

Konforme CMC-Immersionen von Tori nach \mathbb{S}^3

Markus Knopf

21.04., 28.04. und 05.05.2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Differentialgeometrische Voraussetzungen	1
3	Eich-Theorie-Formalismus für konforme Abbildungen	5
4	Das Spin-Bündel der Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$	12
5	Eine Familie von flachen Zusammenhängen ∇_λ und deren Holonomie	14
6	Die Spektralkurve	21

1 Einleitung

Diese Vortragsreihe soll die Beschreibung von konformen CMC-Immersionen $f : M \rightarrow SU(2) = \mathbb{S}^3$ von Tori nach \mathbb{S}^3 darstellen (vergleiche [3] für die spezielle Situation von harmonischen Abbildungen). Im Falle des Torus interessiert man sich zunächst für ein Prinzipal- $SU(2)$ -Bündel P und ein Higgsfeld $\phi' \in \Omega^{1,0}(M; \text{ad}P \otimes \mathbb{C})$, das der $(1,0)$ -Anteil des Higgstensors $\phi = f^{-1}df$ ist. Ausgehend von den Gleichungen

$$d^\nabla(\phi) = 0, \quad d^\nabla(*\phi) = \frac{1}{2}H[\phi \wedge \phi] \quad (1.1)$$

folgt, dass $\frac{1}{2}\phi'$ ein holomorpher Schnitt von $\text{ad}P \otimes_{\mathbb{C}} K$ ist, wobei d^∇ die äußere Ableitung des Zusammenhangs $\nabla = d - \frac{1}{2}\phi$ und K das kanonische Bündel der holomorphen 1-Formen auf M bezeichnet.

Darüberhinaus soll auch die Spin-Struktur der Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$ untersucht und eine Spektralparameter-abhängige Familie von flachen Zusammenhängen ∇_λ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ eingeführt werden, um anschließend die Spektralparameter-abhängige Holonomie und die damit assoziierte Spektralkurve zu verstehen.

2 Differentialgeometrische Voraussetzungen

Der Ausgangspunkt der Untersuchung von konformen CMC-Immersionen nach $SU(2)$ ist im Allgemeinen eine glatte Abbildung

$$f : M \rightarrow G,$$

wobei M eine Riemannsche Fläche und G eine Lie-Gruppe mit bi-invarianter Metrik ist. Da die links-invarianten Vektorfelder $X : G \rightarrow TG$ ausgestattet mit dem Kommutator $[\cdot, \cdot]$ der Liealgebra \mathfrak{g} von G entsprechen, erhält man durch die Linkstranslationen der Lie-Gruppe

$$\begin{aligned} TG &\simeq G \times \mathfrak{g} \\ v_g &\mapsto (g, d_g L_g^{-1}(v_g)) \end{aligned}$$

eine Trivialisierung des Tangentialbündels zu G . Die \mathfrak{g} -wertige 1-Form $g \mapsto \theta_g$ mit

$$\begin{aligned} \theta_g : TG &\rightarrow \mathfrak{g} \\ v_g &\mapsto d_g L_g^{-1}(v_g) \end{aligned}$$

ist die Maurer-Cartan-Form, welche verkürzt auch als $\theta = g^{-1}dg$ geschrieben wird. Sie erfüllt die Strukturgleichung von Maurer-Cartan

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0. \quad (2.1)$$

Für $f : M \rightarrow G$ erfüllt der Pullback $\phi = f^*\theta$ ebenso die Maurer-Cartan-Gleichung, da

$$\begin{aligned} d(f^*\theta) + \frac{1}{2}[f^*\theta \wedge f^*\theta] &= f^*d\theta + f^*\frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] \\ &= f^*(d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die 1-Form $\phi = f^*\theta \in \Omega_1(M, \mathfrak{g})$ wird im Folgenden von zentraler Bedeutung sein; wir wollen aber zunächst einen kurzen Einschub über kovariante Ableitungen einer Lie-Gruppe machen.

Es existiert genau eine kovariante Ableitung ∇^0 auf G , bezüglich welcher alle linksinvarianten Vektorfelder $X \in \mathfrak{g}$ flach sind. Ist $\lambda : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ eine bilineare Abbildung, so induziert diese ein Tensorfeld $\Delta_\lambda \in T^{(1,2)}(G)$ durch die Definition

$$\Delta_\lambda(v, w) := \lambda(\theta(v), \theta(w))_g \text{ für alle } g \in G \text{ und } v, w \in T_g G.$$

Die kovariante Ableitung $\nabla^\lambda := \nabla^0 + \Delta_\lambda$ ist dann durch folgende Eigenschaft charakterisiert

$$\forall X_0, X_1 \in \mathfrak{g} : \nabla_{X_0}^\lambda X_1 = \lambda(X_0, X_1).$$

Zu der globalen Trivialisierung $\varphi : TG \simeq G \times \mathfrak{g}$ existiert genau eine kovariante Ableitung ∇^φ , für welche alle Schnitte

$$\varphi^X := \varphi(\cdot, X) \in \Gamma(TG)$$

flach sind. Da für alle $X \in \mathfrak{g}$ aufgrund von $\varphi^X(g) = X_g \ \forall g$ gilt $\varphi^X = X$, existiert genau eine kovariante Ableitung ∇^0 auf G , bezüglich welcher alle linksinvarianten Vektorfelder $X \in \mathfrak{g}$ flach sind.

Sind ∇ und ∇' kovariante Ableitungen auf G , so existiert genau ein Tensorfeld $\Delta \in T^{(1,2)}(G)$, so dass für jede C^∞ -Abbildung $f : M \rightarrow G$ gilt:

$$\forall p \in M, v \in T_p M, Y \in \mathfrak{X}_f(G) : \nabla'_v Y - \nabla_v Y = \Delta(f_* v, Y_p).$$

Wir haben eine kovariante Ableitung ∇^0 eingeführt, welche durch die Flachheit aller linksinvarianten Vektorfelder charakterisiert ist. Ist nun $\lambda : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ eine bilineare Abbildung, so induziert diese ein Tensorfeld $\Delta_\lambda \in T^{(1,2)}(G)$ durch die Definition

$$\Delta_\lambda(v, w) := \lambda(\theta(v), \theta(w))_g \text{ für alle } g \in G \text{ und } v, w \in T_g G.$$

Hierbei ist θ wieder die kanonische 1-Form (Maurer-Cartan-Form) von G , für die $\theta(X_g) = X$ gilt. Die kovariante Ableitung $\nabla^\lambda := \nabla^0 + \Delta_\lambda$ ist dann durch folgende Eigenschaft charakterisiert

$$\forall X_0, X_1 \in \mathfrak{g} : \nabla_{X_0}^\lambda X_1 = \lambda(X_0, X_1).$$

Lemma 1. Sei G Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und $\lambda : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ eine bilineare Abbildung. Dann ist die von λ induzierte kovariante Ableitung ∇^λ linksinvariant. Darüberhinaus erhält man jede linksinvariante kovariante Ableitung von G auf diese Weise.

Wir interessieren uns für die Frage, wann ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow B$ bzgl. einer kovarianten Ableitung ∇ flach ist. Hierfür betrachtet man

Definition 1. Der *Krümmungstensor* R von ∇ ist für Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}$ und Schnitte $s \in \Gamma(\pi)$ über

$$R(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s$$

definiert. Ist $R \equiv 0$, so sagt man, dass π bzgl. ∇ flach ist.

Bemerkung 1. Die durch Links- bzw. Rechtstranslation induzierten Trivialisierungen φ, ψ von TG einer Lie-Gruppe G führen zu kovarianten Ableitungen ∇^0, ∇^1 , bzgl. derer (G, ∇^0) und (G, ∇^1) flach sind.

Lemma 2. Für die kovarianten Ableitungen ∇^0 und ∇^1 gilt

$$\nabla_X^1 Y - \nabla_X^0 Y = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G).$$

Beweis. Wir wollen $(\nabla_X^R - \nabla_X^L)Y$ berechnen und betrachten folgende Eich-Transformation von $TG \simeq G \times \mathfrak{g}$, die die linksinvarianten Vektorfelder von G in die rechtsinvarianten Vektorfelder von G überführt:

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) : TG &\rightarrow TG \\ (g, s) &\mapsto (g, gsg^{-1}) \end{aligned}$$

Dann gilt $A\nabla^R = \nabla^L A$, d.h.

$$\nabla^R = \text{Ad}(g)^{-1} \nabla^L \text{Ad}(g).$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} (\nabla_X^R - \nabla_X^L)Y &= (\text{Ad}(g)^{-1} \nabla_X^L \text{Ad}(g) - \nabla_X^L)Y = \text{Ad}(g)^{-1} \text{ad}(X)Y \\ &= [X, Y]. \end{aligned}$$

□

Es soll nun untersucht werden, wie die Größen Krümmung und Torsion für kovariante Ableitungen $\nabla^{\lambda_\varepsilon}$ aussehen, wenn wir für $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$

$$\lambda_\varepsilon(X, Y) = \varepsilon \cdot [X, Y], \varepsilon \in \mathbb{R}$$

setzen.

Lemma 3. Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und $\nabla^{\lambda_\varepsilon}$ die kovariante Ableitung zu λ_ε mit $\lambda_\varepsilon(X, Y) = \varepsilon \cdot [X, Y]$. Dann gilt für deren Krümmungstensor

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} : R(X, Y)Z = (\varepsilon^2 - \varepsilon) \cdot [[X, Y], Z].$$

Für $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ist daher $(G, \nabla^{\lambda_\varepsilon})$ flach.

Beweis. Aufgrund der vorherigen Überlegungen wissen wir, dass für die Schnitte φ^Z gilt $\varphi^Z = Z$ und deshalb können wir wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X^{\lambda_\varepsilon} \nabla_Y^{\lambda_\varepsilon} Z - \nabla_Y^{\lambda_\varepsilon} \nabla_X^{\lambda_\varepsilon} Z - \nabla_{[X, Y]}^{\lambda_\varepsilon} Z \\ &= \varepsilon \cdot \nabla_X^{\lambda_\varepsilon} [Y, Z] - \varepsilon \cdot \nabla_Y^{\lambda_\varepsilon} [X, Z] - \varepsilon \cdot [[X, Y], Z] \\ &= \varepsilon^2 \cdot [X, [Y, Z]] - \varepsilon^2 \cdot [Y, [X, Z]] - \varepsilon \cdot [[X, Y], Z] \\ &= (\varepsilon^2 - \varepsilon) \cdot [[X, Y], Z], \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Jacobi-Identität für die Lieklammer $[\cdot, \cdot]$ folgt. \square

Definition 2. Der Torsionstensor T einer Mannigfaltigkeit (G, ∇) ist durch

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G)$$

definiert.

