Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 5

1. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Abbildungen partiell differenzierbar sind und berechnen Sie dort ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   (a) $f(x,y) = x^2y^3 - 2y$

   (b) $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$

   (c) $f(x,y) = x^2 \ln(x^2+y^2)$

   (d) $f(x,y) = x^y$ *(4 Punkte)*

2. Seien $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Welche der folgenden Abbildungen erfüllen die Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$?

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^x \cos y$.

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \exp(x^2-y^2)\sin(2xy)$. *(4 Punkte)*

3. Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

   $$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x+y), \qquad g(x,y) = (xy, x-y).$$

   Berechnen Sie $(g \circ f)'$ zunächst ohne Benutzung der Kettenregel. Sortieren sich die Terme beim Anwenden der Kettenregel wirklich zu demselben Ergebnis? *(4 Punkte)*

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ und $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ überall existieren, aber $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0)$ gilt. *(3 Punkte)*

5. Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $f_n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch $f_n(A) = A^n$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

   $$(f_n)' = nf_{n-1}.$$

   (3 Punkte)

Abgabe bis Montag, den 7. April um 10:00 Uhr in A5