (ii)) und schließlich die Twist-Bedingung

$$\sigma F_\lambda^{-1} dF_\lambda \sigma^{-1} = F_{-\lambda}^{-1} dF_{-\lambda}$$

die (iii) impliziert. □

Sei nun

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \{F_\circ : U \rightarrow \Lambda \mathfrak{G}_\sigma \mid & F_\circ(p) = \mathbb{1} \text{ und } F_\circ \text{ erfüllt} \\ & (23), (24), (25), (26), (27), (28)\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \{X : U \rightarrow S^3 \mid & X \text{ ist eine konforme Willmore Immersion} \\ & \text{mit } X(p) = X_0\} \end{aligned}$$

Wir definieren außerdem die Abbildung

$$\mathcal{P} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W} \quad (29)$$

$$F_\circ \mapsto X = \mathcal{P}(F_\circ) = [(\epsilon F_1)_0] \quad (30)$$

Im folgenden Theorem werden wir nun zeigen, dass diese Abbildung bijektiv ist.

Theorem 2.4. *Beginnend mit einer Immersion $X \in \mathcal{W}$ können wir eine ECWI $F_\circ \in \mathcal{E}$ konstruieren mit $[(\epsilon F_1)_0] = X$. Umgekehrt ist für jedes gegebene $F_\circ \in \mathcal{E}$ die Abbildung $[(\epsilon F_1)_0]$ eine konforme Willmore-Immersion.*

Beweis. Die Konstruktion einer ECWI F_\circ aus einer gegebenen konformen Willmore-Immersion haben wir bereits im vorherigen Abschnitt durchgeführt. Wir beweisen nun die Umkehrung.

Sei also $F_\circ \in \mathcal{E}$ und $X = [(\epsilon F_1)_0]$. Die Bedingungen (23),(24),(25) garantieren, dass X eine konforme Immersion ($\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 > 0$) ist. Dies folgt aus der Struktur von α_1' und $a^+ A_+ \neq 0$. Wegen Theorem 2.1 reicht es aus eine ECWI $\tilde{F}_\circ = \epsilon F_\circ$ zu konstruieren, die X hochhebt, so dass $\tilde{F}_\lambda^{-1} d\tilde{F}_\lambda$ die Form von ω_λ hat, damit X eine konforme Willmore-Immersion ist.

Um so eine Abbildung zu finden, suchen wir zunächst nach einer Aufspaltung

$$\tilde{F}_\circ = F_\circ g$$

mit $g : U \rightarrow \mathfrak{K}$. Wir suchen also Abbildungen $r : U \rightarrow (0, \infty)$ und $R : U \rightarrow SO(3)$ mit

$$g = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

Wegen (24) und (25) existiert ein eindeutiges g mit $R\nu = rX_+$, diese Bedingung bestimmt unsere Wahl von g . Wir haben

$$\begin{aligned}\tilde{F}_\lambda^{-1}d\tilde{F}_\lambda &= g^{-1}F_\lambda^{-1}dF_\lambda g + g^{-1}dg \\ &= \lambda^{-1}\tilde{\alpha}'_1 + \tilde{\alpha}_0 + \lambda\tilde{\alpha}_1''\end{aligned}$$

Hierbei nimmt $\tilde{\alpha}_0$ Werte in \mathfrak{t} an, $\tilde{\alpha}'_1$ und $\tilde{\alpha}_1''$ Werte in $\mathfrak{p}^\mathbb{C}$, es gilt $\tilde{\alpha}_1'' = \overline{\tilde{\alpha}'_1}$ und

$$\tilde{\alpha}'_1 = g^{-1}\alpha'_1 g = A_+ dz + r^2\beta B_+ d\bar{z} + r \begin{pmatrix} 0 & (R\eta)^t & 0 \\ 0 & 0 & R\eta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dz$$