Das Auffinden der Levi-Civita-Ableitung auf der Liegruppe G wird durch folgenden Satz möglich.

Satz 1. Auf jeder pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit G existiert genau eine torsionsfreie, metrische kovariante Ableitung ∇ , die sogenannte Levi-Civita-Ableitung der Mannigfaltigkeit.

Lemma 4. Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und $\nabla^{\lambda_\varepsilon}$ die kovariante Ableitung zu λ_ε mit $\lambda_\varepsilon(X, Y) = \varepsilon \cdot [X, Y]$. Dann gilt für deren Torsionstensor

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} : T(X, Y) = (2\varepsilon - 1) \cdot [X, Y].$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ist daher $(G, \nabla^{\lambda_\varepsilon})$ torsionsfrei.

Beweis. Eine kurze Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X^{\lambda_\varepsilon} Y - \nabla_Y^{\lambda_\varepsilon} X - [X, Y] \\ &= \varepsilon \cdot [X, Y] - \varepsilon \cdot [Y, X] - [X, Y] \\ &= (2\varepsilon - 1) \cdot [X, Y]. \end{aligned}$$

Somit folgt $T \equiv 0 \Leftrightarrow 2\varepsilon - 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}$. \square

Der Levi-Civita-Zusammenhang von G ist somit

$$\nabla = \frac{1}{2}(\nabla^1 + \nabla^0),$$

wobei wir ab jetzt in Analogie zu [3] $\nabla^1 =: \nabla^R$ und $\nabla^0 =: \nabla^L$ setzen.

Um die in der Einleitung genannten Größen berechnen zu können, wollen wir uns nocheinmal die Cartansche (äußere) Ableitung für Vektorbündel-wertige Differentialformen in Erinnerung rufen.

Definition 3. Sei $\pi : E \rightarrow G$ ein Vektorbündel mit kovarianter Ableitung ∇ , $r \in \mathbb{N}$ und $f : M \rightarrow G$ eine C^∞ -Abbildung. Unter einer π -wertigen Differentialform längs f vom Grad r verstehen wir eine Familie $(\omega_p)_{p \in M}$ von Elementen $\omega_p \in \Lambda^r(T_p M, E_{f(p)})$, so dass für jedes r -Tupel $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$(p \mapsto \omega_p(X_1(p), \dots, X_r(p))) \in \Gamma_f(\pi).$$

Mit $\Omega_f^r(\pi)$ bezeichnen wir die Menge aller π -wertigen Differentialformen längs f vom Grad r .

Satz 2. Für jedes $r \in \mathbb{N}_0$ existiert eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$d^\nabla : \Omega_f^r(\pi) \rightarrow \Omega_f^{r+1}(\pi),$$

so dass für jedes $\omega \in \Omega_f^r(\pi)$ und alle $X_0, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\begin{aligned} (d^\nabla \omega)(X_0, \dots, X_r) &= \sum (-1)^i \cdot (\nabla_{X_i}(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r))) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \cdot \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r). \end{aligned}$$

Für $\omega = s \in \Omega_f^0(\pi) = \Gamma_f(\pi)$ reduziert sich die Formel auf

$$(d^\nabla s)(X) = \nabla_X s.$$

3 Eich-Theorie-Formalismus für konforme Abbildungen

Die bisher gemachten Beobachtungen werden nun dabei helfen, die globale Beschreibung von CMC-Immersionen besser zu verstehen. Als erstes wollen wir angeben, wie $\nabla^R - \nabla^L$ auf Schnitten wirkt.

Lemma 5. Für einen Schnitt $s \in \Gamma(\pi)$ des Bündels $\pi : TG \rightarrow G$ gilt

$$\nabla^R(s) = \nabla^L(s) + \text{ad}(g^{-1}dg)s$$

Beweis. Wir wollen $(\nabla^R - \nabla^L)(s)$ berechnen und betrachten folgende Eich-Transformation von $TG \simeq G \times \mathfrak{g}$, die die linksinvarianten Vektorfelder von G in die rechtsinvarianten Vektorfelder von G überführt:

$$\begin{aligned} A : TG &\rightarrow TG \\ (g, s) &\mapsto (g, gsg^{-1}) \end{aligned}$$

Dann gilt $A\nabla^R = \nabla^L A$, d.h.

$$\nabla^R = A^{-1}\nabla^L A.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} (\nabla^R - \nabla^L)(s) &= (A^{-1}\nabla^L A - \nabla^L)(s) = A^{-1}[dg \cdot g^{-1}, gsg^{-1}] \\ &= [g^{-1}dg, s]. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2. Zieht man den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ von G vermöge $f : M \rightarrow G$ zurück, so folgt für Schnitte $s \in \Gamma_f(\pi)$

$$\nabla(s) = \frac{1}{2}(\nabla^R + \nabla^L)(s) = ds + \frac{1}{2}[\phi, s] \quad \text{mit } \phi = f^{-1}df.$$

Der Higgstensor $\phi = f^{-1}df$ ist eine 1-Form mit Werten in der Liealgebra \mathfrak{g} von G und somit kann man in unserer Situation von folgenden Daten ausgehen:

- (1) Die kompakte Riemannsche Fläche M ist mit einem G -Prinzipal-Faserbündel P versehen, genauer: $\pi : P = f^*\widehat{P} \rightarrow M$ mit $\widehat{P} = G \times G \rightarrow G$. Das zur adjungierten Darstellung assoziierte Faserbündel lautet dann $TG \simeq G \times \mathfrak{g} \rightarrow G$ (Details später).
- (2) Durch Zurückziehen der induzierten Zusammenhänge ∇^L und ∇^R auf G erhält man einen Zusammenhang auf P , nämlich den zurückgezogenen Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla = \frac{1}{2}(\nabla^L + \nabla^R)$.
- (3) Die Differenz der Zusammenhänge ∇^R und ∇^L ergibt eine 1-Form $\nabla^R - \nabla^L = \phi \in \Omega^1(M, \text{ad}P)$ vermöge der zu P assoziierten adjungierten Darstellung.

Lemma 6. Für $\phi = f^{-1}df$ gilt

$$d^\nabla(\phi) = 0.$$

Beweis. Wir benutzen die Cartansche Ableitungs-Formel für VB-wertige Differentialformen:

$$\begin{aligned} d^\nabla(\phi)(X_0, X_1) &= \nabla_{X_0}\phi(X_1) - \nabla_{X_1}\phi(X_0) - \phi([X_0, X_1]) \\ &= \nabla_{X_0}^L\phi(X_1) + \frac{1}{2}[\phi(X_0), \phi(X_1)] \\ &\quad - \nabla_{X_1}^L\phi(X_0) - \frac{1}{2}[\phi(X_1), \phi(X_0)] - \phi([X_0, X_1]) \\ &= d^{\nabla^L}(\phi)(X_0, X_1) + \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi](X_0, X_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\phi = f^{-1}df$ die Maurer-Cartan-Gleichung erfüllt. \square

Um die bisher gemachten Feststellungen in das Konzept der Theorie der Laxpaare, des erweiterten Rahmens und der Sym-Bobenko-Formel einzuordnen, werden die hierfür benötigten Resultate noch einmal kurz zusammengestellt.

Proposition 1. Der \mathbb{S}^3 -Rahmen $\mathcal{F} = (f, f_z, f_{\bar{z}}, N)$ erfüllt

$$\mathcal{F}_z = \mathcal{F}\mathcal{U}, \quad \mathcal{F}_{\bar{z}} = \mathcal{F}\mathcal{V},$$

wobei

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2e^{2u} & 0 \\ 1 & 2u_z & 0 & -H \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}Qe^{-2u} \\ 0 & Q & 2He^{2u} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & -2e^{2u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\overline{Q}e^{-2u} \\ 1 & 0 & 2u_{\bar{z}} & -H \\ 0 & 2He^{2u} & \overline{Q} & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Siehe z.B. [4], Proposition 2.41. \square

Wir wollen ausnutzen, dass $SU(2) \times SU(2)$ eine zweifache Überlagerung von $SO(4)$ ist.

Lemma 7. Die zweifache Überlagerung von $SO(4)$ ist $SU(2) \times SU(2)$ vermöge der Gruppenwirkung

$$X \mapsto FXG^{-1}$$

und das Lax-Paar $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ wird zu Lax-Paaren

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_z & e^{-u}Q \\ -2(H-i)e^u & u_z \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{\bar{z}} & 2(H+i)e^u \\ -e^{-u}\bar{Q} & -u_{\bar{z}} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_z & e^{-u}Q \\ -2(H+i)e^u & u_z \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{\bar{z}} & 2(H-i)e^u \\ -e^{-u}\bar{Q} & -u_{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

transformiert.

Beweisskizze. Betrachte die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit der 2×2 Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ bilden die Pauli-Matrizen durch $\{\mathbb{1}, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ eine Basis für den Ring der Quaternionen.

