Kapitel 9

Metrische Räume und Banachräume

9.1 Metrik und Norm

Definition 9.1. *(Metrik auf einer Menge X) Eine Metrik (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung* $d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ *mit drei Eigenschaften*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *für alle* $x, y \in X$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Positivität).*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie).*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Beispiel 9.2. (i) *auf jeder Menge X definiert* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

die sogenannte diskrete Metrik.

(ii) *Auf* $\mathbb{R}$ *definiert* $d(x, y) = |x - y|$ *eine Metrik.*

(iii) *Auf* $\mathbb{C}$ *definiert* $d(x, y) = |x - y|$ *eine Metrik.*

(iv) *Auf jeder nicht leeren Teilmenge* $A \subset X$ *eines metrischen Raumes* (X, d) *definiert die Einschränkung von d auf* $A \times A \to \mathbb{R}$ *eine Metrik.*

(v) *Auf dem kartesischen Produkt zweier metrischer Räume definiert die Summe beider Metriken eine Metrik. Sie heißt Metrik des kartesichen Produktes.*

(vi) *Die Einschränkung der Metrik (ii) auf die Vereinigung der inversen der natürlichen Zahlen mit* $\{0\}$ *definiert eine Metrik auf* $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$*:*

$$d(n, m) = \frac{|n - m|}{nm} \quad d(\infty, n) = d(n, \infty) = \frac{1}{n} \quad d(\infty, \infty) = 0 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Die Menge $V = \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ aller reellen bzw. komplexen erfüllt mit $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ und $0 = (0, \ldots, 0)$ die Axiome $A1$. Außerdem besitzt sie eine Skalarmultiplikation

$$\mathbb{R} \times V \to V \text{ bzw. } \mathbb{C} \times V \to V(\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) \to \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Mit $(\lambda \cdot \mu) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \lambda(\mu \cdot (x_1, \ldots, x_n))$. Eine Menge mit Addition und Skalarmultiplikation, die das erfüllt, heißt (reeller bzw. komplexer) Vektorraum.

Definition 9.3. *Ein Vektorraum V ist eine Menge V zusammen mit den Abbildungen:*

$$+ : V \times V \to V, \qquad (v, w) \mapsto v + w \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

die die Axiome $A1$ der Addition und das Distributivgesetz $A3$ erfüllen und

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v \quad \textit{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V.$$

Definition 9.4. *Eine Norm auf einem reellen bzw. komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$ mit folgenden 3 Eigenschaften:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *für alle* $x \in V$

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$ *und* $x \in V$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in V$

Satz 9.5. *Jede Norm induziert eine Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$.*

Beweis:(i) folgt aus (i) der Definition einer Norm.
(ii) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$
(iii) $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.**q.e.d.**

Im Folgenden werden wir mit der Vorgabe einer Norm auf einem Vektorraum immer auch die entsprechende induzierte Metrik auf diesem Vektorraum betrachten. Deshalb fassen wir jeden normierten Vektorraum auch als metrischen Raum auf.

Definition 9.6. *(Euklidische Norm und Metrik) Auf $\mathbb{R}^n$ definiert*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

die euklidische Norm. Die entsprechende Metrik heißt dann euklidische Metrik.

Die Eigenschaft (iii) heißt dabei Minkowski–Ungleichung:

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Um diese zu beweisen zeigen wir zuerst die

Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung 9.7.

$$|x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

Beweis: Wegen $|x_iy_i| = |x_i| \cdot |y_i|, x_i^2 = |x_i|^2$ und $y_i^2 = |y_i|^2$ genügt es offenbar

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

zu zeigen. Das ist aber äquivalent zu

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

Für $y = (y_1, \ldots, y_n) = 0$ ist die Aussage trivial. Sei also $y \neq 0$.

$$\begin{aligned}\left\|\|y\|x - \frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{\|y\|}y\right\|^2 &= \sum_{\imath=1}^{n}\left(\|y\|x_\imath - \frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{\|y\|}y_\imath\right)^2 \\ = \sum_{\imath=1}^{n}\left(\|y\|^2x_\imath^2 + \frac{(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2}{\|y\|^2}y_\imath^2 - 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)x_\imath y_\imath\right) \\ = \|y\|^2\|x\|^2 + \frac{(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2}{\|y\|^2}\|y\|^2 - 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \\ = \|y\|^2\|x\|^2 - (x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2.\end{aligned}$$

Weil diese Ausdrücke nicht negativ sind folgt $(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) \leq \|x\|^2\|y\|^2$. **q.e.d.**

Beweis der Minkowski Ungleichung:

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \leq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

q.e.d.