Wegen $R \in SO(3)$ und (24) gilt

$$(X_+)^t(R\eta) = (r^{-1}R\nu)^t(R\eta) = 0,$$

somit gibt es $u, v \in \mathbb{C}$ mit

$$R\eta = uX_+ + vX_0.$$

Dann lässt sich $\tilde{\alpha}'_1$ schreiben als

$$\tilde{\alpha}'_1 = A_+ dz + (r^2\beta d\bar{z} + rudz)B_+ + rvB_0 dz$$

Dieser Ausdruck ist sehr ähnlich zu dem Koeffizienten vor α'_1 in ω_λ , dieser war $a^+A_+ + b^+B_+ + b^0B_0$. Da g in der ersten Komponente nur eine Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl ist, erhalten wir $(\epsilon\tilde{F}_1)_0 = (\epsilon F_1 g)_0 = r^{-1}(\epsilon F_1)$. Somit ist auch $X = [(\epsilon\tilde{F}_1)_0]$ und das Theorem bewiesen. \square

2.3 Eichtransformationen

Wir haben im Beweis der vorherigen Theoreme gesehen, dass jede ECWI so deformiert werden kann, dass die neue ECWI \tilde{F}_λ die Form (21) hat. Eine ECWI in dieser Form nennen wir *normalisiert*. Wir haben ebenfalls bewiesen, dass es möglich ist, den Koeffizienten $a^+ = dz$ zu wählen. Man kann auch lokal jede ECWI so umeichen, dass α'_1 eine (1,0)-Form ist. Diese ECWI heißen *harmonisch*.

2.4 Schleifengruppen-Zerlegung

Die Aussagen über Zerlegungen von Schleifengruppen werden hier nur wiedergegeben, eine ausführliche Einführung findet man in Pressley/Segal [3].

Unser Hauptproblem ist, dass \mathfrak{G} keine kompakte Liegruppe ist und deshalb ein Ergebnis nur lokal gilt.

Lemma 2.5. *Es existiert eine auflösbare Gruppe $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{K}^\mathbb{C}$ von der Form*

$$\mathfrak{B} = \{g \in \mathfrak{K}^\mathbb{C} \mid g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}, R \in \mathfrak{C}\}$$

mit $\mathfrak{K}^\mathbb{C} = \mathfrak{K}\mathfrak{B}$. Diese Aufspaltung ist ein Diffeomorphismus. Dabei ist \mathfrak{C} bestimmt durch die Iwasawa-Zerlegung $SO(3)^\mathbb{C} = SO(3)\mathfrak{C}$.

Definition 2.6. *Die Schleifengruppen $\Lambda_\mathfrak{B}^+ \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$ und $\Lambda_\star^- \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$ sind definiert durch*

$$\Lambda_\mathfrak{B}^+ \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C} = \{g \circ \in \Lambda^+ \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C} \mid g_0 \in \mathfrak{B}\}$$

und $\Lambda_\star^- \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C} = \Lambda_{\{1\}}^+ \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$.

Theorem 2.7. (a) (Iwasawa) Es existiert ein lokaler Diffeomorphismus zwischen

$$\Lambda \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C} \text{ und } \Lambda \mathfrak{G}_\sigma \times \Lambda_{\mathfrak{B}}^+ \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$$

(b) (Birkhoff) Es gibt eine offene Teilmenge von $\Lambda \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$ ("große Zelle"), so dass die Abbildung

$$\Lambda_{\star}^- \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C} \times \Lambda^+ \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C} \rightarrow \Lambda \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$$

ein Diffeomorphismus ist.

Lemma 2.8. Ist $h_\circ : U \rightarrow \Lambda GL(n, \mathbb{C})$ eine holomorphe Kurve, dann trifft entweder h_\circ nie die große Zelle **oder** es gibt eine Teilmenge isolierter Punkte, an denen $h_\circ(z)$ nicht die große Zelle trifft.

3 Weierstrass-Darstellung von Willmore-Immersionen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst eine konforme Willmore-Immersionen aus holomorphen Potentialen gewinnen. Erweitern wir umgekehrt die Menge der Potentiale auf meromorphe einer gewissen Form, so erhalten wir auch wieder zu jedem Potential eine Willmore-Immersion.

3.1 Holomorphe Potentiale

Definition 3.1. Sei V eine offene Teilmenge von \mathbb{C} . \mathfrak{P}_V bezeichnet die Menge aller holomorphen 1-Formen μ_\circ auf V (geschlossene Formen vom Typ $(1,0)$) mit Koeffizienten in $\lambda^{-1} \Lambda^+ \mathfrak{g}^\mathbb{C} \cap \Lambda \mathfrak{g}_\sigma^\mathbb{C}$ und der Term niedrigster Ordnung hat die Form

$$(\mu_\circ)_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & m^t & 0 \\ l & 0 & m \\ 0 & l^t & 0 \end{pmatrix} dz$$

mit den Bedingungen $l, m : V \rightarrow \mathbb{C}^3, l^t \cdot l = l^t \cdot m = 0$ und l verschwindet nicht.