Seien $F = F(z, \bar{z}, \lambda)$, $G = G(z, \bar{z}, \lambda) \in SU(2)$ die Matrizen, die $i\sigma_1, i\sigma_2$ und $i\sigma_3$ in die 2×2 -Matrix-Form von e_1, e_2 und N überführen, d.h.

$$e_1 = F(i\sigma_1)G^{-1}, \quad e_2 = F(i\sigma_2)G^{-1}, \quad N = F(i\sigma_3)G^{-1}.$$

Wir definieren

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} := F^{-1}F_z, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} := F^{-1}F_{\bar{z}}$$

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{11} & \tilde{U}_{12} \\ \tilde{U}_{21} & \tilde{U}_{22} \end{pmatrix} := G^{-1}G_z, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_{11} & \tilde{V}_{12} \\ \tilde{V}_{21} & \tilde{V}_{22} \end{pmatrix} := G^{-1}G_{\bar{z}}$$

und können die Einträge von U, \tilde{U}, V und \tilde{V} durch den konformen Faktor u , die mittlere Krümmung H und das Hopf-Differential Q ausdrücken. Indem wir die Gleichungen

$$e_1 = \frac{f_x}{|f_x|} = \frac{f_x}{2e^u} = F \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} G^{-1}, \quad e_2 = \frac{f_y}{|f_y|} = \frac{f_y}{2e^u} = F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} G^{-1}$$

benutzen, erhalten wir

$$f_z = 2ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} G^{-1}, \quad f_{\bar{z}} = 2ie^u F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G^{-1}.$$

Mithilfe der in Proposition 1 formulierten Bedingungen an die Ableitungen von $f, f_z, f_{\bar{z}}$ und N gelangt man durch direktes Rechnen zum Ergebnis (vergleiche [4], Lemma 5.2). \square

Ausgangspunkt für unsere Untersuchung sind somit erweiterte Rahmen $F, G : M \rightarrow SU(2)$, welche die Laxpaare

$$F_z = FU, \quad F_{\bar{z}} = FV, \quad G_z = G\tilde{U}, \quad G_{\bar{z}} = G\tilde{V} \quad \text{mit } U, \tilde{U}, V, \tilde{V} \in SU(2)$$

lösen und zu $\mathfrak{su}(2)$ -wertigen 1-Formen $\alpha, \beta \in \Omega^1(M, \mathfrak{su}(2))$ führen, welche sich aus U, \tilde{U}, V und \tilde{V} wie folgt zusammensetzen

$$\alpha = Udz + Vd\bar{z} = F^{-1}dF, \quad \beta = \tilde{U}dz + \tilde{V}d\bar{z} = G^{-1}dG.$$

Dann ist $f = FG^{-1}$ und $\phi = f^{-1}df = G(\alpha - \beta)G^{-1}$ und man erhält das folgende

Lemma 8. Sei $f : M \rightarrow SU(2)$ eine konforme Immersion und $\phi = f^{-1}df$. Die mittlere Krümmung H ist gegeben durch

$$2d * \phi = H[\phi \wedge \phi].$$

Beweis. Siehe z.B. [4], Lemma 5.3. □

Durch Einführen eines Spektralparameters $\lambda \in S^1$ gelangt man zu folgendem Resultat:

Satz 3. Sei $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und definiere

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_z dz - u_{\bar{z}} d\bar{z} & i\lambda^{-1} e^u dz + i\bar{Q} e^{-u} d\bar{z} \\ iQ e^{-u} dz + i\lambda e^u d\bar{z} & -u_z dz + u_{\bar{z}} d\bar{z} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $2d\alpha_\lambda + [\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0$ genau dann, wenn Q holomorph und u eine Lösung der reduzierten Gauß-Gleichung ist:

$$2u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(e^{2u} - Q\bar{Q}e^{-2u}) = 0, \quad Q_{\bar{z}} = 0.$$

Für jede Lösung u der obigen Gleichung und den zugehörigen erweiterten Rahmen $F_\lambda, \lambda_0, \lambda_1 \in S^1, \lambda_0 \neq \lambda_1$, d.h. $\lambda_k = e^{it_k}$, ist die durch die *Sym-Bobenko-Formel* definierte Abbildung

$$f = F_{\lambda_1} F_{\lambda_0}^{-1}$$

eine konforme Immersion mit konstanter mittlerer Krümmung

$$H = i \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1} = \cot(t_0 - t_1),$$

konformem Faktor $v = e^u / \sqrt{H^2 + 1}$, und Hopf-Differential $\tilde{Q}dz^2$ mit $\tilde{Q} = \frac{i}{4}(\lambda_1^{-1} - \lambda_0^{-1})Q$.

Beweis. Siehe [4], Theorem 5.4. □

Wir werden diese Familie von flachen Zusammenhängen später mit der von Hitchin eingeführten Familie $(\nabla_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ in Beziehung setzen. Zunächst folgt aber

Lemma 9. Für eine CMC-Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$ gilt mit $\phi = f^{-1}df$

$$d^\nabla(*\phi) = \frac{1}{2}H[\phi \wedge \phi].$$

Im Falle einer Minimalfläche gilt also insbesondere $d^\nabla(*\phi) = 0$.

Beweis. Es ist $\phi = f^{-1}df = G(\alpha - \beta)G^{-1}$ und man erhält sofort

$$*\phi = N\phi = -\phi N \quad \text{mit } N = G \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} G^{-1}.$$

Damit erhält man wieder mit Cartans Formel für die äußere Ableitung

$$\begin{aligned} d^\nabla(*\phi)(X_0, X_1) &= \nabla_{X_0} * \phi(X_1) - \nabla_{X_1} * \phi(X_0) - *\phi([X_0, X_1]) \\ &= \nabla_{X_0}^L * \phi(X_1) + \frac{1}{2}[\phi(X_0), *\phi(X_1)] \\ &\quad - \nabla_{X_1}^L * \phi(X_0) - \frac{1}{2}[\phi(X_1), *\phi(X_0)] - *\phi([X_0, X_1]) \\ &= d^{\nabla^L}(*\phi)(X_0, X_1) + \frac{1}{2}[\phi(X_0), N\phi(X_1)] - \frac{1}{2}[\phi(X_1), N\phi(X_0)] \\ &= d^{\nabla^L}(*\phi)(X_0, X_1) \\ &= \frac{1}{2}H[\phi \wedge \phi](X_0, X_1). \end{aligned}$$

Für eine Minimalfläche gilt $H = 0$ und somit folgt in diesem Fall $d^\nabla(*\phi) = 0$. □

Wir wollen nun $\phi \in \Omega^1(M, \mathfrak{su}(2))$ in die K - und \bar{K} -Komponente zerlegen und erhalten

$$\phi = \phi' + \phi'' \quad \text{mit } \phi' \in \Omega^{1,0}(M, \text{ad}P \otimes \mathbb{C}).$$

Aufgrund der Spurfreiheit von ϕ gilt $\phi'' = -\phi'^*$. Der Hodge-*-Operator wirkt auf ϕ wie

$$*(\phi' + \phi'') = -i\phi' + i\phi''$$

und man erhält

Lemma 10. Mit den obigen Bezeichnungen erfüllt ϕ'

$$d''\phi' + \frac{1}{2}(1 - iH)[\phi'' \wedge \phi'] = 0.$$

Insbesondere erhält man für $H = 0$

$$d''\phi' + \frac{1}{2}[\phi'' \wedge \phi'] = 0.$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass gilt

$$\begin{aligned} d\phi + \frac{1}{2}[\phi \wedge \phi] &= 0, \\ d*\phi &= \frac{1}{2}H[\phi \wedge \phi]. \end{aligned}$$

Damit folgt durch Umformung $d*\phi + Hd\phi = 0$, oder nach Ausschreiben der *-Operation

$$(H - i)d\phi' + (H + i)d\phi'' = 0.$$

Außerdem gilt

$$d\phi' = -d\phi'' - [\phi' \wedge \phi''] \quad \text{bzw.} \quad d\phi'' = -d\phi' - [\phi' \wedge \phi'']$$

und man erhält

$$\begin{aligned} d''\phi' &= -\frac{1}{2}(1-iH)[\phi'' \wedge \phi'] \\ d'\phi'' &= -\frac{1}{2}(1+iH)[\phi' \wedge \phi'']. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 3.

- (a) Durch das obige Lemma folgt, dass $\bar{\partial} := d'' + \frac{1}{2}(1-iH)\phi''$ dem $(0,1)$ -Anteil des Zusammenhangs $\nabla_H := d + \frac{1}{2}(1+iH)\phi' + \frac{1}{2}(1-iH)\phi''$ auf dem Bündel $\text{ad}P \otimes \mathbb{C}$ entspricht. Aufgrund des Typs gilt

$$\bar{\partial}^2 = 0,$$

d.h. $\text{ad}P \otimes \mathbb{C}$ erhält vermöge $\bar{\partial}$ die Struktur eines holomorphen Vektorbündels, wobei $\bar{\partial}$ durch die adjungierte Darstellung wirkt. Aus der Flachheit von $\bar{\partial}$ folgt nämlich aufgrund des Newlander-Nirenberg-Theorems, dass $\ker(\bar{\partial})$ die Garbe der holomorphen Schnitte einer holomorphen Struktur auf $\text{ad}P$ ist. In diesem Fall ist das Higgsfeld ϕ' damit automatisch ein holomorpher Schnitt von $\text{ad}P \otimes_{\mathbb{C}} K$, d.h.

$$\bar{\partial}\phi' = \left(d'' + \frac{1}{2}(1-iH)\phi'' \right) \phi' = 0.$$

Insbesondere erhält man im Falle $H = 0$ die holomorphe Struktur durch den $(0,1)$ -Anteil der kovarianten Ableitung d^∇ .

- (b) Aufgrund der hergeleiteten Gleichungen ist der Zusammenhang

$$d + \frac{1}{2}(1+\lambda^{-1})(1+iH)\phi' + \frac{1}{2}(1+\lambda)(1-iH)\phi''$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ flach, d.h. es existiert ein $f_\lambda : M \rightarrow SU(2)$ mit

$$f_\lambda^{-1}df_\lambda = \frac{1}{2}(1+\lambda^{-1})(1+iH)\phi' + \frac{1}{2}(1+\lambda)(1-iH)\phi''.$$

Insbesondere erhält man für $\lambda = \frac{1+iH}{1-iH}$ die ursprüngliche Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$.

Da es sich in unserem Fall um einen $SU(2)$ -Zusammenhang handelt, können wir annehmen, dass er auf einem Rang 2 Vektorbündel V mit symplektischer Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist. Hierfür benötigen wir noch das folgende Resultat.

Proposition 2. Das durch Linkstranslation trivialisierte Tangentialbündel

$$T\mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{S}^3 \times \text{Im}\mathbb{H} \simeq SU(2) \times \mathfrak{su}(2)$$

induziert ein komplexes \mathbb{C}^2 -Vektorbündel

$$V = M \times \mathbb{H} \simeq M \times \mathbb{C}^2 \rightarrow M$$

über M . Der (j,k) -Anteil der induzierten quaternionisch hermiteschen Form (\cdot, \cdot) versieht V mit einer \mathbb{C} -bilinearen symplektischen Struktur.

