Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 1

1. Seien x und y reelle Zahlen. Welche der folgenden Abbildungen definieren eine Metrik auf $\mathbb{R}$:
   (a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$
   (b) $d_2(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$
   (c) $d_3(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

   (6 Punkte)

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und beliebigem $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass durch
$$\|p\| := \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$
   eine Norm auf V definiert wird. *(3 Punkte)*

3. Skizzieren Sie die Einheitskugeln (d.h. die Menge aller Punkte mit Norm 1) im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$. *(3 Punkte)*

4. Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen oder widerlegen Sie!
   (a) Es gibt keinen metrischen Raum, in dem alle Mengen offen und abgeschlossen sind.
   (b) In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.
   (c) Der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen ist abgeschlossen.

   (3 Punkte)

5. Zeigen Sie, dass für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ gilt :
$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$
   Hinweis : Erweitern Sie die Norm mit $|x_k|$, wobei $|x_k|$ das Maximum der $|x_i|$, $i = 1, \ldots, n$ ist. *(3 Punkte)*

Abgabe bis Montag, den 25. Februar um 10:00 Uhr in A5