Analog definiert $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n}$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Identifizieren wir die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ (Realteil und Imaginärteil), dann ist $\mathbb{C}^n \simeq (\mathbb{R}^2)^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Übungsaufgabe 9.8. *Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{2n}$ induziert durch diese Identifikation auf $\mathbb{C}^n$ die Norm $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n}$.*

Definition 9.9. *(Norm und Skalarprodukt) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $1 \leq p < \infty$ sei*

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Wir hatten in einer Übungsaufgabe gesehen, dass $\|x\|_p$ im Grenzwert $p \to \infty$ gegen

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

konvergiert. Das Skalarprodukt wird definiert als

$$\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n \in \mathbb{K}, \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ setzen wir hierbei $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = \bar{y} = y$.

Satz 9.10. *(Höldersche Ungleichung) Seien $p \geq 1$ und $q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Dann gilt $\quad |\langle x, y\rangle| \leq |x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad$ *für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$.*

Für $p = q = 2$ erhalten wir wieder die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Beweis: Wenn $p = 1$ und $q = \infty$ gilt

$$|x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n| \leq (|x_1| + \ldots + |x_n|) \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}.$$

Den Fall $p = \infty$ und $q = 1$ erhalten wir durch vertauschen von x und y. Wir können also $1 < p, q < \infty$ annehmen, und dass $\|x\|_p \neq 0 \neq \|y\|_q$ gilt, weil die Ungleichung sonst offensichtlich ist. Dann folgt aus der Young'schen Ungleichung für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\frac{|x_ky_k|}{\|x\|_p\|y\|_q} = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}\frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}$$

Nach Summation über $k = 1, \ldots, n$ erhalten wir

$$\frac{|x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n|}{\|x\|_p\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

q.e.d.

Satz 9.11. *(Minkowski Ungleichung) Sei $p \geq 1$ und $x, y \in \mathbb{K}^n$, dann gilt*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Korollar 9.12. *Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist $\|\cdot\|_p : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ eine Norm.* **q.e.d.**

Beweis der Minkowski Ungleichung: Für $p = 1$ oder $p = \infty$ folgt sie aus der Dreiecksungleichung. Sei also $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow p = (p-1)q$.

$$\begin{aligned}
|x_1 + y_1|^p + \ldots + |x_n + y_n|^p &= |x_1 + y_1||x_1 + y_1|^{p-1} + \ldots + |x_n + y_n||x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq (|x_1| + |y_1|)|x_1 + y_1|^{p-1} + \ldots + (|x_n| + |y_n|)|x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq (\|x\|_p + \|y\|_p)(|x_1 + y_1|^{(p-1)q} + \ldots + |x_n + y_n|^{(p-1)q})^{1/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x + y\|_p^{p/q}
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir dabei die Höldersche Ungleichung benutzt. Also erhalten wir $\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p/q}$. Wenn $\|x+y\|_p = 0$ ist die Aussage trivial. Aus $\|x + y\|_p \neq 0$ folgt $\|x + y\|_p = \|x + y\|^{p(1-\frac{1}{q})} = \|x + y\|_p^{(p-\frac{p}{q})} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. **q.e.d.**

Definition 9.13. *(offener Ball, Umgebung, offene Menge) Ein offener Ball in (X, d) mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist die Menge $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $O \subset X$, die für ein $r > 0$ einen Ball $B(x, r)$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x, \epsilon) \subset O$.*

Beispiel 9.14. *In $\mathbb{R}$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus $(x - r, x + r)$. Im $\mathbb{R}^n$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus allen Punkten, deren euklidischer Abstand zu x kleiner ist als r.*

Alle offenen Bälle $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x. Für $y \in B(x, r)$ ist $d(x, y) < r$. Sei $z \in B(y, r - d(x, y))$. Dann gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$, also auch $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$. Deshalb ist sind die offenen Bälle tatsächlich offen.