Theorem 3.2. Sei U einfach zusammenhängend und $\mu_\circ \in \mathfrak{P}_U$ und $z_0 \in U$. Dann gilt

1. (Integration) Es gibt eine eindeutige holomorphe Abbildung $g_\circ : U \rightarrow \Lambda \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} dg_\circ &= \mu_\circ g_\circ \text{ auf } U \\ g_\circ(z_0) &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

2. (Lokale Zerlegung) Es gibt eine Umgebung V_0 von z_0 in U auf der zwei Abbildungen $F_\circ : V_0 \rightarrow \Lambda \mathfrak{G}_\sigma$ und $h_\circ : V_0 \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{B}}^+ \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$ definiert sind, so dass

$$g_\circ(z) = F_\circ(z) h_\circ(z), \quad \forall z \in V_0 \tag{31}$$

gilt.

3. F_\circ ist eine harmonische ECWI und somit ist $z \mapsto [(\epsilon F_1(z))_0]$ eine konforme Willmore-Immersion.

Beweis. μ_\circ ist eine krümmungsfreie Zusammenhangsform, dies folgt aus den Gleichungen

$$d\mu_\circ = [\mu_\circ \wedge \mu_\circ] = 0$$

Somit folgt die erste Behauptung aus Frobenius Theorem.

In der Nähe von z_0 ist g_\circ nahe bei $\mathbb{1}$. Somit können wir Theorem 2.7 auf $g_0 = a_0 = b_0 = \mathbb{1}$ anwenden und erhalten so die Existenz einer Umgebung V_0 von z_0 , in der wir g_\circ splitten können, die zweite Behauptung gilt, also insbesondere $F_\circ \in \Lambda \mathfrak{G}_\sigma$ (siehe (27))

Aus (31) erhalten wir $F_\circ = g_\circ h_\circ^{-1}$ und somit

$$\begin{aligned} F_\circ^{-1} dF_\circ &= h_\circ g_\circ^{-1} dg_\circ h_\circ^{-1} - dh_\circ h_\circ^{-1} \\ &= h_\circ \mu_\circ h_\circ^{-1} - dh_\circ h_\circ^{-1} \end{aligned}$$

Es ergibt sich $F_\circ^{-1} dF_\circ \in \lambda^{-1} \Lambda^+ \mathfrak{g}^\mathbb{C} \cap \Lambda \mathfrak{g}_\sigma$ (siehe (28)) und somit

$$F_\lambda^{-1} dF_\lambda = \lambda^{-1} \alpha'_1 + \alpha_0 + \lambda \alpha''_1$$

Außerdem wissen wir $\alpha'_1 = h_0(\mu_\circ)_{-1} h_0^{-1}$ und $h_0 \in \mathfrak{B}$, somit gibt es Abbildungen $r : V_0 \rightarrow S^1$ und $R : V_0 \rightarrow \mathfrak{C}$ mit

$$h_0 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\alpha'_1 = \begin{pmatrix} 0 & (rRm)^t & 0 \\ r^{-1}Rl & 0 & rRm \\ 0 & (r^{-1}Rl)^t & 0 \end{pmatrix} dz$$

Dies ist (23). Wegen $R \in SO(3)^\mathbb{C}$ gilt $(r^{-1}Rl)^t \cdot (r^{-1}Rl) = r^{-2}l \cdot l = 0$ und $(r^{-1}Rl)^t \cdot (r^{-1}Rm) = l^t \cdot m = 0$ (siehe (24)). Die Gleichungen (25) und (26) folgen aus der Definition des Potentials. Somit ist $F_\circ \in \mathcal{E}$ und das Theorem wurde vollständig bewiesen. \square

Wir haben also ausgehend von einem holomorphen Potential (abstrakt) eine Willmore-Immersion konstruiert. Im folgenden Abschnitt wollen wir nun den umgekehrten Weg gehen, hier erhalten wir allerdings nur eine lokale Aussage. Um eine globale Aussage treffen zu können, müssen wir den Potentialraum verändern.

