Kapitel 10

Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

10.1 Ableitungen von $f : X \to Y$

Definition 10.1. *(Ableitung) Seien X und Y normierte Vektorräume. Eine Abbildung f von einer offenen Menge $U \subset X$ nach Y heißt im Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar, wenn es ein $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ gibt, so dass die folgende Abbildung in x_0 stetig ist:*

$$U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} & \text{für } x \neq x_0 \\ 0 & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

A heißt Ableitung von f bei x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Wenn A und A' beide diese Bedingung erfüllen, dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{\|(A-A')(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \leq \frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} + \frac{\|f(x)-f(x_0)-A'(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \leq \epsilon \quad \text{für alle } x \in B(x_0, \delta).$$

Also ist $A = A'$ und damit die Ableitung, wenn sie existiert, eindeutig.

Satz 10.2. *Sei $f : U \subset X \to Y$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig.*

Beweis: Weil $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + (f(x) - f(x_0) - A(x - x_0))$ folgt aus der Differenzierbarkeit von f in x_0, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\|f(x) - f(x_0)\| \leq (\|A\| + 1)\|x - x_0\|$ gilt für alle $\|x - x_0\| < \delta$. Dann ist f auch stetig. **q.e.d.**

Beispiel 10.3. (i) *Sei f konstant. Dann ist* $$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \quad \text{für } x \neq x_0.$$ *Also ist f differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$.*

(ii) *Für $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $x \neq x_0 \in X$ gilt* $$\frac{\|f(x) - f(x_0) - f(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$
Also ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = f$.
(iii) *Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\quad x \mapsto$ Multiplikation mit x besitzt offenbar die Umkehrabbildung $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\quad A \mapsto A(1)$ und ist ein isometrischer Isomorphismus von normierten Vektorräumen. Deshalb können wir die Ableitungen von differenzierbaren reellen Funktionen f auf offenen Intervallen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ mit reellen Funktionen auf diesen Intervallen identifizieren, die wir auch mit f' bezeichnen. Für $x \neq x_0$ gilt*
$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\|.$$
Deshalb ist f als Funktion von der Teilmenge (a,b) des normierten Vektorrraumes $\mathbb{R}$ in den normierten Vektorraum $\mathbb{R}$ genau dann in x_0 differenzierbar, wenn f als reelle Funktion in x_0 im Sinne von Definition 7.1 differenzierbar ist.

Satz 10.4. **(i)** *Sei $f, g : U \subset X \to Y$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann sind $f + g$ und $\lambda \cdot f$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*
$$(f + g)'(x_0) + g'(x_0) \quad \textit{bzw.} \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

(ii) *Seien $f, g : U \subset X \to Y$ in x_0 differenzierbar und Y eine normierte Algebra. Dann ist $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad \textit{mit}$$
$$(f'(x_0) \cdot g(x_0))x = (f'(x_0)x) \cdot g(x_0) \quad \textit{und} \quad (f(x_0) \cdot g'(x_0))x = f(x_0) \cdot (g'(x_0)x).$$

(iii) *Seien $f : U \subset X \to Y$ und $g : V \subset Y \to Z$ differenzierbar in $x_0 \in U$ bzw. $y_0 = f(x_0) \in V$ mit $f[U] \subset V$. Dann ist $g \circ f$ im Punkt x_0 differenzierbar mit*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

Beweis:(i) Wegen der Dreiecksungleichung gilt
$$\frac{\|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$
$$\leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}.$$
(ii) Weil in einer normierten Algebra $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ gilt, folgt
$$\frac{\|f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$
$$\leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}\|g(x)\| + \|f'(x_0)\| \cdot \|g(x) - g(x_0)\| +$$
$$+ \|f(x_0)\| \frac{\|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}.$$

Weil g in x_0 stetig ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $\|x - x_0\| < \delta$ folgt $\|g(x) - g(x_0)\| < \epsilon$ bzw. $\|g(x)\| \leq \|g(x_0)\| + \epsilon$. Dann folgt (ii).

(iii) Aus Satz 9.60 folgt $\dfrac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) - g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq$

$$\leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \cdot \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|}$$

$$\leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \cdot \left(\|f'(x_0)\| + \frac{\|f(x) - f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \right) + \|g'(f(x_0))\| \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))\|}{\|x - x_0\|}$$

Daraus folgt (iii). **q.e.d.**

10.2 Schrankensatz

Wir verallgemeinern in diesem Abschnitt den Schrankensatz auf differenzierbare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen.

