

Differentialgleichungen

FSS 09

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1	Gewöhnliche Differentialgleichungen	5
1.1	Einführung	5
1.2	Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme	8
1.3	Lineare Differentialgleichungen	10
1.4	Existenz und Eindeutigkeit	22
1.5	Elementare Lösungsverfahren	30
2	Partielle Differentialgleichungen	35
2.1	Beispiele	35
2.1.1	Lineare Differentialgleichungen	35
2.1.2	Nichtlineare Differentialgleichungen	37
2.1.3	Lineare Differentialgleichungssysteme	39
2.1.4	Nichtlineare Differentialgleichungssysteme	40
2.2	Der Gaußsche Satz	41
2.3	Existenz von Lösungen	43
2.4	Regularität von Lösungen	44
2.5	Anfangswert und Randwertprobleme	44
3	Differentialgleichungen erster Ordnung	45
3.1	Homogene Transportgleichung	45
3.2	Inhomogene Transportgleichung	46
3.3	Methode der Charakteristik	47
4	Laplacegleichung	53
4.1	Fundamentallösungen	53
4.2	Mittelwerteigenschaften	56
4.3	Maximumprinzip	57
4.4	Greensche Funktionen	58
4.5	Dirichlet's Prinzip	63

5	Wärmeleitungsgleichung	65
5.1	Fundamentallösung	65
5.2	Inhomogenes Anfangswertproblem.	68
5.3	Mittelwerteigenschaft	69
5.4	Maximumprinzip	71
5.5	Wärmeleitungskern	73
5.6	Spektraltheorie und Wärmeleitungsgleichung	76
5.7	Wärmeleitungskern von S^1	79
5.8	Wärmeleitungskern von $[-1, 1]$	80
6	Wellengleichung	83
6.1	D'Alembert's Formel für $n = 1$	83
6.2	Sphärische Mittelwerte in der Wellengleichung	86
6.3	Lösung für $n = 3$	88
6.4	Lösung für $n = 2$	90
6.5	Lösung in ungeraden Dimensionen	91
6.6	Lösung in geraden Dimensionen	95
6.7	Inhomogene Wellengleichung	97
6.8	Energiemethoden	99

Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. Wenn diese Funktionen von mehreren Variablen abhängen, dann sind die Ableitungen, die in der entsprechenden Differentialgleichung mit der Funktion in Beziehung gebracht werden, partielle Ableitungen. Dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen. Typischerweise sind Differentialgleichungen im folgenden Sinne *lokale* Gleichungen, dass sie nur die Werte einer gesuchten Funktion und endlich vieler Ableitungen für *einen* Wert der Variablen miteinander in Beziehung bringen. Mit Differentialgleichungen werden also im Allgemeinen Gleichungen von der folgenden Form bezeichnet

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0.$$

Hierbei ist $x \mapsto u(x)$ die gesuchte Funktion, die auch vektorwertig sein kann, und $x \mapsto D^k u(x)$ bezeichnet die vektorwertige Funktion aller k -ten (partiellen) Ableitungen von u nach den Variablen x . Zuletzt ist F eine möglicherweise vektorwertige Funktion.

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen, so dass auch nur die Ableitungen nach einer Variablen auftauchen.

Definition 1.1. *Differentialgleichungen, in denen nur die Ableitungen nach einer Variablen auftauchen, heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt, um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall eines Punktteilchens im

Schwerefeld nehmen die Newton'schen Gleichungen folgende Form an:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -mg.$$

In dieser Gleichung taucht nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von u des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential- und Integralrechnung schon kennen:

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der linken und rechten Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.2. *Eine Lösung ist eine Funktion u , die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen existieren, und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

In der Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -mg$$

hängen m (die Masse des Teilchens) und g (das Schwerefeld) nicht von t ab. Deshalb ist die Differentialgleichung äquivalent zu

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -g.$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite integrieren erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\dot{u}(t) - \dot{u}(t_0) = -g(t - t_0) \text{ bzw. } \dot{u}(t) = \dot{u}(t_0) - g(t - t_0).$$

Nach nochmaligem Integrieren erhalten wir schließlich

$$u(t) = u(t_0) + \dot{u}(t_0)(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Die Funktion $u(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + u_1(t - t_0) + u_0$ ist auf \mathbb{R} unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\frac{du}{dt}(t) = -g(t - t_0) + u_1 \text{ und } \frac{d^2 u}{dt^2}(t) = -g.$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$u(t) = -\frac{g(t-t_0)^2}{2} + u_1(t-t_0) + u_0, \text{ wobei } u(t_0) = u_0 \text{ und } \frac{du}{dt}(t_0) = u_1.$$

Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.3. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung $m\frac{d^2u}{dt^2} = -gm$ ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die Werte der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt t_0 interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch $(u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$. Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes (u_0, u_1) gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch*

$$u(t) = -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + u_1(t-t_0) + u_0.$$

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen in der Natur. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir dann aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs-)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist dann gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da wir uns typischerweise auch die Funktionswerte vorgeben, also die Nullte-Ableitung, sollten wir im Allgemeinen alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben.

Definition 1.4. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.5. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung u einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n , die zu einem gegebenen Wert t_0 der Variablen t (nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten $n-1$ Ableitungen die Werte*

$$u(t_0) = u_0, \frac{du}{dt}(t_0) = u_1, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t_0) = u_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solches Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich heraus, dass manche dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.6. (i) *Das Anfangswertproblem $(\frac{du}{dt})^2 = 4u$ mit $u(0) = 0$ hat offenbar die Lösungen*

$$u(t) = \begin{cases} (t-b)^2 & \text{für } b < t \\ 0 & \text{für } -a \leq t \leq b \\ (t+a)^2 & \text{für } t < -a \end{cases}$$

Hier sind a und b zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen, die beide auch ∞ sein können.

(ii) *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem $\frac{du}{dt} = f$ mit $u(0) = 0$ keine Lösung.*

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) eine Stammfunktion. Wenn nämlich F eine solche Stammfunktion wäre, dann wäre $x \mapsto F(x)$ monoton wachsend und $x \mapsto F(x) - x$ monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muss für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ entweder gelten

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F , dass F zwischen x_1 und x_2 konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von $x \mapsto F(x) - x$, dass diese Funktion zwischen x_1 und x_2 konstant ist. Also ist die Ableitung von F zwischen x_1 und x_2 entweder konstant gleich 0 oder konstant gleich 1. Damit ist F keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.

1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Im einfachsten Fall sind die Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen soll, reelle Funktionen sind. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0,$$

wobei

$$f : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei haben wir angenommen, dass nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wenn wir jetzt \mathbb{R}^m -wertige Funktionen u betrachten, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.7. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem von obiger Form lässt sich durch Vergrößerung von m auf $m \cdot n$ in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$ zu einer $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ -wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}(u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) = (\dot{u}, \dots, u^{(n-1)}, f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$u(t_0) = u_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$$

über in

$$(u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})(t_0) = (u_0, \dots, u_{n-1}). \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Im Folgenden werden wir uns also bei der Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme erster Ordnung beschränken können.

Beispiel 1.8. Die Differentialgleichung $m \frac{d^2 u}{dt^2} = -gm$ ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.3 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.9. Eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hierbei ist u eine gesuchte Funktion von I mit Werten in einem Vektorraum V (z.B. \mathbb{K}^n) und A eine Abbildung von I in die linearen Abbildungen von V auf V (oder im Falle eines normierten Vektorraumes $\mathcal{L}(V)$, die linearen stetigen Abbildungen von V nach V). Im Fall von $V = \mathbb{K}^n$ können wir $\mathcal{L}(V)$ mit den $n \times n$ Matrizen $\mathbb{K}^{n \times n}$ identifizieren und V mit den Spaltenvektoren in \mathbb{K}^n . Dann ist $A(t)u(t)$ das Matrix-Produkt der $n \times n$ -Matrix $A(t)$ mit dem Spaltenvektor $u(t)$, also wieder ein Spaltenvektor in \mathbb{K}^n . Schließlich ist b eine Abbildung von I nach V . Wenn $b(t) = 0$ ist, dann heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn A nicht von t abhängt, also als Abbildung konstant ist, heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nicht autonom.

Satz 1.10. Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über \mathbb{K} . Wenn also u und \tilde{u} Lösungen sind, dann sind auch $u + \tilde{u}$ und λu für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.

Beweis: Seien u und \tilde{u} zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{u}}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t)$, dann erfüllt $u - \tilde{u}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)(u(t) - \tilde{u}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden homogenen Systems. **q.e.d.**

Einer der wichtigsten mathematischen Hilfsmittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.11. (Banachscher Fixpunktsatz) *Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine Lipschitz-stetige Abbildung von X nach X mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n -fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0), f^l(x_0)) \\ &\leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n}) \frac{L^n}{1 - L} d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{L^n}{1 - L} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Weil $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f . Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1 - L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

Satz 1.12. (*Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems*). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Teilintervall von \mathbb{R} und $A : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung von \mathbb{R} in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V . Außerdem sei $b : I \rightarrow V$ stetig. Dann besitzt für jedes $u_0 \in V$ und jedes $t_0 \in I$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$ mit $u(t_0) = u_0$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $u : I \rightarrow V$.

Bemerkung 1.13. Jede Lösung der Differentialgleichung muss differenzierbar sein und damit auch stetig. Dann muss sie sogar stetig differenzierbar sein. Deshalb gibt es also auch nur genau eine Lösung.

Beweis: Sei $[\alpha, \beta] \subset I$ ein kompaktes Teilintervall von I , das t_0 enthält. Weil A auch auf $[\alpha, \beta]$ stetig ist, ist A auf $[\alpha, \beta]$ beschränkt und $\|A\|_\infty = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|A(t)\| < \infty$. Wir nehmen zunächst an, dass $L = (\beta - \alpha)\|A\|_\infty$ kleiner ist als 1. Dann erfüllt die Abbildung

$$f : C([\alpha, \beta], V) \rightarrow C([\alpha, \beta], V), \quad u \mapsto f(u) \text{ mit } f(u)(t) = \int_{t_0}^t (A(s)u(s) + b(s))ds + u_0$$

für alle $u, \tilde{u} \in C([\alpha, \beta], V)$ die Gleichung

$$(f(u) - f(\tilde{u}))(t) = \int_{t_0}^t A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))ds.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(\tilde{u})\|_\infty &\leq \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot \|A\|_\infty(\beta - \alpha) \\ &= \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot L. \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstante $L < 1$. Wegen des Banachschen Fixpunktsatzes hat diese Abbildung genau einen Fixpunkt $u \in C([\alpha, \beta], V)$, der dann für alle $t \in [\alpha, \beta]$

$$u(t) = \int_{t_0}^t (A(s)u(s) + b(s))ds + u_0$$

erfüllt. Dann gilt aber wegen des Hauptsatzes der Integral– und Differentialrechnung:

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ und } u(t_0) = u_0.$$

Also ist u eine Lösung des Anfangswertproblems auf (α, β) .

Wenn \tilde{u} eine zweite Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t) \text{ und } u(t_0) = u_0$$

auf (α, β) ist, dann folgt wieder aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\tilde{u}(s) + b(s))ds.$$

Daraus folgt dann, dass auch \tilde{u} ein Fixpunkt von f ist und dass wegen des Banachschen Fixpunktsatzes $u = \tilde{u}$ gelten muss.

Wenn $(\beta - \alpha)\|A\|_\infty > 1$, dann wählen wir eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (α, β) , so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Punkt t_n in der Vereinigung der offenen Bälle um t_0, \dots, t_{n-1} mit Radius $\frac{1}{3\|A\|_\infty}$ liegt. Induktiv folgt, dass die Anfangswertprobleme $\dot{u}_n(t) = A(t)u_n(t) + b(t)$ mit $u_n(t_n) = u_{n-1}(t_n)$ auf der Vereinigung aller offenen Bälle um t_0, \dots, t_n mit Radius $\frac{1}{3\|A\|_\infty}$ genau eine Lösung haben und mit der einzigen Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems übereinstimmen. Also hat das ursprüngliche Anfangswertproblem im Inneren jedes kompakten Teilintervalls von I , das t_0 enthält, genau eine Lösung. Dann hat es auf der Vereinigung I aller solchen Teilintervalle genau eine Lösung. **q.e.d.**

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt sofort:

Korollar 1.14. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, V ein Banachraum, und $A : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ und $b : I \rightarrow V$ stetige Abbildungen. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I, V) \rightarrow V, u \mapsto u(t_0)$ einen linearen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf V . Für jede Lösung \tilde{u} der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ induziert die Abbildung $C(I, V) \rightarrow V, u \mapsto u(t_0) - \tilde{u}(t_0)$ einen affinen Isomorphismus von der Menge aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung nach V . **q.e.d.***

Insbesondere haben also die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Insbesondere stimmt also für reelle gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Nachdem wir jetzt also für eine erste Klasse von Differentialgleichungen die Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblems gezeigt haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen auch ausrechnen können.

Beispiel 1.15. *Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich*

sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen jetzt an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= F(t) + f(t) - 2S(t) \\ \dot{F}(t) &= -S(t) + f(t) \\ \dot{f}(t) &= S(t) + F(t) - 2f(t)\end{aligned}$$

Beispiel 1.16. Seien $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Wenn u eine Nullstelle bei einem $t_1 \in \mathbb{R}$ hat, dann stimmt u mit der eindeutigen Lösung $u = 0$ des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems mit $u(t_1) = 0$ überein. Andernfalls hat u keine Nullstelle und wir können die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{d}{dt} \ln(u(t)) = A(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0.$$

Wir erhalten

$$\ln(u(t)) = \int_{t_0}^t A(s) ds + \ln(u_0) \text{ bzw. } u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) u_0.$$

Sei also u_s für alle $s \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $u_s(t) = \exp\left(\int_s^t A(r) dr\right) b(s)$ des Anfangswertproblems $\dot{u}_s(t) = u_s(t)A(t)$ mit $u_s(s) = b(s)$. Dann folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t u_s(t) ds = u_t(t) + \int_{t_0}^t A(t) u_s(t) ds = b(t) + A(t) \int_{t_0}^t u_s(t) ds.$$

Also löst $\int_{t_0}^t u_s(t) ds$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = 0.$$

Wir erhalten also die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems als die Summe

$$u(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) u_0 + \int_{t_0}^t \exp \left(\int_s^t A(r) dr \right) b(s) ds.$$

des homogenen Anfangswertproblems und dem Integral über alle Anfangswertprobleme des homogenen Problems, wobei wir als Anfangswerte jeweils den inhomogenen Term einsetzen. Dieses Verfahren wollen wir jetzt verallgemeinern.

Satz 1.17. (*Variation der Parameter*) Sei $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und V ein Banachraum. Dann ist die Abbildung

$$C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V \rightarrow C([\alpha, \beta], V) \quad (A, b, t_0, u_0) \mapsto u$$

auf die eindeutige Lösung u des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

stetig. Die Einschränkung dieser Abbildung auf ein festes t_0 hängt analytisch von A , b und u_0 ab. Für jedes $(A, b, t_0) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta]$ ist dann die entsprechende Einschränkung der Abbildung ein affiner Isomorphismus von $u_0 \in V$ auf die Menge der Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, berechnen wir mit ihm die Lösung eines inhomogenen Anfangswertproblems aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems.

Korollar 1.18. Sei $A : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung auf einem offenen nicht notwendigerweise beschränkten Intervall und $b : I \rightarrow V$ auch. Dann setzt sich wegen der Variation der Parameter die eindeutige Lösung $u_s(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{u}_s(t) = A(t)u_s(t) \quad \text{mit} \quad u_s(s) = b(s)$$

zu einer stetigen Abbildung $I \mapsto C(I, V) \quad s \mapsto u_s$ zusammen. Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

ist dann die Summe des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems und des Integrals

$$\int_{t_0}^t u_s(t) ds.$$

Beweis: Wegen des vorangehenden Satzes ist die Abbildung $s \mapsto u_s(t)$ auf allen Teilintervallen $[\alpha, \beta] \subset I$ stetig von $[\alpha, \beta]$ nach $C([\alpha, \beta], V)$. Dann existiert für alle $t \in I$ das Integral $\int_{t_0}^t u_s(t) ds$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t u_s(t) ds = u_t(t) + A(t) \int_{t_0}^t u_s(t) ds = b(t) + A(t) \int_{t_0}^t u_s(t) ds \text{ und } \int_{t_0}^{t_0} u_s(t) ds = 0.$$

Diese Funktion löst das inhomogene Anfangswertproblem mit $u_0 = 0$. Wegen Satz 1.10 ist die eindeutige Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems die Summe dieser Funktion und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems. **q.e.d.**

Beweis von Satz 1.17: Offenbar ist die Abbildung

$$C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V \times C([\alpha, \beta], V) \rightarrow C([\alpha, \beta], V)$$

$$(A, b, t_0, u_0, u) \mapsto f_{A,b,t_0,u_0}(u) \text{ mit } f_{A,b,t_0,u_0}(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(s)u(s) + b(s)) ds$$

stetig und hängt für festes t_0 analytisch von A , b , u_0 und u ab. Weil das Integral linear ist, ist sie sogar eine Summe von linearen Abbildungen und einer bilinearen Abbildung. Damit ist f sogar ein Polynom in A , b , u_0 , und u . Die Lipschitzkonstante \tilde{L} der Abbildung $\tilde{f} = f_{\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0,\tilde{u}_0}$, mit einem Element $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V) \times [\alpha, \beta] \times V$ können wir abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f}(u) - \tilde{f}(\tilde{u}) \right\|_{\infty} &= \left\| \int_{\tilde{t}_0}^t A(s)(u(s) - \tilde{u}(s)) ds + \int_{\tilde{t}_0}^t (\tilde{A}(s) - A(s))(u(s) - \tilde{u}(s)) ds \right\|_{\infty} \\ &\leq |\beta - \alpha| \|u - \tilde{u}\|_{\infty} \left(\|A\|_{\infty} + \|\tilde{A} - A\|_{\infty} \right). \end{aligned}$$

Wir wählen das Intervall $[\alpha, \beta]$ und $\epsilon > 0$ so klein, dass die den Elementen $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{t}_0, \tilde{u}_0)$ in dem ϵ -Ball von (A, b, t_0, u_0) entsprechenden \tilde{f} Lipschitz-stetig sind mit Lipschitzkonstante $\tilde{L} \leq |\beta - \alpha| (\|A\|_{\infty} + \epsilon) \leq L_0 < 1$. Für $n > m \geq N \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f}^n(u) - \tilde{f}^m(u) \right\|_{\infty} &\leq \left\| \tilde{f}^m(\tilde{f}^{n-m}(u) - \tilde{f}^0(u)) \right\|_{\infty} \\ &\leq \tilde{L}^m \left\| \sum_{l=1}^{n-m} (\tilde{f}^l(u) - \tilde{f}^{l-1}(u)) \right\|_{\infty} \\ &\leq \tilde{L}^N \left(\sum_{l=0}^{n-m-1} \tilde{L}^l \|\tilde{f}(u) - u\|_{\infty} \right) \leq \frac{\tilde{L}^N}{1 - \tilde{L}} \|\tilde{f}(u) - u\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Wir wählen die Startfunktion u identisch gleich Null. Dann ist $\|\tilde{f}(u) - u\|$ beschränkt durch

$$\|\tilde{f}(0) - 0\|_\infty \leq \|u_0\| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + |\beta - \alpha| \left(\|b\|_\infty + \|\tilde{b} - b\|_\infty \right).$$

Weil auf dem ϵ -Ball um (A, b, t_0, u_0) die Lipschitzkonstante uniform durch $L_0 < 1$ beschränkt ist, konvergiert dann die Folge $(f^n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Anfangswertproblems. Der Grenzwert ist als gleichmäßiger Grenzwert von stetiger Abbildung eine stetige Funktion von (A, b, t_0, u_0) , die für festes t_0 analytisch von (A, b, u_0) abhängt (also eine konvergente Potenzreihe besitzt).

Wenn die Lipschitzkonstante größer als 1 ist, überdecken wir das Intervall durch hinreichend kleine Teilintervalle und setzen die entsprechenden Lösungen fort. **q.e.d.**

Damit haben wir die Berechnung der Lösung auf das Lösen des homogenen Anfangswertproblems zurückgeführt.

Satz 1.19. (*Exponentialfunktion*) Die Potenzreihe $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ konvergiert für alle $A \in \mathcal{L}(V)$, wenn V ein Banachraum ist. Außerdem gilt

$$\frac{d}{dt} \exp((t - t_0)A) = A \exp((t - t_0)A) = \exp((t - t_0)A)A.$$

Beweis: Wegen $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ folgt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Dann folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion auf \mathbb{R} . **q.e.d.**

Korollar 1.20. (*Lösung des autonomen Anfangswertproblems*) Das inhomogene Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = Au(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

mit $A \in \mathcal{L}(V)$ und stetigem $b : I \rightarrow V$ besitzt die eindeutige Lösung

$$u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)A)b(s)ds.$$

Beweis: Es genügt wegen der Variation der Parameter zu zeigen, dass das homogene Anfangswertproblem ($b = 0$) durch $u(t) = \exp((t - t_0)A)u_0$ gelöst wird. Das folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Damit bleibt noch das Problem der Berechnung der Exponentialfunktion. Dazu benutzen wir die Diagonalisierung bzw. Jordannormalform von Matrizen.

Übungsaufgabe 1.21. (i) Aus der Analysis wissen wir, dass das Anfangswertproblem der Differentialgleichung

$$u^{(n)}(t) = 0 \text{ mit } u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}$$

die Lösung

$$u(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{u_l t^l}{l!}$$

besitzt. Dieses Anfangswertproblem ist äquivalent zu den Anfangswertproblemen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbf{1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^l}{l!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l$$

Zeige direkt diese Identität.

(ii) Zeige, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) gilt

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \exp(t\lambda) \cdot \exp \left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(iii) Die Matrix A lasse sich durch die invertierbare Matrix B diagonalisieren:

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1}$$

Zeige, dass dann gilt

$$\exp(tA) = B \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Beispiel 1.22. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

lässt sich diagonalisieren auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Beispiels der Störche, Frösche und Fliegen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ F(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ F(0) \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.23. (Fundamentallösung) Sei $A : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ eine stetige Funktion von einem Intervall in die stetigen linearen Abbildungen des Banachraums V . Dann konvergiert die Reihe $F : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$

$$F(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t A(t_n) \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-1}) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_n$$

gegen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ mit } F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Beweis: Wenn wir zunächst annehmen, dass die Reihe für alle $t, t_0 \in I$ gleichmäßig konvergiert, dann folgt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\dot{F}(t) = A(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A(t) \int_{t_0}^t A(t_{n-1}) \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-2}) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_{n-1} = A(t)F(t).$$

Für alle $t, t_0 \in I$ ist A auf $[t_0, t]$ beschränkt durch $\|A\|_{\infty} = \sup_{s \in [t_0, t]} \|A(s)\|$. Also folgt

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t A(t_n) \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-1}) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_n \right\| \\ & \leq \|A\|_{\infty}^n \left| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_{n-1}} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \dots dt_n \right| = \|A\|_{\infty}^n \cdot \frac{|t - t_0|^n}{n!}. \end{aligned}$$

Dann konvergiert die Reihe wieder aus den gleichen Gründen wie die Potenzreihe der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Diese Lösung $F(t)$ heißt Fundamentallösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0.$$

Offenbar ist dann $F(t)$ die lineare Abbildung, die jedem u_0 den entsprechenden Wert der Lösung an der Stelle t zuordnet. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der beiden Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0 \text{ und } \dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_1) = u_1$$

ist die Fundamentallösung des ersten Anfangswertproblems an der Stelle t_1 als lineare Abbildung invers zu der Fundamentallösung des zweiten Anfangswertproblems an der Stelle t_0 . Deshalb ist die Fundamentallösung eine einmal stetig differenzierbare Abbildung von I in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \text{ mit } u(s) = b(s)$$

ist dann gegeben durch

$$u_s(t) = F(t)F^{-1}(s)b(s).$$

Wegen der Variation der Parameter ist dann die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

gegeben durch

$$u(t) = F(t)u_0 + \int_{t_0}^t F(t)F^{-1}(s)b(s)ds.$$

Deshalb genügt es zum Lösen einer gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung, die Fundamentallösung zu bestimmen. Wenn alle $A(t)$ miteinander kommutieren:

$$A(t)A(t') = A(t')A(t) \text{ für alle } t, t' \in I,$$

wie das im Fall $V = \mathbb{R}$ gilt, dann ist $F(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)$, im Allgemeinen aber nicht. Im endlichdimensionalen Fall, wenn wir A durch $n \times n$ Matrizen darstellen können, ist allerdings folgende Beziehung sehr nützlich.

