

Übungsblatt 10

Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Sei $f : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) dx dy dz$. (3 Punkte)

2. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \exp(-[nx])$, wobei $[x]$ der ganzzahlige Anteil von x ist: $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n Lebesgue-integrierbar.

(b) Die Folge $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. (4 Punkte)

3. Sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } \|(x, y)\| \leq 1 \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$. Was kann man aus dem Ergebnis schließen? (4 Punkte)

4. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy dx$$

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2 y) dx dy$$

(2 Punkte)

(c) Sei $f : [-2, 2] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{falls } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{falls } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 f(x, y) dx dy$. (3 Punkte)

Abgabe bis Dienstag, den 13. Mai um 10:00 Uhr in A5