

Moving Frames, Laxpaare und Sym-Bobenko-Formel II

Seminar “Geometrische Analysis” FS 09

Matthias Leimeister

CMC-Flächen in \mathbb{S}^3

Bezeichne $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ die 3-Sphäre. Diese ist mit der vom euklidischen Skalarprodukt induzierten Metrik eine einfach-zush. vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung 1. Sei weiterhin $\Sigma \subset \mathbb{C}$ offen und einfach-zush. und $f : \Sigma \rightarrow S^3$ eine konforme Immersion mit Karte w . Mit der Normalen N_S von $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ gilt $f(w) \parallel N_S(f(w))$. Daher existiert ein eindeutiger normierter Vektor N_f , so dass $(f, f_w, f_{\bar{w}}, N_f)$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^4 bilden.

Definition 1. $\mathcal{F} = (f, f_w, f_{\bar{w}}, N_f)$ heißt *erweiterter Rahmen* bzw. **Extended Frame** der Immersion $f : \Sigma \rightarrow S^3$.

Mit der komplex bilinearen Fortsetzung des euklidischen Skalarproduktes gilt

$$\langle f, N \rangle = \langle f_w, N \rangle = \langle f_{\bar{w}}, N \rangle = 0, \quad \langle f, f \rangle = \langle N, N \rangle = 1$$

$$\langle f_w, f_w \rangle = \langle f_{\bar{w}}, f_{\bar{w}} \rangle = 0, \quad \langle f_w, f_{\bar{w}} \rangle = 2e^{2u}$$

Analog zum Fall in \mathbb{R}^3 erhält man das **Laxpaar in S^3** für den Extended Frame \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}_w = \mathcal{F}\mathcal{U}, \quad \mathcal{F}_{\bar{w}} = \mathcal{F}\mathcal{V}$$

mit

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2e^{2u} & 0 \\ 1 & 2u_w & 0 & -H \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}Ae^{-2u} \\ 0 & A & 2He^{2u} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & -2e^{2u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\bar{A}e^{-2u} \\ 1 & 0 & 2u_{\bar{w}} & -H \\ 0 & 2He^{2u} & \bar{A} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Integrabilitätsbedingung mit dieser Gestalt von \mathcal{U} und \mathcal{V} liefert

$$\mathcal{F}_{w\bar{w}} = \mathcal{F}_{\bar{w}w} \Leftrightarrow \mathcal{U}_{\bar{w}} - \mathcal{V}_w - [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0$$

$$2u_{w\bar{w}} + 2e^{2u}(1 + H^2) - \frac{1}{2}A\bar{A}e^{-2u} = 0, \quad A_{\bar{w}} = 2H_w e^{2u}$$

Dies sind die **Maurer-Cartan-Gleichung** für das Laxpaar und die **Gauss-Codazzi-Gleichungen** in S^3 . Sei nun $H = \text{const.}$ und definiere eine transformierte Karte durch

$$z = 2\sqrt{1 + H^2}w$$

sowie für $\psi \in \mathbb{R}$ eine Funktion $Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ durch $A = 2\sqrt{1 + H^2}e^{i\psi}Q$.

Mit $f_w = f_z \frac{dz}{dw} = f_z 2\sqrt{1 + H^2}$ folgt

$$A = \langle f_{ww}, N \rangle = \langle f_{zz}, N \rangle 4(1 + H^2) = 2\sqrt{1 + H^2}e^{i\psi}Q \quad \Rightarrow \quad Q = 2\sqrt{1 + H^2}e^{-i\psi} \langle f_{zz}, N \rangle$$

Die Gauss-Codazzi-Gleichungen in diesen Koordinaten lauten

$$4u_{z\bar{z}} + e^{2u} - Q\bar{Q}e^{-2u} = 0, \quad Q_{\bar{z}} = 0$$

Das ist die Gauss-Codazzi-Gleichung in \mathbb{R}^3 im Fall $H = \frac{1}{2}$. Daher beschreiben Lösungen des Laxpaares in \mathbb{R}^3 ebenfalls CMC-Flächen in S^3 . Um aus gegebenen Daten (u, H, Q) eine CMC-Fläche in S^3 zu konstruieren, benutzt man analog zu \mathbb{R}^3 eine Darstellung durch 2×2 -Matrizen und erhält eine entsprechende Formel für die Immersion.