Satz 1.24. (*Spur und Determinante*) Sei $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ eine stetige Abbildung des offenen Intervalls I in die \mathbb{K} -wertigen $n \times n$ Matrizen. Dann gilt für die Fundamentallösung

$$F : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n} \text{ mit } \dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ und } F(t_0) = \mathbf{1},$$

$$\frac{d}{dt} \det(F(t)) = \text{Spur}(A(t)) \det(F(t)) \text{ mit } \det(F(t_0)) = 1.$$

Also hat $\det(F(t))$ auf I keine Nullstellen und $F(t)$ ist für alle $t \in I$ invertierbar.

Beweis: Weil die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ ein Polynom in den Einträgen der entsprechenden Matrix ist, ist sie eine analytische Funktion. Wir zeigen zunächst, dass die Ableitung dieser Abbildung bei allen invertierbaren Matrizen A gegeben ist durch

$$\frac{d}{dt} \det(A + tB) \Big|_{t=0} = \det(A) \text{Spur}(A^{-1}B).$$

Es gilt nämlich

$$\det(A + tB) = \det(A) \det(\mathbf{1} + tA^{-1}B).$$

Offenbar ist $\det(\mathbf{1} + tA^{-1}B)$ ein Polynom in t vom Grad n , und die Koeffizienten sind Polynome in den Koeffizienten von $A^{-1}B$. Weil die Unterdeterminanten von $\mathbf{1}$ genau dann nicht verschwinden, wenn die genausovielte Spalte wie Zeile gestrichen wird und dann die Unterdeterminanten gleich Eins sind, gilt

$$\det(\mathbf{1} + tA^{-1}B) = 1 + t \text{Spur}(A^{-1}B) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt} \det(A + tB) \Big|_{t=0} = \det(A) \text{Spur}(A^{-1}B).$$

Wenden wir diese Formel auf $F(t)$ an, so erhalten wir mit der Kettenregel an den Stellen, an denen $F(t)$ invertierbar ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(F(t)) &= \text{Spur}(\dot{F}(t)F^{-1}(t)) \det(F(t)) \\ &= \text{Spur}(A(t)) \det(F(t)). \end{aligned}$$

Dann folgt aus dem Beispiel, dass $\det(F(t))$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = \text{Spur}(A(t))u(t) \text{ mit } u(t_0) = 1$$

ist. Also gilt $\det(F(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s))ds\right)$ **q.e.d.**

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit auf nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen. Dabei müssen wir allerdings an die Nichtlinearität gewisse Einschränkungen machen.

Definition 1.25. Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x').$$

Satz 1.26. (Lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \rightarrow V$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(u_0, \delta)$

$$\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\|$$

gilt. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es $\delta > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(u_0, \delta)}$ auch $\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\|$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : u \mapsto F(u) \quad \text{mit} \quad F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(u_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], V)$. Sei

$$\|f(\cdot, u_0)\|_\infty = \sup_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|f(s, u_0)\|.$$

Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon(\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta$, dann ist für alle $u \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$

$$\|F(u) - u_0\|_\infty \leq \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u_0) + f(s, u(s)) - f(s, u_0)) ds \right\| \leq \epsilon(\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta.$$

Also bildet F den vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $u, \tilde{u} \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ gilt

$$\|F(u) - F(\tilde{u})\|_\infty \leq \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\| ds \leq \epsilon L \|u - \tilde{u}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $\epsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L} \right\} = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta} \right\}$.

Dann definiert die Abbildung F eine Lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{u}(t) = f(t, u)$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ mit $u(t_0) = u_0$. Also löst u dieses Anfangswertproblem auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Wenn u umgekehrt auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ dieses Anfangswertproblem löst, dann ist die Ableitung von $F(u) - u$ gleich Null, und beide Funktionen $F(u)$ und u sind bei $t = t_0$ gleich u_0 . Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F . Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Wir wollen jetzt analog zu der Variation der Parameter untersuchen, wie die Lösungen der Anfangswertprobleme, also die Fixpunkte von F , von t_0 , u_0 und f abhängen. Indem wir für ein solches Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$, die Funktion u durch den Vektor $\tilde{u} = (t, u)$ ersetzen, und die Funktion f durch $\tilde{f}(\tilde{u}) = (1, f(t, u)) = (1, f(\tilde{u}))$, erhalten wir ein äquivalentes Anfangswertproblem $\dot{\tilde{u}}(t) = \tilde{f}(\tilde{u}(t))$ mit $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 = (t_0, u_0)$, in dem die Funktion \tilde{f} nicht mehr von t abhängt. Weil solche Anfangswertprobleme bezüglich t translationsinvariant sind, können wir dann den Anfangspunkt 0 wählen. Deshalb untersuchen wir im Folgenden nur die Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems von u_0 und f .

Jede Lösung u der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit einer differenzierbaren Funktion f erfüllt auch

$$\ddot{u}(t) = \frac{d}{dt} f(t, u(t)) = \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial u} \dot{u}(t) = \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial u} f(t, u(t)).$$

Indem wir immer höhere Ableitungen bilden sehen wir, dass für r mal (stetig) differenzierbare Funktionen f , jede Lösung auch $(r + 1)$ mal (stetig) differenzierbar ist. Wir werden gleich sehen, dass in diesem Fall die Lösung der entsprechenden Anfangswerte auch r mal (stetig) differenzierbar von u_0 abhängt.

Satz 1.27. *Sei I ein offenes Intervall, $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums V und $f : I \times U \rightarrow V$ eine stetige Abbildung, die partiell nach u r mal stetig*

differenzierbar ist mit $r \in \mathbb{N}$, und deren Ableitung $\frac{\partial f}{\partial u}$ lokal beschränkt ist. Dann gibt es für alle $(t_0, u_0) \in I \times U$ eine offene Umgebung W von u_0 in V , $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $g : W \rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$, so dass für $v \in W$ die Funktion $g(v)$ die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\frac{du}{dt}(t) = f(t, u(t)) \text{ für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ mit } u(t_0) = v.$$

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil $\frac{\partial f}{\partial u}$ lokal beschränkt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(u_0, \delta)}$ enthält und $\frac{\partial f}{\partial u}$ auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(u_0, \delta)}$ durch L beschränkt ist. Wegen dem Schrankensatz ist dann f auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(u_0, \delta)}$ für festes t in u Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon < \min\{\delta, \frac{1}{L}\}$ ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf. Dann definiert

$$F : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)}) \rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \quad (v, u) \mapsto F(v, u)$$

mit
$$F(v, u)(t) = v + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

eine stetige Abbildung. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F(v, u)}{\partial u}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial F(v, u)}{\partial u} : C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V) \rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V), \quad z \mapsto \frac{\partial F(v, u)}{\partial u}(z)$$

mit
$$\frac{\partial F(v, u)}{\partial u}(z)(t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial f(s, u(s))}{\partial u}(z(s)) ds.$$

Weil die Ableitungen $\frac{\partial f(s, u(s))}{\partial u}$ beschränkt sind durch L , ist die Ableitung $\frac{\partial F(v, u)}{\partial u}$ beschränkt durch $L\epsilon < 1$. Also konvergiert für $v \in V$ und $u \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbf{1}_{C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)} - \frac{\partial F(v, u)}{\partial u} \right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial F(v, u)}{\partial u} \right)^l$$

in $\mathcal{L}(C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V))$ gegen den inversen Operator von $\mathbf{1}_{C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)} - \frac{\partial F(v, u)}{\partial u}$. Offenbar ist für $v_0, v_1 \in V$ die punktweise Differenz der entsprechenden Abbildungen eine konstante Abbildung:

$$F(v_0, u) - F(v_1, u) = v_0 - v_1.$$

Deshalb ist für jedes $u \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(u_0, \delta))$ die Abbildung $v \mapsto F(v, u)$ eine glatte Abbildung von V nach $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(u_0, \delta)) \rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V),$$

$$(v, u) \mapsto (\mathbf{1}_{C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(u_0, \delta))} - F(v, u)) = u - F(v, u)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $u \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], B(u_0, \delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I, V)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen $u \mapsto F(v, u)$. Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $u_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen $u \mapsto F(v, u)$ gibt. Diese Abbildung ist außerdem genauso oft stetig differenzierbar, wie G . An der expliziten Formel für die erste partielle Ableitung $\frac{\partial F(v, u)}{\partial u}$ erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung existieren und stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f nach u stetig sind. Also ist G und damit auch die Abbildung g auf die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass die Lösung des Anfangswertproblems unter den gleichen Voraussetzungen stetig differenzierbar von t_0 und von f abhängt, wenn auf dem Raum der Funktionen $f \in C(I \times U, V)$ die Supremumsnorm von f und von $\frac{\partial f}{\partial u}$ benutzt wird.

Wenn in diesem Satz die Funktion f nicht von t abhängt, dann lassen sich die ersten $r + 1$ Ableitungen $\dot{u}(t), \dots, u^{(r+1)}(t)$ der Lösung durch die ersten r Ableitungen der Funktion f nach u bei $u(t)$ ausdrücken. Deshalb sind die entsprechenden Lösungen des Anfangswertproblems sogar $(r + 1)$ mal stetig nach t differenzierbar. Insbesondere hängen für glatte f , die nicht von t abhängen, die Lösungen des Anfangswertproblems glatt von u_0 und t ab. Die Abhängigkeit von t_0 ist wenn f nicht von t abhängt trivial. Höhere Ableitungen nach t_0 können wir dann mit dem oben beschriebenen Trick für differenzierbare Funktionen f kontrollieren. Jetzt wollen wir die Lösungen auf möglichst große Intervalle fortsetzen.

Satz 1.28. (*Globale Existenz und Eindeutigkeit*) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \rightarrow V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal Lipschitz-stetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

genau eine Lösung u enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b , eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$).

- (ii) $t \mapsto \|f(t, u(t))\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.
- (iii) Die Lösung u lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O , d.h. $\lim_{t \downarrow a} (t, u(t)) \notin O$ (bzw. $\lim_{t \uparrow b} (t, u(t)) \notin O$).

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass für jedes Intervall (a, b) , das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

eine Lösung \tilde{u} besitzt, so dass sich \tilde{u} auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ stetig fortsetzen lässt, und der Graph der Fortsetzung in O liegt, das neue Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \tilde{u}(t) \text{ bzw. } u(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \tilde{u}(t)$$

wegen des Satzes von Picard–Lindelöf eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b besitzt. Der Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf zeigt auch, dass auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ dieses Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist und mit \tilde{u} übereinstimmt. Also existiert ein maximales Intervall (a, b) , auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Wenn am linken bzw. rechten Rand die Bedingungen (i) und (ii) nicht erfüllt sind, dann ist die Ableitung der Lösung auf einer offenen Menge $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ beschränkt und deshalb ist die Lösung dort Lipschitz–stetig. Dann konvergiert für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert auch die Folge $((t_n, u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times V$. Der Grenzwert kann dann aber nicht in O liegen, weil sonst die Lösung eine Fortsetzung auf eine Umgebung von a bzw. b hätte. **q.e.d.**

Bemerkung 1.29. (i) Wenn (ii) erfüllt ist, kann $t \mapsto f(t, u(t))$ nicht stetig auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Also können u und f nicht so stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, dass a (bzw. b) im Definitionsbereich von u und $(a, u(a))$ (bzw. $(b, u(b))$) im Definitionsbereich von f liegt.

- (ii) Jede in u stetig differenzierbare Funktion f ist in u lokal Lipschitz–stetig, weil für stetig differenzierbare Funktionen die Ableitungen lokal beschränkt sind und nach dem Schrankensatz lokal Lipschitz–stetig sind. Wegen dem Schrankensatz gilt für $f(t, u) = A(t)u$ auch $|\ln(\|u(t)\|) - \ln(\|u(t_0)\|)| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| ds$. In diesem Fall kann $f(t, u)$ nur am Rand des Definitionsbereiches von A unbeschränkt sein. Dann ist auch (ii) nur am Rand des Definitionsbereiches von A möglich.

Wenn $\dim V < \infty$ kann man die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel), auf stetige Funktionen f verallgemeinern. Anstatt dem Banachschen Fixpunktsatz verwenden wir dann den Schauderschen Fixpunktsatz.

Satz 1.30. (Schauderscher Fixpunktsatz) Sei F eine stetige Abbildung von einer konvexen abgeschlossenen Teilmenge A eines Banachraums auf sich selber. Wenn F alle beschränkten Teilmengen von A auf Teilmengen abbildet, deren Abschlüsse kompakt sind, dann hat F mindestens einen Fixpunkt.

Wir werden diesen Satz nicht beweisen. In M. Berger: Nonlinearity and functional analysis, Academic Press 1977, ist auf Seite 90 ein Beweis angegeben. Um die Existenz für stetige Funktionen f zu verallgemeinern, zeigen wir die Kompaktheit des Integrals.

Satz 1.31. (Kompaktheit des Integrals) Sei $[\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall und $t_0 \in [\alpha, \beta]$ und V ein endlichdimensionaler Banachraum. Dann ist der lineare Operator

$$C([\alpha, \beta], V) \rightarrow C([\alpha, \beta], V) \quad \text{mit} \quad u \mapsto \left(t \mapsto \int_{t_0}^t u(s) ds \right)$$

kompakt, d.h. die Abschlüsse der Bilder aller beschränkten Mengen sind kompakt.

Wir beweisen diesen Satz mit dem Satz von Arzela–Ascoli.

Satz 1.32. (Arzela–Ascoli) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlichdimensionaler Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn

- (i) für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist und
- (ii) für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist in x , d.h. für jedes $x \in K$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $x' \in B(x, \delta) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n(x') \in B(f_n(x), \epsilon) \subset V$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar auf K gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass aus $d(x, y) < 2\delta_y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y, \delta_y) | y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1, \delta_1) \cup \dots \cup B(y_N, \delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1, \dots, \delta_N$. Dann enthält für alle Paare $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1, \delta_1), \dots, B(y_N, \delta_N)$ den einen Punkt x . Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1, 2\delta_1), \dots, B(y_N, 2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig auf ganz K .

Sei $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die in K dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $m \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_m der Menge der Folge $(f_n(x_m))_{n \in \mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V . Wir definieren jetzt induktiv eine Teilfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$

in V , so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$ gilt $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$. Dafür wählen wir zunächst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(g_n(x_1), a_1) \leq \frac{1}{n}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_M von $(g_n(x_M))_{n \in \mathbb{N}}$ und ersetzen alle Folgenglieder von $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $M-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n \geq M}$, so dass für alle $n \geq M$ gilt $d(g_n(x_M), a_M) < \frac{1}{n}$. Dann gilt für alle $m = 1, \dots, M$ und alle $n \geq m$ auch $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x, x' \in K$ mit $d(x, x') < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(g_n(x), g_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$. Die Überdeckung $(B(x_m, \delta))_{m \in \mathbb{N}}$ von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass alle $l, n \geq M$ an den Zentren der Bälle der Teilüberdeckung $d(g_l(x_m), g_n(x_m)) < \frac{\epsilon}{3}$ erfüllen. Dann folgt für alle $x \in K$ und alle $l, n \geq M$

$$d(g_l(x), g_n(x)) \leq d(g_l(x), g_l(x_m)) + d(g_l(x_m), g_n(x_m)) + d(g_n(x_m), g_n(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(K, V)$ eine Cauchyfolge und konvergiert. **q.e.d.**

Beweis der Kompaktheit des Integrals. Die Funktion $t \mapsto \int_{t_0}^t u(s) ds$ ist auf $[\alpha, \beta]$ beschränkt durch $|\beta - \alpha| \cdot \|u\|_\infty$, und wegen dem Schrankensatz Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante $\|u\|_\infty$. Also erfüllt das Bild jeder beschränkten Menge die Voraussetzungen von Arzela–Ascoli. Dann ist der Abschluss des Bildes einer beschränkten Menge folgenkompakt und damit auch kompakt. **q.e.d.**

Satz 1.33. (Lokale Existenz) Sei I ein offenes Intervall und $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraums und f eine stetige Abbildung $f : I \times U \rightarrow V$. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$.

Beweis: Für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(u_0, \delta)} \subset I \times U.$$

Auf dieser kompakten Menge ist dann f beschränkt durch $\|f\|_\infty < \infty$. Die Abbildung

$$F : C\left([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)}\right) \rightarrow C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V) \quad u \mapsto F(u) \text{ mit}$$

$$F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

ist offenbar kompakt. Verkleinere also gegebenenfalls ϵ , so dass $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ ist. Dann bildet diese Abbildung den konvexen Raum $C\left([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)}\right)$ auf sich selber ab, und die Aussage folgt aus dem Schauderschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Eine Lösung einer Differentialgleichung auf einem abgeschlossenen Intervall ist eine stetige Funktion, die im Inneren stetig differenzierbar ist, und deren Ableitung sich stetig auf das abgeschlossene Intervall fortsetzen lässt. Weil eine Funktion auf der Vereinigung von zwei Intervallen genau dann stetig ist, wenn sie auf beiden Intervallen stetig ist und auf der Schnittmenge übereinstimmt, können wir solche Lösungen zusammensetzen: Wenn u_1 eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_1) = u_0$ auf $[t_1 - \epsilon, t_1]$ ist und u_2 auf $[t_1, t_1 + \epsilon]$. Dann ist

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{für } t \in [t_1 - \epsilon, t_1] \\ u_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1 + \epsilon] \end{cases}$$

eine Lösung auf $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$. Also können wir Lösungen wieder nach links bzw. rechts fortsetzen. Für jede total geordnete Familie von offenen Intervallen, auf denen jeweils eine Lösung existiert und jeweils auf der Schnittmenge von zwei solchen Intervallen übereinstimmt, ist die Vereinigung auch das Intervall einer Lösung. Wegen dem Zornschen Lemma existiert dann für jede Lösung ein maximales offenes Intervall, auf das wir sie fortsetzen können. Wir erhalten also wie im Satz 1.28:

Satz 1.34. (*Globale Existenz*) Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum, $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \rightarrow V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ eine (nicht notwendiger Weise eindeutige) maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

auf einem Intervall (a, b) , das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b , eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$)
- (ii) $t \mapsto \|f(t, u(t))\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.
- (iii) Die Lösung u lässt sich stetig auf $[a, b)$ (bzw. $(a, b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O . **q.e.d.**

Jede maximale Lösung kann also nicht als Lösung auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden. Aber es kann mehrere solcher maximaler Lösungen geben, und zwei verschiedene maximale Lösungen können auf unterschiedlichen Intervallen definiert sein und auf Teilintervallen übereinstimmen.

1.5 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen erster Ordnung haben also die Form

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)).$$

Wenn es uns gelingt, die Funktion f als einen Quotienten zu schreiben

$$f(t, u) = \frac{g(t)}{h(u)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{u}(t)h(u(t)) = g(t).$$

Wenn H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G , dann gilt

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = \frac{g(t)}{h(u(t))} \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

$$H(u(t)) - H(u_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was natürlich auf allen Intervallen gilt, auf denen h positiv bzw. negativ ist, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(u_0)).$$

Satz 1.35. (*Trennung der Variablen*) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I Riemann-integrierbar. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h . Dann ist H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \rightarrow I$ von einem offenen Intervall I' auf I . Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = \frac{g(t)}{h(u(t))} \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

gegeben durch $u(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(u_0))$.

Sie ist auf dem Intervall definiert, auf dem $G(t) - G(t_0) + H(u_0)$ in I' liegt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t, u)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t, u) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t, u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(t, u)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t, u(t)) = \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} + \frac{du(t)}{dt} \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial u} = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial u} + \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} &= 0 \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0 \\ F(t, u(t)) &= F(t_0, u_0). \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt implizit die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.36. (*Exakte Differentialgleichungen*) Sei $(t, u) \mapsto F(t, u)$ differenzierbar. Dann sind alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial u} + \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

implizit gegeben durch

$$F(t, u(t)) = F(t_0, u_0).$$

q.e.d.

Für zwei Funktionen $g(t, u)$ und $h(t, u)$ mit $f(t, u) = -\frac{g(t, u)}{h(t, u)}$, gibt es nicht immer eine Funktion $F(t, u)$ mit $\frac{\partial F(t, u)}{\partial t} = g(t, u)$ und $\frac{\partial F(t, u)}{\partial u} = h(t, u)$.

Lemma 1.37. (*Stammfunktion*) Seien g und h zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t, u)$ mit

$$\frac{\partial F(t, u)}{\partial t} = g(t, u) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(t, u)}{\partial u} = h(t, u) \quad \text{wenn gilt} \quad \frac{\partial g(t, u)}{\partial u} = \frac{\partial h(t, u)}{\partial t}.$$

Beweis: Sei $(t_0, u_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t, u) = (t - t_0) \int_0^1 g(t_s, u_s) ds + (u - u_0) \int_0^1 h(t_s, u_s) ds,$$

mit $t_s = t_0 + s(t - t_0)$ und $u_s = u_0 + s(u - u_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, u)}{\partial t} &= \int_0^1 g(t_s, u_s) ds + (t - t_0) \int_0^1 \frac{\partial g(t_s, u_s)}{\partial t} s ds + (u - u_0) \int_0^1 \frac{\partial h(t_s, u_s)}{\partial t} s ds \\ &= \int_0^1 g(t_s, u_s) ds + \int_0^1 \frac{dg(t_s, u_s)}{ds} s ds = g(t, u) \\ \frac{\partial F(t, u)}{\partial u} &= \int_0^1 h(t_s, u_s) ds + (u - u_0) \int_0^1 \frac{\partial h(t_s, u_s)}{\partial u} s ds + (t - t_0) \int_0^1 \frac{\partial g(t_s, u_s)}{\partial u} s ds \\ &= \int_0^1 h(t_s, u_s) ds + \int_0^1 \frac{dh(t_s, u_s)}{ds} s ds = h(t, u) \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt $\frac{\partial F(t, u)}{\partial t} = g(t, u)$ und $\frac{\partial F(t, u)}{\partial u} = h(t, u)$ gilt, dann folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g(t, u)}{\partial u} = \frac{\partial^2 F(t, u)}{\partial u \partial t} = \frac{\partial^2 F(t, u)}{\partial t \partial u} = \frac{\partial h(t, u)}{\partial t}. \quad \text{q.e.d.}$$

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, gemäß der wir F fortsetzen, eindeutig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω , d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \rightarrow \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. also, es gibt zu jedem solchen p eine stetige Abbildung $[0, 1] \times S^1 \rightarrow \Omega$, die auf $\{0\} \times S^1$ gerade gleich p und die auf $\{1\} \times S^1$ konstant ist. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t)h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muss, bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.38. Die Differentialgleichung $2t\dot{u} + u(t) = 0$

ist nicht exakt, weil gilt

$$\frac{\partial u}{\partial u} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$

die Differentialgleichung

$$2tu(t)\dot{u}(t) + u^2(t) = 0$$

ist aber exakt, weil gilt

$$\frac{\partial u^2}{\partial u} = 2u = \frac{\partial}{\partial t} 2ut.$$

Korollar 1.39. (Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion auf die Form gebracht werden kann

$$\dot{u}(t)h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial h(t, u)}{\partial t} = \frac{\partial g(t, u)}{\partial u},$$

dann existiert auf einfach zusammenhängenden Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F , so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt}F(t, u(t)) = \dot{u}(t)\frac{\partial F(t, u(t))}{\partial u} + \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $u(t_0) = u_0$

$$F(t, u(t)) = F(t_0, u_0). \quad \text{q.e.d.}$$

Um für eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{u}(t)h(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t, u(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M(t, u)}{\partial t}h(t, u) + M(t, u)\frac{\partial h(t, u)}{\partial t} = \frac{\partial M(t, u)}{\partial u}g(t, u) + M(t, u)\frac{\partial g(t, u)}{\partial u}$$

lösen. Das ist eine partielle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche Differentialgleichung. In einigen Fällen können wir Lösungen erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. u abhängen.