Beweis. Wir betrachten das Hauptfaserbündel

$$\widehat{P} = SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2),$$

wobei $G = SU(2)$ von rechts auf \widehat{P} operiert. Das trivialisierte Tangentialbündel an $SU(2)$

$$TSU(2) \simeq SU(2) \times \mathfrak{su}(2)$$

erhält man dann als assoziiertes Bündel vermöge der adjungierten Darstellung von $SU(2)$. Wir identifizieren $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H}$ und wählen die Darstellung $h = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, d.h.

$$\mathbb{H} \ni h = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Sei nun die Darstellung

$$\chi : SU(2) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

mit

$$\chi(\mu) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad h \mapsto h \cdot \mu^{-1} \quad \text{für } \mu \in SU(2)$$

gegeben. Betrachtet man nun das assoziierte Faserbündel $\widehat{P} \times_{SU(2)} \mathbb{C}^2 \rightarrow SU(2)$ (vergleiche [1], Band 4, S. 227ff), so lässt sich auf jeder Faser dieses Bündels eine der zur Vektorraumstruktur von \mathbb{C}^2 isomorphe Vektorraumstruktur definieren. Hierfür betrachtet man das Bündel $\widehat{P} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow SU(2)$ und geht zum Quotienten unter der Wirkung der Gruppe

$$\begin{aligned} G \times (\widehat{P} \times \mathbb{C}^2) &\rightarrow \widehat{P} \times \mathbb{C}^2 \\ (g, (p, h)) &\mapsto (gp, \chi(g)h) \end{aligned}$$

über. Durch Zurückziehen vermöge $f : M \rightarrow SU(2)$ erhält man ein triviales \mathbb{C}^2 -Bündel

$$M \times \mathbb{C}^2 \rightarrow M$$

über M . Auf \mathbb{H} wird vermöge $[x, y] \mapsto (x, y) := x \cdot \bar{y}$ eine quaternionisch hermitesche Form definiert. Wir berechnen $x \cdot \bar{y}$ und erhalten

$$x \cdot \bar{y} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{c} & -d \\ \bar{d} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{c} + b\bar{d} & -ad + bc \\ \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} & \bar{a}c + \bar{b}d \end{pmatrix}$$

Somit wird durch den (j, k) -Anteil dieser quaternionisch hermiteschen Form eine symplektische Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert, genauer

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := -x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Die Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist offenbar \mathbb{C} -bilinear. □

Bemerkung 4. Durch die obige Identifikation wird das Higgsfeld ϕ' zu einem holomorphen Schnitt in $\text{End}(V) \otimes K$, d.h. man erhält einen symmetrischen, spurfreien komplex linearen Endomorphismus von V .

Definition 4. Eine Abbildung $f : M \rightarrow SU(2)$ heißt **konform**, wenn die zurückgezogene Metrik in der konformen Klasse der Riemannschen Fläche M liegt.

Proposition 3. Sei $f : M \rightarrow SU(2)$ eine Abbildung einer kompakten Riemannschen Fläche M nach $SU(2)$ und sei (∇, ϕ') der entsprechende Zusammenhang und das Higgs-Feld. Dann ist f genau dann konform, wenn $\det \phi' = 0$.

Beweis. Der Pullback der bi-invarianten Metrik auf $SU(2)$ unter der Abbildung f ist $g = 2\langle \phi, \phi \rangle$, d.h.

$$\begin{aligned} g &= -\operatorname{tr}((f^{-1}df)^2) = -\operatorname{tr}(\phi^2) \\ &= -\left(\operatorname{tr}(\phi'^2) + 2\operatorname{tr}(\phi'\phi'') + \operatorname{tr}(\phi''^2)\right). \end{aligned}$$

Eine Metrik liegt in der konformen Klasse von M , wenn sie bezüglich einer holomorphen Koordinate z lokal von der Form $hdzd\bar{z}$ ist. Somit liegt g in der konformen Klasse, wenn die dz^2 - und $d\bar{z}^2$ -Komponenten verschwinden, d.h. genau dann, wenn $\operatorname{tr}(\phi'^2) = 0$. Da ϕ' lokal eine spurfreie 2×2 -Matrix ist, folgt

$$\det \phi' = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\phi'^2) = 0$$

genau dann, wenn f konform ist. Die zurückgezogene Metrik lautet dann $g = -2\operatorname{tr}(\phi'\phi'')$. \square

4 Das Spin-Bündel der Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$

Wir wollen nun die Spin-Struktur der Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$ beschreiben und die zuvor beschriebenen Objekte damit in Beziehung setzen. Um dies tun zu können, müssen wir uns für einen Moment mit Erweiterungen holomorpher Vektorbündel beschäftigen, wie sie in [2] behandelt werden.

Zunächst wird ein holomorphes Vektorbündel $\pi : V \rightarrow M$ vom Rang n über einer Riemannschen Fläche M vermöge der Übergangsfunktionen bei Kartenwechseln mit einem Element $\psi \in H^1(M, GL(n, \mathcal{O}))$ identifiziert. Für eine gegebene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ von M wird dieses durch einen Kozykel $(\psi_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, GL(n, \mathcal{O}))$ repräsentiert.

Bemerkung 5. Die Isomorphieklasse des Bündels, welches dem Element $\operatorname{Id} \in H^1(M, GL(n, \mathcal{O}))$ entspricht, ist das triviale Bündel

$$\pi : M \times \mathbb{C}^n \longrightarrow M.$$

Satz 4. Der Funktor zwischen der Kategorie der holomorphen Vektorbündel VB_M auf einer Riemannschen Fläche M und der Kategorie der lokal freien \mathcal{O}_M -Moduln

$$\begin{aligned} \phi : VB_M &\rightarrow \text{Lokal freie } \mathcal{O}_M\text{-Moduln} \\ E &\mapsto [U \mapsto \Gamma(U, E)] \end{aligned}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien. Insbesondere erhält man eine Bijektion zwischen holomorphen Vektorbündeln auf M und lokal freien \mathcal{O}_M -Moduln.

Beweis. Siehe [7], Proposition 4.1. \square

Definition 5. Ein holomorphes Vektorbündel $\varphi \in H^1(M, GL(n, \mathcal{O}))$ heißt *Unterbündel* eines holomorphen Vektorbündels $\psi \in H^1(M, GL(m, \mathcal{O}))$, wenn die entsprechende lokal freie Garbe $\mathcal{O}(\varphi)$ eine Untergarbe von $\mathcal{O}(\psi)$ ist, so dass der Quotient $\mathcal{O}(\psi)/\mathcal{O}(\varphi)$ lokal frei ist. Die Quotientengarbe entspricht dann einem holomorphen Vektorbündel $\theta \in H^1(M, GL(r, \mathcal{O}))$, genannt das *Quotientenbündel* $\theta = \psi/\varphi$ und ψ wird *Erweiterung* des Bündels φ durch das Bündel θ genannt.

Bemerkung 6. Im Falle einer Erweiterung existiert eine exakte Sequenz von lokal freien Garben der Form

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{O}(\psi) \longrightarrow \mathcal{O}(\theta) \longrightarrow 0.$$

Wir interessieren uns im Folgenden für den Rang 2 Fall und benötigen folgenden

Satz 5. Für zwei holomorphe Geradenbündel φ_1, φ_2 über einer Riemannschen Fläche M besteht eine 1:1-Beziehung zwischen Äquivalenzklassen von Erweiterungen des Geradenbündels φ_1 durch das Geradenbündel φ_2 und Elementen der Kohomologiegruppe $H^1(M, \mathcal{O}(\varphi_1 \otimes \varphi_2^{-1}))$. Die triviale Erweiterung $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ entspricht hierbei dem Null-Element der Gruppe.

Beweis. Siehe [2], Theorem 13. □

Proposition 4. Sei $\pi : V \rightarrow M$ das zuvor beschriebene Rang 2 Vektorbündel über der Riemannschen Fläche M vom Geschlecht g mit symplektischer Struktur $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann definiert

$$L := \ker \phi' \subset V$$

ein holomorphes Geradenbündel und es gilt

$$L \otimes_{\mathbb{C}} L \simeq K^{-1},$$

d.h. $S := L^{-1}$ ist ein Spin-Bündel der Riemannschen Fläche M . Für den Grad von S gilt

$$\deg S = g - 1.$$

Beweis. Wir wissen, dass wir $\phi = f^{-1}df$ wie folgt schreiben können: $\phi = \phi' + \phi''$. Da $\det \phi' = 0$ und $\text{tr} \phi' = 0$ gilt, erhält man vermöge $\det \phi' = \frac{1}{2}((\text{tr} \phi')^2 - \text{tr} \phi'^2)$ die Nilpotenz von ϕ' , d.h. $\phi'^2 \equiv 0$. Da ϕ' einen nicht-trivialen Kern besitzt und nicht verschwindet ist

$$L := \ker \phi' \subset V$$

wohldefiniert. Da für alle $v \in V$ gilt $\phi'^2 v = \phi'(\phi'(v)) = 0$, liegt $\text{Im} \phi' \subset \ker \phi' = L$. Somit ist ϕ' ein nicht-verschwindender holomorpher Schnitt in $\text{Hom}(V/L, L \otimes K)$, d.h.

$$\phi' \in H^0(M, \text{Hom}(V/L, L \otimes K)).$$

Da V über eine symplektische Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ verfügt, erhält man vermöge der faserweise definierten Abbildung

$$\begin{aligned} (V/L)_p &\rightarrow L_p^* \\ y &\mapsto [L_p \ni x \mapsto \langle y, x \rangle] \end{aligned}$$

den Isomorphismus $V/L \simeq L^*$. Insbesondere definiert ϕ' aufgrund von

$$\text{Hom}(V/L, L \otimes K) \simeq \text{Hom}(L^*, L \otimes K) \simeq (L^*)^* \otimes L \otimes K \simeq L^2 \otimes K$$

einen holomorphen Schnitt $a \in H^0(M, L^2 \otimes K)$. Da $L^2 \otimes K$ einen nullstellenfreien Schnitt besitzt, erhält man somit

$$L \otimes_{\mathbb{C}} L \simeq K^{-1},$$

d.h. $S := L^{-1}$ ist ein Spin-Bündel der Riemannschen Fläche M . Insbesondere gilt

$$\deg(S \otimes S) = 2 \deg(S) = \deg(K) = 2g - 2$$

und somit folgt $\deg(S) = g - 1$. □

Bemerkung 7. Betrachtet man ein zu L komplementäres C^∞ -Geradenbündel L' (welches aufgrund der vorherigen Überlegungen mit L^* identifiziert werden kann), so definiert $b' \in H^0(M, L^2 \otimes \bar{K})$ für einen lokalen Schnitt $t \in H^0(M, L')$ mit

$$\langle \bar{\partial}^\nabla t, t \rangle = b'(t \otimes t)$$

die Kohomologieklass $[b'] \in H^1(M, L^2)$ (siehe Satz 5), welche die Nicht-Trivialität der Erweiterung

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow V \longrightarrow L^* \longrightarrow 0$$

misst. Die triviale Erweiterung $V = L \oplus L^*$ entspricht hierbei dem Null-Element der Gruppe (vergleiche [2]).