Lemma 10.5. *Seien f eine stetige Abbildung von einem kompakten Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ in einem normierten Vektorraum Y und ϕ eine stetige reelle Funktion auf $[a, b]$. Wenn im Komplement einer abzählbaren Teilmenge von (a, b) sowohl f als auch ϕ differenzierbar sind und dort gilt $\|f'\| \leq \phi'$, dann gilt auch $\|f(b) - f(a)\| \leq \phi(b) - \phi(a)$.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Punkte in (a, b), an denen entweder f oder ϕ nicht differenzierbar ist oder nicht gilt $\|f'\| \leq \phi'$. Sei $\epsilon > 0$ und $A_\epsilon \subset [a, b]$ die Menge

$$\left\{ y \,\middle|\, \text{für alle } x \in (a, y) \text{ gilt } \|f(x) - f(a)\| \leq \phi(x) - \phi(a) + \epsilon(x - a) + \epsilon \sum_{x_n < x} 2^{-n} \right\}.$$

Aus der Stetigkeit von f und ϕ folgt, dass auch für $y = \sup A_\epsilon$ gilt

$$\begin{aligned}\|f(y) - f(a)\| &\leq \phi(y) - \phi(a) + \epsilon(y - a) + \epsilon \sup_{x\in(a,y)} \sum_{x_n < x} 2^{-n} \\ &\leq \phi(y) - \phi(a) + \epsilon(y - a) + \epsilon \sum_{x_n < y} 2^{-n}.\end{aligned}$$

Deshalb ist A_ϵ ein Intervall von der Form $A_\epsilon = [a, \sup A_\epsilon]$. Wenn $y \in (a,b)$ und f und ϕ in y differenzierbar sind und $\|f'(y)\| \leq \phi'(y)$ gilt, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\left|\frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y} - \phi'(y)\right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ und } \frac{\|f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)\|}{|x-y|} < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $x \in (y-\delta, y+\delta)$ gilt. Dann folgt für dieselben x

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(a)\| &\leq \|f(x)-f(y)\| + \|f(y)-f(a)\| \\ &< \left(\|f'(y)\| + \frac{\epsilon}{2}\right)|x-y| + \phi(y)-\phi(a)+\epsilon(y-a)+\epsilon\sum_{x_n<y} 2^{-n} \\ &\leq \left(\phi'(y) + \frac{\epsilon}{2}\right)|x-y| + \phi(y)-\phi(a)+\epsilon(y-a)+\epsilon\sum_{x_n<y} 2^{-n} \\ &< \left(\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|} + \epsilon\right)|x-y| + \phi(y)-\phi(a)+\epsilon(y-a)+\epsilon\sum_{x_n<y} 2^{-n}\end{aligned}$$

Aus $\phi'(y) \geq 0$ folgt $\phi(x) \geq \phi(y)$ für $x \in (y, y+\delta)$ und damit auch

$$\|f(x)-f(a)\| < \phi(x)-\phi(a)+\epsilon(x-a)+\sum_{x_n<y} 2^{-n} \leq \phi(x)-\phi(a)+\epsilon(x-a)+\sum_{x_n<x} 2^{-n}.$$

Woraus folgt $x \in A_\epsilon$, im Widerspruch zu $x > \sup A_\epsilon$. Wenn es andererseits ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_N = y$, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $x \in (y, y+\delta)$ folgt

$$\|f(x)-f(y)\| - \phi(x) - \phi(y) < 2^{-N} \cdot \epsilon.$$

Dann folgt für dieselben x wieder $\|f(x)-f(a)\| \leq \|f(x)-f(y)\| + \|f(y)-f(a)\|$

$$< 2^{-N}\cdot\epsilon + \phi(x)-\phi(a)+\epsilon(y-a)+\epsilon\sum_{x_n<y} 2^{-n} \leq \phi(x)-\phi(a)+\epsilon(x-a)+\sum_{x_n<x} 2^{-n}.$$

Also gilt wieder $y+\delta \in A_\epsilon$, was $y = \sup A_\epsilon$ widerspricht. Dann muß aber $\sup A_\epsilon = b$ gelten. Weil das für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt auch $\|f(b)-f(a)\| \leq \phi(b)-\phi(a)$. **q.e.d.**

Korollar 10.6. *(Schrankensatz) Sei f eine Abbildung von einer offenen Teilmenge U des normierten Vektorraumes X in den normierten Vektorraum Y. Wenn im Komplement einer abzählbaren Teilmenge S von $D = \{(1-t)a+tb \mid t \in [0,1]\} \subset U$ die Abbildung f differenzierbar ist, und die Ableitung auf $D \setminus S$ beschränkt ist, dann gilt*