Zuletzt bemerken wir, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.40. (i)

$$\dot{u}(t) = f(at + bu(t) + c) \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Für $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Für $b \neq 0$ führt die Substitution $v(t) = at + bu(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{v}(t) = a + bf(v(t))$ oder auch $\frac{\dot{v}(t)}{a + bf(v(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a + bf(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = f(at + bu(t) + c) \quad \text{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

$$\text{die Gleichung} \quad F(at + bu(t) + c) - F(at_0 + bu_0 + c) = t - t_0.$$

(ii) $\dot{u} = f\left(\frac{u(t)}{t}\right)$ homogene Differentialgleichung. Die Substitution $v(t) = \frac{u(t)}{t}$ führt zu

$$\dot{v}(t) = \frac{f(v(t)) - v(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{v}(t)}{f(v(t)) - v(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{u} = f\left(\frac{at + bu(t) + c}{\alpha t + \beta u(t) + \gamma}\right) \text{ mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ ist, dann ist entweder $\alpha t + \beta u(t)$ ein Vielfaches von $at + bu(t)$ oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante $\neq 0$ ist, dann hat das lineare Gleichungssystem

$$at + bu + c = 0 \qquad \alpha t + \beta u + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_0, u_0) . Die Differentialgleichung können wir umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t+t_0) - u_0) &= f\left(\frac{a(t+t_0) + bu(t+t_0) + c - (at_0 + bu_0 + c)}{\alpha(t+t_0) + \beta u(t+t_0) + \gamma - (\alpha t_0 + \beta u_0 + \gamma)}\right) \\ &= f\left(\frac{a + b\frac{u(t+t_0)-u_0}{t}}{\alpha + \beta\frac{u(t+t_0)-u_0}{t}}\right). \end{aligned}$$

Also erhalten wir ein Beispiel von der Form (ii).

(iv) Bernoullische Differentialgleichung:

$$\dot{u}(t) + g(t)u(t) + h(t)u^\alpha(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $v(t) = u^{1-\alpha}(t)$ führt zu der Differentialgleichung

$$\dot{v}(t) = (1-\alpha)\dot{u}(t)u^{-\alpha}(t) = (\alpha-1)g(t)v(t) + (\alpha-1)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im Abschnitt 1.3 gelöst haben.

Kapitel 2

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung in den partiellen Ableitungen einer oder mehrerer gesuchter Funktionen, die von mindestens zwei Variablen abhängen:

Definition 2.1. Eine gegebenenfalls vektorwertige Gleichung der Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k . Hierbei ist F eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion. Die Ausdrücke $D^k u$ bezeichnen die Vektoren aller k -ten partiellen Ableitungen der Funktion u . Eine Funktion u heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn sie k mal differenzierbar ist und der obigen Gleichung genügt.

2.1 Beispiele

2.1.1 Lineare Differentialgleichungen

1. Laplacegleichung.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Lösungen der Laplacegleichung heißen harmonische Funktionen. Die Laplacegleichung ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die entsprechende inhomogene Gleichung heißt Poissongleichung:

$$-\Delta u = f.$$

Hierbei ist die Funktion f gegeben und die Funktion u gesucht.

2. Helmholtzgleichung.

$$-\Delta u - \lambda u = 0.$$

Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl und u die gesuchte Funktion. Sie ist eine besonders einfache Form der Poissongleichung.

3. Lineare Transportgleichung.

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$$

Hierbei ist b ein gegebenes \mathbb{R}^n -wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet.

4. Liouvillegleichung.

$$\dot{u} + \nabla(b \cdot u) = 0.$$

Hier ist wie bei der Transportgleichung b ein gegebenes \mathbb{R}^n -wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet. Diese beiden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung sind ähnlich.

5. Wärmeleitungsgleichung.

$$\dot{u} - \Delta u = 0.$$

6. Schrödingergleichung.

$$i\dot{u} + \Delta u = 0.$$

Hierbei ist u eine gesuchte komplexe Funktion. Wir werden sehen, dass der Faktor i , durch den sich die Schrödingergleichung von der Wärmeleitungsgleichung unterscheidet, zu deutlichen Unterschieden dieser beiden Gleichungen führt.

7. Kolmogorovgleichung.

$$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie ist eine Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung.

8. Fokker–Planckgleichung.

$$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij}(t,x)u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(t,x)u}{\partial x_i} = 0.$$

Die Fokker–Planckgleichung verhält sich zu die Kolmogorovgleichung wie die Liouvillegleichung zu der Transportgleichung.

9. Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0.$$

10. Allgemeine Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie verallgemeinert die Wellengleichung genauso wie der Kolmogorovgleichung die Wärmeleitungsgleichung verallgemeinert.

11. Airysche Differentialgleichung.

$$\dot{u} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

12. Balkengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

2.1.2 Nichtlineare Differentialgleichungen**1. Eikonalgleichung.**

$$|\nabla u| = 1.$$

2. Nichtlineare Poissongleichung.

$$-\Delta u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3. Minimalflächengleichung.

$$\nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$$

Die Graphen von Lösungen der Minimalflächengleichung sind sogenannte Minimalflächen. Die Fläche solcher Hyperflächen im \mathbb{R}^{n+1} ändert sich unter infinitesimalen Deformationen nicht. Seifenhäute sind Beispiele solcher Minimalflächen.

4. Monge–Amperegleichung.

$$\det(\nabla\nabla^t u) = f.$$

Hier ist f eine gegebene Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion. Dabei steht auf der linken Seite der Gleichung die Determinante der Matrix der zweiten Ableitungen von u .

5. Hamilton–Jacobigleichung.

$$\dot{u} + H(\nabla u, x) = 0.$$

Hierbei ist H eine gegebene Hamiltonfunktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, und u die gesuchte Funktion auf einem entsprechenden Gebiet in \mathbb{R}^n .

6. Skalare Erhaltungsgleichung.

$$\dot{u} + \nabla \cdot F(u) = 0.$$

Hierbei ist F eine gegebene \mathbb{R}^n -wertige Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diese Differentialgleichung hat zur Folge, dass sich das Integral von u über ein gegebenes Teilgebiet von \mathbb{R}^n so mit der Zeit ändert, wie das Integral von $F(u)$ über den Rand des Gebietes. Deshalb lässt sich $F(u)$ als eine Flussdichte der Erhaltungsgröße u interpretieren.

7. Burgers Gleichung.

$$\dot{u} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sie ist ein Beispiel für eine skalare Erhaltungsgleichung mit $F(u) = u^2/2$.

8. Reaktions–Diffusionsgleichung.

$$\dot{u} - \Delta u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

9. Poröse Mediengleichung.

$$\dot{u} - \Delta(u^\gamma) = 0.$$

Hier ist $\gamma \geq 1$ ein gegebener Exponent. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung eines idealen Gases in einem porösen Medium wie Sand.

10. Nichtlineare Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

11. Korteweg–de–Vries–Gleichung.

$$4\dot{u} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt eine sogenannte Laxdarstellung, d.h. sie lässt sich schreiben als

$$\dot{L} = [A, L]$$

mit zwei gewöhnlichen Differentialoperatoren

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3u}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus entwickelte sich ein neues Verständnis von integrierbaren Systemen.

2.1.3 Lineare Differentialgleichungssysteme**1. Lineare Elastizität.**

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) = 0.$$

Hier sind $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ gegebene positive Konstanten und u die gesuchte \mathbb{R}^n -wertige Funktion.

2. Elastische Wellen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) = 0.$$

3. Maxwellgleichungen.

$$\begin{aligned} \dot{E} - \nabla \times B &= -4\pi j & \dot{B} + \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 4\pi \rho & \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned}$$

Hier sind die Ladungsverteilung ρ und die Stromverteilung j gegebene reelle bzw. \mathbb{R}^3 -wertigen Funktionen auf der Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und das elektrische Feld E und das Magnetfeld B die gesuchten \mathbb{R}^3 -wertige Funktionen. Weil j ja gerade die Ladungsflussdichte ist erfüllen die gegebenen ρ und j den Erhaltungssatz

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot j = 0.$$

4. Cauchy–Riemanngleichung.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Hier sind $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion auf (Teilgebieten) der komplexen Ebene $x + iy = z \in \mathbb{C}$.

2.1.4 Nichtlineare Differentialgleichungssysteme**1. Eulergleichung.**

$$\dot{u} + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \qquad \nabla \cdot u = 0.$$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit und p der Druck.

2. Navier–Stokesgleichung.

$$\dot{u} + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = 0 \qquad \nabla \cdot u = 0.$$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit und p der Druck.

3. Einsteins Feldgleichungen.

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \kappa T_{ij}.$$

Hier ist der Energieimpulstensor einer gegebenen Massenverteilung auf der Raumzeit und g_{ij} ist die entsprechende gesuchte Metrik auf der Raumzeit. Diese Metrik g_{ij} ist eine Lorentzmetrik auf der Raumzeit, d.h. eine symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialraum der Raumzeit mit der Signatur $(1, 3)$. R_{ij} ist die dazugehörige Riccikrümmung und R die skalare Krümmung.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^3 g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\ R_{ij} &= \sum_{k=0}^3 g^{kl} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j} + \sum_{l=0}^3 (\Gamma_{lk}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^l) \right) \\ (g^{ij}) &= (g_{ij})^{-1} \text{ inverse Metrik} \\ R &= \sum_{i,j=0}^3 g^{ij} R_{ij}. \end{aligned}$$

5. Riccifluss.

$$\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$$

Diese Differentialgleichung beschreibt auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einen diffusionsartigen Fluss der Metrik. Er gleicht Inhomogenitäten und Isotropien der Metrik aus und führt nach langen Zeiten zu Metriken mit sehr großen Isometriegruppen. Richard Hamilton hat in den 70er Jahren ein Programm entworfen, um mit Hilfe dieses Flusses die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen. Diese besagt, dass sich jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit in Teile zerlegen lässt, auf denen eine Isometriegruppe transitiv wirkt. Hamilton versucht durch eine Kontrolle über das Langzeitverhalten des Ricciflusses auf kompakten 3-Mannigfaltigkeiten solche Metriken zu konstruieren. Der russische Mathematiker Grisha Perelman hat 2003 3 Arbeiten ins Netz gestellt und die letzten Hürden überwunden. Das war ein großer Erfolg für die geometrische Analysis.

2.2 Der Gaußsche Satz

Definition 2.2. (Zerlegung der Eins) Eine glatte Zerlegung der Eins einer Familie von offenen Mengen in \mathbb{R}^n mit der Vereinigung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Familie $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $h_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$, so dass

- (i) für jedes $x \in \Omega$ auf einer Umgebung von x nur endlich viele h_n ungleich Null sind.
- (ii) Für alle $x \in \Omega$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) = 1$.
- (iii) Jedes h_n außerhalb einer abgeschlossenen Menge in einem Element verschwindet.

Jede Familie von offenen Mengen in \mathbb{R}^n besitzt eine glatte Zerlegung der Eins.

Definition 2.3. Für jede $n \times (n-1)$ -Matrix A gibt es genau einen Spaltenvektor $A^\# \in \mathbb{R}^n$, so dass $\det(A, x) = x^t \cdot A^\#$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Er steht senkrecht auf dem Bild von A als Hyperfläche in \mathbb{R}^n und seine Länge ist der Flächeninhalt des Bildes von $[0, 1]^{n-1}$ unter A in \mathbb{R}^n . Für eine $n \times n$ -Matrix A gilt $(A|_{\mathbb{R}^{n-1}})^\# = \det(A)(A^{-1})^t e_n$.

Definition 2.4. Eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat differenzierbaren Rand, wenn ihr Abschluss $\bar{\Omega}$ eine Überdeckung von offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Abbildungen $\Phi : U \rightarrow O$ mit stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen $\Phi^{-1} : O \rightarrow U$ besitzt, die jeweils $O \cap \Omega$ in die obere Halbebene $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ und $O \cap \partial\Omega$ nach $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ abbilden. Seien $\det \Phi' > 0$. Dann ist das Integral einer Funktion f auf $\partial\Omega$ mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert als

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} (h_n f) \circ \Phi \left\| (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^\# \right\| d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ wobei jeweils } h_n|_{\mathbb{R}^n \setminus O} = 0.$$

Für eine \mathbb{R}^n -wertige Funktion f und die äußere Normale N auf $\partial\Omega$ definieren wir

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} ((h_n f) \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^\# d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ wobei jeweils } h_n|_{\mathbb{R}^n \setminus O} = 0.$$

Um diese Integrale zu berechnen, genügt es Φ auf $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ zu kennen. Stetig differenzierbare Einbettungen $\Psi : U \cap \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow O \cap \partial\Omega$, deren Ableitungen Ψ' den Rang $n-1$ haben, lassen sich so stetig differenzierbar auf kleine Umgebungen von $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ fortsetzen, dass sie stetig differenzierbare Umkehrabbildungen haben. Deshalb genügt es die Existenz solcher Abbildungen $\Psi = \Phi|_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}}$ vorauszusetzen.

Satz 2.5. (Gaußscher Satz oder Divergenzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit zweimal differenzierbarem Rand und f eine auf $\bar{\Omega}$ stetige \mathbb{R}^n -wertige Funktion, die auf Ω stetig differenzierbar ist mit Lebesgue-integrablen partiellen Ableitungen. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma$$

Hierbei ist N die äußere Normale und $N d\sigma$ das entsprechende Maß auf dem Rand $\partial\Omega$.

Beweis: Mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins genügt es die Aussage für eine Funktion f zu zeigen, die außerhalb einer abgeschlossenen Menge in einer offenen Menge O aus Definition 2.4 verschwindet. Für $\tilde{f} = \det(\Phi')(\Phi')^{-1}(f \circ \Phi)$ gilt wegen Satz 1.24

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{f} &= \det(\Phi') \sum_{ijkl} (\Phi')_{ij}^{-1} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_k \partial x_i} (\Phi)_{kl}^{-1} \tilde{f}_l \circ \Phi - \det(\Phi') \sum_{ijkl} (\Phi')_{ij}^{-1} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_i \partial x_k} (\Phi')_{kl}^{-1} \tilde{f}_l \circ \Phi \\ &\quad + \det(\Phi') \operatorname{Spur}((\Phi')^{-1}(f' \circ \Phi)\Phi') = \det(\Phi') \operatorname{Spur}(f' \circ \Phi) = \det(\Phi')(\nabla \cdot f) \circ \Phi. \end{aligned}$$

Aus Jacobi's Transformation von Maßen folgt $\int_O \nabla \cdot f d\mu = \int_U \nabla \cdot \tilde{f} d\mu$. Also genügt es

$$\begin{aligned} \int_U \nabla \tilde{f} d\mu &= - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} (f \circ \Phi) \cdot (\Phi'|_{\mathbb{R}^{n-1}})^\# d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ &= - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} \det(\Phi')^{-1}(\Phi' \tilde{f}) \cdot \det(\Phi')((\Phi')^{-1})^t e_n d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} = - \int_{U \cap \mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}_n d\mu_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{aligned}$$

zu zeigen. Die Funktion \tilde{f} setzt sich stetig differenzierbar auf einen Quader fort, von dessen Rand eine Seite in der Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ liegt. Weil \tilde{f} nur auf einer Seite des Randes des Quaders nicht verschwindet, reduziert sich mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung das linke Integral zu einem Integral über die Seite des Quaders in \mathbb{R}^{n-1} und stimmt mit dem Integral auf der rechten Seite überein. **q.e.d.**

2.3 Existenz von Lösungen

Wir wollen zur Erläuterung ein Beispiel einer Differentialgleichung geben, das keine Lösung besitzt. Dieses Beispiel ist eine Vereinfachung (von Nirenberg) eines Beispiels von H. Lewy: Gegeben ist eine komplexwertige Funktion f auf einem Teilgebiet von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und gesucht ist eine komplexwertige Funktion u auf demselben Teilgebiet, die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + ix \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

Wir zeigen, dass es für eine glatte Funktion f , die folgende beiden Bedingungen erfüllt, in keiner Umgebung von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ eine einmal stetig differenzierbare Lösung u gibt:

- (i) $f(-x, y) = f(x, y)$
- (ii) Es gibt eine Nullfolge $\rho_n \downarrow 0$, so dass f auf einer Umgebung der Kreise $\partial B(0, \rho_n)$ verschwindet, die Integrale $\int_{B(0, \rho_n)} f(x, y) dx dy$ aber ungleich Null sind.

Wenn $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine glatte periodische Funktion ist, die auf einem Intervall aber nicht auf \mathbb{R} verschwindet, dann ist $f(x) = \exp(-1/\|x\|)h(1/\|x\|)$ ein solches Beispiel.

1. Schritt: Wegen (i) ist mit $u(x, y)$ auch $-u(-x, y)$ und $w(x, y) = \frac{1}{2}(u(x, y) - u(-x, y))$ eine Lösung. Deshalb können wir $u(-x, y) = -u(x, y)$ annehmen.

2. Schritt: Jede solche Lösung u verschwindet auf den Kreisen $\partial B(0, \rho_n)$. Um das einzusehen transformieren wir kleine Ringe A folgendermaßen auf Gebiete \tilde{A} im \mathbb{R}^2 :

$$A \rightarrow \tilde{A}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2/2, y) & \text{für } x \geq 0 \\ (-x^2/2, y) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Abbildungen sind offenbar Homöomorphismen von A auf \tilde{A} . Auf dem Teilgebiet $\tilde{A}_+ = \{(s, y) \in \tilde{A} \mid s > 0\}$ ist die Funktion $\tilde{u}(s, y) = u(x^2/2, y)$ holomorph:

$$2\bar{\partial}\tilde{u} = \frac{\partial\tilde{u}(s, y)}{\partial s} + i\frac{\tilde{u}(s, y)}{\partial y} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + ix\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) = 0.$$

Wegen dem 1. Schritt verschwindet \tilde{u} für $s = 0$, und wegen dem Schwarzen Spiegelungsprinzip und dem Identitätssatz auf \tilde{A}_+ , und wegen dem 1. Schritt auf \tilde{A} .

3. Schritt: Wegen dem Gaußschen Satz gilt

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \rho_n)} f dx dy &= \int_{B(0, \rho_n)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + ix\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy = \int_{B(0, \rho_n)} \nabla \cdot \begin{pmatrix} u \\ ixu \end{pmatrix} dx dy \\ &= \int_{\partial B(0, \rho_n)} \begin{pmatrix} u \\ ixu \end{pmatrix} \cdot N(x, y) d\sigma(x, y) = 0, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (ii). Also gibt es keine einmal stetig differenzierbare Lösung.

Man kann aus diesem Beispiel sofort folgern, dass die reelle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - ix\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = f$$

keine viermal stetig differenzierbare Lösung hat.

2.4 Regularität von Lösungen

Unter der Regularität einer Lösung einer Differentialgleichung versteht man die lokalen Eigenschaften der entsprechenden Funktionen. Wir werden nur solche Lösungen betrachten, die mindestens Distributionen sind. In diesen enthalten sind messbare Funktionen bzw. allgemeiner L^p -Funktionen. Diese enthalten die Funktionen, deren erste oder n -te Ableitungen ebenfalls solche L^p -Funktionen sind. Die Räume solcher Funktionen werden Sobolevräume genannt. In diesen Funktionen sind die glatten Funktionen enthalten. Zuletzt kommen die analytischen Funktionen mit der höchsten Regularität.

2.5 Anfangswert und Randwertprobleme

Bei der Untersuchung von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen streben wir eine möglichst vollständige Charakterisierung aller Lösungen an. Im Allgemeinen haben partielle Differentialgleichungen unendlich viele Lösungen. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung einen n -dimensionalen Lösungsraum hat. Eine Lösung ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der ersten n Ableitungen an einem Punkt. Für partielle Differentialgleichungen streben wir eine analoge Charakterisierung an. Weil die Lösungen auf höherdimensionalen Gebieten definiert sind, liegt es nahe, dass die Vorgabe von Funktionswerten und eventuell einigen Ableitungen auf dem Rand des Gebietes, die Lösung eindeutig festlegt. Solche Vorgaben nennt man Randwertprobleme. Bei Evolutionsgleichungen legt die Physik nahe, als Randwert einen räumlichen Schnitt zu wählen, also die Lösung zu einem gegebenen Zeitpunkt festzulegen. Solche Randwertprobleme heißen dann Anfangswertprobleme. In einem zweiten Schritt soll bestimmt werden für welche Randwerte bzw. Anfangswerte eine Lösung existiert. Mit der Beantwortung beider Fragen sind alle Lösungen eindeutig durch die möglichen Randwerte bzw. Anfangswerte klassifiziert.

Kapitel 3

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

3.1 Homogene Transportgleichung

Eine der einfachsten partiellen Differentialgleichungen ist die Transportgleichung:

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$$

Hier ist $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion. $b \cdot \nabla u$ bezeichnet das Skalarprodukt des Vektors b mit dem Vektor der ersten partiellen Ableitungen von u nach x :

$$b \cdot \nabla u(x, t) = b_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_n}.$$

Wir nehmen jetzt an, dass $u(x, t)$ eine glatte Lösung der Transportgleichung ist. Dann ist für jedes feste (x, t) die Funktion

$$z(s) = u(x + s \cdot b, t + s)$$

eine glatte Funktion auf \mathbb{R} , deren erste Ableitung verschwindet:

$$\dot{z}(s) = b \nabla u(x + s \cdot b, t + s) + \dot{u}(x + s \cdot b, t + s) = 0.$$

Entsprechend muss u auf allen parallelen Geraden in Richtung $(b, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konstant sein, und es genügt die Werte von u auf allen diesen Geraden zu kennen.