5 Eine Familie von flachen Zusammenhängen ∇_λ und deren Holonomie

Um die Konstruktion der Spektralkurve, einer hyperelliptischen Riemannschen Fläche, zu verstehen, ist es erforderlich die Holonomie der holomorphen Familie von Zusammenhängen

$$\lambda \in \mathbb{C}^* \mapsto \nabla_\lambda := d + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$$

zu untersuchen. Für ein festes $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ist die Krümmung des Zusammenhangs ∇_λ durch

$$\begin{aligned} R^{\nabla_\lambda} &= \left(d + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi'' \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Dies folgt aus $d^{\nabla_H} \phi' = d^{\nabla_H} \phi'' = 0$ sowie aus den Gleichungen aus Lemma 10. Ist $G = SU(2)$, erhält man eine Familie von flachen $SL(2, \mathbb{C})$ -Zusammenhängen, die für $|\lambda| = 1$ sogar unitär sind.

Die folgenden beiden Resultate sollen die Familie der flachen Zusammenhänge $(\nabla_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ mit den Zusammenhangsformen $\alpha, \beta \in \Omega^1(M, \mathfrak{su}(2))$ aus dem ersten Vortrag in Verbindung bringen.

Proposition 5. Die Zusammenhangsmatrix zu

$$\nabla_\lambda := d + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$$

wird vermöge der Eich-Transformation G in den flachen Zusammenhang $\tilde{\nabla}_\lambda := d + \alpha_\lambda$ mit Zusammenhangsmatrix

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_z dz + u_{\bar{z}} d\bar{z} & e^{-u} Q dz + -2i\lambda(1 - iH)e^u d\bar{z} \\ -2i\lambda^{-1}(1 + iH)e^u dz - e^{-u} Q d\bar{z} & u_z dz + -u_{\bar{z}} d\bar{z} \end{pmatrix}$$

transformiert. Hierbei ist $G \in SU(2)$ der Rahmen, der zu $\beta = G^{-1}dG \in \Omega^1(M, \mathfrak{su}(2))$ gehört. Insbesondere erhält man für $\lambda_1 = -1$ bzw. $\lambda_2 = \frac{1+iH}{1-iH}$ die flachen Zusammenhangsmatrizen $\alpha, \beta \in \Omega^1(M, \mathfrak{su}(2))$ aus dem ersten Vortrag.

Beweis. Ausgehend von

$$\phi = f^{-1}df = G(\alpha - \beta)G^{-1} = \frac{1}{2}G \begin{pmatrix} 0 & -4ie^u d\bar{z} \\ -4ie^u dz & 0 \end{pmatrix} G^{-1},$$

ergibt sich für $\phi_\lambda = \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$ die folgende Gestalt:

$$\phi_\lambda = \frac{1}{2}G \begin{pmatrix} 0 & -2i(1 + \lambda)(1 - iH)e^u d\bar{z} \\ -2i(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)e^u dz & 0 \end{pmatrix} G^{-1}.$$

Wir betrachten nun die Eich-Transformation G und berechnen die neue Zusammenhangsmatrix $G^{-1}\phi_\lambda G + G^{-1}dG$:

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i(1 + \lambda)(1 - iH)e^u d\bar{z} \\ -2i(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)e^u dz & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_z dz + u_{\bar{z}} d\bar{z} & e^{-u} Q dz + 2i(1 - iH)e^u d\bar{z} \\ 2i(1 + iH)e^u dz - e^{-u} Q d\bar{z} & u_z dz + -u_{\bar{z}} d\bar{z} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_z dz + u_{\bar{z}} d\bar{z} & e^{-u} Q dz + -2i\lambda(1 - iH)e^u d\bar{z} \\ -2i\lambda^{-1}(1 + iH)e^u dz - e^{-u} Q d\bar{z} & u_z dz + -u_{\bar{z}} d\bar{z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 8. Durch Reskalierung des konformen Faktors e^u und nach Ausführen einer Möbiustransformation, die eine andere λ -abhängige Familie von flachen Zusammenhängen induziert, erhält man die in Satz 3 beschriebene Darstellung.

Ausgehend von einem flachen $SL(2, \mathbb{C})$ -Zusammenhang auf M und einem Basispunkt z_0 beschreibt die Holonomie eine Darstellung der Fundamentalgruppe

$$\pi_1(M) \rightarrow SL(2, \mathbb{C}).$$

Ist M ein Torus, so gilt $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Für gewählte Erzeuger der abelschen Gruppe $\pi_1(M)$ entspricht eine Darstellung zwei kommutierenden $SL(2, \mathbb{C})$ -Matrizen, die im Falle der oben beschriebenen Familie von flachen Zusammenhängen $(\nabla_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ holomorph von λ abhängen. Sind $H(\lambda)$ und $\tilde{H}(\lambda)$ Matrizen, die der Holonomie um die zwei Erzeuger von $\pi_1(M)$ entsprechen, so gilt

$$\det(H(\lambda)) = \det(\tilde{H}(\lambda)) = 1, \quad H(\lambda)\tilde{H}(\lambda) = \tilde{H}(\lambda)H(\lambda).$$

Die Holonomie-Matrix $H(\lambda)$ hängt von der Wahl des Basispunkts $z_0 \in M$ ab. Dies gilt jedoch nicht für ihre Konjugationsklassen und somit insbesondere für ihre Eigenwerte.

Da $\det(H(\lambda)) = 1$, erhält man für die Eigenwerte μ und μ^{-1} von $H(\lambda)$ das folgende

Lemma 11. Die Eigenwerte μ und μ^{-1} von $H(\lambda)$ erfüllen die Gleichung

$$\mu^2 - h(\lambda)\mu + 1 = 0,$$

wobei $h(\lambda) = \text{tr}(H(\lambda))$.

Beweis. Für 2×2 -Matrizen gilt die Formel

$$\det(A) = \frac{1}{2} (\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)).$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} 0 = \det(H(\lambda) - \mu \mathbb{1}) &= \frac{1}{2} (\text{tr}(H(\lambda) - \mu \mathbb{1})^2 - \text{tr}((H(\lambda) - \mu \mathbb{1})^2)) \\ &= \frac{1}{2} ((\text{tr}(H(\lambda)) - 2\mu)^2 - \text{tr}(H(\lambda)^2 - 2\mu H(\lambda) + \mu^2 \mathbb{1})) \\ &= \frac{1}{2} (\text{tr}(H(\lambda))^2 - 4\mu \text{tr}(H(\lambda)) + 4\mu^2 \\ &\quad - \text{tr}(H(\lambda)^2) + 2\mu \text{tr}(H(\lambda)) - 2\mu^2) \\ &= \frac{1}{2} (\text{tr}(H(\lambda))^2 - \text{tr}(H(\lambda)^2)) - \mu \text{tr}(H(\lambda)) + \mu^2 \\ &= \mu^2 - h(\lambda)\mu + 1, \end{aligned}$$

da $\det(H(\lambda)) = 1$ ist. □

Für die noch folgenden Resultate benötigen wir noch das analytische Fredholm-Theorem.

Definition 6. Seien X und Y Banach-Räume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt kompakt, wenn beschränkte Mengen aus X auf präkompakte Mengen aus Y abgebildet werden.

Satz 6. Sei D eine offene, zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{C} , \mathcal{H} ein Hilbertraum und $f : D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine analytische Operator-wertige Funktion, so dass $f(z)$ für alle $z \in D$ kompakt ist. Dann gilt entweder

(a) $(\mathbb{1} - f(z))^{-1}$ existiert für kein $z \in D$,

oder

(b) $(\mathbb{1} - f(z))^{-1}$ existiert für alle $z \in D \setminus S$, wobei S eine diskrete Teilmenge von D ist.

Beweis. Siehe [6], Theorem VI.14. □

Aus dem obigen Lemma folgt sofort, dass die Eigenwerte durch

$$\mu = \frac{1}{2} \left[h(\lambda) \pm \sqrt{h(\lambda)^2 - 4} \right]$$

gegeben sind. Dies ist eine zweiwertige Funktion auf \mathbb{C}^* mit Verzweigungspunkten an den Nullstellen ungerader Ordnung von $h(\lambda)^2 - 4$. Eine Hauptzutat, um zu zeigen, dass die Spektralkurve endliches Geschlecht hat, ist es zu untersuchen, ob es nur endlich viele solcher Verzweigungspunkte gibt. Dies leistet die folgende

Proposition 6. Seien (∇_H, ϕ') der induzierte Zusammenhang und das Higgsfeld auf einem Torus M für eine konforme Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$. Seien außerdem $H(\lambda)$ und $\tilde{H}(\lambda)$ die Holonomie-Matrizen des flachen Zusammenhangs $\nabla_\lambda = d + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$ um die zwei Erzeuger von $\pi_1(M)$. Dann besitzt die Funktion

$$h(\lambda)^2 - 4 \quad \text{mit} \quad h(\lambda) = \text{tr}(H(\lambda))$$

nur endlich viele Nullstellen ungerader Ordnung in \mathbb{C}^* .

Beweis. Sei $\lambda = \lambda_0$ eine Nullstelle ungerader Ordnung von $h(\lambda)^2 - 4$ und setze $t = \lambda - \lambda_0$. Da $H(\lambda)$ und $\tilde{H}(\lambda)$ holomorph von λ abhängen, besitzen sie eine Potenzreihenentwicklung um $\lambda = \lambda_0$:

$$H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i, \quad \tilde{H}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i t^i.$$

Es gilt $h(\lambda_0)^2 = 4$, d.h. $\text{tr}(A_0) = \pm 2$. Sei zunächst $\text{tr}(A_0) = 2$. Dann folgt ausgehend von der Gleichung $\mu + \frac{1}{\mu} = 2$ für die Eigenwerte von A_0 , dass gilt $\mu = 1$.