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \|b-a\| \sup_{x\in D\setminus S} \|f'(x)\| \qquad \textit{und}$$

$$\|f(b)-f(a)-A(b-a)\| \leq \|b-a\| \sup_{x\in D\setminus S} \|f'(x)-A\| \qquad \textit{für } A \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Beweis: Sei für ein $t_0 \in (0,1)$ die Abbildung f in $x_t = (1-t)a + tb \in U$ differenzierbar. Dann ist die Abbildung $[0,1] \to Y, \quad t \mapsto f(x_t)$ im Punkt t_0 differenzierbar, und es gilt

$$t \to \begin{cases} \frac{\|f(x_t)-f(x_{t_0})-(t-t_0)f'(x_{t_0})(b-a)\|}{|t-t_0|} & \text{für } t \neq t_0 \\ 0 & \text{für } t = t_0 \end{cases}$$

ist stetig. Also ist die Ableitung von dieser Funktion in t_0 gleich $s \mapsto sf'(x_{t_0})(b-a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$. Dann folgt die erste Behauptung aus Lemma 10.5 mit den beiden Funktionen

$$[0,1] \to Y, \quad t \mapsto f(x_t) \quad \text{und} \quad [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t\|b-a\| \sup_{x \in D \setminus S} \|f'(x)\|.$$

Die zweite Behauptung folgt aus diesem Lemma mit den Funktionen

$$t \mapsto f(x_t) - tA(b-a) \in Y \qquad t \mapsto t\|b-a\| \sup_{x \in D \setminus S} \|f'(x) - A\| \in \mathbb{R}.$$

q.e.d.

10.3 Partielle Ableitungen

Definition 10.7. *(stetig differenzierbar) Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes, dann heißt eine Abbildung $f : U \to Y$ von U in einen normierten Vektorraum Y stetig differenzierbar, wenn*

(i) *f in allen $x_0 \in U$ differenzierbar ist, und*

(ii) *die Abbildung $f' : U \to \mathcal{L}(X,Y), \quad x \mapsto f'(x)$ stetig ist.*

Wegen Beispiel 10.3 (iii) stimmt im Falle von $X = Y = \mathbb{R}$ diese Definition mit der Definition von stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf Intervallen in $\mathbb{R}$ überein.

Definition 10.8. *(partielle Ableitung) Seien X_1 und X_2 normierte Vektorräume und f eine Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset X_1 \times X_2$ des kartesischen Produktes der beiden normierten Vektorräume in den normierten Vektorraum Y. Dann heißt f im Punkt $(x_1, x_2) \in U \subset X_1 \times X_2$ partiell differenzierbar, falls die Abbildung $x \mapsto f(x, x_2)$ im Punkt $x = x_1$, und die Abbildung $x \mapsto f(x_1, x)$ im Punkt $x = x_2$ differenzierbar ist. Die Ableitungen heißen partielle Ableitungen an der Stelle (x_1, x_2) und werden mit $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ bezeichnet. Allgemeiner heißt eine Abbildung von einer offenen Menge $U \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ eines n-fachen kartesischen Produktes von normierten Vektorräumen in einen normierten Vektorraum Y im Punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in U \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ partiell differenzierbar, wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ die Abbildungen $x \to f(x_1, \ldots, x_i, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ im Punkt $x = x_i$ differenzierbar sind.*

Die wichtigsten Beispiele sind Funktionen auf offenen Teilmengen des n-fachen kartesischen Produktes $\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}$ mit sich selbst. Weil für jede lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y)$ die Abbildungen

$$A_1 : X_1 \to Y, \qquad x_1 \mapsto A(x_1, 0) \text{ und } \qquad A_2 : X_2 \to Y, \qquad x_2 \mapsto A(0, x_2)$$

stetige lineare Abbildungen sind, und weil für alle $x \in X_1$, mit $(x, x_2) \in U$

$$\frac{\|f(x,x_2) - f(x_1,x_2) - A((x,x_2) - (x_1,x_2))\|}{\|(x,x_2) - (x_1,x_2)\|} = \frac{\|f(x,x_2)f(x_1,x_2) - A(x - x_1, 0)\|}{\|x - x_1\|}$$

gilt, bzw. für alle $x \in X_2$, mit $(x_1, x) \in U$

$$\frac{\|f(x_1,x) - f(x_1,x_2) - A((x_1,x) - (x_1,x_2))\|}{\|(x_1,x) - (x_1,x_2)\|} = \frac{\|f(x_1,x)f(x_1,x_2) - A(0, x - x_2)\|}{\|x - x_1\|}$$

gilt, folgt aus den Definitionen der folgende

Satz 10.9. *Wenn eine Funktion $f : U \to Y$ von einer offenen Teilmenge $U \subset X_1 \times X_2$ des kartesischen Produktes zweier normierter Vektorräume in einen normierten Vektorraum Y im Punkt $(x_1, x_2) \in U$ differenzierbar ist, dann ist f in (x_1, x_2) auch partiell differenzierbar.* **q.e.d.**

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

Beispiel 10.10.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$ *besitzt die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4y^2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Aber f ist im Punkt $(x, y) = 0$ nicht stetig, weil für alle $r \in (0, \infty)$ und alle $\phi \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(r\cos\phi, r\sin\phi) = 2\sin\phi\cos\phi = \sin(2\phi),$$

so dass für alle ϕ gilt $\lim\limits_{r \to 0+} f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \sin(2\phi)$.