Anfangswertproblem 3.1. *Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Transportgleichung (mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$) erfüllt, und für $t = 0$ gleich einer gegebenen Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist.*

Alle parallelen Geraden des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ in Richtung $(b, 1)$ schneiden die Hyperebene $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ genau einmal:

$$(x + sb, t + s) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \iff s = -t$$

Also ist $u(x, t) = g(x - tb)$. Wenn $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $u(x, t) = g(x - tb)$ eine Lösung der Transportgleichung und damit die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Wenn aber $g \notin C^1(\mathbb{R}^n)$ dann existiert offensichtlich keine Lösung des Anfangswertproblems. Trotzdem ist $u(x, t) = g(x - tb)$ der einzige Kandidat für eine Lösung. Für eine sehr große Klasse von Funktionen ist dieses u aber eine schwache Lösung der Transportgleichung und sogar die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

3.2 Inhomogene Transportgleichung

Wir betrachten jetzt die entsprechende inhomogene Transportgleichung

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = f.$$

Hier ist wieder $b \in \mathbb{R}^n$ ein gegebener Vektor, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion.

Anfangswertproblem 3.2. *Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die inhomogene Transportgleichung (mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$) erfüllt, und für $t = 0$ gleich einer gegebenen Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist.*

Für jedes $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ erfüllt $z(s) = u(x + sb, t + s)$ die Differentialgleichung

$$\dot{z}(s) = b \cdot \nabla u(x + sb, t + s) + \dot{u}(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} u(x, t) - g(x - bt) &= z(0) - z(-t) &&= \int_{-t}^0 \dot{z}(s) ds \\ &= \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) ds &&= \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds. \end{aligned}$$

Deshalb ist die Lösung gegeben durch $u(x, t) = g(x - bt) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds$.

Wieder ist die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ein Integral über Lösungen der homogenen Anfangswertprobleme mit der Inhomogenität als Anfangswerte.

Wieder ist gegebenenfalls u die eindeutige *schwache* Lösung. Wir haben also die inhomogene und homogene Transportgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung übersetzt haben. Diese Methode der Charakteristik werden wir jetzt verallgemeinern.

3.3 Methode der Charakteristik

Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$F(\nabla u(x), u(x), x) = 0.$$

Hierbei ist u eine reelle Funktion auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und F eine reelle Funktion auf einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wir versuchen die Lösung wie bei der Transportgleichung dadurch zu bestimmen, dass wir aus der partiellen Differentialgleichung die Einschränkung der Lösung auf den Integralkurven von Vektorfeldern bestimmen. Sei also $x(s)$ eine Integralkurve eines noch zu bestimmenden Vektorfeldes und $p(s)$ die entsprechende Ableitung $p(s) = \nabla u(x(s))$. Wir wollen die Integralkurve so wählen, dass wir $z(s) = u(x(s))$ bestimmen können. Dazu differenzieren wir

$$\frac{dp_i(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{\partial u(x(s))}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_j \partial x_i} \frac{dx_j(s)}{ds}.$$

Wenn wir $F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$ total nach dx_i differenzieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF(\nabla u(x), u(x), x)}{dx_i} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(\nabla u(x), u(x), x)}{\partial p_j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial F(\nabla u(x), u(x), x)}{\partial z} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\nabla u(x), u(x), x)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Wegen dem Satz von Schwarz vertauschen die partiellen Ableitungen und es gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j} \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial z} p_i(s) + \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial x_i} = 0.$$

Deshalb setzen wir

$$\frac{dx_j}{ds} = \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j},$$

und können die Differentialgleichung $\frac{dp_i(s)}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_j \partial x_i} \frac{dx_j}{ds}(s)$ umschreiben zu

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(s)}{ds} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x(s))}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j} = \\ &= - \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial x_i} - \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial z} p_i(s). \end{aligned}$$

Zum Abschluss differenzieren wir

$$\frac{dz(s)}{ds} = \frac{du(x(s))}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s)) \frac{dx_j(s)}{ds} = \sum_{j=1}^h p_j(s) \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j}.$$

Dadurch erhalten wir das gewöhnliche Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(s) &= \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i(s) &= -\frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial x_i} - \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial z} p_i(s) \\ \dot{z}(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j} p_j(s). \end{aligned}$$

Es ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit $2n + 1$ Unbekannten. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.3. *Sei F eine differenzierbare reelle Funktion auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega)$ eine zweimal differenzierbare Lösung der Differentialgleichung $F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann erfüllen für jede Lösung x der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\dot{x}_i(s) = \frac{\partial F}{\partial p_i}(\nabla u(x(s)), u(x(s)), x(s))$$

die Funktionen $p(s) = \nabla u(x(s))$ und $z(s) = u(x(s))$ die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(s) &= -\frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial x_i} - \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial z} p_i(s) \text{ und} \\ \dot{z}(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(p(s), z(s), x(s))}{\partial p_j} p_j(s). \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Jetzt wollen wir Randbedingungen von folgender Form betrachten:

$$u(y) = g(y) \text{ für alle } y \in \Omega \cap H \text{ mit } H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot e_n = x_0 \cdot e_n\}.$$

Dabei ist $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ der n -te Einheitsvektor und H die eindeutige Hyperebene, die senkrecht auf e_n steht und durch $x_0 \in \Omega$ geht. Mit Hilfe des Satzes der impliziten Funktion lassen sich durch geeignete Koordinatentransformationen allgemeinere stetig differenzierbare Hyperebenen auf diese Form bringen: Sei $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ ein stetig differenzierbarer Homöomorphismus, dessen Umkehrabbildung Φ^{-1} auch stetig differenzierbar

ist. Dann ist für eine Funktion $v : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $u = v \circ \Phi$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung

$$F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$$

wenn v eine Lösung der Differentialgleichung

$$F\left(\left(\Phi'(\Phi^{-1}(y))\right)^t \cdot \nabla v(y), v(y), \Phi^{-1}(y)\right) = 0$$

ist. Also erhalten wir mit

$$G(\nabla v(y), v(y), y) = F\left(\left(\Phi'(\Phi^{-1}(y))\right)^t \cdot \nabla v(y), v(y), \Phi^{-1}(y)\right)$$

die entsprechende Differentialgleichung für v . Im Folgenden nehmen wir an, dass die Hyperebene H die Form hat

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \cdot e_n = x_0 \cdot e_n\}.$$

Durch einen geeigneten Koordinatenwechsel können wir das immer erreichen, wenn die Hyperebene nur hinreichend glatt ist. Weil u und v 2-mal stetig differenzierbar sein müssen, um den vorangehenden Satz anzuwenden, sollten Φ und Φ^{-1} auch 2-mal stetig differenzierbar sein. Also muss auch die Hyperebene 2-mal stetig differenzierbar sein, um sie auf die gewünschte Form zu bringen. Auf $\Omega \cap H$ muss ebenfalls

$$F(\nabla u(y), u(y), y) = 0$$

gelten. Um also auf $y \in \Omega \cap H$ die Anfangsbedingungen

$$z(0) = g(y), \quad p(0) = q(y) \quad \text{und} \quad x(0) = y$$

entsprechend vorzugeben, müssen wir eine Funktion $q : \Omega \cap H \rightarrow \mathbb{R}^n$ finden, so dass für alle $y \in \Omega \cap H$ gilt

$$F(q(y), g(y), y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g(y)}{\partial y_i} = q_i(y) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

Damit sind also alle Komponenten $q_1(y), \dots, q_{n-1}(y)$ durch $\frac{\partial g(y)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g(y)}{\partial y_{n-1}}$ vorgegeben, so dass wir nur noch die Komponente $q_n(y)$ so bestimmen müssen, dass gilt

$$F(q(y), g(y), y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \Omega \cap H.$$

Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt:

Lemma 3.4. Sei F stetig differenzierbar und $(p_0, z_0, x_0) \in W$ und $x_0 \in \Omega \cap H$ und $z_0 = g(x_0)$. Wenn

$$F(p_0, z_0, x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(p_0, z_0, x_0)}{\partial p_n} \neq 0$$

gilt, dann gibt es eine Umgebung von $y_0 = x_0 \in \Omega \cap H$ auf der die Gleichungen

$$F(q(y), g(y), y) = 0 \quad \text{und} \quad q_i(y) = \frac{\partial g(y)}{\partial y_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1$$

genau eine Lösung q hat.

q.e.d.

Satz 3.5. Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Sei $(p_0, z_0, x_0) \in W$ mit $F(p_0, z_0, x_0) = 0$ und g eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Schnittmenge der Hyperebene $H = \{y \in \mathbb{R}^n \mid e_n \cdot y = e_n \cdot x_0\}$ mit einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wenn $\frac{\partial F}{\partial p_n}(p_0, z_0, x_0) \neq 0$ dann gibt es auf einer Umgebung Ω von x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$F(\nabla u(x), u(x), x) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega \quad \text{und} \quad u(y) = g(y) \quad \text{für } y \in \Omega \cap H$$

Beweis: Wegen dem vorangehenden Lemma gibt es auf der Schnittmenge einer Umgebung von x_0 mit H genau eine stetig differenzierbare Funktion q nach \mathbb{R}^n , so dass auf der Schnittmenge einer offenen Umgebung von x_0 mit H gilt

$$F(q(y), g(y), y) = 0 \quad \text{und} \quad q_i(y) = \frac{\partial g(y)}{\partial y_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

Wegen dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es dann für alle y in der Schnittmenge einer Umgebung von x_0 mit H genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(s) &= \frac{\partial F}{\partial p_i}(p(s), z(s), x(s)) && \text{mit } x(0) = y \\ \dot{p}_i(s) &= -\frac{\partial F}{\partial x_i}(p(s), z(s), x(s)) - \frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), x(s))p_i(s) && \text{mit } p(0) = q(y) \\ \dot{z}(s) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s))p_j(s) && \text{mit } z(0) = g(y). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diese Familie von Lösungen mit $x(y, s)$, $p(y, s)$ und $z(y, s)$. Wenn $\Omega \ni x_0$ klein genug gewählt ist, sind diese Lösungen sogar alle auf $(\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon)$ eindeutig definiert mit $\epsilon > 0$. Wegen Satz 1.27 sind diese Lösungen zweimal stetig differenzierbar.

Wegen den Anfangsbedingungen und der Bedingung $\frac{\partial F}{\partial p_n}(p_0, z_0, x_0) \neq 0$ besitzt die Funktion

$$(\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega, \quad (y, s) \mapsto x(y, s)$$

im Punkt $(y_0, 0) = (x_0, 0)$ eine invertierbare Ableitung. Dann folgt aus dem Satz der inversen Funktion, dass für eine geeignet verkleinerte Umgebung Ω von x_0 und ein geeignetes $\epsilon > 0$ diese Abbildung ein zweimal stetig differenzierbarer Homöomorphismus mit zweimal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung ist. Dann definieren wir

$$u(x(y, s)) = z(y, s) \text{ für alle } (y, s) \in (\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon).$$

Wir zeigen jetzt, dass diese Funktion die Differentialgleichung $F(\nabla u(x), u(x), x) = 0$ löst. Zunächst folgt aus der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) = 0.$$

Weil $F(q(y), g(y), y) = 0$ für alle $y \in \Omega \cap H$ folgt auch

$$F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) = 0 \text{ für alle } (y, s) \in (\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon).$$

Also genügt es $p(y, s) = \nabla u(x(y, s))$ für alle $(y, s) \in (\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon)$ zu zeigen. Wir zeigen zunächst, dass für alle $(y, s) \in (\Omega \cap H) \times (-\epsilon, \epsilon)$ und alle $i = 1, \dots, n-1$

$$\frac{\partial z(y, s)}{\partial s} = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial z(y, s)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i}$$

gilt. Die erste Gleichung folgt aus der gewöhnlichen Differentialgleichung für $x(y, s)$ und $z(y, s)$. Für $s = 0$ folgt die zweite Gleichung aus den Anfangsbedingungen von $z(y, s)$, $p(y, s)$ und $x(y, s)$. Die Ableitung nach y_i der ersten Gleichung ergibt

$$\frac{\partial^2 z(y, s)}{\partial y_i \partial s} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j(y, s)}{\partial y_i} \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial s} + p_j(y, s) \frac{\partial^2 x_j(y, s)}{\partial y_i \partial s} \right).$$

Mit dem Satz von Schwarz folgt

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z(y, s)}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j(y, s)}{\partial y_i} \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial s} - \frac{\partial p_j(y, s)}{\partial s} \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j(y, s)}{\partial y_i} \frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s))}{\partial p_j} + \\
&+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s))}{\partial x_j} + \frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) p_j(y, s)}{\partial z} \right) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial y_i} F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) - \\
&- \frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s))}{\partial z} \left(\frac{\partial z(y, s)}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i} \right).
\end{aligned}$$

Aus $F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial y_i}(y, s) - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y, s) \right) = \\
&- \frac{\partial F(p(y, s), z(y, s), x(y, s))}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y_i}(y, s) - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y, s) \right).
\end{aligned}$$

Diese lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswert 0 bei $s = 0$ hat die eindeutige Lösung 0. Also folgt die zweite Gleichung

$$\frac{\partial z(y, s)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j(y, s)}{\partial y_i}.$$

Lokal ist die Ableitung von $(y, s) \mapsto x$ invertierbar. Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j} &= \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k=1}^n p_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = p_j.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen an $z(y, 0)$ gilt für alle $y \in \Omega \cap H$ auch $u(y) = g(y)$. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Picard–Lindelöf und Satz 3.3. **q.e.d.**

Wir haben das Lösen dieses Randwertproblems auf das Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückgeführt. Im Fall der inhomogenen Transportgleichung fassen wir x und t zu einer Koordinate (x, t) zusammen. Dann ist $F(p, z, (x, t)) = \tilde{F}(p, x, t) = b_1 p_1 + \dots + b_n p_n + p_{n+1} - f(x, t)$. Die gewöhnliche Differentialgleichung ist

$$\dot{x} = b \quad \dot{t} = 1 \quad \dot{p} = (\nabla f(x, t), \dot{f}(x, t)) \quad \dot{z} = \tilde{F}(p, x, t) + f(x, t) = f(x, t).$$

Kapitel 4

Laplacegleichung

Eine der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen ist die Laplacegleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Die entsprechende inhomogene Differentialgleichung heißt Poissongleichung:

$$-\Delta u = f.$$

Beide Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine gesuchte Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sie tauchen in der Physik auf und beschreiben z.B. das elektrische Feld im Vakuum oder mit einer Ladungsverteilung f .

4.1 Fundamentallösungen

Die Laplacegleichung ist invariant unter allen Rotationen und Translationen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n . Deshalb suchen wir zunächst nach kugelsymmetrischen Lösungen, also Lösungen, die nur von der Länge $r = |x| = \sqrt{x \cdot x}$ des Ortsvektors abhängen. Für eine solche Funktion $u(x) = v(r) = v(\sqrt{x \cdot x})$ ergibt die Kettenregel:

$$\nabla_x u(x) = v'(\sqrt{x \cdot x}) \nabla_x r = v'(\sqrt{x \cdot x}) \frac{2x}{2r}.$$

Also geht die Laplacegleichung über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\Delta_x u(x) = \nabla_x \cdot \nabla_x u = v''(r) \frac{x^2}{r^2} + v'(r) \frac{n}{r} - v'(r) \frac{x^2}{r^2 r} = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung können wir folgendermaßen lösen:

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r} \Rightarrow \ln(v'(r)) = (1-n)\ln(r) + C \Rightarrow v(r) = \begin{cases} C' \ln(r) + C'' & \text{für } n = 2 \\ \frac{C'}{r^{n-2}} + C'' & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Definition 4.1. Sei $\Phi(x)$ folgende Lösung der Laplacegleichung:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Hier bezeichnet ω_n das Volumen des Einheitsballs im euklidischen Raum \mathbb{R}^n .

Diese Lösung ist bei $x = 0$ singularär. Mit dieser Wahl der Konstanten haben wir

Satz 4.2. Für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ haben wir folgende Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)d^n y.$$

Beweis: Die Gleichheit der beiden Integrale in der Definition von $u(x)$ ergibt sich aus der Substitution $y \mapsto x-y$. Weil f zweimal differenzierbar ist und kompakten Träger hat, ist auch das zweite Integral nach x zweimal differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) d^n y.$$

Insbesondere ist $\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) d^n y$. Wir zerlegen dieses Integral in ein Integral nahe bei der Singularität von Φ und ein Integral außerhalb der Singularität:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) d^n y & + & \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) d^n y \\ &= I_\epsilon & + & J_\epsilon. \end{aligned}$$

Wenn ϵ gegen Null geht, dann konvergiert das erste Integral gegen Null:

$$|I_\epsilon| \leq C \|\Delta_x f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\epsilon)} |\Phi(y)| d^n y \leq \begin{cases} C\epsilon^2 |\ln \epsilon| & (n = 2) \\ C\epsilon^2 & (n \geq 3). \end{cases}$$

Eine partielle Integration ergibt für das zweite Integral:

$$\begin{aligned} J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)} \Phi(y) \Delta_y f(x - y) d^n y \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)} \nabla_y \Phi(y) \cdot \nabla_y f(x - y) d^n y \quad + \int_{\partial B(0, \epsilon)} \Phi(y) \nabla_y f(x - y) \cdot N d\sigma(y) \\ &= K_\epsilon \quad + L_\epsilon. \end{aligned}$$

Hier ist N die äußere Normale und $d\sigma$ das Maß auf dem Rand von $B(0, \epsilon)$. Der zweite Ausdruck konvergiert wieder gegen Null:

$$|L_\epsilon| \leq |\nabla f|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0, \epsilon)} |\Phi(y)| d\sigma(y) \leq \begin{cases} C\epsilon |\ln \epsilon| & (n = 2) \\ C\epsilon & (n \geq 3). \end{cases}$$

Durch nochmaliges partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} K_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)} \Delta_y \Phi(y) f(x - y) d^n y - \int_{\partial B(0, \epsilon)} \nabla_y \Phi(y) f(x - y) \cdot N d\sigma(y) \\ &= - \int_{\partial B(0, \epsilon)} \nabla_y \Phi(y) f(x - y) \cdot N d\sigma(y), \end{aligned}$$

weil für $y \neq 0$ ϕ harmonisch ist. Folgender Gradient ist $\nabla \Phi(y) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{y}{|y|^n}$. Der zum Ursprung zeigende Normalenvektor ist $-\frac{y}{|y|}$. Wenn σ_n das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n bezeichnet, dann berechnet sich das Volumen ω_n des Einheitsballs durch

$$\omega_n = \int_0^1 \sigma_n r^{n-1} dr = \frac{\sigma_n}{n}.$$

Weil $n\omega_n \epsilon^{n-1}$ das Volumen von $\partial B(0, \epsilon)$ ist, ist K_ϵ der Mittelwert von $-f$ auf $\partial B(0, \epsilon)$. Weil f stetig ist, konvergiert dieser Mittelwert im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ gegen $-f(x)$. **q.e.d.**

Im Sinne von Distributionen gilt also $-\Delta \Phi(x) = \delta(x)$. Hieraus erklärt sich die Wahl der Konstanten bei der Definition von Φ . Die Faltung einer Funktion f mit Φ ist auch definiert, wenn f nur stetig ist, oder sogar nur lokal integrierbar ist. Im Allgemeinen ist die einer stetigen Verteilung f entsprechende Lösung der Poissongleichung nicht zweimal differenzierbar. Aber der Satz gilt auch für Lipschitz-stetige f ist. Diese Lösung der Poissongleichung ist sogar für alle Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wohl definiert, und auch eine schwache Lösung der Poissongleichung. Weil die Poissongleichung eine inhomogene lineare Differentialgleichung ist, ist jede Lösung nur bestimmt bis auf Addition einer Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung, also einer harmonischen Funktion.

4.2 Mittelwerteigenschaften

Für eine harmonische Funktion u auf einem Gebiet, das einen Ball $B(x, r)$ vom Radius r enthält, ist der Mittelwert von u auf dem Rand $\partial B(x, r)$ des Balls gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x . Weil das für beliebige Radien gilt und der Mittelwert von u auf dem Ball $B(x, r)$ gleich einem gewichtetem Mittelwert aller Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x, r')$ mit $0 \leq r' \leq r$ ist, ist auch der Mittelwert auf $B(x, r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x . Das führt zu aufschlussreichen Schlussfolgerungen.

Mittelwerteigenschaft 4.3. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet Ω , das den Ball $B(x, r)$ enthält. Dann sind die Mittelwerte von u auf dem Ball $B(x, r)$ und dessen Rand gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x . Sind umgekehrt die Mittelwerte einer zweimal differenzierbaren Funktion $u \in C^2(\Omega)$ auf allen Bällen $B(x, r)$, die in Ω enthalten sind, oder auf Rändern dieser Bälle gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten, dann ist u auf Ω harmonisch.*

Beweis: Sei $\Psi(r)$ der Mittelwert von u auf den Rändern der Bälle $B(x, r) \subset \Omega$:

$$\Psi(r) = \frac{1}{r^{n-1}n\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz)d\sigma(z).$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z d\sigma(z) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot N d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{nr^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot N d\sigma(y) &= \frac{1}{nr^{n-1}\omega_n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) d^n y. \end{aligned}$$

Wenn u harmonisch ist, dann ist Ψ konstant solange $B(x, r)$ in Ω liegt. Wegen der Stetigkeit von u konvergiert $\Psi(r)$ im Grenzwert $\lim r \rightarrow 0$ gegen $u(x)$. Also sind die Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle in Ω gleich $u(x)$. Es gilt auch

$$\frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(x,r)} u(y) d^n y = \frac{1}{r^n \omega_n} \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} u(y) d\sigma(y) ds = \frac{n}{r^n} \int_0^r s^{n-1} \Psi(s) ds.$$

Weil Ψ konstant ist, ist auch der Mittelwert von u auf $B(x, r)$ gleich $u(x)$.

Wenn umgekehrt die Mittelwerte von u auf allen Bällen $B(x, r)$ in Ω gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten sind, dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n} \int_0^r s^{n-1} \Psi(s) ds.$$

Deshalb verschwindet die Ableitung der rechten Seite nach r :

$$-\frac{n^2}{r^{n+1}} \int_0^r s^{n-1} \Psi(s) ds + \frac{n}{r^n} r^{n-1} \Psi(r) = -\frac{n}{r} u(x) + \frac{n}{r} \Psi(r) = 0.$$

Dann sind auch die Mittelwerte $\Psi(r)$ gleich $u(x)$. Weil u zweimal differenzierbar ist, ist nach unserer obigen Formel Ψ differenzierbar. Wenn die Ableitungen $\Psi'(r)$ zu allen $x \in \Omega$ verschwinden, dann verschwinden die Integrale von Δu über alle Bälle in Ω . Also ist u dann harmonisch. Dasselbe gilt auch, wenn die Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x, r)$ gleich den Werten von u an den Mittelpunkten sind. **q.e.d.**

4.3 Maximumprinzip

Wenn eine harmonische Funktion u auf einem offen zusammenhängendem Gebiet Ω ihr Supremum (oder Infimum) in einem Punkt $x \in \Omega$ annimmt, dann gibt es sicherlich einen Ball $B(x, r) \subset \Omega$. Dann folgt aus der Mittelwertigkeit

$$\frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(x, r)} |u(y) - u(x)| d^n y = 0.$$

Also muss u auf $B(x, r)$ konstant sein. Insbesondere ist die Teilmenge von Ω , auf der u gleich $u(x)$ ist, offen und abgeschlossen. Weil aber Ω zusammenhängend ist, muss dann diese Teilmenge ganz Ω sein. Damit folgt aus der Mittelwertigkeit ein

Starkes Maximumprinzip 4.4. *Besitzt eine harmonische Funktion auf einem offenen zusammenhängenden Gebiet ein Maximum, dann ist sie konstant.* **q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip 4.5. *Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ eine auf dem Abschluss eines beschränkten offenen Gebietes Ω stetige Funktion, die auf Ω harmonisch ist. Dann nimmt u sein Maximum (und Minimum) auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω an.*

Beweis: Weil u stetig ist, nimmt sie ihr Maximum und Minimum auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}$ an. Wegen dem Starken Maximumprinzip liegt es auf dem Rand. **q.e.d.**

Das Maximumprinzip lässt sich ohne die Mittelwertigkeit verallgemeinern.