Wenn $h(\lambda)^2 - 4$ eine Nullstelle der Ordnung $(2m+1)$ bei $\lambda = \lambda_0$ hat, dann gilt

$$(2 + t \cdot \text{tr}(A_1) + t^2 \cdot \text{tr}(A_2) + \dots)^2 = 4 + t^{2m+1} \cdot g(t),$$

wobei g eine Funktion mit $g(0) \neq 0$ ist. Koeffizientenvergleich ergibt

$$\text{tr}(A_i) = 0, \quad 0 < i < 2m+1 \quad \text{und} \quad \text{tr}(A_{2m+1}) \neq 0. \quad (*)$$

1. Fall: $A_0 = 1$. Dann folgt aus

$$\det(H(t)) = \det(A_0 + t \cdot A_1 + t^2 \cdot A_2 + \dots) = 1$$

mit

$$\begin{aligned} \det(H(\lambda) - \mathbb{1}) &= \frac{1}{2} (\text{tr}(H(\lambda) - \mathbb{1})^2 - \text{tr}((H(\lambda) - \mathbb{1})^2)) \\ &= \frac{1}{2} ((\text{tr}(H(\lambda)) - 2)^2 - \text{tr}(H(\lambda)^2 - 2H(\lambda) + \mathbb{1})) \\ &= \frac{1}{2} (\text{tr}(H(\lambda))^2 - \text{tr}(H(\lambda)^2)) - 2\text{tr}(H(\lambda)) + 2 + \text{tr}(H(\lambda)) - 1 \\ &= 2 - \text{tr}(H(\lambda)), \end{aligned}$$

dass gilt

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \cdot \text{tr}(A_i) + \det \left(\sum_{i=1}^{\infty} t^i A_i \right) = 1.$$

Indem wir $(*)$ benutzen erhalten wir

$$\sum_{i=2m+1}^{\infty} t^i \cdot \text{tr}(A_i) + \det \left(\sum_{i=1}^{\infty} t^i A_i \right) = 0.$$

Sei $A_i = 0$ für $0 < i < k$ und $A_k \neq 0$. Dann gilt aufgrund der obigen Gleichung

$$\sum_{i=2m+1}^{\infty} t^i \cdot \text{tr}(A_i) + \det \left(\sum_{i=k}^{\infty} t^i A_i \right) = 0$$

und somit

$$t^{2m+1} \cdot \text{tr}(A_{2m+1}) + \sum_{i=2m+2}^{\infty} t^i \cdot \text{tr}(A_i) + t^{2k} \det \left(\sum_{i=k}^{\infty} t^{i-k} A_i \right) = 0.$$

Ausgehend von Jacobis Formel zur Berechnung der Ableitung der Determinante folgt zunächst

$$\begin{aligned} \det \left(\sum_{i=k}^{\infty} t^i A_i \right) &= \det \left(t^k A_k + t \sum_{i=k+1}^{\infty} t^{i-1} A_i \right) \\ &= t^{2k} \det(A_k) + \text{tr} \left(t^k \text{adj}(A_k) \sum_{i=k+1}^{\infty} t^{i-1} A_i \right) \cdot t + O(t^{2k+1}) \\ &= t^{2k} \det(A_k) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \text{tr}(\text{adj}(A_k) A_i) t^{k+i} + O(t^{2k+1}) \end{aligned}$$

und somit

$$t^{2m+1} \cdot \text{tr}(A_{2m+1}) + \sum_{i=2m+2}^{\infty} t^i \cdot \text{tr}(A_i) + t^{2k} \det(A_k) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \text{tr}(\text{adj}(A_k) A_i) t^{k+i} + O(t^{2k+1}) = 0.$$

Da $\text{tr}(A_{2m+1}) \neq 0$ gilt, muss es einen Term in $\det \left(\sum_{i=k}^{\infty} t^i A_i \right)$ geben, der sich mit $\text{tr}(A_{2m+1})$ weghebt, d.h. $2m+1 > 2k$. Somit muss $\det(A_k)$ verschwinden, da $t^{2k} \det(A_k)$ der Term mit der niedrigsten Ordnung ist. Außerdem gilt $k < 2k < 2m+1$ und somit folgt mit (*), dass $\text{tr}(A_k) = 0$ sein muss.

Somit ist $A_k \neq 0$, aber $\det(A_k) = \text{tr}(A_k) = 0$, d.h.

$$A_k = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$$

2. Fall: $A_0 \neq 1$. Da die Eigenwerte von A_0 beide 1 sind, muss gelten

$$A_0 = D \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D^{-1}$$

Somit hat der erste nicht-skalare Koeffizient von $H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i$ in beiden Fällen immer einen eindeutigen Eigenraum.

Die Holonomie-Matrix $\tilde{H}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i t^i$ kommutiert mit $H(t)$, d.h. B_0 kommutiert mit dem ersten nicht-skalaren Koeffizienten von $H(t)$. Somit muss B_0 von der Form

$$B_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

sein. Da $\det(B_0) = 1$, folgt

$$B_0 = \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit haben A_0 und B_0 einen gemeinsamen Eigenraum mit Eigenwert 1 für A_0 und Eigenwert ± 1 für B_0 . Berücksichtigt man noch den Fall $\text{tr}(A_0) = -2$, so erhält man ± 1 als mögliche

Eigenwerte für A_0 und B_0 .

Betrachten man nun den Zusammenhang

$$\nabla_{\lambda_0} = d + \frac{1}{2}(1 + \lambda_0^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda_0)(1 - iH)\phi''$$

auf dem Vektorbündel V , so erhält durch Übergang zur 4-fachen Überlagerung des Torus, die durch Verdoppeln der Perioden des erzeugenden Gitters entsteht, einen flachen $SL(2, \mathbb{C})$ -Zusammenhang, so dass die Holonomie-Matrizen einen gemeinsamen Eigenraum zum Eigenwert $+1$ haben (die Vorzeichen bei A_0 und B_0 werden dadurch eindeutig).

Somit erhält man einen globalen (kovariant konstanten) Schnitt s von V , der die folgenden Gleichungen löst:

$$\begin{aligned}\partial^{\nabla_\lambda} s &:= \left(d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda_0^{-1})(1 + iH)\phi' \right) s = 0, \\ \bar{\partial}^{\nabla_\lambda} s &:= \left(d'' + \frac{1}{2}(1 + \lambda_0)(1 - iH)\phi'' \right) s = 0.\end{aligned}$$

1. Fall: Angenommen $\partial^{\nabla_\lambda} s = \left(d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda_0^{-1})(1 + iH)\phi' \right) s = 0$ hat eine nicht-verschwindende Lösung für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dann gilt dies insbesondere für $|\lambda| = 1$, d.h. λ ist von der Form $\lambda = e^{i\theta}$ und wir betrachten deshalb den flachen unitären Zusammenhang

$$\nabla_B = d + \frac{1}{2}(1 + e^{-i\theta})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})(1 - iH)\phi'',$$

so dass gilt $\partial^{\nabla_B} s = \left(d' + \frac{1}{2}(1 + e^{-i\theta})(1 + iH)\phi' \right) s = 0$. Wir wissen bereits, dass

$$0 = R^{\nabla_B} = \partial^{\nabla_B} \bar{\partial}^{\nabla_B} + \bar{\partial}^{\nabla_B} \partial^{\nabla_B}$$

gilt und erhalten somit $\partial^{\nabla_B} \bar{\partial}^{\nabla_B} s = 0$. Somit gilt

$$\int_M (\bar{\partial}^{\nabla_B} s, \bar{\partial}^{\nabla_B} s) = \int_M \partial^{\nabla_B} (\bar{\partial}^{\nabla_B} s, s) = 0,$$

unter Verwendung des Satzes von Stokes, und man erhält

$$\bar{\partial}^{\nabla_B} s = \left(d'' + \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})(1 - iH)\phi'' \right) s = 0,$$

d.h. s ist kovariant konstant und somit ein globaler flacher Schnitt von ∇_B . Somit wird durch die $SU(2)$ -Holonomie ein Vektor in sich selbst überführt, d.h. die Holonomie ist für alle θ mit $|e^{i\theta}| = |\lambda| = 1$ trivial:

$$H(\lambda) = \tilde{H}(\lambda) = \mathbb{1}, \quad |\lambda| = 1.$$

Da $H(\lambda)$ und $\tilde{H}(\lambda)$ holomorph von λ abhängen, folgt somit $H(\lambda) = \tilde{H}(\lambda) = \mathbb{1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, d.h. $h(\lambda) \equiv 2$ und man erhält keine Nullstellen ungerader Ordnung.

2. Fall: Wir nehmen nun an, dass der elliptische Operator

$$\partial^{\nabla_\lambda} := d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi'$$

invertierbar ist. Er hängt holomorph vom Parameter $\lambda \in \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ ab, so dass es nur endliche viele Werte für λ mit $|\lambda| \geq 1$ gibt, so dass

$$\partial^{\nabla_\lambda} s = \left(d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' \right) s = 0$$

gilt. Dies folgt aus der Tatsache, dass $d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi'$ ein elliptischer Operator ist. Für ein $\mu \notin \text{Spec}(d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi')$ ist $(d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi' - \mu \mathbb{1})^{-1}$ ein kompakter Operator. Außerdem gilt

$$d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda_0^{-1})(1 + iH)\phi' = (d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi' - \mu \mathbb{1}) + (\frac{1}{2}\lambda^{-1}(1 + iH)\phi' + \mu \mathbb{1})$$

sowie

$$\begin{aligned} & \left(d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi' - \mu \mathbb{1} \right)^{-1} \left(d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' \right) \\ &= \mathbb{1} + \left(d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi' - \mu \mathbb{1} \right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\lambda^{-1}(1 + iH)\phi' + \mu \mathbb{1} \right). \end{aligned}$$

Deshalb kann man für die Operator-wertige Funktion

$$f(\lambda^{-1}) := - \left(d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi' - \mu \mathbb{1} \right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\lambda^{-1}(1 + iH)\phi' + \mu \mathbb{1} \right)$$

das vorangegangene Theorem anwenden ($f(\lambda^{-1})$ ist als Produkt eines kompakten und eines beschränkten Operators kompakt) und erhält, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{1} - f(\lambda^{-1}) \\ &= \mathbb{1} + \left(d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi' - \mu \mathbb{1} \right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\lambda^{-1}(1 + iH)\phi' + \mu \mathbb{1} \right) \\ &= \left(d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi' - \mu \mathbb{1} \right)^{-1} \left(d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' \right) \end{aligned}$$

auf $(\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}) \setminus S$ invertierbar ist, wobei S eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ ist. Da $(d' + \frac{1}{2}(1 + iH)\phi' - \mu \mathbb{1})^{-1}$ offenbar invertierbar ist, muss $d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi'$ für eine diskrete Teilmenge von λ -Werten nicht-invertierbar sein, also insbesondere auch für $|\lambda| \geq 1$. Mit einem ähnlichen Argument folgt, dass der elliptische Operator

$$\bar{\partial}^{\nabla_\lambda} := d'' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi'',$$

der für $|\lambda| \leq 1$ holomorph von λ abhängt, nur für endlich viele Werte von λ mit $|\lambda| \leq 1$ nicht invertierbar ist. Insgesamt gibt es also nur endlich viele Werte λ_0 , so dass

$$\begin{aligned} \partial^{\nabla_\lambda} s &:= \left(d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda_0^{-1})(1 + iH)\phi' \right) s = 0, \\ \bar{\partial}^{\nabla_\lambda} s &:= \left(d'' + \frac{1}{2}(1 + \lambda_0)(1 - iH)\phi'' \right) s = 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist und die Behauptung ist gezeigt. □

Die folgende Proposition setzt die Holonomien zu den verschiedenen Erzeugern der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ zueinander in Beziehung.