3.2 Das meromorphe Potential einer Willmore-Immersion

Proposition 3.3. *Sei X eine konforme Willmore-Immersion auf $U \subset \mathbb{C}$. Dann existiert für jedes $z_0 \in U$ eine Umgebung V_0 , auf der wir ein Potential μ_\circ konstruieren können, so dass X wie im obigen Theorem 3.2 aus μ_\circ entsteht.*

Beweis. siehe [2], S.367-368 \square

Wir werden nun diese Proposition zu erweitern, so dass wir eine globale Immersion bekommen. Dazu reicht es aus Potentiale zu betrachten, die vom Typ $\mu_\circ = \lambda^{-1}(\mu_\circ)_{-1}$ sind. Allerdings dürfen diese Potentiale auch meromorph sein. Eine Verbesserung ist dann, dass diese meromorphen Potentiale eindeutig sind, nur lokale Singularitäten besitzen, aber nicht mehr vom Typ (1,0) sind.

Theorem 3.4. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $X : U \rightarrow S^3$ eine konforme Willmore-Immersion. Für eine ECWI $e_0 = \epsilon F_\circ : U \rightarrow \Lambda \mathfrak{G}_\sigma$, die X hochhebt sei der Koeffizient vor λ^{-1} in $F_\circ^{-1} dF_\circ$*

$$\alpha'_1 = \begin{pmatrix} 0 & (\eta dz + \beta \nu d\bar{z})^t & 0 \\ \nu dz & 0 & (\eta dz + \beta \nu d\bar{z}) \\ 0 & \nu^t dz & 0 \end{pmatrix}$$

Dann existiert eine Teilmenge S von U , die aus isolierten Punkten besteht, so dass außerhalb von S das Splitting

$$F_\circ = F_\circ^- F_\circ^+$$

gilt. Hierbei ist $F_\circ^- : U \setminus S \rightarrow \Lambda_\star^- \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$ und $F_\circ^+ : U \setminus S \rightarrow \Lambda^+ \mathfrak{G}_\sigma^\mathbb{C}$ und F_\circ^- entsteht aus einem linearen Potential μ_\circ , so dass

$$\begin{aligned} \mu_\lambda &= (F_\lambda^-)^{-1} dF_\lambda^- \\ &= \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & (mdz + \theta l d\bar{z})^t & 0 \\ ldz & 0 & (mdz + \theta l d\bar{z}) \\ 0 & l^t dz & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierbei sind l, m Abbildungen von $U \subset S \rightarrow \mathbb{C}^3$ und $\theta : U \subset S \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$l^t \cdot l = l^t \cdot m = 0 \quad (32)$$

$$l \text{ verschwindet nie} \quad (33)$$

$$d(ldz) = d(mdz + \theta ld\bar{z}) = 0 \quad (34)$$

gilt. Somit ist l holomorph und m ist eine Lösung von $\frac{\partial m}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(\theta l)}{\partial z}$. Genauer gesagt, gilt $l = r^{-1}R\nu$, $m = rR\eta$, $\theta = r^2\beta$ für ein $r \in C^*$, $R \in SO(3)^{\mathbb{C}}$.

Wir nennen $(ldz, mdz + \theta ld\bar{z})$ Weierstrass-Daten von F_o . Alle Abbildungen, die die obigen Bedingungen erfüllen liefern auch Weierstrass-Daten.

Beweis. Der Beweis besteht aus mehreren Schritten. Zunächst können wir die ECWI F_o so wählen, dass sie harmonisch ist. Diese bezeichnen wir mit ${}_aF_o$. Anschließend zerlegen wir ${}_aF_o$ mit Hilfe von Proposition 3.2 in

$${}_aF_o = {}_ag_o \cdot {}_ah_o$$

mit ${}_ag_o : V \rightarrow \Lambda \mathfrak{G}_{\sigma}^{\mathbb{C}}$ und ${}_ah_o : V \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{g}}^+ \mathfrak{G}_{\sigma}^{\mathbb{C}}$. Somit gehört ${}_aF_o$ genau dann zur großen Zelle, wenn ${}_ag_o$ dazu gehört. Somit trifft ${}_aF_o$ nie die große Zelle oder es nimmt Werte in der großen Zelle an außer an isolierten Punkten.