Definition 4.6. *Auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt L von der Form*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad \text{mit symmetrischen } a_{ij} = a_{ji}$$

elliptisch, wenn
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) k_i k_j > 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und alle } k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Die Bedingung, dass a_{ij} symmetrisch ist, ist keine Einschränkung, weil wir wegen dem Satz von Schwarz a_{ij} durch $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ ersetzen können.

Satz 4.7. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf einem beschränkten offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten $a_{ij}(x)$ und $b_i(x)$, die sich stetig und elliptisch auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen. Dann nimmt jede auf Ω zweimal stetig differenzierbare Funktion u , die sich stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzt und $Lu \geq 0$ erfüllt, das Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass L uniform elliptisch ist, dass es also ein $\lambda > 0$ gibt mit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)k_i k_j \geq \lambda \sum_{i=1}^n k_i^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und alle } k \in \mathbb{R}^n.$$

Die stetige Funktion $(x, k) \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)k_i k_j$ nimmt auf der kompakten Menge $(x, k) \in \bar{\Omega} \times S^{n-1} \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ ein Minimum $\lambda > 0$ an. Also ist L uniform elliptisch.

Sei $v(x) = \exp(\alpha x_1)$ mit $\alpha > 0$. Weil L uniform elliptisch ist folgt $Lv = \alpha(\alpha a_{11}(x) + b_1(x)) \geq \alpha(\alpha\lambda + b_1(x))$. Weil die stetigen Koeffizienten b_i auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}$ beschränkt sind, gibt es ein groß genuges $\alpha > 0$ mit $Lv > 0$. Weil L linear ist, folgt $L(u + \epsilon v) > 0$ für alle $\epsilon > 0$ und auf ganz Ω . Weil $u + \epsilon v$ auf $\bar{\Omega}$ stetig ist, nimmt es dort ein Maximum an. Weil $u + \epsilon v$ auf Ω zweimal differenzierbar ist, verschwinden an einem Maximum in Ω alle ersten partiellen Ableitungen und alle zweiten Richtungsableitungen sind nicht positiv. Die symmetrische Hessische ist also negativ semidefinit, und lässt sich durch eine orthogonale Matrix diagonalisieren zu einer Diagonalmatrix mit nicht positiven Einträgen. Das widerspricht der Elliptizität und $L(u + \epsilon v) > 0$. Deshalb nehmen für alle $\epsilon > 0$ die Funktionen $u + \epsilon v$ das Maximum auf $\partial\Omega$ an:

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) + \epsilon \inf_{x \in \Omega} v(x) \leq \sup_{x \in \Omega} (u(x) + \epsilon v(x)) = \max_{x \in \partial\Omega} (u(x) + \epsilon v(x)) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x) + \epsilon \max_{x \in \partial\Omega} v(x).$$

Weil v auf $\bar{\Omega}$ beschränkt ist, und das für alle $\epsilon > 0$ gilt folgt die Aussage. **q.e.d.**

Die negativen Funktionen erfüllen die Ungleichung $Lu \leq 0$, und nehmen entsprechend das Minimum auf dem Rand an. Insbesondere nehmen Lösungen der Gleichung $Lu = 0$ sowohl das Minimum als auch das Maximum auf dem Rand an.

4.4 Greensche Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, durch welche Vorgaben eine harmonische Funktion auf einem offenen zusammenhängendem Gebiet Ω eindeutig bestimmt ist. Es bietet sich an die Werte von u oder einiger ihrer partiellen Ableitungen auf dem Rand $\partial\Omega$ festzulegen. Wir nennen eine Funktion auf dem Abschluss eines

Gebietes n -mal stetig differenzierbar, wenn sie n -mal differenzierbar ist, und sich alle partiellen Ableitungen bis zur n -ten Ordnung stetig auf den Abschluss fortsetzen.

Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf das Vektorfeld $v(x)\nabla u(x)$ ergibt die

Erste Greensche Formel 4.8. *Seien u und v auf $\bar{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} v(y)\Delta u(y)d^n y + \int_{\Omega} \nabla v(y) \cdot \nabla u(y)d^n y = \int_{\partial\Omega} v(z)\nabla u(z) \cdot N d\sigma(z). \quad \text{q.e.d.}$$

Vertauschen wir in der Ersten Greenschen Formel die Rollen von u und v und subtrahieren das Ergebnis von der ursprünglichen Formel, so erhalten wir die

Zweite Greensche Formel 4.9. *Seien u und v auf $\bar{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} (v(y)\Delta u(y) - u(y)\Delta v(y)) d^n y = \int_{\partial\Omega} (v(z)\nabla u(z) - u(z)\nabla v(z)) \cdot N d\sigma(z). \quad \text{q.e.d.}$$

Wir wollen die Zweite Greensche Formel auf die Fundamentallösung $\Phi(x-y)$ anwenden. Diese Fundamentallösung ist für $y \neq x$ harmonisch, aber bei $y = x$ singular. Deshalb integrieren wir wie im Beweis von Satz 4.2 nur über das Komplement von $B(x, \epsilon)$. Im Beweis von Satz 4.2 haben wir gesehen, dass für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon))} u(z)\nabla_z \Phi(x-z) \cdot N d\sigma(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon))} u(x-z)\nabla_z \Phi(z) \cdot N d\sigma(z) = u(x).$$

Alle anderen Integrale konvergieren für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen Null. Deshalb folgt der

Greensche Darstellungssatz 4.10. *Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ auf einem offenen beschränkten Gebiet Ω eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x \in \Omega$:*

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Phi(x-y)\Delta u(y)d^n y + \int_{\partial\Omega} (\Phi(x-z)\nabla_z u(z) - u(z)\nabla_z \Phi(x-z)) \cdot N d\sigma(z).$$

Deshalb ist auf Ω jede Lösung u der Poissongleichung $-\Delta u = f$ durch die Werte von u und die Ableitung von u auf dem Rand $\partial\Omega$ in Richtung der Normalen eindeutig bestimmt. Umgekehrt stellt sich dann die Frage, für welche solche Daten auch eine Lösung existiert. Aus dem schwachen Maximumprinzip folgt, dass für eine Wahl von f und eine Wahl von Werten von u auf dem Rand $\partial\Omega$ höchstens eine Lösung existiert, weil die Differenz zweier solcher Lösungen harmonisch ist und auf dem Rand verschwindet. Deshalb erscheint es naheliegend folgendes Randwertproblem zu formulieren:

Dirichletproblem 4.11. Zu gegebenen Funktionen f auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und g auf $\partial\Omega$ ist eine Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$ gesucht, die sich stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzt und auf dem Rand $\partial\Omega$ mit g übereinstimmt.

Greensche Funktion 4.12. Eine Funktion $G_\Omega : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für das Gebiet Ω , wenn folgendes gilt:

- (i) $G_\Omega(x, y) - \Phi(x - y)$ ist für alle $x \in \Omega$ eine harmonische Funktion auf $y \in \Omega$.
- (ii) Für $x \in \Omega$ setzt sich $y \mapsto G_\Omega(x, y)$ stetig auf $\bar{\Omega}$ fort und verschwindet auf $y \in \partial\Omega$.

Mit dem Zweiten Greenschen Satz gilt für die Funktion $v(y) = G_\Omega(x, y) - \Phi(x - y)$:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Phi(x - y) \Delta u(y) d^n y + \int_{\partial\Omega} (\Phi(x - z) \nabla_z u(z) - u(z) \nabla_z \Phi(x - z)) \cdot N d\sigma(z) \\ = - \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) \Delta u(y) d^n y - \int_{\partial\Omega} u(z) \nabla_z G_\Omega(x, z) \cdot N d\sigma(z). \end{aligned}$$

Also ergibt der Greensche Darstellungssatz:

$$u(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) \Delta_y u(y) d^n y - \int_{\partial\Omega} u(z) \nabla_z G_\Omega(x, z) \cdot N d\sigma(z).$$

Haben umgekehrt $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichende Regularität, dann ist

$$u(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) d^n y - \int_{\partial\Omega} g(z) \nabla_z G_\Omega(x, z) \cdot N d\sigma(z)$$

eine Lösung des Dirichletproblems. Wegen Satz 4.2 löst der erste Summand das Dirichletproblem zu $g = 0$ und wenn g Randwert einer hinreichend glatten Funktion auf $\bar{\Omega}$ löst die Subtraktion des entsprechenden ersten Summanden das Dirichletproblem zu $f = 0$ und stimmt mit dem zweiten Summanden überein. Damit reduziert sich das Dirichletproblem auf die Bestimmung der Greenschen Funktion.

Für $x \in \Omega$ ist die Differenz $y \mapsto G_\Omega(x, y) - \Phi(x - y)$ eine harmonische Funktion auf $y \in \Omega$, die auf dem Rand gerade gleich $-\Phi(x - y)$ ist. Deshalb ist diese Differenz die Lösung des Dirichletproblem für die Funktionen $f = 0$ und $g(x) = -\Phi(x - y)$.

Satz 4.13. (Symmetrie der Greenschen Funktion) Sei Ω ein Gebiet, das eine Greensche Funktion G_Ω besitzt. Dann gilt $G_\Omega(x, y) = G_\Omega(y, x)$ für alle $x \neq y \in \Omega$.

Beweis: Für $x \neq y \in \Omega$ sei $\epsilon > 0$ so klein, dass die beiden Bälle $B(x, \epsilon)$ und $B(y, \epsilon)$ disjunkt sind und in Ω liegen. Die Zweite Greensche Formel auf dem Gebiet $\Omega \setminus (B(x, \epsilon) \cup B(y, \epsilon))$ mit den Funktionen $u(z) = G(x, z)$ und $v(z) = G(y, z)$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, \epsilon)} (G(y, z) \nabla_z G(x, z) - G(x, z) \nabla_z G(y, z)) \cdot N d\sigma(z) \\ = \int_{\partial B(y, \epsilon)} (G(x, z) \nabla_z G(y, z) - G(y, z) \nabla_z G(x, z)) \cdot N d\sigma(z). \end{aligned}$$

Im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ konvergieren die beiden ersten Summanden genau wie L_ϵ im Beweis von Satz 4.2 gegen Null. Die beiden zweiten Summanden konvergieren in diesem Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ genau wie die Umformung von K_ϵ zu einem Randintegral im Beweis von Satz 4.2 gegen $G(y, x)$ bzw. $G(x, y)$. **q.e.d.**

Wir beschränken uns auf $\Omega = B(0, 1)$, auf den sich alle Bälle zurückführen lassen. Wir spiegeln mit der Inversion an der Einheitssphäre $\partial B(0, 1)$ $x \mapsto \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$ das Innere vom Einheitsball auf das Äußere, wobei die Einheitssphäre festgehalten wird. Das Dirichletproblem für den Einheitskreis mit den Funktion $f = 0$ und $g(x) = \Phi(x - y)$ wird durch die Inversion der Singularität bei $y = x$ am Einheitskreis gelöst:

Greensche Funktion vom Einheitsball 4.14. Die Greensche Funktion vom Einheitsball $B(0, 1)$ ist gegeben durch

$$G_{B(0,1)}(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(|x|(\tilde{x} - y)) = \begin{cases} \Phi(x - y) - |x|^{2-n} \Phi(\tilde{x} - y) & \text{für } n > 2 \\ \Phi(x - y) - \Phi(\tilde{x} - y) - \Phi(x) & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Beweis: Für $|y| = 1$ gilt $|x|^2 |\tilde{x} - y|^2 = 1 - 2y \cdot x + x^2 = |x - y|^2$. Deshalb stimmen auf dem Rand $y \in \partial B(0, 1)$ die Funktionen $\Phi(|x|(\tilde{x} - y))$ und $\Phi(x - y)$ überein. **q.e.d.**

Satz 4.15. Sei $f \in C^2(\bar{B}(0, 1))$ und $g \in C(\partial B(0, 1))$. Dann ist

$$u(x) = \int_{B(0,1)} G_{B(0,1)}(x, y) f(y) d^n y - \int_{\partial B(0,1)} g(z) \nabla_z G_{B(0,1)}(x, z) \cdot N d\sigma(z)$$

die eindeutige Lösung des entsprechenden Dirichletproblems.

Beweis: Wegen $|x|^2 |\tilde{x} - y|^2 = 1 - 2x \cdot y + x^2 y^2 = |y|^2 |\tilde{y} - x|^2$ gilt $G_{B(0,1)}(x, y) = G_{B(0,1)}(y, x)$. Weil die beiden gegebenen Funktionen f und g getrennt in die beiden Summanden eingehen, genügt es die beiden Fälle $g = 0$ und $f = 0$ getrennt zu betrachten. Die Argumente des Satzes 4.2 zeigen, dass im Fall $g = 0$ die angegebene

Funktion auf $B(0, 1)$ die Poissongleichung löst und sich zweimal stetig differenzierbar auf $\bar{B}(0, 1)$ fortsetzen lässt. Weil $G_{B(0,1)}(x, y)$ auf dem Rand $x \in \partial B(0, 1)$ verschwindet, erfüllt die angegebene Funktion die geforderte Randbedingung auf $\partial B(0, 1)$.

Im Fall $f = 0$ ist die vermeintliche Lösung des Dirichletproblems auf $B(0, 1)$ offenbar harmonisch. Der entsprechenden Integralkern für $|y| = 1$ und $n > 2$ ist gegeben durch (Wir überlassen es dem Leser, das Ergebnis auch für $n = 2$ zu bestätigen):

$$\begin{aligned} K(x, y) &= -\nabla_y G_{B(0,1)}(x, y) \cdot \frac{y}{|y|} = -\nabla_y G_{B(0,1)}(y, x) \frac{y}{|y|} \\ &= -\frac{1}{n(n-2)\omega_n |y|} \nabla_y \left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2} |\tilde{y}-x|^{n-2}} \right) \\ &= \frac{1}{n\omega_n |y|} \left(\frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{y}{|y|^n |\tilde{y}-x|^{n-2}} - \frac{(\tilde{y}-x) \left(\frac{1}{|y|^2} - 2\frac{y^2}{|y|^4} \right)}{|y|^{n-2} |\tilde{y}-x|^n} \right) \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \frac{1-xy - (x^2 - 2xy + 1) + (1-xy)}{|x-y|^n} = \frac{1-|x|^2}{n\omega_n |x-y|^n}. \end{aligned}$$

Also ist der Integralkern für $|x| < 1$ positiv. Setzen wir die harmonische Funktion $u = 1$ in den Greenschen Darstellungssatz ein, so sehen wir, dass das Integral von dem Integralkern über $\partial B(0, 1)$ gleich 1 ist. Weil andererseits dieser Integralkern für festes $y \in \partial B(0, 1)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ stetig ist und auf $\partial B(0, 1) \setminus \{y\}$ verschwindet, konvergiert für eine stetige Funktion g die Familie von Funktionen $x \mapsto \int_{\partial B(0,1)} g(y) K(\lambda x, y) d\sigma(y)$ auf $x \in \partial B(0, 1)$ im Grenzwert $\lambda \uparrow 1$ gleichmäßig gegen g . **q.e.d.**

Aufgrund des Transformationsverhaltens des Laplaceoperators unter der Transformation $x \mapsto \frac{x-z}{r}$, ist die Greensche Funktion für den Ball $B(z, r)$ gegeben durch

$$G_{B(z,r)}(x, y) = r^{2-n} G_{B(0,1)}\left(\frac{x-z}{r}, \frac{y-z}{r}\right).$$

Für jede harmonische Funktion u auf $B(z, r)$, die sich stetig auf $\partial B(z, r)$ fortsetzt, gilt:

$$u(x) = \frac{r^2 - |x-z|^2}{nr\omega_n} \int_{\partial B(z,r)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y) = \frac{1 - \frac{|x-z|^2}{r^2}}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \frac{u(z+ry)}{\left|\frac{x-z}{r} - y\right|^n} d\sigma(y).$$

Also ist u auf $B(z, r)$ allein durch seine Werte auf $\partial B(z, r)$ bestimmt. Durch Ableiten nach x erhalten wir ähnliche Formeln für die Werte der Ableitungen von u . Die Formel impliziert die Mittelwertegenschaft. Weil für $y \in \partial B(z, r)$ die Taylorreihe von $x \mapsto |x-y|^{-n} = (y^2 - 2xy + x^2)^{-\frac{n}{2}}$ in $x = z$ auf allen Bällen $B(z, r')$ mit $r' < r$ gleichmäßig gegen $|x-y|^{-n}$ konvergiert, ist jede solche harmonische Funktion u auf $B(z, r)$ analytisch.

Korollar 4.16. *Auf offenen Gebieten sind harmonische Funktionen analytisch.* **q.e.d.**

Korollar 4.17. Sei u eine harmonische Funktion auf einem Gebiet $\Omega \supset B(x, r)$. Dann gibt es eine Konstante $C(n, k)$, die nur von der Dimension n und der Ordnung k abhängt, so dass alle partiellen k -ten Ableitungen von u an der Stelle x beschränkt sind durch

$$\left| \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right| \leq \frac{C(n, k)}{r^k} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x, r))}.$$

Beweis: Die Ungleichung folgt sofort aus der Poissonschen Darstellungsformel. **q.e.d.**

Satz von Liouville 4.18. Eine auf \mathbb{R}^n beschränkte harmonische Funktion ist konstant.

Beweis: Weil u beschränkt ist, sind die Normen $\|u\|_{L^\infty(\partial B(x, r))}$ beschränkt. Dann folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel, dass die ersten partiellen Ableitungen von u durch ein Vielfaches von $1/r$ beschränkt sind. Aus dem Grenzwert $r \rightarrow \infty$ folgt, dass alle ersten partiellen Ableitungen von u verschwinden und u konstant ist. **q.e.d.**

Lemma 4.19. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, das 0 enthält, und u sei eine harmonische beschränkte Funktion auf $\Omega \setminus \{0\}$. Dann lässt sich u harmonisch auf Ω fortsetzen.

Beweis: Wir wählen einen kleinen Kreis $B(0, r) \subset \Omega$. Wegen Satz 4.15 gibt es eine eindeutige Lösung \tilde{u} des Dirichletproblems mit den Randwerten von u auf $\partial B(0, r)$. Die Familie von harmonischen Funktionen $u_\epsilon(x) = \tilde{u}(x) - u(x) + \epsilon G_{B(0, r)}(x, 0)$ auf $B(0, r) \setminus \{0\}$ verschwinden aufgrund der Konstruktion auf dem Rand $\partial B(0, r)$. Wir behaupten, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Funktion u_ϵ auf $B(0, r) \setminus \{0\}$ nicht negativ ist. Wegen der Beschränktheit von u und der Unbeschränktheit von $G_{B(0, r)}(\cdot, 0)$ hätte andernfalls diese harmonische Funktion auf $B(0, r) \setminus \{0\}$ ein negatives Minimum im Inneren, was dem Starken Maximumprinzip widerspricht. Analog gilt für negative ϵ , dass u_ϵ nicht positiv ist, weil andernfalls diese harmonische Funktion ein positives Maximum im Inneren von $B(0, r) \setminus \{0\}$ hätte. Dann muss $u_0 = \tilde{u} - u$ identisch verschwinden. Also ist \tilde{u} eine harmonische Fortsetzung von u auf $B(0, r)$. **q.e.d.**

4.5 Dirichlet's Prinzip

Es gibt eine andere Methode um das Dirichletproblem zu lösen. Die Lösung lässt sich eindeutig dadurch charakterisieren, dass sie das Minimum eines Energiefunktional ist.

Dirichlet's Prinzip 4.20. Sei Ω ein beschränktes offenes Gebiet, auf dem der Gaußsche Satz gilt. Für alle stetigen Funktionen f auf Ω und g auf $\partial\Omega$ ist die Lösung des Dirichletproblems 4.4 gleich dem Minimum folgenden Funktional auf der Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\bar{\Omega}$, die auf $\partial\Omega$ gleich g sind:

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) - uf \right) d^n x.$$

Beweis. Sei u eine Lösung des Dirichletproblems und w eine auf $\bar{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, die auf $\partial\Omega$ gleich g ist. Aus partieller Integration folgt

$$0 = \int_{\Omega} (-\Delta u - f)(u - w) d^n x = \int_{\Omega} ((\nabla u) \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)) d^n x.$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\nabla u) \cdot (\nabla u) - fu) d^n x &= \int_{\Omega} ((\nabla u) \cdot (\nabla w) - fw) d^n x \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) d^n x + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\nabla w) \cdot (\nabla w) - fw \right) d^n x \end{aligned}$$

Hier haben wir die Cauchy Schwarz'sche Ungleichung benutzt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla w) d^n x &\leq \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla w) d^n x + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla w) \cdot (\nabla u - \nabla w) d^n x = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) d^n x + \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla w) \cdot (\nabla w) d^n x. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich also $I(u) \leq I(w)$. Wenn umgekehrt u ein Minimum von $I(u)$ ist, dann erfüllen alle $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, die auf $\partial\Omega$ verschwinden

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} I(u + tv) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} I(u) + t \int_{\Omega} ((\nabla u) \cdot (\nabla v) - fv) d^n x + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (\nabla v) d^n x \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} ((\nabla u) \cdot (\nabla v) - fv) d^n x = \int_{\Omega} (-\Delta u - f)v d^n x. \end{aligned}$$

Aus der letzten partiellen Integration folgt dann $-\Delta u = f$ auf Ω . **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir noch erwähnen, dass die Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen Dirichletproblems auch aus dem Funktional folgt. Die Differenz zweier Lösungen ist nämlich harmonisch und verschwindet auf dem Rand. Für diese Wahl $f = 0$ und $g = 0$ ist das Funktional offensichtlich nicht negativ, und genau dann Null, wenn u konstant ist, also wegen der Randbedingung verschwindet. Mit Hilfe des Dirichletprinzips lässt sich sogar für eine große Klasse von Funktionen f und g zeigen, dass das entsprechende Funktional nur genau einen Extremwert hat, der immer ein Minimum ist, und die Lösung des Dirichletproblem ergibt.

Kapitel 5

Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \Delta u = 0$$

und die entsprechende inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \Delta u = f.$$

Gesucht wird eine Lösung u auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und für die inhomogenen Gleichung ist f eine gegebene Funktion auf Ω . Von vielen Aussagen über harmonische Funktionen werden wir analoge Aussagen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zeigen.

Diese Wärmeleitungsgleichung beschreibt Diffusionsprozesse, das heißt die zeitliche Entwicklung solcher räumlich variierender Größen wie Wärme, chemische Konzentration usw.. Dabei ist die Flussdichte gerade proportional zu dem negativen Gradienten, weil der Fluss von der höheren Konzentration zu der niedrigeren zeigt. Damit erhalten wir aus der skalaren Erhaltungsgleichung die Wärmeleitungsgleichung.

5.1 Fundamentallösung

Weil die Wärmeleitungsgleichung linear ist und bzgl. der Zeit nur erste Ableitungen enthält und bzgl. des Raumes nur zweite Ableitungen, ist für jede Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u(x, t)$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ eine Lösung. Dieses sogenannte Skalenverhalten legt nahe, nach Lösungen zu suchen, die von $\frac{|x|^2}{t}$ abhängen.