Proposition 7. Sei die gleiche Situation wie in der vorherigen Proposition zugrunde gelegt und seien $h(\lambda)$ und $\tilde{h}(\lambda)$ die Spuren der Holonomien um die zwei Erzeuger der Fundamentalgruppe $\pi_1(M) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Dann entsprechen die Nullstellen ungerader Ordnung von $h^2(\lambda) - 4$ den Nullstellen ungerader Ordnung von $\tilde{h}^2(\lambda) - 4$, es sei denn $\tilde{H}(\lambda) \equiv \pm \mathbb{1}$.

Beweis. Es ist klar, dass $\tilde{h}^2(\lambda) - 4$ bei einer Nullstelle ungerader Ordnung von $h^2(\lambda) - 4$ ebenso verschwindet. Ist $\tilde{H}(\lambda) \equiv \pm \mathbb{1}$, so verschwindet dieser Ausdruck mit endlicher Ordnung an der Stelle $\lambda = \lambda_0$. Angenommen die Ordnung der Nullstelle von $\tilde{h}^2(\lambda) - 4$ ist gerade, also z.B. $2n$, dann lässt sich $\tilde{h}^2 - 4$ mit $t = \lambda - \lambda_0$ wie folgt schreiben

$$\tilde{h}^2 - 4 = t^{2n} \tilde{g}(t), \quad \text{wobei } \tilde{g}(0) \neq 0.$$

Die Eigenwerte erfüllen dann die Gleichung

$$\tilde{\mu} = \tilde{h} \pm t^n \frac{\sqrt{\tilde{g}(t)}}{2},$$

die sich als Potenzreihe in t entwickeln lässt. Wir wissen, dass Quotienten konvergenter Potenzreihen einen Körper bilden und bezeichnen diesen mit K . Dann ist $\tilde{H}(t)$ eine 2×2 -Matrix mit Einträgen und Eigenwerten in K , d.h. die Eigenvektoren sind ebenfalls aus K .

Die Einträge von $H(t)$ sind auch aus K und wir wissen, dass

$$H(t)\tilde{H}(t) = \tilde{H}(t)H(t).$$

Somit sind die Eigenvektoren von $\tilde{H}(t)$ auch Eigenvektoren von $H(t)$ und es folgt, dass $H(t)$ Eigenwerte in K besitzt. Nun ist aber λ_0 eine Nullstelle ungerader Ordnung von $h^2 - 4$, d.h.

$$h^2 - 4 = t^{2m+1}g(t) \quad \text{und} \quad \mu = h \pm t^{m+\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{g(t)}}{2}$$

und es folgt, dass $\tilde{h}^2 - 4$ ebenso eine Nullstelle ungerader Ordnung bei λ_0 besitzen muss, da $\mu \notin K$. \square

6 Die Spektralkurve

Wir wollen Hilfsmittel aus der algebraischen Geometrie verwenden um $h(\lambda)$ genauer zu untersuchen. Hierfür müssen wir das Verhalten von $h(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow 0$ bzw. $\lambda \rightarrow \infty$ untersuchen um von \mathbb{C}^* zur Kompaktifizierung \mathbb{CP}^1 übergehen zu können. Unter Ausnutzung der quaternionischen Struktur auf dem Vektorbündel V erhält man für die Holonomie-Matrix $H(\lambda)$ die Beziehung

$$H(\bar{\lambda}^{-1})^* = H(\lambda)^{-1}.$$

Für die Spur der Holonomie folgt damit $h(\bar{\lambda}^{-1}) = \overline{h(\lambda)}$, so dass es genügt, das Verhalten von $h(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow 0$ zu untersuchen um gleichzeitig das Verhalten für $\lambda \rightarrow \infty$ zu verstehen. Der im Falle einer konformen Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{S}^3$ relevante Fall wird in [3] mit der Proposition 3.10 behandelt.

Proposition 8. Seien (∇_H, ϕ') der induzierte Zusammenhang und das Higgsfeld einer konformen Immersion nach \mathbb{S}^3 und sei $c = -\kappa^2 dz^2 \in H^0(M, K^2)$ das Hopf-Differential (bis auf einen Vorfaktor). Dann gibt es eine punktierte Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$, in der die Eigenwerte $\mu(\lambda)$ und $\tilde{\mu}(\lambda)$ der Holonomien

$$\begin{aligned}\pm \log \mu(\lambda) &= \kappa \lambda^{-\frac{1}{2}} + ik\pi + \lambda^{\frac{1}{2}} b(\lambda^{\frac{1}{2}}), \\ \pm \log \tilde{\mu}(\lambda) &= \tau \kappa \lambda^{-\frac{1}{2}} + i\tilde{k}\pi + \lambda^{\frac{1}{2}} \tilde{b}(\lambda^{\frac{1}{2}}), \quad (k, \tilde{k} \in \mathbb{Z}),\end{aligned}$$

erfüllen mit $M = \mathbb{C}/\Gamma$, wobei Γ das durch $z = 1$ und $z = \tau \in \mathbb{H}$ erzeugte Gitter in \mathbb{C} ist.

Beweisskizze. Wir betrachten das holomorphe Bündel \tilde{V} auf $M \times \mathbb{C}$, welches durch die holomorphe Struktur

$$\bar{\partial}^{\nabla_\lambda} := d'' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$$

definiert wird. Wir wissen bereits, dass für die Holonomie nicht $H(\lambda) \equiv \mathbb{1}$ gilt und dass wir eine punktierte Umgebung \dot{U} der $0 \in \mathbb{C}$ finden können, so dass $h(\lambda)^2 - 4$ auf \dot{U} keine Nullstellen ungerader Ordnung besitzt. Somit können wir lokal holomorphe Eigenwerte und Eigenräume der Holonomie-Matrizen definieren und schreiben deshalb

$$V_\lambda = L_\lambda \oplus L_\lambda^*,$$

wobei L_λ und L_λ^* die Eigenräume zum gemeinsamen Eigenwert 1 der beiden Holonomie-Matrizen $H(\lambda), \tilde{H}(\lambda)$ sind.

Außerdem können wir annehmen, dass der Operator $\bar{\partial}^{\nabla_\lambda} = d'' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$ auf V_λ für $\lambda \in \dot{U}$ invertierbar ist. Auf L_λ ist ein flacher Zusammenhang definiert, d.h. aus der Invertierbarkeit folgt, dass $L_\lambda \otimes L_\lambda$ nicht holomorph trivial ist.

Betrachte nun das Bündel

$$\text{End}_0 V_\lambda \simeq L_\lambda^2 \oplus 1 \oplus L_\lambda^{-2}$$

durch die kovariant konstante Zerlegung bzgl. des Zusammenhangs $\nabla_\lambda = d + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$. Der kovariant konstante Schnitt von $\text{End}_0 V_\lambda$, der V_λ in die direkte Summe $V_\lambda = L_\lambda \oplus L_\lambda^*$ zerlegt, ist holomorph und da L_λ^2 holomorph nicht-trivial ist, wird durch diesen Schnitt der 1-dimensionale Raum $H^0(M, \text{End}_0 V_\lambda)$ erzeugt.

Wir wenden uns wieder dem Bündel \tilde{V} auf $M \times \mathbb{C}$ zu und betrachten die direkte Bild-Garbe von $\text{End}_0 \tilde{V}$. Für $\lambda \neq 0$ ist $\dim H^0(M, \text{End}_0 V_\lambda) = 1$ und man erhält deshalb ein holomorphes Geradenbündel auf U . Sei nun ψ ein lokaler holomorpher Schnitt, d.h.

$$\psi(z, \lambda) = \psi_0(z) + \lambda \psi_1(z) + \lambda^2 \psi_2(z, \lambda),$$

wobei ψ_2 holomorph ist. Für $\lambda \neq 0$ gilt

$$\bar{\partial}^{\nabla_\lambda} \psi(z, \lambda) = (d' + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi')(\psi_0(z) + \lambda \psi_1(z) + \lambda^2 \psi_2(z, \lambda)) = 0.$$

Wir wollen den Torus M durch \mathbb{C}/Γ beschreiben, wobei Γ das durch $z = 1$ und $z = \tau \in \mathbb{H}$ erzeugte Gitter in \mathbb{C} ist. Da $\phi' dz$ nicht verschwindet, können wir aufgrund der Flachheit von ψ annehmen, dass $\psi_0 = \phi'$ gilt. Dann gilt

$$\det \psi = \det \phi' - \lambda \text{tr}(\phi' \psi_1) + \dots = -\lambda \text{tr}(\phi' \psi_1) + \dots,$$

d.h. wir können keine Eigenwerte von ψ finden, die holomorph in λ sind, wenn $\text{tr}(\phi'\psi_1) \neq 0$. Dies ist tatsächlich immer der Fall, da man durch die in Proposition 5 beschriebene lokal holomorphe Trivialisierung erreichen kann, dass ∂^{∇_H} die Gestalt

$$\partial^{\tilde{\nabla}_H} = Udz = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_z & e^{-u}Q \\ -2(H-i)e^u & u_z \end{pmatrix} dz$$

hat. Dann folgt $U = -\psi_1 + k\phi'$ und bzgl. der Trivialisierung $-\text{tr}(\phi'\psi_1) = \text{tr}(\phi'U) = C \cdot Qdz^2$, d.h. $\det \psi = -\kappa^2\lambda + \dots$. Für $\eta^2 = \lambda$ erhält man somit

$$\det \psi = -\kappa^2\eta^2(1 + a_1\eta^2 + \dots),$$

d.h. für ψ sind die holomorph von η abhängigen Eigenwerte $\pm\kappa\eta(1 + \dots)$ auf einer 2-fachen Überlagerung $\widehat{U} \subset \mathbb{C}$ von $U \subset \mathbb{C}$ wohldefiniert. Somit existiert ein wohldefiniertes holomorphes Geradenbündel L_η über $M \times U$, das für $\eta \neq 0$ der Eigenraum der Holonomie des flachen Zusammenhangs

$$d + \frac{1}{2}(1 + \eta^{-2})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \eta^2)(1 - iH)\phi''$$

ist. Sei $s(z, \eta) = s_0(z) + \eta s_1(z) + \eta^2 s_2(z, \eta)$ ein lokaler, nicht-verschwindender holomorpher Schnitt. Dann gilt

$$(d' + \frac{1}{2}(1 + \eta^{-2})(1 + iH)\phi')(s_0 + \eta s_1 + \dots) = \theta(s_0 + \eta s_1 + \dots)$$

für eine $(1, 0)$ -Form $\theta = \frac{a_{-2}}{\eta^2} + \frac{a_{-1}}{\eta} + a_0 + \dots$. Aufgrund der obigen Gleichungen erhält man $a_{-2} = 0$ sowie $a_{-1} = -\kappa dz$ und nach Integration bzgl. der beiden Erzeuger der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$

$$\pm \log \mu(\eta) = -\frac{\kappa}{\eta} + a + \dots, \quad \pm \log \tilde{\mu}(\eta) = -\frac{\kappa\tau}{\eta} + \tilde{a} + \dots$$

Da der flache Zusammenhang $d + \frac{1}{2}(1 + \eta^{-2})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \eta^2)(1 - iH)\phi''$ nur von η^2 abhängt, folgt

$$\log \mu(-\eta) = \pm \log \mu(\eta) + 2k\pi i,$$

d.h. $a = -a \pmod{2\pi i\mathbb{Z}}$ bzw. $a, \tilde{a} \in \pi i\mathbb{Z}$. □

Ausgehend von den bisherigen Daten können wir nun einer konformen Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$ ein Objekt aus der algebraischen Geometrie - eine hyperelliptische Kurve - zuordnen.