Offenbar ist die beliebige Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Für zwei offene Mengen O und O' und $x \in O \cap O'$ gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ mit $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) \subset B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$, und $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen wieder offen.

Definition 9.15. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss) Die Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ eine Menge A ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.*

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Deshalb ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt.

Definition 9.16. *Zwei Normen $\| \quad \|_1$ und $\| \quad \|_2$ heißen äquivalent, wenn es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\|v\|_1 \leq C_1 \|v\|_2 \quad \text{und} \quad \|v\|_2 \leq C_2 \|v\|_1.$$

Offenbar ist die Relation zwischen Normen äquivalent zu sein eine Äquivalenzrelation, also insbesondere transitiv. Denn aus

$$\begin{array}{cccccc} \|v\|_1 \leq C_1\|v\|_2 & \|v\|_2 \leq C_2\|v\|_1 & & \|v\|_2 \leq C_3\|v\|_3 & \|v\|_3 \leq C_4\|v\|_2 \\ \text{folgt} & \|v\|_1 \leq C_1C_3\|v\|_3 & \text{und} & \|v\|_3 \leq C_4C_2\|v\|_1. & \end{array}$$

Beispiel 9.17. *Auf den Vektorräumen $\mathbb{K}^n$ haben wir für $1 \leq p \leq \infty$ die Normen*

$$\| \cdot \|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} & \text{für } p < \infty \\ \sup\{|v_1|, \ldots |v_n|\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

eingeführt. Offenbar gilt für alle $1 \leq p < \infty$ und alle $v \in \mathbb{K}^n$

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq n^{1/p} \|v\|_\infty.$$

Also sind alle diese Normen äquivalent.

Äquivalente Normen besitzen offenbar die gleichen offenen Mengen, so dass eine Folge bezüglich einer Norm genau dann konvergiert, wenn sie bezüglich einer äquivalenten Norm konvergiert. Außerdem stimmen die entsprechenden stetigen Funktionen von äquivalenten Normen überein. Wenn umgekehrt die offenen Mengen von zwei Normen übereinstimmen, dann müssen sie äquivalent sein, weil dann jede Kugel um die Null der einen Norm einen Ball um die Null der anderen Norm enthalten muß.

9.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Zunächst verallgemeinern wir einige Aussagen über Zahlenfolge auf allgemeine Folgen in metrischen Räumen.

Definition 9.18. *(Folgen und Cauchyfolgen) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X, mit $n \mapsto x_n$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert gegen $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $d(x_n, x) < \epsilon$.*
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Offenbar konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen einen Punkt a, wenn jede Umgebung von a alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Deshalb hängt der Begriff der Konvergenz nur von der Wahl der offenen Mengen ab.

Ein Punkt x gehört genau dann zu dem Abschluss $\bar{A}$, wenn alle offenen Mengen, die x enthalten, einen nicht leeren Schnitt mit A haben. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element a_n in dem Ball $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ gibt, oder auch dazu, dass es eine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Damit haben wir gezeigt:

Lemma 9.19. *Der Abschluss einer Teilmenge eines metrischen Raumes besteht aus allen Grenzwerten von Folgen innerhalb der Teilmenge, die in dem metrischen Raum konvergieren. Und eine Teilmenge ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte von allen konvergenten Folgen in der Teilmenge auch zu der Menge gehören.* **q.e.d.**

Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt aber auch $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$. Damit haben wir gezeigt:

Satz 9.20. *In einem metrischen Raum sind konvergente Folgen Cauchyfolgen.* **q.e.d.**

Definition 9.21. *Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn auch jede Cauchyfolge konvergiert.*

Definition 9.22. *Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.*

Wegen dem Vollständikgeitsaxiom sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Banachräume. Wegen Lemma 9.19 ist eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes genau dann ein vollständiger metrischer Raum, wenn sie abgeschlossen ist.