Wir wollen den folgenden Ansatz machen:

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+.$$

Hier sind α, β Konstanten und $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine gesuchte Funktion. Dieser Ansatz ist durch das Skalenverhalten $u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ gerechtfertigt. Mit $\lambda t = 1$ erhalten wir $v(y) = u(y, 1)$. Mit diesem Ansatz geht die Wärmeleitungsgleichung über in

$$-\alpha \cdot t^{-(\alpha+1)} v(y) - \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) - t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \quad \text{mit} \quad y = \frac{x}{t^\beta}.$$

Damit diese Gleichung nicht von t abhängt, setzen wir $\beta = \frac{1}{2}$. Sie reduziert sich zu

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \Delta v = 0.$$

Wir nehmen wieder an, dass v nur von $|y|$ abhängt. Mit $v(y) = w(|y|)$ erhalten wir:

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0 \quad \text{mit} \quad r = \frac{|x|}{\sqrt{t}}.$$

Wenn wir $\alpha = \frac{n}{2}$ setzen, können wir die Gleichung einmal integrieren:

$$(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2} (r^n w)' = 0 \quad r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a.$$

Wenn w und w' im Unendlichen verschwinden gilt $a = 0$.

$$w' = -\frac{1}{2} r w. \quad w = b \cdot e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Wieder ergibt eine Wahl der Integrationskonstanten a und b die Fundamentallösung.

Definition 5.1. Folgende Funktion heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung:

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}.$$

Lemma 5.2. Für alle $t > 0$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) d^n x = 1$.

Beweis: $\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} d^n x = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} d^n x = \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = 1. \quad \mathbf{q.e.d.}$

Die Fundamentallösung ist also eine Art Mollifier auf dem \mathbb{R} , so dass wir erwarten können, dass die Faltung mit $\Phi(x, t)$ im Grenzwert $t \rightarrow 0$ wie die Identität wirkt.

Satz 5.3. Für eine beschränkte stetige Funktion h auf \mathbb{R}^n gilt für folgende Funktion

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) h(y) d^n y$$

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$
- (ii) $u - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$
- (iii) u lässt sich stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ fortsetzen mit $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = h(x)$.

Beweis: Weil $\Phi(x, t)$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ unendlich oft differenzierbar ist, und wegen des vorangehenden Lemmas und der Beschränktheit von h , ist $u(x, t)$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ wohl definiert, beschränkt und stetig. Für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ liegen alle partiellen Ableitungen $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t)$ als Funktionen von $y \in \mathbb{R}^n$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und hängen stetig von $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ ab. Deshalb ist das eine glatte Abbildung von $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ nach $L^1(\mathbb{R}^n)$. Weil das Integral ein lineares stetiges Funktional auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, ist auch u unendlich oft differenzierbar. Weil $\Phi(x, t)$ die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ löst, folgt (ii). Wegen der Stetigkeit von h gibt es für jedes $\epsilon > 0$ und alle x aus einer kompakten Teilmenge von \mathbb{R}^n ein $\delta > 0$, so dass $|h(x) - h(y)| < \epsilon$ für alle $|x - y| < \delta$ gilt. Außerdem gibt es ein $T > 0$, so dass für alle $t < T$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)} \Phi(y, t) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta/\sqrt{t})} \Phi(y, 1) d^n y < \epsilon.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |u(x, t) - h(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) (h(y) - h(x)) d^n y \right| \\ &\leq \int_{B(x, \delta)} \Phi(x - y, t) |h(y) - h(x)| d^n y + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \delta)} \Phi(x - y, t) |h(y) - h(x)| d^n y \\ &\leq \epsilon + 2\epsilon \sup\{|h(y)| \mid y \in \mathbb{R}^n\} \quad \text{für alle } t < T. \end{aligned}$$

Also konvergiert $u(x, t)$ im Grenzwert $t \rightarrow 0$ auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^n gleichmäßig gegen $h(x)$. **q.e.d.**

Als Distributionen (und sogar als Maß) konvergiert $\Phi(x, t)$ im Grenzwert $t \rightarrow 0$ also gegen die Dirac'sche δ -Funktion. Wir erkennen an dieser Lösung des Anfangswertproblems, dass sich Störungen mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten.

5.2 Inhomogenes Anfangswertproblem.

Im letzten Abschnitt hatten wir eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{und} \quad u(x, 0) = h(x)$$

konstruiert. Duhamel's Prinzip ist ein Verfahren, um aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu gewinnen.

Sei
$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) d^n y ds.$$
 Dann haben wir formal:

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, t) - \Delta u(x, t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, s) f(y, t - s) d^n y + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\dot{\Phi}(x - y, t - s) - \Delta_x \Phi(x - y, t - s) \right) f(y, s) d^n y ds = f(x, t). \end{aligned}$$

Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems 5.4. Sei f eine zweimal stetig und beschränkt differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. Dann ist

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) d^n y ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) d^n y ds$$

eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \Delta u = f \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \text{ und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0.$$

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, dass $v_s(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) d^n y$ auf $\mathbb{R}^n \times (s, \infty)$ das Anfangswertproblem $\dot{v}_s - \Delta v_s = 0$ mit $\lim_{t \rightarrow s} v_s(x, t) = f(x, t)$ erfüllt.

Also ist v_s auf $\mathbb{R}^n \times [s, \infty)$ stetig. Dann erfüllt für alle $\epsilon > 0$

$$u_\epsilon(x, t) = \int_0^{t-\epsilon} v_s(x, t) ds = \int_0^{t-\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) d^n y ds$$

$$\dot{u}_\epsilon(x, t) - \Delta u_\epsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - (t - \epsilon)) f(y, t - \epsilon) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, \epsilon) f(y, t - \epsilon) d^n y.$$

Also gilt $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{u}_\epsilon - \Delta u_\epsilon = f$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Andererseits gilt

$$u_\epsilon(x, t) = \int_{\epsilon}^t \Phi(y, s) f(x - y, t - s) d^n y ds.$$

Aufgrund der Voraussetzungen an f folgt daraus, dass auch

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\dot{u}_\epsilon(x, t) - \Delta u_\epsilon(x, t)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u(x, t)$$

gilt. Aufgrund der Stetigkeit von v gilt auch $u(x, 0) = 0$.

q.e.d.

Korollar 5.5. Zusammenfassend ergibt sich folgende Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{u} - \Delta u &= f & u(x, 0) &= h(x) \\ u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) h(y) d^n y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) d^n y ds. \end{aligned} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

5.3 Mittelwerteigenschaft

Die Fundamentallösung $\Phi(x, t)$ kann wieder dazu benutzt werden, um die Werte von $u(x, t)$ als Mittelwert auf einen "Ball" zu berechnen. Allerdings müssen wir den Ball an die neue Gleichung anpassen.

Definition 5.6. Für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und alle $r > 0$ sei

$$E(x, t, r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{(4\pi)^{n/2} (t-s)^{n/2}}{r^n} &\iff e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\frac{r^2}{4(t-s)} \right)^{n/2} \\ &\iff \frac{|x-y|^2}{4(t-s)} \leq \frac{n}{2} (2 \ln(r) - \ln(4(t-s)) - \ln(\pi)) \\ &\iff |x-y|^2 \leq 2(t-s)n(2 \ln(r) - \ln(t-s) - \ln(4\pi)). \end{aligned}$$

Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung 5.7. Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $(x, t) \in \Omega$ und $r > 0$ mit $E(x, t, r) \subset \Omega$

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(x, t, r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} d^n y ds.$$

Beweis: Aufgrund der Translationsinvarianz können wir $(x, t) = (0, 0)$ annehmen. Jetzt definieren wir

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \int_{E(0, 0, r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} d^n y ds = \int_{E(0, 0, 1)} u(ry, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} d^n y ds.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{E(0, 0, 1)} \left(\frac{|y|^2}{s^2} y \cdot \nabla u + 2r\dot{u} \frac{|y|^2}{s} \right) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} \frac{|y|^2}{s^2} y \cdot \nabla u d^n y ds + \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} 2\dot{u} \frac{|y|^2}{s} d^n y ds \end{aligned}$$

Sei jetzt $\psi = -\frac{n}{2} \ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \ln r$. Dann verschwindet ψ auf dem Rand von $E(0, 0, r)$, weil $\Phi(y, -s) = r^{-n}$ gilt auf $\partial E(0, 0, r)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} 2\dot{u} \frac{|y|^2}{s} d^n y ds &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} 4\dot{u} y \cdot \nabla \psi d^n y ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} (4n\dot{u}\psi + 4\dot{\psi} y \cdot \nabla u) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} (-4n\dot{u}\psi + 4\dot{\psi} y \cdot \nabla u) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} \left(-4n\dot{u}\psi + 4 \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) y \cdot \nabla u \right) d^n y ds. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} \left(-4n\Delta u \psi - \frac{2n}{s} y \cdot \nabla u \right) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(0, 0, r)} \left(4n\nabla u \cdot \nabla \psi - \frac{2n}{s} y \cdot \nabla u \right) d^n y ds = 0. \end{aligned}$$

Also ist ϕ konstant. Weil u stetig ist und

$$\frac{1}{r^n} \int_{E(0,0,r)} \frac{|y|^2}{s^2} d^n y ds = \int_{E(0,0,1)} \frac{|y|^2}{s^2} d^n y ds = 4$$

gilt, folgt $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = 4u(0,0)$. **q.e.d.**

5.4 Maximumprinzip

Für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir als den parabolischen Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$. Der parabolische Rand $\partial\Omega_T$ von Ω_T ist definiert als $\bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$. Er besteht also aus $(\partial\Omega \times (0, T]) \cup (\Omega \times 0)$ und enthält keine inneren Punkte von Ω zur Zeit $t = T$.

Starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung 5.8. *Sei Ω wegzusammenhängend (d.h. für je zwei Punkte $x, x' \in \Omega$ gibt es einen stetigen Pfad in Ω von x nach x') und u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T , die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen lässt. Wenn es einen Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ gibt, an dem u das Maximum annimmt, dann ist u konstant auf Ω_{t_0} .*

Beweis: Sei (x_0, t_0) ein Punkt von Ω_T , an dem u das Maximum annimmt. Dann gibt es ein r_0 , so dass $E(x_0, t_0, r_0) \subset \Omega_T$ liegt. Aufgrund der Mittelwerteigenschaften muss u dann auf $E(x_0, t_0, r_0)$ konstant sein. Weil Ω wegzusammenhängend ist gibt es für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, t_0)$ offenbar endlich viele $E(x_0, t_0, r_0), E(x_1, t_1, r_1), \dots, E(x_n, t_n, r_n)$ in $\Omega \times (0, t_0)$, die jeweils die Punkte $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n), (x, t)$ enthalten. Also ist u auf dem Abschluss von Ω_{t_0} konstant. **q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung 5.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und offenes Gebiet und u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T , die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen lässt. Dann nimmt u das Maximum auf dem parabolischen Rand an.* **q.e.d.**

Daraus folgt wieder die Eindeutigkeit von bestimmten Randwertproblemen:

Eindeutigkeit des Randwertproblems 5.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, zusammenhängendes und offenes Gebiet. Dann existiert höchstens eine Lösung u der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T , die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen lässt und auf $\partial\Omega_T$ gleich einer gegebenen Funktion g ist.*

Beweis: Wir wenden das Maximumprinzip auf die Differenz zweier Lösungen an. **q.e.d.**

Wir wollen die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems auf dem $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ zeigen. Dazu benötigen wir, wie bei dem Poissonproblem, ein Abfallverhalten im Unendlichen.

Maximumprinzip für das Cauchyproblem 5.11. Sei h eine beschränkte stetige Funktion auf \mathbb{R}^n und u eine Lösung auf $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0, T) \quad u(x, 0) = h(x) \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{0\},$$

die das Wachstumsverhalten
mit Konstanten $A, a > 0$ hat, dann gilt

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} \text{ auf } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} h.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $4aT < 1$ gilt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $4a(T + \epsilon) < 1$. Offensichtlich ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mu > 0$ die Funktion $v(x, t) = u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, T + \epsilon)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Also können wir das Starke Maximumprinzip auf alle Gebiete der Form $\Omega_T = B(y, r) \times (0, T]$ anwenden. Aufgrund der Voraussetzung an u ist sowohl u als auch h durch $Ae^{a|x|^2}$ beschränkt. Weil $\frac{1}{4(T+\epsilon-t)} > a$ gilt für $t > 0$, gibt es ein $R > 0$, so dass für alle $r > R$ auf $\partial\Omega_T = B(y, r) \times \{0\} \cup \partial B(y, r) \times (0, T]$ gilt $v(x, t) \leq \sup\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Dann folgt aus dem Schwachen Maximumprinzip $v(x, t) \leq \sup\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$. Weil $\mu > 0$ beliebig war gilt das auch für $\mu = 0$. Wenn $4aT \geq 1$ gilt zerlegen wir das Zeitintervall $[0, T]$ in solche Teilintervalle $[0, T] = [0, T_1] \cup \dots \cup [T_M, T]$ für die $4a(T_{m+1} - T_m) \geq 1$ gilt. Dann folgt induktiv die Aussage. **q.e.d.**

Eindeutigkeit des Anfangswertproblems 5.12. Sei $h \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. Dann gibt es höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \Delta u = f \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0, T) \quad u = h \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

die auf $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ das Wachstumsverhalten $|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}$ hat mit $A > 0$ und $a > 0$.

Beweis: Wegen dem Maximumprinzip für das Cauchyproblem 5.11 verschwindet die Differenzen zweier Lösungen. **q.e.d.**

Ähnlich wie bei der Laplacegleichung lässt sich die Eindeutigkeit des Randwertproblems 5.10 und des Anfangswertproblems 5.12 auch mit Hilfe einer Monotonie eines Energiefunktionals zeigen. Sei

$$e(t) = \int_{\Omega} u^2(x, t) d^n x.$$

Wenn u die homogene Wärmeleitungsgleichung erfüllt und am Rand von Ω verschwindet, dann ist dieses Funktional in Abhängigkeit von t monoton fallend:

$$\dot{e}(t) = 2 \int_{\Omega} u(x, t) \dot{u}(x, t) d^n x = 2 \int_{\Omega} u(x, t) \Delta u(x, t) d^n x = -2 \int_{\Omega} (\nabla u(x, t))^2 d^n x \leq 0.$$

Wenn $u(x, t)$ für $t = 0$ verschwindet, und $u(\cdot, t)$ und $\nabla u(\cdot, t)$ für $t > 0$ quadratintegabel sind, dann verschwindet u identisch.

5.5 Wärmeleitungskern

In Analogie zu der Greenschen Funktion der Laplacegleichung definieren wir für offene Gebiete Ω einen Wärmeleitungskern H_Ω .

Definition 5.13. Sei Ω ein offenes Gebiet im \mathbb{R}^n , Dann heißt $H_\Omega : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ Wärmeleitungskern von Ω , wenn H_Ω folgende Eigenschaften hat.

- (i) $H_\Omega(x, y, t) = 0$ für $y \in \partial\Omega$.
- (ii) $H_\Omega(x, y, t) - \Phi(x - y, t)$ setzt sich stetig auf $(x, y, t) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+$ zu einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung fort, die auf $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \{0\}$ verschwindet.

Lemma 5.14. Sei Ω ein offenes Gebiet im \mathbb{R}^n und u und v zwei reelle Funktionen mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega u(x, t) (\partial_t v(x, T-t) + \Delta v(x, T-t)) d^n x dt \\
& + \int_0^T \int_\Omega (\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t)) v(x, T-t) d^n x dt = \\
& = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (u(y, t) \nabla_y v(y, T-t) - \nabla_y u(y, t) v(y, T-t)) N(y) d\sigma(y) dt \\
& + \int_\Omega (u(x, T)v(x, 0) - u(x, 0)v(x, T)) d^n x.
\end{aligned}$$

Beweis: Eine partielle Integration bzgl. t von den beiden zeitlichen Ableitungen ergibt als die Randterme die Integrale über Ω und der Gaußsche Satz ergibt für die zweiten räumlichen Ableitungen die Integrale über $\partial\Omega$ **q.e.d.**

Setzen wir $H_\Omega(x, y, t)$ ein und benutzen die entsprechenden Eigenschaften, so folgt

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega (\dot{u}(y, t) - \Delta u(y, t)) H_\Omega(x, y, T-t) d^n y dt = \\
& = \int_0^T \int_{\partial\Omega} u(z, t) \nabla_z H_\Omega(x, z, T-t) N(z) d\sigma(z) dt + u(x, T) - \int_\Omega u(y, 0) H_\Omega(x, y, T) d^n y.
\end{aligned}$$

Und damit auch

$$u(x, T) = \int_0^T \int_{\Omega} (\dot{u}(y, t) - \Delta u(y, t)) H_{\Omega}(x, y, T - t) d^n y dt$$

$$- \int_0^T \int_{\partial\Omega} u(z, t) \nabla_z H_{\Omega}(x, z, T - t) N(z) d\sigma(z) dt + \int_{\Omega} u(y, 0) H(x, y, T) d^n y.$$

Lösung des Anfangswert und Randwertproblems 5.15. Seien f eine Funktion auf $\Omega \times (0, T)$, g eine Funktion auf $\partial\Omega \times [0, T]$ und h eine Funktion auf Ω mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften, so dass alle auftauchenden Integrale absolut konvergieren. Dann ist

$$u(x, T) = \int_0^T \int_{\Omega} f(y, t) H_{\Omega}(x, y, T - t) d^n y dt$$

$$- \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(z, t) \nabla_z H_{\Omega}(x, z, T - t) N(z) d\sigma(z) dt + \int_{\Omega} h(y) H_{\Omega}(x, y, T) d^n y$$

die eindeutige Lösung des Anfangs- und Randwertproblems.

$$\dot{u} - \Delta u = f \text{ auf } \Omega \times (0, T) \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T] \quad u(x, 0) = h(x) \text{ auf } \Omega$$

Beweisskizze: Wir zeigen zunächst, dass der Wärmeleitungskern symmetrisch ist.

Lemma 5.16. Für alle $T > 0$ und $x, y \in \bar{\Omega}$ gilt $H_{\Omega}(x, y, T) = H_{\Omega}(y, x, T)$.

Beweis: Setze die Funktionen $u(z, t) = H_{\Omega}(x, z, t)$ und $v(z, t) = H_{\Omega}(y, z, t)$ in Lemma 5.14 ein. Dann erhalten wir wegen der Eigenschaft (ii) und Satz 5.3 (iii)

$$0 = \int_{\Omega} (H_{\Omega}(x, z, T) H(y, z, 0) - H_{\Omega}(x, z, 0) H_{\Omega}(y, z, T)) d^n z = H_{\Omega}(x, y, T) - H_{\Omega}(y, x, T).$$

q.e.d.

Aus der Definition des Wärmeleitungskernes folgt die Aussage für $f = 0 = g$.

Als nächstes wollen wir diese Aussage auf das inhomogene Anfangswertproblem verallgemeinern:

$$u(x, T) = \int_0^T \int_{\Omega} H_{\Omega}(x, y, T - t) f(y, t) d^n y dt$$

ist eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.

$$\dot{u} - \Delta u = f \text{ auf } \Omega \times (0, T) \quad u(x, 0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T].$$

Wir haben bereits gezeigt, dass
$$v(x, T) = \int_{\Omega} H_{\Omega}(x, y, T - t) f(y, t) d^m y$$
 das Anfangswertproblem

$$\dot{v} - \Delta v = 0 \text{ auf } \Omega \times (t, \infty) \quad v(x, t) = f(x, t) \text{ auf } \Omega \times \{t\} \quad v(x, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0, \infty]$$

löst. Wenn f wie im inhomogenen Anfangswertproblem 5.4 solche Regularitätseigenschaften hat, so dass v sich zweimal stetig differenzierbar auf $\bar{\Omega} \times [0, T]$ fortsetzen lässt, dann erfüllt u das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(x, t) - \Delta u(x, t) = f \text{ auf } \Omega \times (0, T) \quad u(x, 0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T].$$

Zuletzt betrachten wir auch inhomogene Randwertprobleme. Gesucht ist eine Lösung des Randwertproblems

$$\dot{u}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \text{ auf } \Omega \times (0, T) \quad u(x, 0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x, t) = g \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T].$$

Für eine beliebige Funktion g auf $\partial\Omega \times [0, T]$ mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften, setzen wir zunächst g auf $\Omega \times [0, T]$ fort. Von dieser Fortsetzung \tilde{u} ziehen wir die Lösung zu $f = \dot{\tilde{u}} - \Delta \tilde{u}$ und $h(x) = \tilde{u}(x, 0)$ ab und erhalten dann eine Lösung des gewünschten Randwertproblems. **q.e.d.**

Die erforderlichen Regularitätseigenschaften hängen von dem Wärmeleitungskern und damit von dem Gebiet Ω ab. Wir setzen dabei immer voraus, dass auf Ω der Gaußsche Satz anwendbar ist. Bevor wir diese Aussagen über Anfangswert- und Randwertprobleme auf bestimmte Gebiete anwenden, zeigen wir

Lemma 5.17. *Für alle beschränkten zusammenhängenden Gebiete, die einen Wärmeleitungskern besitzen, ist dieser im entsprechenden parabolischen Zylinder positiv.*

Beweis: Der freie Wärmeleitungskern $\Phi(x, t)$ ist auf $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ positiv. Für alle beschränkten Gebiete Ω ist für festes $x \in \Omega$ der entsprechenden Wärmeleitungskern $H_{\Omega}(x, y, t)$ die Differenz von $\Phi(x - y, t)$ minus der eindeutigen Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\Omega \times [0, T]$, die auf $\Omega \times \{t = 0\}$ verschwindet und auf $\partial\Omega \times [0, T]$ mit $\Phi(x - y, t)$ übereinstimmt. Diese Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist für alle $\epsilon > 0$ auf $\Omega \times \{t = \epsilon\}$ und auf $\partial\Omega \times [0, T]$ kleiner oder gleich $\Phi(x - y, t)$. Wegen dem Maximumprinzip ist sie auf Ω_T kleiner als $\Phi(x - y, t)$, und $H_{\Omega}(x, y, t)$ ist positiv. **q.e.d.**

5.6 Spektraltheorie und Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir das Anfangswertproblem

$$\dot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{auf} \quad \Omega \times [0, T] \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times [0, T] \quad u = h \quad \text{auf} \quad \Omega \times \{0\}$$

mit Hilfe des entsprechenden Laplaceoperators auf Ω lösen. Zunächst beobachten wir, dass wenn h folgendes erfüllt:

$$-\Delta h = \lambda h \quad \text{auf} \quad \Omega \quad \text{und} \quad h|_{\partial\Omega} = 0,$$

sich dann das Anfangswertproblem lösen lässt durch den Ansatz:

$$u(x, t) = \varphi(t)h(x) \quad \dot{\varphi}(t)h(x) + \lambda\varphi(t)h(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist $\dot{\varphi}/\varphi = -\lambda$, $\varphi(t) = e^{-\lambda(t-t_0)}$. Wegen $\varphi(0) = 1$ erhalten wir als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $u(x, t) = e^{-\lambda t}h(x)$. Aufgrund der Linearität ist dann für $h = h_1 + \dots + h_M$ mit $-\Delta h_i = \lambda_i h_i$ auf Ω und $h_i|_{\partial\Omega} = 0$ die entsprechende Lösung $u(x, t) = e^{-\lambda_1 t}h_1(x) + \dots + e^{-\lambda_M t}h_M(x)$. Also genügt es die Funktion h in eine Summe von Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf Ω mit Dirichletrandbedingungen zu zerlegen.