Aber es gilt folgende Umkehrung.

Satz 10.11. *Sei $f : U \to Y$ eine partiell differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge U des kartesischen Produktes zwei normierter Vektorräume $X_1 \times X_2$ in dem normierten Vektorraum Y. Dann sind die partiellen Ableitungen von f*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : U \to \mathcal{L}(X_1, Y) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} : U \to \mathcal{L}(X_2, Y)$$

genau dann auf U stetig, wenn f auf U stetig differenzierbar ist.

Beweis: Wenn $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ und $A_2 \in \mathcal{L}(X_2, Y)$, dann sind auch die Abbildungen

$$X_1 \times X_2 \to Y, \qquad (x_1, x_2) \to A_1 x_1 \text{ bzw.} \qquad X_1 \times X_2 \to Y, \qquad (x_1, x_2) \to A_2 x_2$$

linear stetige Abbildungen in $\mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y)$. Also ist

$$A_1 \times A_2 : X_1 \times X_2 \to Y, \quad (x_1, x_2) \mapsto A_1 x_1 + A_2 x_2$$

eine stetige lineare Abbildung in $\mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y)$. Umgekehrt sind für jede stetige lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y)$ die Abbildungen $A_1 : X_1 \to Y,\ x_1 \mapsto A(x_1, 0)$ und $A_2 : X_2 \to Y,\ x_2 \mapsto A(0, x_2)$ stetige lineare Abbildungen in $\mathcal{L}(X_1, Y)$ und $\mathcal{L}(X_2, Y)$. Wegen

$$\|A(x_1, x_2)\| = \|A(x_1, 0) + A(0, x_2)\| \leq \|A(x_1, 0)\| + \|A(0, x_2)\|$$

folgt

$$\|A\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Aufgrund der Definition der Norm von $\mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y)$ folgt aber auch

$$\|A_1\| \leq \|A\| \text{ und } \|A_2\| \leq \|A\|.$$

Also ist die Abbildung $\quad \mathcal{L}(X_1, Y) \times \mathcal{L}(X_2, Y) \to \mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y), \quad (A_1, A_2) \mapsto A$ eine bijektive Abbildung von normierten Vektorräumen und die beiden Normen von $\mathcal{L}(X_1, Y) \times \mathcal{L}(X_2, Y)$ und $\mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y)$ sind bezüglich dieser Identifikation äquivalent. Daraus folgt, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f : U \to Y$, die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1} : U \to \mathcal{L}(X_1, Y)$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2} : U \to \mathcal{L}(X_2, Y)$ stetig sind.

Wenn umgekehrt $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ stetig ist, dann folgt

$$\begin{aligned}
&\left\| f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}(y_1 - x_1) - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}(y_2 - x_2) \right\| \leq \\
&\qquad \leq \left\| f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}(y_1 - x_1) \right\| + \\
&\qquad\qquad + \left\| f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}(y_2 - x_2) \right\|.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für $z_1 \in B(x_1, \delta)$ und $z_2 \in B(x_2, \delta)$ gilt

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(z_1, z_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Aus dem Schrankensatz Korollar 10.6 folgt dann für $y_1 \in B(x_1, \delta)$ und $y_2 \in B(x_1, \delta)$

$$\left\| f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}(y_1 - x_1) \right\| < \frac{\epsilon}{2}\|y_1 - x_1\|.$$

Weil $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ in (x_1, x_2) existiert, gibt es auch ein $\delta' > 0$, so dass für $y_2 \in B(x_2, \delta')$ folgt

$$\left\| f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}(y_2 - x_2) \right\| < \frac{\epsilon}{2} \|y_2 - x_2\|.$$

Dann folgt für $y_1 \in B(x_1, \delta)$ und $y_2 \in B(x_2, \min\{\delta, \delta'\})$ auch

$$\left\| f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - \frac{df(x_1, x_2)}{dx}((y_1, y_2) - (x_1, x_2)) \right\| < \epsilon \left\| (y_1 - x_1, y_2 - x_2) \right\|.$$

Also ist f auch differenzierbar. Weil dann die Ableitung durch die partiellen Ableitungen gegeben ist, ist dann f auch stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Durch mehrmaliges Anwenden erhalten wir dann auch die entsprechende Aussage für Abbildungen von offenen Teilmengen U des n-fachen kartesischen Produktes von normierten Vektorräumen in einen normierten Vektorraum. Unsere wichtigsten Beispiele sind wieder Funktionen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.

