Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 12

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) = \exp(-|x|) \cdot \chi_{[-n,n]}$. Gegen welche Funktion f konvergiert diese Folge? Berechnen Sie das Integral von f_n und zeigen Sie mit dem Satz der monotonen Konvergenz, dass (f_n) monoton wachsend gegen f konvergiert. Ist f integrabel? Wenn ja, berechnen Sie $\int f \, d\mu$.
(3 Punkte)

2. Ist
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Lebesgue-integrabel? *(3 Punkte)*

3. Geben Sie eine Folge (f_n) von integrablen Funktionen auf $\mathbb{R}$ an, die gleichmäßig gegen 0 konvergiert, deren Integral $\int f_n \, d\mu$ nicht gegen 0 konvergiert. *(2 Punkte)*

4. Zeigen Sie, dass eine Funktion f auf dem $\mathbb{R}^d$ messbar ist, falls für jedes $q \in \mathbb{Q}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > q\}$ messbar ist. *(2 Punkte)*

5. Zeigen Sie für ein Intervall I

   (a) Sei $I := (0, 1]$ und $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \chi_I$. Dann ist $f \in L^1(I)$, aber $f \notin L^2(I)$.

   (b) Sei $I := [1, \infty)$ und $g(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \chi_I$. Dann ist $g \in L^2(I)$, aber $g \notin L^1(I)$.

   (c) Sind $f, g \in L^2(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist $\alpha f + \beta g \in L^2(I)$.

   (d) Sind $f, g \in L^2(I)$, dann ist $f \cdot g \in L^1(I)$.

(6 Punkte)

Abgabe bis Montag, den 26. Mai um 10:00 Uhr in A5