Definition 9.23. *(kompakt) Eine Teilmenge der offenen Mengen von (X, d), die X überdeckt, (d.h. jedes Element von X ist in mindestens einer der offenen Mengen enthalten) heißt offene Überdeckung von X. Der metrische Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Satz 9.24. *Für einen metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *(X, d) ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge in (X, d) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

(iii) *(X, d) ist vollständig und für jedes $\epsilon > 0$ besitzt (X, d) eine endliche Überdeckung mit offenen Bällen vom Radius ϵ.*

Beweis: (i)⇒(ii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ohne Häufungspunkt. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $F_n = \{x_m \mid m \geq n\}$ abgeschlossen, weil der Abschluss von jedem F_n gerade aus der Vereinigung von F_n mit den Häufungspunkten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht. Weil aber der Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ nur aus Häufungspunkten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehen kann, bilden die Mengen $(X \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X. Offenbar ist aber der Schnitt von endlich vielen Mengen der Mengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht leer. Also besitzt die Überdeckung $(X \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine endliche Teilüberdeckung.

(ii)⇒(iii): Sei also (X, d) ein metrischer Raum, der (ii) erfüllt. Dann besitzt aber jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass alle $m, n \geq N$ auch $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen. Weil x ein Häufungspunkt ist, gibt es aber ein $m \geq N$, so dass $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Also gilt für alle $n \geq N$ auch

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) < \epsilon.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und damit ist (X, d) vollständig. Sei $\epsilon > 0$ so gewählt, dass es keine endliche Überdeckung von X mit Bällen vom Radius ϵ gibt. Dann können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ induktiv so definieren, dass $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{m=1}^{n} B(x_m, \epsilon)$. Die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ erfüllt also für alle $n \neq m \in \mathbb{N}$ $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$. Also besitzt sie keine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist, und damit auch keinen Häufungspunkt im Widerspruch zu (ii).

(iii)⇒(i): Wir nehmen an (X, d) erfüllt Bedingung (iii) und $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ sei eine Überdeckung von (X, d), die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann definieren wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Bälle $B(x_n, 2^{-n})$ keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzen und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bälle $B(x_{n+1}, 2^{-(n+1)})$ und $B(x_n, 2^{-n})$ nicht disjunkt sind. Weil nämlich (X, d) eine endliche Überdeckung von Bällen vom Radius

$2^{-(n+1)}$ besitzt, und weil $B(x_n, 2^{-n})$ keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzt, gibt es mindestens einen Ball vom Radius $2^{-(n+1)}$, der nichtleeren Schnitt mit $B(x_n, 2^{-n})$ hat und keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzt. Weil aber

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{3}{2\cdot 2^n} \quad \text{und} \quad \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2^{-n+1},$$

ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Der Grenzwert gehört dann zu einer Menge $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$, und es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x,\epsilon) \subset U_\lambda$. Für genügend großes m ist dann $\frac{1}{2^{m-2}} \leq \epsilon$, und deshalb auch $d(x_m, x) \leq 3\cdot 2^{-m}$ und

$$B(x_m, 2^{-m}) \subset B(x, 2^{-m+2}) \subset B(x,\epsilon).$$

Also besitzt ein Ball $B(x_m, 2^{-m})$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$im Widerspruch zu der Annahme, dass $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. **q.e.d.**

Dieser Satz hat einige wichtige Folgerungen:

Korollar 9.25. (i) *Kompakte Mengen eines metrischen Raums sind abgeschlossen.*

(ii) *Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge sind wieder kompakt.*

Beweis:(i) Kompakte Mengen sind vollständig, und stimmen wegen Lemma 9.19 mit ihrem Abschluss überein.
(ii) Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge erfüllen offenbar wieder die Bedingung (ii) des vorangehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 9.26. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) heißt beschränkt, wenn für ein $x \in X$, die Menge der Abstände $\{d(x,y)|y \in A\}$ beschränkt ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass für alle $x \in X$ die Mengen $\{d(x,y) \mid y \in A\}$ beschränkt sind, aber nicht uniform in $x \in X$.