Beispiel 10.12. (i)
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \textit{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \textit{für } (x, y) = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \textit{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \textit{für } (x, y) = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \textit{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \textit{für } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Für $y = 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und für $x = 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, so dass diese partiellen Ableitungen für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existieren. Allerdings sind sie in keiner Umgbung von $(x, y) = (0, 0)$ beschränkt, und deshalb auch nicht stetig. Wir hatten schon im Beispiel 10.10 gesehen, dass f bei $(0, 0)$ nicht stetig und deshalb auch nicht differenzierbar ist.

(ii)
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \textit{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \textit{für } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Offenbar gilt $|f(x, y)| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$. Also ist f stetig.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^3+3xy^2+2y^3)}{(x^2+y^2)^2} & \textit{für } (x, y) \neq 0 \\ 1 & \textit{für } (x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -\frac{3y^2(x^2+y^2)+2y(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{y(y^3+3yx^2+2x^3)}{(x^2+y^2)^2} & \textit{für } (x, y) \neq 0 \\ -1 & \textit{für } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Deshalb ist f partiell differenzierbar. In Beispiel 10.14 (iii) werden wir sehen, dass f in $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

(iii) *Alle Polynome in x und y sind partiell unendlich oft stetig differenzierbar, und deshalb auch differenzierbar.*

Definition 10.13. *(Richtungsableitung) Sei $f : U \to Y$ eine Funktion von einer offenen Teilmenge U eines normierten Vektorraumes X in einem normierten Vektorraum Y. Für $x_0 \in U$ und $x \in X \setminus \{0\}$ heißt die Ableitung in $t_0 = 0$ der Funktion*

$$(-\epsilon, \epsilon) \to Y, \quad t \mapsto f(x_0 + tx),$$

wenn sie existiert, die Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung x.

Beispiel 10.14. **(i)** *Sei $f : U \to Y$ in x_0 differenzierbar. Für $x \in X \setminus \{0\}$ gibt es ein Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ im Urbild von U unter $t \mapsto x_0 + tx$. Bei $t = 0$ sind die Abbildungen*

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{\|f(x_0+tx)-f(x_0)-tf'(x_0)x\|}{|t|\|x\|} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases} \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{\|f(x_0+tx)-f(x_0)-tf'(x_0)x\|}{|t|} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

stetig. Also existiert die Richtungsableitung und es gilt $\displaystyle \frac{df(x_0+tx)}{dt}\Big|_{t=0} = (f'(x_0))(x).$

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0. \end{cases}$

Für $t \neq 0$ ist dann $f(t\cos(\phi), t\sin(\phi)) = \sin(2\phi)$ und $f(t\cos(\phi), t\sin(\phi)) = 0$ für $t = 0$. Also ist f in $t = 0$ für $\phi \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ nicht stetig und auch nicht differenzierbar. Für $\phi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ existieren die Richtungsableitungen und verschwinden.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0. \end{cases}$

Dann gilt $f(tx) = t(\cos^3\phi - \sin^3\phi)$ für $x = (\cos\phi, \sin\phi)$ und $x_0 = 0$. Also existieren alle Richtungsableitungen und setzen sich im Punkt $(0, 0)$ zu f zusammen. Weil diese Abbildung nicht linear ist, ist f im Punkt $(0, 0)$ nicht differenzierbar.

Wir wollen den wichtigsten Fall von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genauer betrachten.

Definition 10.15. *(Partielle Ableitungen in $\mathbb{R}^n$) Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$. Dann sind die Komponenten $(f_1, \ldots, f_m)$ von f offenbar reelle Funktionen auf U. Die Funktion f ist in $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ genau dann partiell differenzierbar, wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ die Funktionen*

$$x \to f_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

bei $x = x_i$ differenzierbar sind. Die entsprechenden Ableitungen heißen partielle Ableitungen von f und werden mit $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet. Wenn diese partiellen Ableitungen für alle $x \in U$ existieren, heißt f auf U partiell differenzierbar.