Dazu wollen wir zunächst die Fundamentallösung nochmal neu interpretieren. Auf dem \mathbb{R}^n hat der Laplaceoperator folgende Eigenfunktionen:

$$-\Delta e^{2\pi i k \cdot x} = 4\pi^2 k^2 e^{2\pi i k \cdot x}.$$

Jetzt gilt
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(2\pi i k \sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}})^2} d^n k = \frac{1}{(2\pi \sqrt{t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(ik + \frac{x}{2\sqrt{t}})^2} d^n k = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}},$$

für alle imaginären x und wegen analytischer Fortsetzung für alle x . Damit folgt

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(2\pi i k \sqrt{t} + \frac{x-y}{2\sqrt{t}})^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d^n k = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i (x-y)k} d^n k.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times [0, T] \quad u(x, 0) = h \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n$$

gegeben durch

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i (x-y)k} h(y) d^n k d^n y.$$

Für eine integrable Funktion können wir den Satz von Fubini anwenden. Für alle stetigen integrablen Funktionen h folgt dann aus $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = h(x)$ auch

$$h(x) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i(x-y)k} h(y) d^n y d^n k.$$

Wir definieren jetzt die Fouriertransformation durch $\hat{h}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k y} h(y) d^n y$.

Dann gilt

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i k x} \hat{h}(k) d^n k \quad \text{und} \quad h(x) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i k x} \hat{h}(k) d^n k.$$

Definition 5.18. Sei \mathcal{S} der sogenannte Schwartzraum aller glatten Funktionen auf dem \mathbb{R}^n , die mit allen ihren Ableitungen schneller als jede Potenz abfallen.

Lemma 5.19. Die Fouriertransformation bildet den Schwartzraum auf sich selber ab.

Beweis: Offensichtlich ist die Fouriertransformation der Ableitung einer Funktion die Multiplikation mit $2\pi i$ mal der entsprechenden Koordinatenfunktion mit der Fouriertransformation der Funktion. Und es gilt $|\hat{f}(k)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x$. Also fällt die Fouriertransformation einer Schwartzfunktion schneller ab als jede Potenz. Umgekehrt ist die Fouriertransformierte einer integrablen Funktion stetig, weil es auf jeder beschränkten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $|k - k'| < \delta$ folgt $\sup\{|e^{2\pi i k x} - e^{2\pi i k' x}| \mid x \in K\} < \epsilon$. Außerdem gibt es für jede integrable Funktion f für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge K , so dass $\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)| d^n x < \epsilon$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k) - \hat{f}(k')| &\leq \int_K |f(x)| |e^{2\pi i k x} - e^{2\pi i k' x}| d^n x + 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)| d^n x \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x + 2 \right) \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist die Fouriertransformierte einer integrablen Funktion tatsächlich stetig, und die Fouriertransformierte einer Schwartzfunktion unendlich oft differenzierbar. **q.e.d.**

Sei also g eine Schwartzfunktion, dann gilt wegen des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(k) \bar{\hat{g}}(k) d^n k &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i k x} \bar{g}(y) e^{2\pi i k y} d^n x d^n y d^n k \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{2\pi i k (y-x)} \bar{g}(y) d^n x d^n k d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \bar{g}(y) d^n y. \end{aligned}$$

Also ist die $L^2(\mathbb{R}^n)$ -Norm der Fouriertransformierten gleich der $L^2(\mathbb{R}^n)$ -Norm der ursprünglichen Funktion. Weil die Schwartzfunktionen dicht liegen im $L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt, dass die Fouriertransformation einen unitären Operator definiert von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definition 5.20. Für jedes offene zusammenhängende Gebiet Ω sei $W^{2,2}(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ im Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{W^{2,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} (\Delta f) \Delta \bar{g} d^n x + \int_{\Omega} f \bar{g} d^n x.$$

Für alle Funktionen $g \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt offenbar

$$\langle \Delta g, \Delta g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\Delta g) \Delta \bar{g} d^n x \leq \langle g, g \rangle_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Für alle $g \in W^{2,2}(\Omega)$ liegt deshalb Δg in $L^2(\Omega)$ und für $f \in L^2(\Omega)$ folgt aus der Cauchy-Schwarzen Ungleichung

$$|\langle f, \Delta g \rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ konvergiert genau dann mit $(\Delta g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$, wenn sie in $W^{2,2}(\Omega)$ konvergiert. Also ist der Operator $H = -\Delta$ ein abgeschlossener selbstadjungierter Operator auf $L^2(\Omega)$ mit dem Domain $W^{2,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Weil $\int_{\Omega} (-\Delta g) \bar{g} d^n x = \int_{\Omega} |\nabla g|^2 \geq 0$ für alle $g \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, ist H nichtnegativ. Deshalb besitzt H eine Spektraldarstellung und e^{-tH} ist ein beschränkter Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ mit

$$\|e^{-tH} g\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sei also $u(x, t) = (e^{-tH} g)(x)$. Dann ist $\dot{u}(x, t) = -(He^{-tH})(x) = \Delta u(x, t)$. Also erfüllt $u(x, t)$ die Wärmeleitungsgleichung mit den Randbedingungen:

$$u(x, 0) = g(x) \qquad u(x, t) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

(Dirichlet Randbedingungen an H). Wir wollen zur Anwendung dieser Aussage den Wärmeleitungskern für den Kreis S^1 und das Intervall $[-1, 1]$ ausrechnen.

5.7 Wärmeleitungskern von S^1

Wir identifizieren den Kreis S^1 mit dem Quotientenraum \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Die Eigenfunktion von $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} sind gegeben durch $\psi_k = e^{2\pi i k x}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenwerten $4\pi^2 k^2$. Diese Eigenfunktionen bilden offenbar ein Orthonormalsystem von $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Aus dem Satz von Bolzano Weierstraß folgt, dass die Algebra der Polynome in $\sin(2\pi x)$ und $\cos(2\pi x)$ dicht liegen im reellen Banachraum $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Dann gilt dasselbe für die Polynome in $e^{2\pi i x}$ und $e^{-2\pi i x}$ im komplexen Banachraum $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Also ist das orthogonale Komplement von dem vorherigen Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ trivial, und das Orthonormalsystem ist eine Orthonormalbasis. Deshalb besitzt der Wärmeleitungskern von \mathbb{R}/\mathbb{Z} den Integralkern:

$$H_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x} e^{-2\pi i k y} e^{-4\pi^2 k^2 t} = \Theta(x - y, 4\pi i t) \text{ mit}$$

$$\Theta(x, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x} e^{\pi i \tau k^2}.$$

Hier ist $\Theta(x, \tau)$ Jacobi's Thetafunktion. Die Summe konvergiert auf dem Gebiet $(x, \tau) \in \mathbb{C} \times \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\}$ gegen eine holomorphe Funktion, weil dann $e^{\pi i \tau k^2}$ mit $|k|^2$ exponentiell abfällt. Sie ist im wesentlichen charakterisiert durch die Eigenschaften

$$\Theta(x + 1, \tau) = \Theta(x, \tau) \quad \Theta(x + \tau, \tau) = \Theta(x, \tau) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i x}$$

und dadurch, dass sie Nullstellen bei $x = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ hat. Die erste Eigenschaft folgt sofort aus der Definition als unendliche Reihe. Für die zweite und dritte berechnen wir

$$\begin{aligned} \Theta(x + \tau, \tau) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k (x + \tau)} e^{\pi i k^2 \tau} &&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x} e^{\pi i (k+1)^2 \tau} e^{-\pi i \tau} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i (k+1)x} e^{\pi i (k+1)^2 \tau} e^{-2\pi i x} e^{-\pi i \tau} &&= \Theta(x, \tau) e^{-2\pi i x} e^{-\pi i \tau} \\ \Theta\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, t\right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{\pi i \tau (k + \frac{1}{2})^2} e^{-\frac{\pi i}{4}} &&= - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{\pi i \tau (k + \frac{1}{2})^2} e^{-\frac{\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 5.21. (i) Zeige dass für alle $t > 0$ die Fundamentallösung $\Phi(x, t)$ als Funktion auf \mathbb{R}^n eine Schwartzfunktion ist.

(ii) Berechne für alle $t > 0$ die Fouriertransformierte der Fundamentallösung $\Phi(x, t)$ als Funktion auf $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Zeige, dass für jede Schwartzfunktion f auf \mathbb{R} , die folgende Summe gegen eine glatte Funktion \tilde{f} auf \mathbb{R} konvergiert, die periodisch ist mit Periode Eins:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n).$$

- (iv) Sei h eine stetige periodische Funktion auf \mathbb{R} mit Periode Eins. Zeige, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert h für alle $t > 0$ periodisch bleibt mit Periode Eins. Folgere daraus, dass die folgende Summe die Eigenschaften eines Wärmeleitungskerns auf S^1 hat:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x - y + n, t).$$

- (v) Die Poissonsche Summenformel besagt, dass für jede Schwartzfunktion f auf \mathbb{R} gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Benutze diese Formel um zu zeigen, dass gilt

$$H_{S^1}(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x - y + n, t).$$

5.8 Wärmeleitungskern von $[-1, 1]$

Die Abbildung $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ bildet das Intervall $[-1, 1]$ auf das Intervall $[0, 1]$ ab. Also sind die Eigenfunktionen von $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf $[-1, 1]$ mit Dirichletrandbedingungen gegeben durch

$$\psi_k = \sin\left(\pi k \left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \quad k \in \mathbb{N}$$

Diese Funktionen bilden wieder eine Orthonormalbasis

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sin\left(\pi k \left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi k' \left(\frac{x+1}{2}\right)\right) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\cos\left(\pi(k-k') \left(\frac{x+1}{2}\right)\right) - \cos\left(\pi(k+k') \left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\right) dx = \delta_{k,k'} \end{aligned}$$

Also ist der Wärmeleitungskern gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{[-1,1]}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 k^2 t}{4}} \sin\left(\pi k \left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi k \left(\frac{y+1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 k^2 t}{4}} \left(\cos\left(\pi k \frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\pi k \frac{x+y}{2} + 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \Theta\left(\frac{x-y}{4}, \frac{\pi i t}{4}\right) - \frac{1}{4} \Theta\left(\frac{x+y}{4} + \frac{1}{2}, \frac{\pi i t}{4}\right). \end{aligned}$$

Damit ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \Delta u = 0 \text{ auf } (-1, 1) \quad u(x, 0) = h(x) \text{ auf } [-1, 1]$$

gegeben durch
$$u(x, t) = \int_{-1}^1 H_{[-1,1]}(x, y, t) h(y) dy.$$

Übungsaufgabe 5.22. (i) Zeige dass der Wärmeleitungskern $H_{[0,1]}$ gegeben ist durch

$$H_{[0,1]}(x, y, t) = \frac{1}{2} \Theta\left(\frac{x-y}{2}, \pi t\right) - \frac{1}{2} \Theta\left(\frac{x+y}{2}, \pi t\right).$$

(ii) Sei $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen auf \mathbb{R} , dessen Elemente folgendes erfüllen:

$$f(n+x) = \begin{cases} f(x) & \text{für gerade } n \in 2\mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R} \\ -f(1-x) & \text{für ungerade } n \in 2\mathbb{Z} + 1 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zeige, dass es für jede stetige Funktion f auf $[0, 1]$, die auf dem Rand $\partial[0, 1]$ verschwindet genau eine Funktion in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ gibt, die auf $[0, 1]$ mit f übereinstimmt, und dass alle Funktionen in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ von so einer Funktion f induziert werden. Zeige dazu zuerst, dass alle Funktionen in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ an allen $x \in \mathbb{Z}$ verschwinden, und dann, dass $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ genau aus den stetigen, ungeraden und periodischen Funktionen mit der Periode Zwei besteht.

(iii) Zeige, dass für jede Schwartzfunktion f auf \mathbb{R} die folgende Summe gegen eine glatte Funktion \tilde{f} in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ konvergiert:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n+x) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n-x).$$

(iv) Sei $h \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Zeige, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert h für alle $t > 0$ eine glatte Funktion in $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ ist. Folgere daraus, dass die folgende Summe die Eigenschaften eines Wärmeleitungskerns auf $[0, 1]$ hat:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x+2n-y, t) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x+2n+y, t).$$

(v) Zeige, dass gilt

$$H_{[0,1]}(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x+2n-y, t) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x+2n+y, t).$$

Der Wärmeleitungskern eines kartesischen Produktes lässt sich einfach aus den beiden entsprechenden Wärmeleitungskernen berechnen:

Lemma 5.23. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene, beschränkte und zusammenhängende Gebiete, deren entsprechenden Wärmeleitungskerne H_Ω und $H_{\Omega'}$ existieren. Der Wärmeleitungskern des kartesischen Produktes ist dann gegeben durch*

$$H_{\Omega \times \Omega'}((x, x'), (y, y'), t) = H_\Omega(x, y, t)H_{\Omega'}(x', y', t) \quad (x, x'), (y, y') \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}' \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis: Offensichtlich ist der Laplaceoperator des kartesischen Produktes einfach die Summe der beiden entsprechenden Laplaceoperatoren. Daraus folgt, dass für alle Funktionen h auf $\Omega \times \Omega'$, die sich als ein Produkt von zwei Funktionen auf Ω und Ω' schreiben lassen, das Produkt der entsprechenden Lösungen Wärmeleitungsgleichung erstens das Anfangswertproblem löst und außerdem die richtigen Randbedingungen hat. Weil Ω und Ω' beschränkt sind, sind ihre Abschlüsse und damit auch $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}'$ kompakt. Wegen dem Satz von Bolzano Weierstraß liegen auf der kompakten Menge $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}'$ die Summen aller Produkte von Funktionen auf $\bar{\Omega}$ und $\bar{\Omega}'$ dicht in allen stetigen Funktionen. **q.e.d.**

Damit haben wir also die Wärmeleitungskerne von allen Tori $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ und allen Quadern $[-1, 1]^n$ berechnet. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \Delta u = 0 \text{ auf } (-1, 1)^n, \quad u(x, 0) = h(x) \text{ auf } [-1, 1]^n, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial[-1, 1]^n \times [0, T]$$

ist also gegeben durch

$$u(x, t) = \int_{[-1, 1]^n} \prod_{i=1}^n H_{[-1, 1]}(x_i, y_i, t) h(y) d^n y.$$

Korollar 5.24. *Sei $u(x, t)$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf einer Umgebung von $[-r, r]^n \times [0, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} u(x, T) = & - \int_0^T \int_{\partial[-r, r]^n} u(z, t) \nabla_z H_{[-r, r]^n}(x, z, T-t) N(z) d\sigma(z) dt = \\ & + \int_{[-r, r]^n} u(y, 0) H_{[-r, r]^n}(x, y, T) d^n y. \end{aligned} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Es gilt

$$H_{[-r, r]^n}(x, y, t) = \frac{1}{r^n} \prod_{i=1}^n H_{[-1, 1]} \left(\frac{x_i}{r}, \frac{y_i}{r}, \frac{t}{r^2} \right).$$

Weil dieser Wärmeleitungskern analytisch ist, folgt sofort

Korollar 5.25. *Sei u eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf einem offenen Gebiet in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dann ist u analytisch.* **q.e.d.**

Kapitel 6

Wellengleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir die homogene und inhomogene Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$ auf Teilgebieten von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Es ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Matrix der zweiten Ableitung hat im Gegensatz zur Laplacegleichung die Signatur $(1, n)$, ist also weder positiv noch negativ definit. Solche Differentialgleichungen werden hyperbolisch genannt. Ihr Lösungsverhalten unterscheidet sich deutlich von dem Lösungsverhalten von elliptischen Gleichungen. Sie beschreiben in der Physik solche Effekte, die sich nur mit endlicher Geschwindigkeit in Raum und Zeit ausbreiten, wie z.B. elektromagnetische Wellen und Gravitationswellen.

6.1 D'Alembert's Formel für $n = 1$

Wir wollen zunächst folgendes Anfangswertproblem lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = g(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei g und h gegebene Funktionen auf \mathbb{R} sind. Wenn wir diese Differentialgleichung als ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem von $C^2(\mathbb{R})$ -wertigen Funktionen in Abhängigkeit von t auffassen, ist aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zu erwarten, dass jedes solches Anfangswertproblem genau eine Lösung besitzt.

Für $n = 1$ faktorisiert der Wellenoperator (oder auch d'Alembertoperator)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Sei also
$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t).$$

Dann erfüllt v die lineare Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Das ist eine Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten, die die eindeutige Lösung

$$v(x, t) = a(x - t) \quad \text{mit} \quad a(x) = v(x, 0)$$

besitzt. Also erfüllt $u(x, t)$ die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = a(x - t).$$

Diese inhomogene Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + b(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x + t) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad b(x) = u(x, 0).$$

Die Anfangsbedingungen $u(x, 0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$ ergeben

$$b(x) = g(x) \quad \text{und} \quad a(x) = v(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = h(x) - g'(x).$$

Setzen wir das in unsere Lösungen ein, so erhalten wir

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y)) dy + g(x + t)$$

Also ist die Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

Damit haben wir aus der Lösung der homogenen und inhomogenen Transportgleichung die d'Alembertsche Formel bestimmt:

d'Alembertsche Formel 6.1. Sei g eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf \mathbb{R} und h eine einmal stetig differenzierbare Funktion auf \mathbb{R} . Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, und die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = g(x) & \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

An der d'Alembertschen Formel können wir erkennen, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung für $n = 1$ sich schreiben lässt als

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t).$$

Umgekehrt ist auch jede Funktion dieser Form eine Lösung der Wellengleichung. Das liegt daran, dass der Wellenoperator faktorisiert in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

deren Lösungen gerade allgemeine Funktionen $F(x+t)$ und $G(x-t)$ sind.

Die Lösung $u(x, t)$ hängt also nur von den Anfangswerten g bei $x \pm t$ ab und den Anfangswerten h im Intervall $[x-t, x+t]$. Das können wir so interpretieren, dass sich die Lösungen nur mit einer Geschwindigkeit kleiner als Eins ausbreiten, weil die Verbindungsgeraden von (x, t) zu allen diesen Punkten von $\mathbb{R} \times \{0\}$ Geschwindigkeiten kleiner als Eins haben. Außerdem sind die Lösungen des Anfangswertproblems genau dann k -mal stetig differenzierbar, wenn g k -mal stetig differenzierbar ist und h $(k-1)$ -mal. Die Regularität dieses Anfangswertproblems verbessert sich also nicht mit zunehmender Zeit, im Gegensatz zu der Wärmeleitungsgleichung.

Aus der d'Alembertschen Formel folgt mit Hilfe einer Spiegelung auch die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ && u(0, t) = 0 && \text{für } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) = g(x) & \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

Wir können u, g und h als ungerade Funktionen auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ausdehnen durch:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, t) &= \begin{cases} u(x, t) & \text{für } x \geq 0 \\ -u(-x, t) & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \\ \tilde{g}(x) &= \begin{cases} g(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \\ \tilde{h}(x) &= \begin{cases} h(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -h(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Für jede Lösung \tilde{u} des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{g}(x) & \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = \tilde{h}(x) && \text{für } x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

löst auch die Funktion $(x, t) \mapsto -\tilde{u}(-x, t)$ dieses Anfangswertproblem. Aus der Eindeutigkeit folgt $\tilde{u}(-x, t) = -\tilde{u}(x, t)$ und die Lösung \tilde{u} entspricht genau einer Lösung u des obigen Anfangswertproblems. Insbesondere setzt sich für die eindeutige Lösung u des ersten Anfangswertproblems die entsprechende Funktion \tilde{u} zu einer Lösung des zweiten Anfangswertproblems auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ fort. Weil die Funktionen \tilde{u}, \tilde{g} und \tilde{h} ungerade sind bezüglich x , verschwindet für $x \leq t$ das erste Integral auf der rechten Seite von

$$\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy = \int_{x-t}^{t-x} \tilde{h}(y) dy + \int_{t-x}^{t+x} \tilde{h}(y) dy.$$

Also ist die Lösung des obigen Anfangswertproblems gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \right) & \text{für } 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{2} \left(g(t+x) - g(t-x) + \int_{t-x}^{t+x} h(y) dy \right) & \text{für } 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Zu beachten ist hierbei, dass auf den Rand bei $x = 0$ zulaufende Wellen am Rand reflektiert werden und wieder zurücklaufen.

6.2 Sphärische Mittelwerte in der Wellengleichung

Wir werden jetzt sehen, dass die sphärischen Mittelwerte der Wellengleichung eine Differentialgleichung erfüllen, die wir später lösen wollen und daraus die allgemeine

Lösung folgenden Anfangswertproblems ableiten wollen: Gesucht ist die Lösung u der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ auf $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, die $u(x, 0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x)$ erfüllt. Sei also für alle $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, r > 0$

$$U(x, r, t) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) d\sigma(y) = \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) d\sigma(y).$$

Hier bezeichnet das Symbol \int den Mittelwert auf dem Gebiet Ω , also das Integral über das Gebiet Ω geteilt durch das Volumen von Ω . Analog definieren wir

$$G(x, r) = \int_{\partial B(x, r)} g(y) d\sigma(y) \quad \text{und} \quad H(x, r) = \int_{\partial B(x, r)} h(y) d\sigma(y).$$

Lemma 6.2. Wenn $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$ eine m -mal stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 & \text{auf } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ & \text{mit} \\ u(x, 0) &= g(x) & \text{und } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x) \quad \text{ist,} \end{aligned}$$

dann ist für festes $x \in \mathbb{R}^n$ das sphärische Mittel $U(x, r, t)$ eine m -mal differenzierbare Funktion auf $(r, t) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, die folgendes Anfangswertproblem der Euler-Poisson-Darbouxgleichung löst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, r, t) - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) - \frac{n-1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) &= 0 \quad \text{auf } (r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ U(x, r, 0) &= G(x, r) \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, r, 0) = H(x, r) \end{aligned}$$

Beweis: Es gilt:

$$U(x, r, t) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0, 1)} u(ry + x, t) d\sigma(y).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla_x u(ry + x, t) \cdot y d\sigma(y) \\ &= \frac{r}{n\omega_n} \int_{B(0, 1)} \Delta_x u(ry + x, t) d^n y \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) d^n y. \end{aligned}$$

Also ist die partielle Ableitung eines sphärischen Mittelwertes nach dem Radius r gleich $\frac{r}{n}$ mal dem Mittelwert des Laplaceoperators angewandt auf die ursprüngliche Funktion über den entsprechenden Ball. Insbesondere gilt $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) = 0$. Analog gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) d^n y \\ &= \frac{1-n}{n\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) d^n y + \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y, t) d\sigma(y). \\ &= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) d^n y + \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y, t) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t)$. Analog ist die partielle Ableitung eines Mittelwertes über einen Ball nach dem Radius r gleich $\frac{n}{r}$ mal dem entsprechenden sphärischen Mittelwert minus $\frac{n}{r}$ mal diesem Mittelwert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y, t) d^n y &= -\frac{n}{\omega_n r^{n+1}} \int_{B(x,r)} u(y, t) d^n y + \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B(x,r)} u(y, t) d\sigma(y) \\ &= -\frac{n}{r} \int_{B(x,r)} u(y, t) d^n y + \frac{n}{r} \int_{\partial B(x,r)} u(y, t) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Mit diesen Formeln können wir alle partiellen Ableitungen von den sphärischen Mittelwerten durch Mittelwerte von Potenzen des Laplaceoperators angewandt auf die ursprüngliche Funktion über Sphären und Bälle ausdrücken. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{n\omega_n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) d^n y = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) d\sigma(y) \\ &= r^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, r, t). \end{aligned}$$

Dann folgt

$$r^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (n-1)r^{n-2} \frac{\partial U}{\partial r} + r^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

6.3 Lösung für $n = 3$

Es wird sich herausstellen, dass die Wellengleichung für ungerade Dimensionen sich durch die sphärischen Mittel auf die eindimensionale Wellengleichung zurückführen

lassen, aber nicht für gerade Dimensionen. Deshalb wollen wir als nächstes die dreidimensionale Wellengleichung lösen. In diesem Fall müssen wir das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad \text{auf } (r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$U = G \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = H \quad \text{auf } \mathbb{R}^+ \times \{t = 0\}.$$

lösen. Die Transformation $\tilde{U} = rU$ überführt es in das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} = 0 \quad \text{auf } (r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad \tilde{U} = 0 \quad \text{auf } (r, t) \in \{0\} \times \mathbb{R}_0^+$$

$$\tilde{U} = \tilde{G} = rG \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \tilde{H} = rH \quad \text{auf } (r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\}.$$

Dieses Anfangswertproblem haben wir aber schon gelöst. Die Lösung ist:

$$\tilde{U}(x, r, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{G}(x, r+t) - \tilde{G}(x, t-r) \right) + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(x, y) dy \quad \text{für } 0 \leq r \leq t.$$

Wegen der Stetigkeit von $u(x, t)$ gilt

$$u(x, t) = \lim_{r \downarrow 0} U(x, r, t) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\tilde{U}(x, r, t)}{r}.$$

Also erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{G}(x, t+r) - \tilde{G}(x, t-r)}{r} \right) + \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x, y) dy \\ &= \frac{\partial \tilde{G}(x, t)}{\partial t} + \tilde{H}(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t \int_{\partial B(x, t)} g(y) d\sigma(y) + t \int_{\partial B(x, t)} h(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t \int_{\partial B(0, 1)} g(x + ty) d\sigma(y) + t \int_{\partial B(x, t)} h(y) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B(x, t)} (th(y) + g(y)) d\sigma(y) + \int_{\partial B(x, t)} \nabla_y g(y) \cdot (y - x) d\sigma(y) \end{aligned}$$

Das ist die sogenannte Kirchhoff'sche Formel für das Anfangswertproblem der Wellengleichung in drei Dimensionen.