Matrixdarstellung von S^3

Identifiziere Punkte in \mathbb{R}^4 mit 2×2 -Matrizen durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + ix_4 & x_3 + ix_2 \\ -x_3 + ix_2 & x_1 - ix_4 \end{pmatrix}$$

Punkte aus S^3 werden dabei auf Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ abgebildet. Damit gilt $S^3 \cong SU_2$. Das Skalarprodukt des \mathbb{R}^4 ist in dieser Darstellung gegeben durch

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \text{spur}(X\bar{Y}^t).$$

Die kanonische Wirkung von SO_4 auf S^3 wird induziert durch die universelle Überlagerung $SU_2 \times SU_2 \rightarrow SO_4$ via

$$X \mapsto A_1 X A_2^{-1}, \quad X, A_1, A_2 \in SU_2$$

Die Sym-Bobenko-Formel

Analog zum Fall in \mathbb{R}^3 erhält man aus Lösungen $F \in SU_2$ des 2×2 -Laxpaares eine CMC-Immersion durch die Sym-Bobenko-Formel in S^3 .

Proposition 1. Sei $\Sigma \subset \mathbb{C}$ offen und einfach-zush. Wähle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ so dass $t_1 \neq t_2 \bmod \pi\mathbb{Z}$. Seien u, Q eine Lösung der Gauss-Codazzi-Gleichung in S^3 und F_λ eine Lösung des Laxpaares

$$F_z = FU, \quad F_{\bar{z}} = FV,$$

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_z & -\lambda^{-1}e^u \\ \lambda^{-1}Qe^{-u} & -u_z \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_{\bar{z}} & -\lambda\bar{Q}e^{-u} \\ \lambda e^u & u_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

mit $\det(F) = 1$ für $\lambda \in S^1$. Dann ist mit $\lambda_j = e^{it_j}$

$$f(z, \bar{z}) = F_{\lambda_1}(z, \bar{z}) \begin{pmatrix} e^{i(t_1-t_2)/2} & 0 \\ 0 & e^{i(t_2-t_1)/2} \end{pmatrix} F_{\lambda_2}(z, \bar{z})^{-1}$$

eine CMC-Immersion in S^3 mit Krümmung $H = \cot(t_2 - t_1)$ und Normalenfeld

$$N = iF_1 \begin{pmatrix} e^{i(t_1-t_2)/2} & 0 \\ 0 & -e^{i(t_2-t_1)/2} \end{pmatrix} F_2^{-1}$$

Beweis : Mit der Formel $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \text{spur}(X\bar{Y}^t)$ berechnet sich

$$\langle f, N \rangle = \langle f_z, N \rangle = \langle f_{\bar{z}}, N \rangle = \langle f_z, f_z \rangle = \langle f_{\bar{z}}, f_{\bar{z}} \rangle = 0, \quad \langle N, N \rangle = 1$$

Weiterhin gilt

$$\langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} e^{2u} \sin^2(t_2 - t_1), \quad \langle f_{zz}, N \rangle = \frac{1}{2} Q e^{-i(t_1+t_2)} \sin(t_2 - t_1),$$

d.h. die Immersion ist konform und der konforme Faktor und das Hopfdifferential sind konstante Vielfache von $4e^{2u}$ bzw. Q . Für die mittlere Krümmung benutze

$$f_{z\bar{z}} = -\frac{1}{2} e^{2u} \sin^2(t_2 - t_1) f + \frac{1}{2} e^{2u} \sin(t_2 - t_1) \cos(t_2 - t_1) N$$

Damit ergibt sich

$$H = \frac{1}{2} \text{spur}(S) = \frac{1}{2} e^{-2u} \sin^{-2}(t_2 - t_1) 2e^{2u} \sin(t_2 - t_1) \cos(t_2 - t_1) = \cot(t_2 - t_1)$$

□

Die Sym-Bobenko-Formel in \mathbb{R}^3 als Grenzwert aus S^3

Wir möchten nun untersuchen, wie die Sym-Bobenko-Formel in \mathbb{R}^3 geometrisch interpretiert werden kann. Sei dazu ein Frame $F_\lambda : \Sigma \rightarrow SU_2$ gegeben, welcher das Laxpaar löst. Mit der Sym-Bobenko-Formel für S^3 erhält man eine Immersion mit Krümmung $\cot(t_2 - t_1)$ (s.o.). Betrachtet man den Grenzwert $t_2 \rightarrow t_1$ so geht $|H| \rightarrow \infty$. Damit jedoch der konforme Faktor der Fläche gleich bleibt, muss diese durch den Proportionalitätsfaktor $\sin^{-1}(t_2 - t_1)$ gestreckt werden. Dabei landet die Immersion, die durch die Sym-Bobenko-Formel geliefert wird, nicht