Definition 7. Seien (∇_H, ϕ') die einem Torus M zugeordneten Größen bzgl. einer konformen Immersion $f : M \rightarrow SU(2)$ und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \bar{\alpha}_1^{-1}, \dots, \bar{\alpha}_n^{-1}$ die Nullstellen ungerader Ordnung von $h(\lambda)^2 - 4$. Dann wird durch die zweifache Überlagerung

$$\pi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{CP}^1,$$

die bei $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \bar{\alpha}_1^{-1}, \dots, \bar{\alpha}_n^{-1}, 0$ und ∞ verzweigt ist, die assoziierte *hyperelliptische Kurve* $\hat{\Sigma}$ definiert.

Bemerkung 9.

- (a) Die Funktionen $\mu(\lambda)$ und $\tilde{\mu}(\lambda)$ sind einwertig auf $\hat{\Sigma} \setminus \pi^{-1}\{0, \infty\}$; sie sind die Eigenwerte der Holonomie-Matrizen $H(\lambda)$ und $\tilde{H}(\lambda)$.

- (b) Für einen fest gewählten Punkt $x \in M$ kann man die Holonomie-Matrix $H_x(\lambda)$ betrachten, die durch Parallel-Verschiebung des flachen Zusammenhangs

$$\nabla_\lambda := d + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$$

entlang geschlossener Kurven durch x , die in der Homotopie-Klasse der Erzeuger von $\pi_1(M)$ liegen, entsteht. Im Falle einer konformen, harmonischen Abbildung wird durch

$$E_x(\lambda) \subset \ker(H_x(\lambda) - \mu(\lambda)) \quad \text{für } \lambda \in \hat{\Sigma}$$

auf $\hat{\Sigma} \setminus \pi^{-1}\{0, \infty\}$ ein holomorphes Geradenbündel (das sogenannte Eigenraum-Bündel) definiert, welches sich auf $\lambda = 0, \infty$ fortsetzt und somit ein holomorphes Geradenbündel auf der ganzen hyperelliptischen Kurve $\hat{\Sigma}$ ergibt, genauer: L_x ist der Eigenraum von $\phi'_x : V_x \rightarrow V_x \otimes K_x$.

Abschließend sollen noch ein paar grundlegende Eigenschaften der hyperelliptischen Kurve genannt werden.

Bemerkung 10. Sei $\hat{\Sigma}$ die zu (∇_H, ϕ') assoziierte hyperelliptische Kurve auf einem Torus M . Dann gilt:

- (i) $\hat{\Sigma}$ verfügt über eine anti-holomorphe Involution $\rho : \hat{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$, die mit $\pi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ vertauscht und die antiholomorphe Involution $\lambda \mapsto \bar{\lambda}^{-1}$ auf \mathbb{CP}^1 induziert.
- (ii) Die hyperelliptische Involution $\sigma : \hat{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$, welche die zwei Blätter der Überlagerung vertauscht, vertauscht mit $\pi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ und hat keine reellen Fixpunkte (die Fixpunkte von σ sind die Verzweigungspunkte von $\pi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{CP}^1$).
- (iii) Die durch $\theta = d \log \mu = \frac{d\mu}{\mu}$ bzw. $\tilde{\theta} = d \log \tilde{\mu} = \frac{d\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}$ definierten Differentiale der zweiten Art mit doppelten Polstellen bei $\pi^{-1}(0)$ und $\pi^{-1}(\infty)$ erfüllen

$$\sigma^* \theta = -\theta; \quad \sigma^* \tilde{\theta} = -\tilde{\theta}; \quad \rho^* \theta = -\bar{\theta}; \quad \rho^* \tilde{\theta} = -\bar{\tilde{\theta}}.$$

- (iv) Jede Periode von θ und $\tilde{\theta}$ ist von der Form $2in\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Wir kommen nun zur Definition der Spektralkurve Σ , deren Normalisierung die hyperelliptische Kurve $\hat{\Sigma}$ ist. Betrachte hierfür das Eigenraum-Geradenbündel E_x auf $\hat{\Sigma}$. Sowohl E_x als auch $\sigma^* E_x$ sind Unterbündel des trivialen Bündels

$$\hat{\Sigma} \times V_x \rightarrow \hat{\Sigma}$$

und durch Anwendung der symplektischen Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V erhält man einen holomorphen Schnitt ω des Geradenbündels $E_x^* \otimes \sigma^* E_x^*$. Durch die Definition von ω über die symplektische Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt, dass ω an den Punkten $p \in \hat{\Sigma}$ verschwindet, an denen E_x und $\sigma^* E_x$ übereinstimmen. Es stellt sich die Frage nach der Multiplizität der auftretenden Verzweigungspunkte sowie dem Vorhandensein anderer Punkte, für die ω verschwindet. Es gilt somit ausgehend von der Gleichung für die hyperelliptische Kurve

$$\hat{\Sigma} : \eta^2 = p(\lambda)$$

zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Betrachte einen Punkt λ_i , der kein Verzweigungspunkt von $\pi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ ist, so dass $\beta_i = \pi(\lambda_i)$ mit $\beta_i \neq 0, \infty$ und ω mit der Ordnung m_i verschwindet. Dann lässt sich das Eigenraum-Bündel auf der singulären Kurve (vergleiche [3])

$$\eta^2 = (\lambda - \beta_i)^{2m_i} p(\lambda)$$

definieren. Nimmt man die anderen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von ω hinzu, die keine Verzweigungspunkte von $\pi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ sind, so erhält man die singuläre Kurve

$$\eta^2 = \prod_{i=1}^k (\lambda - \beta_i)^{2m_i} p(\lambda).$$

2. Fall: Der Schnitt ω verschwindet an den Verzweigungspunkten von $\pi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{CP}^1$; es kann jedoch sein, dass dies mit einer höheren Multiplizität als 1 geschieht (die aufgrund der Definition zwingend ungerade sein muss). Angenommen ω verschwinde über jedem Verzweigungspunkt α_i (und damit auch für $\bar{\alpha}_i^{-1}$) mit Multiplizität $2n_i + 1$. Dann lässt sich auf ähnliche Weise wie zuvor das Eigenraum-Bündel E_x auf der singulären Kurve

$$\eta^2 = \prod_{i=1}^l (\lambda - \alpha_i)^{2n_i} (\lambda - \bar{\alpha}_i^{-1})^{2n_i} p(\lambda)$$

definieren.

Es sei noch angemerkt, dass $\lambda = 0, \infty$ keinen weiteren Beitrag zu den Nullstellen von ω leisten und somit in diesem Sinne keine Singularitäten produzieren. Abschließend lässt sich nun die Definition der Spektralkurve geben.

Definition 8. Ist $\eta^2 = p(\lambda)$ die zu (∇^H, ϕ') assoziierte hyperelliptische Kurve und ω der Schnitt des Geradenbündels $E_x^* \otimes \sigma^* E_x^*$, der an den Verzweigungspunkten α_i und $\bar{\alpha}_i^{-1}$ mit Multiplizität $2n_i + 1$ und an den verbleibenden Punkten β_1, \dots, β_k mit Multiplizität m_i verschwindet, dann wird die *Spektralkurve* durch die Gleichung

$$\eta^2 = p(\lambda)q(\lambda)r(\lambda)$$

definiert, wobei $q(\lambda)$ ein Schnitt ist, der mit Multiplizität $2n_i + 1$ an den Verzweigungspunkten $\alpha_i, \bar{\alpha}_i^{-1}$ ($1 \leq i \leq l$) verschwindet und $r(\lambda)$ ein Schnitt ist, der mit Multiplizität $2m_i$ bei $\pi(\beta_i)$ verschwindet.

Bemerkung 11.

- (a) Sind die einzigen Punkte, an denen die Eigenraum-Bündel übereinstimmen, die Verzweigungspunkte mit Multiplizität 1, so stimmen die hyperelliptische Kurve und die Spektralkurve überein.
- (b) Da die Eigenräume der Holonomie für $\lambda \neq 0, \infty$ an verschiedenen Punkten $x, y \in M$ durch Parallel-Transport des Zusammenhangs $\nabla_\lambda := d + \frac{1}{2}(1 + \lambda^{-1})(1 + iH)\phi' + \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - iH)\phi''$ auseinander hervorgehen, ist die Spektralkurve unabhängig von der Wahl des Basispunktes x .

Literatur

- [1] Dieudonné, Jean, *Grundzüge der modernen Analysis*, 9 Bände, vieweg, 1960.
- [2] Gunning, R.C., *Lectures on vector bundles over Riemann surfaces*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1967.
- [3] Hitchin, N.J., *Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere*, J. Differential Geom. 31, 1990, S. 627-710.
- [4] Knopf, Markus, *Compact surfaces of constant mean curvature in the 3-sphere*, Diplomarbeit, 2008.
- [5] Petersen, Peter, *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.
- [6] Reed, Michael; Simon, Barry, *Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
- [7] Sabbah, Claude, *Isomonodromic Deformations and Frobenius Manifolds, An Introduction*, Universitext, Springer, 2007.