Offenbar sind alle kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes beschränkt und abgeschlossen. In $\mathbb{K}^n$ gilt auch die Umkehrung. Dort konvergiert eine Folge nämlich genau dann, wenn für alle $i = 1,\ldots,n$ die jeweilige Folge der i-ten Komponenten konvergieren. Deshalb überträgt sich der Beweis des Satzes 5.9 sofort auf den

Satz 9.27. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ ist bezüglich einer der äquivalenten Normen $\|\cdot\|_p$ mit $p \in [1,\infty]$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beispiel 9.28. (i) *Die Intervalle $[a,b]$ sind kompakt.*
(ii) $\bar{\mathbb{N}}$ *aus Beispiel (vi) ist kompakt.*
(iii) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a. Dann ist $\{a\}\cup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ kompakt.*

9.3 Stetigkeit

Definition 9.29. *Eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ von einem metrischen Raum (X, d) in den metrischen Raum (Y, d) heißt stetig in $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle $y \in B(x, \delta) \subset X$ auch $f(y) \in B(f(x), \epsilon) \subset Y$ erfüllen. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.*

Stetig im Punkt x heißt also, dass alle Punkte, die sehr nahe bei x liegen, auf Werte abgebildet werden, die sehr nahe bei $f(x)$ liegen.

Satz 9.30. *Für eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ zwischen den metrischen Räumen (X, d) und (Y, d) ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist stetig in x.*

(ii) *Das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x.*

(iii) *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d), die gegen x konvergiert, konvergiert auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.*

Beweis:(i)⇔(ii) Die Umgebungen von x sind gerade die Mengen, die einen δ-Ball um x enthalten. Also ist (ii) äquivalent zu der Aussage, dass das Urbild jedes ϵ-Balles um $f(x)$ einen δ-Ball um x enthält. Diese Aussage ist nur eine Umformulierung von (i).
(ii)⇔(iii) Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann gegen x bzw. $f(x)$, wenn jede Umgebung von x bzw. $f(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert und f (ii) erfüllt, dann konvergiert auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Also folgt aus (ii) auch (iii). Wenn es umgekehrt einen ϵ-Ball von $f(x)$ gibt, dessen Urbild keinen δ-Ball von x enthält, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, so dass die Folge der entsprechenden Werte $f(x_n)$ im Komplement dieses ϵ-Balles von $f(x)$ liegt: $f(x_n) \notin B(f(x), \epsilon)$. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(x)$. **q.e.d.**

Korollar 9.31. *Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X, d) und (Y, d) ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*

(ii) *Das Bild $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jeder konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

(iii) *Das Urbild jeder offenen Menge ist offen.*

(iv) *Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz sind (i) und (ii) äquivalent. Weil eine Menge genau dann offen ist, wenn sie eine Umgebung von allen ihren Punkten ist, zeigt der vorangehende Satz, dass aus (i) bzw. (ii) auch (iii) folgt. Weil jede Umgebung eines Punktes auch eine offene Umgebung des Punktes enthält, folgt wieder wegen dem vorangehenden Satz aus (iii) auch (i) bzw. (ii). Weil nun die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und das Urbild eines Komplementes gerade gleich dem Komplement des Urbildes ist, ist (iii) zu (iv) äquivalent. **q.e.d.**

Korollar 9.32. *Die Komposition zweier stetiger Abbildungen ist stetig. Die analoge punktweise Aussage gilt auch.*

Beweis: Benutze die Äquivalenz zwischen (i) und (iii) im vorangehenden Korollar und die Gleichung

$$(f \circ g)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]].$$

Beispiel 9.33. **(i)** *Auf jedem metrischen Raum ist die identische Abbildung $\mathbb{1}_X$ stetig.*

(ii) *Die konstante Abbildung, die alle $x \in X$ auf einen Punkt y abbildet ist stetig.*

(iii) *Wegen der Dreiecksungleichung gilt*

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y).$$

Also gilt auch $d(x, y) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(v, y)$. Durch vertauschen $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ und unter Benutzung der Symmetrie erhalten wir

$$d(u, v) - d(x, y) \leq d(x, u) + d(v, y) \Rightarrow |d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(v, y).$$

Mit der Metrik aus dem Beispiel 9.2 (v) auf $X \times X$ ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ also stetig.