Definition 10.16. *(Vektorfeld, Gradient, Divergenz und Rotation) Eine Abbildung von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ wird Vektorfeld genannt. Das Vektorfeld*

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

der partiellen Ableitungen einer partiell differenzierbaren reellen Funktion f auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gradient von f. Wenn f ein partiell differenzierbares Vektofeld ist, dann ist die Divergenz von f folgende reelle Funktion

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Die lineare Abbildung $\triangle : \quad f \mapsto \triangle f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$

auf den zweimal partiell differenzierbaren reellen Funktionen heißt Laplaceoperator. Im Fall von $n = 3$ ist die Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes f definiert durch

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

Wenn die reelle Funktion f in $x_0 \in U$ differenzierbar ist, dann ist f auch in x_0 partiell differenzierbar und die Ableitung ist die lineare Abbildung:

$$\frac{df}{dx}(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0).$$

Wenn wir den $\mathbb{R}^n$ mit den Spaltenvektoren bezeichnen, können wir diese Abbildung durch das Matrixprodukt des Zeilenvektors ∇f mit dem Spaltenvektor x darstellen:

$$\frac{df}{dx}(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\nabla f(x_0)) \cdot x.$$

Oder allgemeiner, für eine $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion können wir die Ableitung $\frac{df}{dx}(x_0)$ von f an der Stelle x_0 als lineare Abbildung mit der Jacobimatrix identifizieren:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \frac{df}{dx}(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \frac{df}{dx}(x_0) \cdot x.$$

Die lineare Abbildung ist einfach die Matrixmultiplikation der Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^n$ mit der Jacobimatrix, einer $m \times n$-Matrix. Insbesondere ist also die Richtungsableitung einer reellen Funktion f auf U an der Stelle $x_0 \in U$ in Richtung eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt des Gradienten $\nabla f(x_0)$ von f an der Stelle x_0 mit dem Vektor x:

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + tx)|_{t=0} = x \cdot \nabla f(x_0).$$

Satz 10.9 und Satz 10.11 zeigen insbesondere, dass folgendes gilt:

Korollar 10.17. *Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$.*

(i) *Wenn f in $x_0 \in U$ differenzierbar ist, dann existieren in x_0 alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$ und setzen sich zu der Jacobimatrix zusammen.*

(ii) *Wenn f auf U stetig differenzierbar ist, dann existieren auf U die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ und setzen sich zusammen zu einer stetigen Funktion von U in die $m \times n$-Matrizen in $\mathbb{R}^{m\times n}$. Diese Matrizen heißen Jacobimatrizen von f.*

(iii) *Wenn umgekehrt f auf U partiell differenzierbar ist, und alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ auf U stetig sind, dann ist f auf U stetig differenzierbar.* **q.e.d.**

Definition 10.18. *Eine Nullstelle $x_0 \in U$ der Ableitung f' einer auf einer offenen Menge U reellen differenzierbaren Funktion f heißt kritischer Punkt.*

Satz 10.19. *Jedes relative Maximum (bzw. Minimum) einer differenzierbaren reellen Funktion auf einer offenen Menge ist ein kritischer Punkt.*

Beweis: Sei x_0 ein solches lokales Maximum (bzw. Minimum). Dann ist für alle $x \in X$ die entsprechende Abbildung $t \mapsto f(x_0 + tx)$ auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und besitzt dort ein lokales Maximum (bzw. Minimum). Also verschwindet die entsprechende Richtungsableitung. Dann verschwindet auch $\frac{df}{dx}(x_0)$ auf allen x. **q.e.d.**

10.4 Höhere Ableitungen

Sei $f : U \to W$ eine auf einer offenen Teilmenge U eines Banachraumes V differenzierbare Funktion in den Banachraum W. Wenn f zweimal differenzierbar ist, dann ist die Ableitung stetig. Also wollen wir in diesem Abschnitt annehmen, dass f auf U stetig differenzierbar ist. Die Ableitung f' ist dann eine stetige Abbildung von U nach $\mathcal{L}(V, W)$. Die zweite Abbildung $f''(x_0)$ an einer Stelle $x_0 \in U$ ist dann (wenn sie existiert) eine lineare Abbildung von V nach $\mathcal{L}(V, W)$.

Definition 10.20. *Eine Abbildung $A : V \times V \to W$ heißt bilinear, wenn für alle $v, v', v'' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\begin{aligned} A(v + v'', v') &= A(v, v') + A(v'', v) \quad \textit{und} \quad & A(v, v' + v'') &= A(v, v') + A(v, v'') \\ A(\lambda v, v') &= \lambda A(v, v') \quad \textit{und} \quad & A(v, \lambda v') &= \lambda A(v, v'). \end{aligned}$$

Das kartesische Produkt $V \times V$ von (normierten) Vektorräumen ist wieder ein normierter Vektorraum. Die bilinearen Abbildungen von $V \times V$ nach W unterscheiden sich von den linearen Abbildungen von $V \times V$ nach W. Es gibt einen anderen Vektorraum $V \otimes V$, den wir kurz erwähnen wollen, und den man das Tensorprodukt von V mit V nennt. Die bilinearen Abbildungen von $V \times V$ nach W sind dann genau die lineare

Abbildungen von $V \otimes V$ nach W. Allerdings ist es nicht so klar wie $V \otimes V$ zu einem normierten Vektorraum gemacht wird. Für die Dimensionen dieser Vektorräume gilt

$$\dim(V \times V) = \dim(V) + \dim(V) \qquad \dim(V \otimes V) = \dim(V) \cdot \dim(V).$$

Die linearen Abbildungen von V nach $\mathcal{L}(V, W)$ lassen sich nun mit den bilinearen Abbilungen von $V \times V$ nach W identifizieren.