mehr in der Einheitssphäre, sondern einer um diesen Faktor gestreckten Sphäre. Im Grenzwert verschwindet lokal die Krümmung des umgebenden Raumes, d.h. die Fläche liegt in \mathbb{R}^3 . Die anschließende Rechnung zeigt, dass auf diese Weise die bekannte Sym-Bobenko-Formel für \mathbb{R}^3 gewonnen werden kann.

Bezeichne mit f_λ die Immersion, die aus der Sym-Bobenko-Formel mit $t_1 = 0$ und $\lambda = e^{it_2}$ folgt, also

$$f_\lambda = F_\lambda \begin{pmatrix} e^{(it_2)/2} & 0 \\ 0 & e^{-(it_2)/2} \end{pmatrix} F_1^{-1}$$

Der Proportionalitätsfaktor ist gegeben durch

$$\sin^{-1}(t) = \sqrt{1 + \cot^2(t)} = \sqrt{1 + H^2}.$$

Betrachte dann die Differenz $\tilde{f}_\lambda = \sqrt{1 + H^2}(f_\lambda - f_1)$ und berechne den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \tilde{f}_\lambda &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sqrt{1 + H^2}(f_\lambda - f_1) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{1}{\sin(t)}(f_\lambda - f_1) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{2i}{e^{it} - e^{-it}}(f_\lambda - f_1) = 2i \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{f_\lambda - f_1}{\lambda - \lambda^{-1}} = 2i \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left(\lambda \frac{f_\lambda - f_1}{\lambda^2 - 1} \right) \\ &= 2i \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{f_{\sqrt{\lambda}} - f_1}{\lambda - 1} = 2i \frac{\partial}{\partial \lambda}(f_{\sqrt{\lambda}})|_{\lambda=1} = 2i \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[F_{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix} F_1^{-1} \right]_{\lambda=1} \\ &= 2i \frac{\partial F_{\sqrt{\lambda}}}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix} F_1^{-1} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}|_{\lambda=1} + 2i F_{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\lambda^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\lambda^{-\frac{5}{4}} \end{pmatrix} F_1^{-1}|_{\lambda=1} \\ &= \frac{1}{2} F_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} F_1^{-1} + i \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} F_1^{-1} \end{aligned}$$

Dies ist genau das negative der getwisteten Sym-Bobenko-Formel in \mathbb{R}^3 für $H = \frac{1}{2}$. Man erhält dadurch die am Nullpunkt punktgespiegelte Fläche.

Die Sym-Bobenko-Formel in \mathbb{H}^3

Zuletzt betrachten wir den hyperbolischen Raum \mathbb{H}^3 , die Raumform konstanter Krümmung -1 definiert durch

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{3,1} \mid \sum_{j=1}^3 x_j^2 - x_0^2 = -1, x_0 > 0\}$$

deren Metrik durch die Minkowski-Metrik des $\mathbb{R}^{3,1}$ induziert wird:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_0 y_0$$

Für eine konforme Immersion $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ einer einfach-zush. Menge $\Sigma \subset \mathbb{C}$ definiert man analog zum Fall in S^3 mit dem Normalenfeld N von f den erweiterten Rahmen als

$$\mathcal{F} = (f, f_w, f_{\bar{w}}, N)$$

und erhält aus der Konformität sowie den Eigenschaften der Minkowski-Metrik das **Laxpaar**

$$\mathcal{F}_w = \mathcal{F}\mathcal{U}, \quad \mathcal{F}_{\bar{w}} = \mathcal{F}\mathcal{V}$$

mit

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2e^{2u} & 0 \\ 1 & 2u_w & 0 & -H \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}Ae^{-2u} \\ 0 & A & 2He^{2u} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{2u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\bar{A}e^{-2u} \\ 1 & 0 & 2u_{\bar{w}} & -H \\ 0 & 2He^{2u} & \bar{A} & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Maurer-Cartan-Gleichung für das Laxpaar ergeben sich die **Gauss-Codazzi-Gleichungen in \mathbb{H}^3** :

$$\mathcal{U}_{\bar{w}} - \mathcal{V}_w - [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2u_{w\bar{w}} + 2e^{2u}(H^2 - 1) - \frac{1}{2}A\bar{A}e^{-2u} = 0, \quad A_{\bar{w}} = 2H_we^{2u}.$$