Der Übergang von F_o zu ${}_aF_o$ verändert die Eigenschaft zur großen Zelle zu gehören nicht. Wir setzen

$$S = \{z \in U \mid F_o(z) \text{ gehört nicht zur großen Zelle}\}$$

Wir müssen nun zeigen, dass S aus isolierten Punkten besteht. Für eine lokale endliche Überdeckung $U \subset \bigcup_{a \in A} V_a$ seien $A_1 \subset A$ die Mengen, bei denen S aus isolierten Punkten besteht, hier gilt $S \cap V_a = S_a$ und $A_2 \subset A$ die Mengen, bei denen $S \cap V_a = V_a$ gilt. Aus den obigen Betrachtungen folgt $A = A_1 \sqcup A_2$, seien nun $S_1 = \bigcup_{a \in A_1} V_a$ und $S_2 = \bigcup_{a \in A_2} V_a$. Die Menge $U \setminus S_1$ ist zusammenhängend und S_2 ist eine offene und abgeschlossene (da V_a offen) Teilmenge von $U \setminus S_1$. Somit ist entweder $S_2 = \emptyset$ oder $S_2 = U \setminus S_1$, woraus folgen würde, dass $S = U$ gilt. Aber für ein $z_0 \in U$ gilt $F_o(z_0) = \mathbb{1}$, was sicherlich zur großen Zelle gehört. Somit gilt $S_2 = \emptyset$ und S besteht nur aus isolierten Punkten.

Wir können also Theorem 2.7 anwenden und erhalten somit eine Aufspaltung von F_o in

$$F_o = F_o^- F_o^+$$

oder $F_o^- = F_o(F_o^+)^{-1}$ und somit

$$\mu_o := (F_o^-)^{-1} dF_o^- = F_o^+ F_o^- dF_o (F_o^+)^{-1} - dF_o^+ (F_o^+)^{-1} \quad (35)$$

Dieses μ_o hat Koeffizienten in $\lambda^{-1} \Lambda^+ \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \cap \Lambda_{\star}^- \mathfrak{g}_{\sigma}^{\mathbb{C}}$ und damit die Form

$$\mu_{\lambda} = \lambda^{-1} (\mu_o)_{-1}$$

Es gilt außerdem $d\mu_o + \frac{1}{2}[\mu_o \wedge \mu_o] = 0$ und damit auch

$$d(\mu_o)_{-1} = [(\mu_o)_{-1} \wedge (\mu_o)_{-1}] = 0$$

Wegen (35) ist $(\mu_o)_{-1} = F_o^+ \alpha'_1 (F_o^+)^{-1}$ und für

$$F_o^+ = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$$

ist

$$(\mu_o)_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (rR\eta dz + r\beta R\nu d\bar{z})^t & 0 \\ r^{-1}R\nu dz & 0 & rR\eta dz + r\beta R\nu d\bar{z} \\ 0 & (r^{-1}R\nu dz)^t & 0 \end{pmatrix}$$

Setzen wir nun $l = r^{-1}R\nu$ und $m = rR\eta$ und $\theta l = r\beta R\nu$ so erhalten wir die Aussage des Theorems. \square

Sind zwei ECWI durch Eichtransformationen ineinander überführbar, dann verändern sich die Weierstrass-Daten. Die genaue Beziehung wird nun erklärt. Sei

$$F'_\circ = F_\circ \Psi_\circ$$

dann sehen die Weierstrass-Daten von F'_\circ wie folgt aus

$$\left\{ \begin{array}{lcl} l' & = & l \\ m' & = & m + \frac{\partial \delta}{\partial z} + \delta \frac{\partial l}{\partial z} \\ \gamma' & = & \gamma + \frac{\partial \delta}{\partial \bar{z}} \end{array} \right.$$

Hierbei ist $\delta = \frac{f r \tilde{r}}{(2a^+)(1,0)}$, wobei f, \tilde{r} Daten der Eichung Ψ_\circ sind und r durch F_\circ bestimmt ist.

Literatur

- [1] BRYANT, R. L. A duality theorem for Willmore surfaces. *J. Differ. Geom.* 20 (1984), 23–53.
- [2] HÉLEIN, F. Willmore immersions and loop groups. *J. Differential Geom.* 50, 2 (1998), 331–385.
- [3] PRESSLEY, A., AND SEGAL, G. Loop groups., 1986.