(iv) *In Bezug auf die induzierte Metrik ist wegen*

$$|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\| \quad \text{für alle } v, w \in V$$

auf jedem normierten Vektorraum V die Norm $\| \cdot \|$ eine stetige reelle Funktion.

(v) *Wegen der Dreiecksungleichung sind für jeden normierten Vektorraum V*

$$+ : V \times V \to V, \qquad (v, w) \mapsto v + w \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to \mathbb{K}, \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

stetige Abbildungen. Das gilt auch für die Abbildungen

$$- : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto -x \qquad \text{und} \qquad {}^{-1} : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}, \qquad x \mapsto x^{-1}.$$

(vi) *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) läßt sich genau dann zu einer stetigen Abbildung von $\bar{\mathbb{N}}$ nach X fortsetzten, wenn sie konvergiert. ∞ wird dann auf $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ abgebildet.*

Korollar 9.34. *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.*

Beweis: Sei $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung und $A \subset X$ eine kompakte Menge. Dann ist das Urbild einer beliebig offenen Überdeckung von dem Bild

$$f[A] = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$$

eine offene Überdeckung von A. Diese besitzt, wenn A kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung. Also besitzt jede offene Überdeckung von $f[A]$ eine endliche Teilüberdeckung und $f[A]$ ist kompakt. **q.e.d.**

Korollar 9.35. *Alle stetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum sind beschränkt. Das Bild einer reellen stetigen Funktion auf einem kompakten metrischen Raum besitzt ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis: Sei (X, d) kompakt und $f : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x)$ stetig. Dann ist $f[X]$ kompakt und damit auch beschränkt. Wegen Korollar 5.11 besitzen die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ sowohl ein Minimum als auch ein Maximum. **q.e.d.**

Korollar 9.36. *Sei f eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum (X, d) auf einen metrischen Raum (Y, d). Dann ist die Umkehrabbildung stetig.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Korollar ist das Bild $f[X] = Y$ kompakt. Weil aber wegen Korollar 9.25 eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes genau dann abgeschlossen ist, wenn sie kompakt ist, folgt die Aussage aus dem vorangehenden Korollar und der Charakterisierung (iv) im Korollar über stetige Abbildungen. **q.e.d.**

Satz 9.37. *Auf $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen paarweise äquivalent.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass alle Normen äquivalent sind zu $\|\cdot\|_1$. Sei also $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Basis von $\mathbb{K}^n$, deren i–tes Element nur an der i–ten Stelle eine nicht verschwindende Komponente hat, die dann jeweils gleich Eins ist. Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann für jedes $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|v\| \le |v_1| \cdot \|e_1\| + \ldots + |v_n| \cdot \|e_n\| \le \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}\|v\|_1.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann für alle $v, w \in \mathbb{K}^n$

$$|\|v\| - \|w\|| \le \|v - w\| \le \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}\|v - w\|_1.$$

Also ist die Abbildung $v \mapsto \|v\|$ stetig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$, und wegen dem Satz 9.27 von Heine-Borel ist die Menge $\{v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\|_1 = 1\}$ kompakt. Wegen Korollar 9.35 nimmt diese Funktion auf dieser Menge das Minimum C an. Wegen der Positivität von $\|\cdot\|$ gilt $C > 0$. Daraus folgt

$$C\|v\|_1 \le \left\|\frac{v}{\|v\|_1}\right\| \|v\|_1 = \|v\| \le \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}\|v\|_1 \text{ für alle } v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}.$$ **q.e.d.**

Definition 9.38. *(Gleichmässige Stetigkeit, Lipschitz–Stetigkeit) Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *zwischen metrischen Räumen heißt gleichmäßig stetig, wenn es für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass* $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ *für alle* $x, y \in X$ *mit* $d(x, y) < \delta$ *gilt.*

Die Abbildung heißt Lipschitz–stetig auf A*, wenn es eine Konstante* $L > 0$ *(Lipschitzkonstante) gibt, so dass für alle* $x, y \in A$ *gilt* $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$*.*

