Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 3

1. (a) Sei $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Beweisen Sie, dass der Graph $G(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,|\, y = g(x)\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist. *(2 Punkte)*

   (b) Beweisen Sie, dass der Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ abgeschlossen ist, die Funktion jedoch nicht stetig ist. Somit gilt die Umkehrung von a) nicht. *(2 Punkte)*

2. (a) Betrachten Sie das Polynom in zwei Variablen $p(x,y) = 3x^4 + 5y^2 - 2xy + 3$. Ist die Menge aller Punkte (x,y), für die $p(x,y)$ echt größer als Null ist,
   i) offen ii) abgeschlossen iii)weder offen noch abgeschlossen
   (2 Punkte)

   (b) Ist $q(x,y) := \max\{p(x,y), 0\}$ stetig ? *(2 Punkte)*

3. (a) Sei $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ der Banachraum aller stetiger Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiere die Abbildung

$$F : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to C_{\mathbb{R}}([0,1]), \quad f \mapsto F(f) \text{ mit } \quad F(f)(x) = f(x/2).$$

   Zeigen Sie, dass F in $\mathcal{L}(C_{\mathbb{R}}([0,1]))$ liegt mit $\|F\| = 1$. *(2 Punkte)*

   (b) Eine lineare stetige Abbildung $A \in \mathcal{L}(V)$ eines Banachraumes V heißt Isometrie, wenn für alle $v \in V$ gilt $\|Av\| = \|v\|$. Zeigen Sie, dass jede Isometrie injektiv ist. *(2 Punkte)*

   (c) Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} G : C_{\mathbb{R}}([0,1]) &\to C_{\mathbb{R}}([0,1]) \\ f &\mapsto G(f) \text{ mit} \\ G(f)(x) &= \begin{cases} f(2x) & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ f(1) & \text{für } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass G eine Isometrie von $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ ist. *(2 Punkte)*

   (d) Zeigen Sie, dass $F \circ G = \mathbb{1}_{C_{\mathbb{R}}([0,1])}$ gilt, aber $G \circ F \neq \mathbb{1}_{C_{\mathbb{R}}([0,1])}$. *(2 Punkte)*

Abgabe bis Montag, den 10. März um 10:00 Uhr in A5