Bemerkung: Im Gegensatz zu den Fällen \mathbb{R}^3 und S^3 kommt hier der Term $H^2 - 1$ vor. In den vorherigen Betrachtungen konnten die Gauss-Codazzi-Gl. durch Koordinatentransformation auf die sinh-Gordon-Gleichung reduziert werden. Dies ist hier nur möglich, falls $|H| > 1$, da sonst die Terme in e^{2u} und e^{-2u} das gleiche Vorzeichen haben und man damit zu $2u_{w\bar{w}} - \cosh(2u) = 0$ gelangt. Daher ist für den Fall $|H| < 1$ eine andere Lösungstheorie notwendig.

Sei ab nun $|H| > 1$ konstant. Dann führt die Transformation $z = 2\sqrt{H^2 - 1}w$, $A = 2\sqrt{H^2 - 1}e^{2i\psi}Q$, $\psi \in \mathbb{R}$ wieder auf die Gleichung

$$4u_{z\bar{z}} + e^{2u} - Q\bar{Q}e^{-2u} = 0, \quad Q_{\bar{z}} = 0,$$

welche identisch zur Gauss-Codazzi-Gleichung in \mathbb{R}^3 mit $H = \frac{1}{2}$ ist. In diesen Koordinaten ist das Hopfdifferential gegeben als $Q = 2\sqrt{H^2 - 1}e^{-2i\psi}\langle f_{zz}, N \rangle$.

2 × 2-Laxpaar und Sym-Bobenko-Formel

Beschreibe Punkte in \mathbb{H}^3 durch die Matrixdarstellung

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung bildet die Punkte von \mathbb{H}^3 auf die hermiteschen Matrizen mit Determinante 1 ab. Es kann gezeigt werden, dass sich diese stets als $F\bar{F}^t$, $F \in$

$SL_2\mathbb{C}$ schreiben lassen, wobei diese Zuordnung eindeutig ist bis auf Multiplikation mit Matrizen aus SU_2 (siehe [R] Lemma 5.2.1). Daher gilt

$$\mathbb{H}^3 \cong SL_2\mathbb{C} / SU_2$$

Das Minkowski-Skalarprodukt ist in dieser Darstellung gegeben durch $\langle X, X \rangle = -\det(X)$.

Mit dieser Identifikation und der oben beschriebenen Reduktion des Laxpaares auf den \mathbb{R}^3 -Fall kann nun die Immersion zu gegebenen (u, H, Q) beschrieben werden.

Proposition 2. *Sei $\Sigma \subset \mathbb{C}$ einf.-zush. Wähle ein $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\psi \in \mathbb{R}$. Seien u und Q Lösungen der transformierten Gauss-Codazzi-Gleichungen und $F_\lambda \in SL_2\mathbb{C}$ Lösung des Laxpaares. Setze $F_0 = F_{\lambda=e^{q/2}e^{i\psi}}$ und*

$$\tilde{F} = F_0 \begin{pmatrix} e^{q/4} & 0 \\ 0 & e^{-q/4} \end{pmatrix}$$

Dann beschreibt

$$f(z, \bar{z}) = \tilde{F} \bar{\tilde{F}}^t, \quad N = \tilde{F} \sigma_3 \bar{\tilde{F}}^t$$

eine konforme CMC-Immersion in \mathbb{H}^3 mit $H = \coth(-q)$ und Normalen N .

Beweis : Analog zur Sym-Bobenko-Formel in S^3 zeigt man mit Hilfe der Formel für das Minkowski-Skalarprodukt, dass $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ eine konforme CMC-Immersion mit $H = \coth(-q)$ ist, deren konformer Faktor und Hopfdifferential konstante Vielfache von e^{2u} bzw. Q sind.

Bemerkung: Im Gegensatz zu \mathbb{R}^3 und S^3 darf hier der **Sym-Punkt** $\lambda_0 = e^{q/2}e^{i\psi}$ nicht auf S^1 gewählt werden. Im Grenzwert $|\lambda_0| \rightarrow 1$ geht $|H| \rightarrow \infty$. Dies hat unter Anderem zur Folge, dass es in \mathbb{H}^3 keine CMC-Tori mit Spektralgeschlecht $g = 1$ geben kann (siehe spätere Vorträge).