Lemma 10.21. *Eine Abbildung $A : V \times V \to W$ ist genau dann bilinear, wenn*

$$B : V \to \{\text{ lin. Abbild. } V \to W\}, \quad v \mapsto B(v), \quad B(v) : V \to W, \quad B(v)(v') = A(v, v')$$

eine lineare Abbildung von V in die linearen Abbildungen von V nach W definiert.

Der Beweis folgt aus der Definition von bilinearen Abbildungen. **q.e.d.**

Satz 10.22. *(Satz von Schwarz) Sei f eine differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge $U \subset V$ eines normierten Vektorraumes V in den normierten Vektorraum W. Wenn f im Punkt x_0 zweimal differenzierbar ist, dann ist die der zweiten Ableitung entsprechende bilineare Abbildung $f''(x_0) : V \times V \to W$ symmetrisch, d.h.*

$$(f''(x_0)u)v = (f''(x_0)v)u \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Beweis: Für $t \in [0, 1]$ und kleine $u, v \in V$ sei $g(t) = f(x_0 + tu + v) - f(x_0 + tu)$. Dann ist g differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(x_0 + tu + v)u - f'(x_0 + tu)u \\ &= ((f'(x_0 + tu + v) - f'(x_0)) - (f'(x_0 + tu) - f'(x_0)))u \end{aligned}$$

Weil f in x_0 zweimal differenzierbar ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $B(x_0, 2\delta) \subset U$ und außerdem für $u, v \in B(0, \delta) \subset V$ und $t \in [0, 1]$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\|f'(x_0 + tu + v) - f'(x_0) - f''(x_0)(tu + v)\| \le \epsilon(\|u\| + \|v\|) \\ &\|f'(x_0 + tu) - f'(x_0) - f''(x_0)tu\| \le \epsilon\|u\| \end{aligned}$$

gelten. Daraus folgt für $t \in [0, 1]$ $\qquad |g'(t) - (f''(x_0)v)u\| \le \epsilon\|u\|(2\|u\| + \|v\|)$.
Die Anwendung von Korollar 10.6 auf die Funktion $t \mapsto g(t) - t(f''(x_0)v)u$ ergibt dann

$$\|g(1) - g(0) - (f''(x_0)v)u\| \le \sup_{t \in [0,1]} \|g'(t) - (f''(x_0)v)u\| \le \epsilon\|u\|(2\|u\| + \|v\|).$$

Weil $g(1) - g(0) = f(x_0 + u + v) - f(x_0 + u) - f(x_0 + v) + f(x_0)$ in u und v symmetrisch ist gilt dann auch $\|g(1) - g(0) - (f''(x_0)u)v\| \le \epsilon\|v\|(2\|v\| + \|u\|)$. Daraus folgt

$$\|(f''(x_0)v)u - (f''(x_0)u)v\| \le 2\epsilon(\|u\|^2 + \|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2).$$

Diese Ungleichung gilt wegen der Linearität nicht nur für $u, v \in B(0, \delta)$, sondern für $u, v \in V$. Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ folgt $(f''(x_0)v)u = (f''(x_0)u)v$ für alle $u, v \in V$. **q.e.d.**

Zusammen mit Satz 10.11 erhalten wir

Korollar 10.23. *Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Dann vertauschen die partiellen Ableitungen, d.h. für alle $i, j = 1, \ldots, n$ und $k = 1, \ldots, m$ gilt*

$$\partial_i \partial_j f_k = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i} = \partial_j \partial_i f_k \text{ und } \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \text{ für } n = 3, m = 1. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Durch mehrfaches Anwenden und differenzieren erhalten wir dann auch

Korollar 10.24. *Sei f eine n-mal differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge $U \subset V$ eines normierten Vektorraumes V in den normierten Vektorraum W. Dann ist für jedes $x_0 \in U$ die n-fache Ableitung von f eine multilineare symmetrische Abbildung von $V \times V \times \ldots \times V$ nach W. D.h. für jede Permutation $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt*

$$(\ldots((f^{(n)}(x_0)v_1)v_2)\ldots)v_n = (\ldots((f^{(n)}(x_0)v_{\sigma(1)})v_{\sigma(2)})\ldots)v_{\sigma(n)}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Beispiel 10.25. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$. Dann ist f zweimal partiell differenzierbar.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 2x^2(x^2 + y^2) - 2x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2y^2(x^2 + y^2) - 2y^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = x\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, y) = -1 \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, 0) = 1$$