Offenbar ist jede Lipschitz–stetige Abbildung auch gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz 9.39. *Sei* $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ *eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist* f *auf jeder kompakten Menge* A *auch gleichmäßig stetig.*

Auf kompakten Mengen sind also gleichmäßige und einfache Stetigkeit äquivalent.
Beweis: Sei also $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in A$ ein $\delta(x)$, so dass $f(y) \in B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$ aus $y \in B(x, \delta(x))$ folgt. Wir wählen eine endliche Teilüberdeckung von der offenen Überdeckung $\{B(x, \frac{\delta(x)}{2}) \mid x \in A\}$ von A. Sei δ das Minimum der Radien dieser endlichen Teilüberdeckung. Dann gibt es für alle $y, z \in A$ mit $d(y, z) < \delta$ einen Ball $B(x, \frac{\delta(x)}{2})$ der endlichen Teilüberdeckung mit $y \in B(x, \frac{\delta(x)}{2})$. Dann folgt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\delta(x)}{2} + \frac{\delta(x)}{2} = \delta(x) \quad \text{also } z \in B(x, \delta(x)).$$

Daraus folgt $$d(f(y), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(x), f(z)) < \epsilon.$$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 9.40. *Zeige in mehereren Schritten, dass sich jeder metrische Raum* (X, d) *auf eindeutige Weise vervollständigen läßt.*

(i) *Auf dem Raum aller Cauchyfolgen in* (X, d) *ist die Relation*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \text{die reelle Folge } (d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen Null.}$$

eine Äquivalenzrelation. Die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\tilde{X}$*.*

(ii) *Für Cauchyfolgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existiert der Grenzwert* $\tilde{d}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ *und hängt nur von den Äquivalenzklassen der Cauchyfolgen ab.*

(iii) *Die entsprechende Abbildung* $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{R}$ *definiert eine Metrik.*

(iv) $(\tilde{X}, \tilde{d})$ *ist ein vollständiger metrischer Raum ist.*

(v) *Die konstanten Folgen definieren eine isometrische (mit beiden Metriken verträgliche) Abbildung* $X \to \tilde{X}$*, und das Bild dieser Abbildung liegt dicht in* $\tilde{X}$ *(d.h. der Abschluss von dem Bild ist gleich* $\tilde{X}$*).*

(vi) *Zeige, dass sich jede gleichmäßig stetige Abbildung f von (X,d) in einen vollständigen metrischen Raum (Y,d) eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}$ von $(\tilde{X},\tilde{d})$ nach (Y,d) fortsetzen läßt. Daraus folgt dann, dass $\tilde{X}$ sich isometrisch und bijektiv auf den Abschluss des Bildes jeder isometrischen Abbildung von X in einen vollständigen metrischen Raum abbilden läßt.*

Weil jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist, sind die reellen Zahlen die Vervollständigung des metrischen Raums der rationalen Zahlen. Anstelle unserer axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen können wir also die reellen Zahlen auch als die Vervollständigung der rationalen Zahlen konstruieren.

9.4 Funktionenräume

In diesem Abschnitt sei (X,d) ein metrischer Raum und (Y,d) ein metrischer Raum, ein normierter Vektorraum oder eine normierte Algebra:

Definition 9.41. *Eine normierte Algebra ist ein normierter Vektorraum V mit einer assoziativen und distributiven Multiplikation $\cdot : V \times V \to V$, die Folgendes erfüllt:*

$$\begin{aligned}
&(v+v'')\cdot v' = v\cdot v' + v''\cdot v && (\lambda v)\cdot v' = \lambda(v\cdot v') && \|v\cdot v'\| \leq \|v\|\cdot\|v'\| \\
&v\cdot(v'+v'') = v\cdot v' + v\cdot v'' && v\cdot(\lambda v') = \lambda(v\cdot v') && \textit{für alle } v,v',v''\in V, \lambda\in\mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Wenn V vollständig ist, heißt V Banachalgebra.