6.4 Lösung für $n = 2$

Für $n = 2$ lässt sich die Euler-Poisson-Darbouxgleichung nicht in die eindimensionale Wellengleichung überführen. Stattdessen wollen wir das Anfangswertproblem der Wellengleichung für $n = 2$ als ein Anfangswertproblem der Wellengleichung für $n = 3$ auffassen, wobei die Anfangsdaten dann nur von den Koordinaten x_1 und x_2 und nicht von der Koordinate x_3 abhängen: Sei also $\bar{u}(x, t)$ auf $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}(x, t)}{\partial t^2} - \Delta \bar{u}(x, t) &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \\ \bar{u}(x, 0) = g(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0) &= h(\bar{x}) && \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\bar{x} = (x_1, x_2)$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Der Mittelwert über $\partial B(x, r)$ einer Funktion f , die nur von \bar{x} abhängt, hängt auch nur von \bar{x} ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \int_{\partial B(x, r)} f(y) d\sigma(y) = \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{\partial B(0, r)} f(x + y) d\sigma(y) = \int_{\partial B(0, r)} \frac{\partial f(x + y)}{\partial x_3} d\sigma(y) = 0.$$

Also ist $\bar{u}(x, t)$ von der Form $u(\bar{x}, t)$ und diese Funktion $u(\bar{x}, t)$ ist die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems für $n = 2$. Diese Funktion wollen wir jetzt ausrechnen. Sei $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}$ als Funktion auf dem zweidimensionalen Ball $B(\bar{x}, t)$ die Länge der Koordinate x_3 , so dass (y, x_3) auf dem Rand des Balles $B((\bar{x}, 0), t)$ liegen. Dann können wir die beiden Hemispähren $\{(y, \pm\gamma(y)) \in \partial B(x, t) \mid y \in B(\bar{x}, t)\}$ durch den Ball $y \in B(\bar{x}, t)$ parametrisieren. Gemäß Definition 2.4 berechnet sich das Integral über die Hemispähren als das Integral über $B(\bar{x}, t)$ mal der Länge von $(\Psi')^\#$, wobei Ψ die Abbildungen $y \mapsto (y, \pm\gamma(y))$ von $B(\bar{x}, t)$ auf die beiden Hemispähren von $\partial B(x, t)$ ist. Es gilt $\Psi'(y) : z \mapsto (z, \pm z \cdot \nabla_y \gamma(y))$ und $\|(\Psi'(y))^\#\| = \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2}$. Also ist das Integral über die Hemispähren gleich dem Integral über $B(\bar{x}, t)$ mit dem Maß $d\sigma(y, \pm\gamma(y)) = \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} dy^2$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x, t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(\bar{x}, t)} g(y) \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} d^2 y \\ \text{mit } \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} &= \sqrt{\frac{t^2 - (y - \bar{x})^2 + (y - \bar{x})^2}{t^2 - (y - \bar{x})^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}}. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\int_{\partial B(x, t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\bar{x}, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} d^2 y = \frac{t}{2} \int_{B(\bar{x}, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} d^2 y.$$

Dann erhalten wir für $u(\bar{x}, t)$ für alle $(\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
 u(\bar{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} t \int_{\partial B(\bar{x}, t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) && + t \int_{\partial B(\bar{x}, t)} h(\bar{y}) d\sigma(y) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{t^2}{2} \int_{B(\bar{x}, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} d^2 y && + \frac{t^2}{2} \int_{B(\bar{x}, t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} d^2 y \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{2} \int_{B(0,1)} \frac{g(\bar{x} + tz)}{\sqrt{1 - z^2}} d^2 z && + \frac{t^2}{2} \int_{B(\bar{x}, t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} d^2 y \\
 &= \frac{t}{2} \int_{B(\bar{x}, t)} \frac{g(y) + th(y) + \nabla_y g(y)(y - \bar{x})}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} d^2 y.
 \end{aligned}$$

Dies ist Poissons Formel für die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in zwei Dimensionen. Diese Methode, die Lösung des Anfangswertproblems einer niedrigeren Dimension dadurch zu erhalten, dass wir dieses Anfangswertproblem in ein Anfangswertproblem eines höherdimensionalen Raumes verwandeln und dann zeigen, dass die entsprechende Lösung sich in die gesuchte Lösung zurückverwandeln lässt, wird Methode des Abstieges genannt. An dieser Formel können wir sofort ablesen, dass sich die Lösung in zwei Dimensionen mit allen Geschwindigkeiten ausbreiten, deren Längen kleiner als Eins oder gleich Eins sind. In einer und drei Dimensionen breiten sich die Lösungen dagegen nur mit den Geschwindigkeiten der Länge Eins aus. Dies legt nahe, dass wir die Lösung in einer Dimension nicht durch die Methode des Abstiegs aus der Lösung in zwei Dimensionen erhalten können. Woran liegt das? (Übungsaufgabe)

6.5 Lösung in ungeraden Dimensionen

Wir können die Euler-Poisson-Darboux Gleichung wieder in die eindimensionale Wellengleichung transformieren. Zunächst benötigen wir

Lemma 6.3. *Sei ϕ eine $(k + 1)$ mal stetig differenzierbare Funktion auf \mathbb{R} . Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*

(i) $\left(\frac{d}{dr}\right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} r^{2k-1} \phi(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k r^{2k} \frac{d\phi}{dr}(r)$

(ii) $\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} r^{2k-1} \phi(r) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{d^j \phi}{dr^j}(r)$ mit Konstanten β_j^k ($j = 0, \dots, k-1$), die nicht von ϕ abhängen.

(iii) $\beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) = \frac{(2k-1)!}{2^{(k-1)}(k-1)!}$

Beweis: Wir zeigen zunächst (i) mit vollständiger Induktion. Für $k = 1$ gilt

$$\frac{d^2}{dr^2} r \phi(r) = 2 \frac{d\phi}{dr}(r) + r \frac{d^2\phi}{dr^2}(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr}(r).$$

Wenn die Aussage für $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt für $k + 1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr}\right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k r^{2k+1} \phi(r) &= \left(\frac{d}{dr}\right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} r^{2k-1} ((2k+1)\phi(r) + r \frac{d\phi}{dr}(r)) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k r^{2k} \frac{d}{dr} ((2k+1)\phi(r) + r \frac{d\phi}{dr}(r)) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k ((2k+2)r^{2k} \frac{d\phi}{dr}(r) + r^{2k+1} \frac{d^2\phi}{dr^2}(r)) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k+1} r^{2k+2} \frac{d\phi}{dr}(r). \end{aligned}$$

Wegen der Leibnizregel bewirkt jede Ableitung in (ii) zwei Beiträge. Der eine erniedrigt die Potenzen von r insgesamt um eins und wirkt nicht auf ϕ , und der andere lässt die Potenzen von r insgesamt gleich und wirkt auf ϕ . Die gesamten Potenzen von r sind $r^{2k-1-(k-1)} = r^k$ und die Gesamtordnung der Ableitungen $\left(\frac{d}{dr}\right)^{k-1}$. Daraus folgt (ii).

Im Beitrag zu β_0^k wirken alle Ableitungen nur auf die Potenzen von r . Die erste wirkt auf r^{2k-1} , die zweite auf r^{2k-3} und die letzte auf r^3 . Es folgt (iii). **q.e.d.**

Sei $n = 2k+1 \geq 3$ ungerade und $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^{2k+1} \times \mathbb{R}_0^+)$ löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = g(x) & \text{ und } \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, r, t) &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1} U(x, r, t) \\ \tilde{G}(x, r) &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1} G(x, r) && \tilde{H}(x, r) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} r^{2k-1} H(x, r). \end{aligned}$$

Lemma 6.4. Wenn $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^{2k+1} \times \mathbb{R}_0^+)$ das Anfangswertproblem der $(2k+1)$ -dimensionalen Wellengleichung löst, dann löst $\tilde{U}(x, r, t)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{2k+1}$ folgendes Anfangswertproblem der eindimensionalen Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} &= 0 && \text{für } (r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ && \tilde{U}(x, 0, t) = 0 && \text{für } t \in \mathbb{R}_0^+ \\ \tilde{U}(x, r, 0) &= \tilde{G}(x, r) && \text{und} && \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}(x, r, 0) &= \tilde{H}(x, r) && \text{für } r \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Beweis: Mit $2k = n - 1$ löst $U(x, r, t)$ das entsprechende Anfangswertproblem der Euler–Poisson–Darbouxgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}(x, r, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} r^{2k-1} U(x, r, t) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^k r^{2k} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x, r, t) + 2kr^{2k-2} \frac{\partial U}{\partial r}(x, r, t) \right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} r^{2k-1} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, r, t) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}(x, r, t) \end{aligned}$$

Wegen Lemmata 6.2 und 6.3 (iii) verschwindet $\tilde{U}(x, r, t)$ an der Stelle $r = 0$. **q.e.d.**

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist für $(x, r, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ mit $r \leq t$

$$\tilde{U}(x, r, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{G}(x, t+r) - \tilde{G}(x, t-r) \right) + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x, y) dy.$$

Andererseits ist $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x, r, t)$ und

$$\tilde{U}(x, r, t) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} r^{2k-1} U(x, r, t) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{\partial^j U}{\partial r^j}(x, r, t)$$

Wegen Lemma 6.2 ist $\lim_{r \rightarrow 0} r^{j-1} \frac{\partial^j U}{\partial r^j}(x, r, t) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Deshalb gilt

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x, r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(x, r, t)}{\beta_0^k r}$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in ungerader Dimension gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{G}(x, t+r) - \tilde{G}(x, t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x, y) dy \right) \\ &= \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x, t) + \tilde{H}(x, t) \right). \end{aligned}$$

Satz 6.5. Für ungerades $n \geq 3$ und $g \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} g(y) d\sigma(y) \\ &+ \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} h(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Beweis Wir beweisen zunächst den Fall $g = 0$. Dann gilt wegen Lemma 6.3 (i)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} h(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(x,t)} h(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} h(x+ty) d\sigma(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{t^{n-1}}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla_x h(x+ty) \cdot y d\sigma(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(x,t)} \nabla_y h(y) \cdot n(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\omega_n} \int_{B(x,t)} \Delta h(y) d^n y \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{n\omega_n t} \int_{\partial B(x,t)} \Delta h(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int_{\partial B(0,t)} \Delta_x h(x+y) d\sigma(y) \\ &= \Delta u(x, t). \end{aligned}$$

Hier haben wir wieder den Gauß'schen Satz und bei der Differentiation eines Integrals über $B(x, t)$ nach t Polarkoordinaten benutzt. Wenn wir h durch g ersetzen und $u(x, t)$

durch $v(x, t)$ mit $u(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)$ erhalten wir die Lösung für $h = 0$. Also erfüllt $v(x, t)$ und damit auch $u(x, t)$ die Wellengleichung. Mithilfe von Lemmata 6.2 und 6.3 (iii) erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial t} t \int_{\partial B(x, t)} g(y) d\sigma(y) + t \int_{\partial B(x, t)} h(y) d\sigma(y) \right) + \mathbf{O}(t) \\ &= g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(t \int_{\partial B(x, t)} \Delta g(y) d\sigma(y) + \frac{\partial}{\partial t} t \int_{\partial B(x, t)} h(y) d\sigma(y) \right) + \mathbf{O}(t) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

q.e.d.

Wir erkennen an der Lösung, dass $u(x, t)$ nur von den Werten von g und h auf $\partial B(x, t)$ abhängt, also breiten sich alle Störungen tatsächlich mit der Geschwindigkeit 1 aus. Das wird Huygen's Prinzip genannt. Außerdem hängt $u(x, t)$ von höheren Ableitungen von g und h ab. Dies heißt, dass sich die Regularität also mit zunehmender Zeit in höheren Dimensionen verschlechtert, im Gegensatz zu der Wärmeleitungsgleichung, bei der sich die Regularität verbessert. Dies ist ein allgemeines Phänomen für hyperbolische Gleichungen.

6.6 Lösung in geraden Dimensionen

Wir benutzen jetzt wieder die Methode des Abstiegs, um aus den Lösungen in Dimensionen $2k + 1$ die Lösungen in Dimensionen $2k$ zu erhalten. Entscheidend ist dabei, dass die Lösung von Anfangsdaten g und h , die nur von $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{2k})$ für $x = (x_1, \dots, x_{2k+1})$ abhängen, auch nur von \bar{x} abhängen, also ihre Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{2k+1}}$ verschwinden. Da die Lösungen in Dimensionen $2k + 1$ nur von den Funktionen

$$\int_{\partial B(x, t)} g(y) d\sigma(y) \quad \text{und} \quad \int_{\partial B(x, t)} h(y) d\sigma(y)$$

abhängen, folgt dies daraus, dass für eine Funktion f , die $\frac{\partial f}{\partial x_{2k+1}} = 0$ erfüllt, auch gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_{2k+1}} \int_{\partial B(x, t)} f(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B(0, t)} \frac{\partial}{\partial x_{2k+1}} f(x + y) d\sigma(y) = 0.$$

Weil das für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt, gilt es auch für die entsprechenden Ableitungen nach t . Deshalb ist die Lösung in Dimensionen $n = 2k$ durch Einschränkung auf den $\mathbb{R}^{2k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$, $x \mapsto (x, 0)$ der Lösungen des Anfangswertproblems in Dimension $2k + 1$ mit $\bar{g}(x) = g(\bar{x})$ und $\bar{h}(x) = h(x)$ gegeben. Wieder ist das Integral über die beiden Hemispähren von $\partial B(x, t)$ gleich dem Integral über $B(\bar{x}, t)$ mit dem Maß $d\sigma(y, \pm\gamma(y)) = \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} dy^2$. Für eine Funktion $\bar{f}(x)$ von dieser Form $\bar{f}(x) = f(\bar{x})$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,t)} \bar{f}(y) d\sigma(y) &= \frac{1}{(n+1)\omega_{n+1}t^n} \int_{\partial B(x,t)} \bar{f}(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{2}{(n+1)\omega_{n+1}t^n} \int_{B(\bar{x},t)} f(y) \sqrt{1 + (\nabla \gamma(y))^2} d^n y \\ &= \frac{2t}{(n+1)\omega_{n+1}t^n} \int_{B(\bar{x},t)} \frac{f(y) d^n y}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} \\ &= \frac{2t\omega_n}{(n+1)\omega_{n+1}} \int_{B(\bar{x},t)} \frac{f(y) d^n y}{\sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}} \end{aligned}$$

Lösung der Wellengleichung in geraden Dimensionen 6.6. Sei n eine gerade positive Zahl, $g \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} t^n \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}} d^n y \\ &+ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2}} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} t^n \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}} d^n y \end{aligned}$$

Beweis Wir berechnen zunächst das Volumen der $(n - 1)$ dimensionalen Sphäre:

$$\begin{aligned} \pi^{\frac{n}{2}} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^n &&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} d^n x \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} \int_{\partial B(0,r)} d\sigma(y) dr &&= \frac{n\omega_n}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt &&= \frac{n\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Es folgt $n\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$. Mit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ folgt $\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. Für gerade n gilt

$$\begin{aligned} \frac{2\omega_n}{\omega_{n+1}} &= \frac{\frac{n+1}{2} 2\omega_{n-2}}{\frac{n}{2} \omega_{n-1}} &&= \frac{(n+1)! 4\omega_2}{(2^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2})^2 3\omega_3} &&= \frac{(n+1)!}{(2^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2})^2} \\ \frac{2^{\frac{n-2}{2}} \frac{n-2}{2}! 2\omega_n}{(n-1)!(n+1)\omega_{n+1}} &= \frac{2^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2} 2\omega_n}{(n+1)!\omega_{n+1}} &&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2}}. && \mathbf{q.e.d.} \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass in geraden Dimensionen $u(x, t)$ von den Werten von g und h auf $B(x, t)$ und nicht nur auf $\partial B(x, t)$ abhängt. Also breiten sich Störungen mit Geschwindigkeiten kleiner als 1 aus und nicht nur mit der Geschwindigkeit 1.

Außerdem können wir die Methode des Abstiegs nicht benutzen, um die Lösungen in den Dimensionen $2k-1$ aus den Lösungen in Dimensionen $2k$ zu erhalten. Die Lösungen $u(x, t)$ in Dimensionen $2k$, deren Anfangsdaten g und h nur von den Koordinaten x_1, \dots, x_{2k-1} abhängen, erfüllen nämlich nicht $\frac{\partial u}{\partial x_{2k}} = 0$. Deshalb ist die Einschränkung auf $\mathbb{R}^{2k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2k}$ keine Lösung der Wellengleichung auf den \mathbb{R}^{2k-1} (Übungsaufgabe).

6.7 Inhomogene Wellengleichung

Wieder können wir die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit Hilfe von Duhamel's Prinzip aus der Lösung der homogenen Wellengleichung erhalten: Für alle $s \in \mathbb{R}^+$ sei $u(x, t, s)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(x, s, s) &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, s, s) &= f(x, s) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dann ist $u(x, t) = \int_0^t u(x, t, s) ds$ eine Lösung der des obigen Anfangswertproblems der inhomogenen Wellengleichung. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(u(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t, s) ds \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t, s) ds \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t, s) ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t \Delta u(x, t, s) ds \\ &= f(x, t) + \Delta u(x, t). \end{aligned}$$

Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ist dann die Summe von obiger Lösung der inhomogenen Wellengleichung und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems. Die Wellengleichung ist offensichtlich invariant unter der Zeitspiegelung $t \mapsto -t$. Deshalb lassen sich aus unseren Formeln für die Lösung des Anfangswertproblems auch solche für das “Endwertproblem”

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^- \\ u(x, 0) &= g(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

gewinnen. Wir können also nicht nur von der Gegenwart aus in die Zukunft rechnen, sondern auch zurück in die Vergangenheit. Die erste Lösung wird avancierte Lösung und die zweite retardierte Lösung genannt. Beide Lösungen zusammen ergeben eine Lösung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die nur durch $u(x, 0)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ festgelegt sind.

6.8 Energiemethoden

Hyperbolische Gleichungen erfüllen kein Maximumprinzip. Damit eine Lösung einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Inneren kein Maximum haben kann, darf die Matrix der Ableitungen zweiter Ordnung nicht negativ definit werden können. Dies wird nur durch elliptische oder parabolische Differentialgleichungen ausgeschlossen. Allerdings lassen sich die Energiemethoden auf hyperbolische Differentialgleichungen übertragen und damit die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems zeigen:

Eindeutigkeit der Lösungen der Wellengleichung 6.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann besitzt folgendes Anfangswertproblem der Wellengleichung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f && \text{auf } \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) &= g(x, t) && \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \quad \text{und auf } \partial\Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x) && \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung.

Beweis: Die Differenz zweier Lösungen löst das analoge homogene Anfangswertproblem mit $f = g = h = 0$. Von einer solchen Lösung definieren wir die Energie als

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + (\nabla u(x, t))^2 \right) d^n x.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u(x, t)) \nabla u(x, t) \right) d^n x \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) \right) d^n x = 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir einmal partiell integriert (den Gaußschen Satz angewendet). Aufgrund der Anfangsbedingungen erfüllt $e(0) = 0$. Also ist $e(t) = 0$ für alle $t > 0$. Dann folgt $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und $\nabla u(x, t) = 0$. Also ist u konstant. Dann folgt wieder wegen den Anfangsbedingungen $u = 0$ auf $\Omega \times \mathbb{R}^+$. **q.e.d.**

Zuletzt noch ein einfacher Beweis, dass sich Störungen nur mit Geschwindigkeiten kleiner als 1 ausbreiten

Satz 6.8. Wenn $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ auf $B(x_0, t_0)$ bei $t = 0$. Dann ist $u = 0$ auf dem Kegel $\{(x, t) \mid |x - x_0| \leq t_0 - t, t > 0\}$.

Beweis: Sei

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + (\nabla u(x, t))^2 \right) d^n x$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{B(x_0, t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u(x, t)) \nabla u(x, t) \right) d^n x \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + (\nabla u(x, t))^2 \right) d\sigma(x) \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) \right) d^n x \\ &\quad + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \nabla u(x, t) \cdot N(x) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + (\nabla u(x, t))^2 \right) \right) d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \nabla u(x, t) \right) \cdot N(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla u(x, t))^2 \right) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Jetzt gilt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) (\nabla u) \cdot N \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla u)^2$$

weil der Normalenvektor N Länge eins hat und mit $a = \nabla u$ und $b = N \frac{\partial u}{\partial t}$ gilt

$$a \cdot b \leq a \cdot b + \frac{1}{2} (a - b) \cdot (a - b) \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2.$$

Wegen $\dot{e}(t) \leq 0$ ist dann $e(t)$ monoton fallend. Aus $e(0) = 0$ folgt dann $0 \leq e(t) \leq 0$ für alle $t \in [0, t_0]$. **q.e.d.**

Analog folgt aus $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ auf $B(x_0, t_0)$ für $t = 0$, dann dass $u = 0$ ist auf $\{(x, t) \mid |x - x_0| < t_0 + t, t < 0\}$.