Also existieren auf ganz $\mathbb{R}^2$ alle zweiten partiellen Ableitungen, aber es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, 0).$$

Definition 10.26. *Sei $f : U \to W$ eine reelle Funktion auf einer offenen Teilmenge U des normierten Vektorraumes V, die bei $x_0 \in U$ zweimal differenrzierbar ist. Dann definiert die zweite Ableitung eine symmetrische Bilinearform auf V:*

$$f''(x_0) : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad\qquad (v, w) \mapsto f''(x_0)(v, w).$$

Für $V = \mathbb{R}^n$ identifizieren wir die Elemente von V wieder mit den Spaltenvektoren. Dann ist diese Bilinearform durch die sogenannte Hessematrix gegeben:

$$f''(x_0)(v, w) = w^t \cdot \frac{df}{dx}(x_0) \cdot v \qquad\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) v_i.$$

Satz 10.27. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Menge zweimal differenzierbare reelle Funktion f. Dann ist die zweite Ableitung bei allen relativen Minima (Maxima) eine nicht negative (nicht positive) symmetrische Bilinearform. Gibt es umgekehrt einen kritischen Punkt $x_0 \in U$ und ein $\delta > 0$ mit*

$$(f''(x_0))(x,x) \geq \delta\|x\|^2 \quad \text{bzw.} \quad (f''(x_0))(x,x) \leq -\delta\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in X,$$

dann ist der kritische Punkt ein lokales Minimum bzw. Maximum.

Beweis: Wenn x_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum von f ist, dann für alle $x \in X$ auch $t = 0$ von $t \mapsto f(x_0 + tx)$. Deshalb folgt die erste Aussage aus Korollar 7.16.

Umgekehrt folgt aus den obigen Ungleichungen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$(f'(x_0+x))(x) \geq \frac{\delta}{2}\|x\|^2 \quad \text{bzw.} \quad (f'(x_0+x))(x) \leq -\frac{\delta}{2}\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in B(0,\epsilon)$$

gilt. Dann folgt auch die zweite Aussage aus Korollar 7.16. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir den Satz von Taylor auf reelle Funktionen f auf offenen konvexen Teilmengen $U \subset V$ eines normierten Vektorraumes verallgemeinern. Wenn $x_0, x \in U$ in einer solchen konvexen offenen Teilmenge U liegen, dann ist

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(x_0 + t(x - x_0))$$

eine reelle Funktion. Wenn f auf U n-mal differenzierbar ist, dann ist auch g n-mal differenzierbar. Wegen der Kettenregel Satz 10.4 (iii) ist die n-te Ableitung von g gleich

$$g^{(m)}(t) = (\ldots(f^{(m)}(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x-x_0))\ldots)(x-x_0),$$

also die n-lineare symmetrische Form zu $f^{(n)}(x_0)$ ausgewertet auf $((x-x_0),\ldots,(x-x_0)) \in V^{xm}$. Dann erhalten wir nach dem Satz von Taylor:

Satz 10.28. *(von Taylor in höheren Dimensionen) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine auf einer offenen konvexen Teilmenge eines normierten Vektorraumes definierte $(m+1)$-mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es für jedes $x, x_0 \in U$ ein $\xi \in (0,1)$, so dass gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)((x-x_0),\ldots,(x-x_0))}{k!} + \\ + \frac{f^{(m+1)}(x_0 + \xi(x-x_0))((x-x_0),\ldots,(x-x_0))}{(m+1)!}.$$

Hierbei bezeichnen wir mit $f^{(k)}(x_0)$ bzw. $f^{(m+1)}(x_0 + \xi(x-x_0))$ die entsprechende multilineare Abbildung von $V^{\times k}$ bzw. $V^{\times(m+1)}$ nach $\mathbb{R}$. Dabei heißt der erste Term wieder Taylorpolynom und der zweite Term Restglied. **q.e.d.**

Das Taylorpolynom und entsprechend die Taylorreihe ist auch für glatte Funktionen in einen normierten Vektorraum definiert. Eine unendlich oft differenzierbare Funktion heißt wieder reell analytisch in x_0, wenn die entsprechende Taylorreihe auf einer Umgebung von x_0 gegen die Funktion konvergiert. So definiert auf einem Banachraum die Exponentialfunktion eine analytische Funktion von $\mathcal{L}(V)$ auf sich selber.