

Zusatz-Übungsblatt 13

Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Es sei D das durch die Ellipsen $x^2 + 9y^2 = 9$ und $x^2 + 9y^2 = 81$ sowie die Geraden $y = x$ und $y = 0$ eingeschlossene Gebiet im ersten Quadranten der xy -Ebene.

- (a) In welches Gebiet \tilde{D} der $r\varphi$ -Ebene geht D bei der Koordinatentransformation $x = 3r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ über? Skizzieren Sie D in der xy -Ebene und \tilde{D} in der $r\varphi$ -Ebene.
- (b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}$ der Transformation.
- (c) Berechnen Sie mit Hilfe von a) und b) das Integral

$$\iint_D \frac{xy}{x^2 + 9y^2} dx dy$$

(6 Zusatzpunkte)

2. (a) Sei $a = (2, 2)$ und $b = (1, 2)$ und $P = \{sa + tb \mid s, t \in [0, 1]\}$. Skizzieren Sie P . Berechnen Sie $\int_P xy d\mu$ mit Hilfe der Substitution $x = u - v$ und $y = 2u - v$.
- (b) Welche Teilmenge M von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ wird durch die Transformation $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ auf das Rechteck $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/4 < u < 4; 1/3 < v < 3\}$ abgebildet? Skizzieren Sie M und bestimmen Sie unter Verwendung des Transformationssatzes den Flächeninhalt von M .

(8 Zusatzpunkte)

3. Sei S_n die n -dimensionale Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie eine rekursive Darstellung des Volumens von S_n . Überlegen Sie sich dazu wie das Volumen der n -dimensionalen Kugel aus dem Volumen der $(n-1)$ -dimensionalen Kugel hervorgeht.

(4 Zusatzpunkte)

Abgabe bis Montag, den 2. Juni um 10:00 Uhr in A5