Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 8

1. Sei $G := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 \neq -1\}$ und die Abbildung $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : G \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_i}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \qquad \text{für } i = 1, 2, 3$$

   (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über die inverse Funktion, dass $\mathbf{f}$ überall ein lokaler Diffeomorphismus ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{f} : G \to \mathbf{f}(G)$ sogar global eine Umkehrabbildung besitzt.

(6 Punkte)

2. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \cos(x^2) + 2xy + \sin(y^2) - 4x - 1 + y$$

   (a) Zeigen Sie, dass $f(x, y) = 0$ lokal im Punkt $(0, 0)$ nach $y = g(x)$ auflösbar ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $g(x)$ in einer Umgebung von 0 zweimal stetig differenzierbar ist und berechnen Sie $g'(0)$ und $g''(0)$.
   Hinweis : Für die zweite Ableitung leite man die Gleichung $0 = f(x, g(x))$ zweimal mit der Kettenregel ab.

(6 Punkte)

3.* Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in keiner Umgebung von 0 injektiv ist, obwohl $f'(0) = 1$ ist.

(2 Zusatzpunkte)

Abgabe bis Montag, den 28. April um 10:00 Uhr in A5