Wir betrachten in diesem Abschnitt Mengen von Abbildungen von X nach Y. Wenn Y ein normierter Vektorraum ist können wir solche Abbildungen punktweise miteinander addieren und mit Elemente von $\mathbb{K}$ multiplizieren, und wenn Y eine Algbera auch punktweise miteinander multiplizieren:

$$\begin{aligned}
f+g :& X\to Y, & x\mapsto& f(x)+g(x), & \lambda f :& X\to Y, & x\mapsto& \lambda f(x)\\
f\cdot g :& X\to Y, & x\mapsto& f(x)\cdot g(x).
\end{aligned}$$

Die Addition erfüllt offenbar die Axiome $A1$ und mit der Skalarmultiplikation das Distributivgesetz. Dadurch wird die Menge aller Abbildungen in einen Vektorraum Y zu einem Vektorraum, und zu einer Algebra, wenn Y eine Algebra ist. Das Inverse einer Funktion f in eine Algebra mit Eins $\mathbb{1}\in Y$ existiert nur, wenn $f(x)$ für alle $x\in X$ invertierbar ist. Indem wir die Elemente von $\mathbb{K}$ mit den entsprechenden Vielfachen der Eins identifizieren, wird die Skalarmultiplikation zu einem Spezialfall der Multiplikation.

Definition 9.42. *Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X nach Y heißt*

punktweise konvergent, *wenn die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x\in X$ konvergieren. Die Grenzwerte definieren wieder eine Funktion $f : x \to Y$, $\quad x\mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*

gleichmäßig konvergent, *wenn es eine Funktion* $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ *gibt, und für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass* $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ *für* $n \geq N$ *und* $x \in X$ *gilt.*

Offenbar ist jede gleichmäßige konvergente Folge (f_n) auch punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt (siehe Beispiel 5.24).

Definition 9.43. *Eine Funktion* $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ *heißt beschränkt, wenn das Bild* $f[X]$ *eine beschränkte Menge in* Y *ist.* $B(X,Y)$*, bezeichne die Menge aller beschränkten Abbildungen von* X *nach* Y*. Auf* $B(X,Y)$ *bezeichne* d *folgende Abbildung:*

$$d : B(X,Y) \times B(X,Y) \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto d(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Wenn Y *ein normierter Raum bezeichne* $\|\cdot\|_\infty$ *folgende Abbildung:*

$$\|\cdot\|_\infty : B(X,Y) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Satz 9.44. (i) *Für metrische Räume* X *und* Y *ist* d *eine Metrik auf* $B(X,Y)$*.*

(ii) *Wenn* Y *ein normierter Vektoraum (Algebra) ist, ist* $B(X,Y)$ *ein normierter Vektorraum (Algebra) mit Norm* $\|\cdot\|_\infty$*, die die Metrik aus (i) induziert.*

(iii) *Wenn* Y *ein volsständiger metrischer Raum ist, dann auch* $B(X,Y)$*.*

Beweis:(i) und **(ii)** folgen daraus, dass d eine Metrik bzw. $\|\cdot\|$ eine Norm auf Y ist, und weil wegen der Dreiecksungleichung und wegen $\|v \cdot w\| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ die Summe und das Produkt zweier beschränkter Funktionen wieder beschränkt ist.
(iii) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B_{\mathbb{K}}(X,Y)$. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n, m \geq N \text{ und alle } x \in X.$$

Dann sind für alle $x \in X$ die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Also konvergieren sie punktweise gegen eine Funktion $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$. Wegen Beispile 9.33 (iii) sind dann für alle $g \in B(X,Y)$ auch die Folgen $d(g, f_n)$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ und damit beschränkt. Für alle $\epsilon > 0$ und alle $x \in X$ gibt es ein $N(x) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq N(x)$ gilt $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Damit folgt für $n \geq N$ und $m \geq \max\{N, N(x)\}$

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \epsilon.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. **q.e.d.**

Definition 9.45. $C_b(X,Y)$ *sei der Unterraum von* $B(X,Y)$ *aller stetigen und beschränkten Funktionen von* X *nach* Y*.*

Satz 9.46. (i) *Für metrische Räume* X *und* Y *ist* $C_b(X,Y)$ *abgeschlossen in* $B(X,Y)$*.*

(ii) *Wenn Y ein normierter Vektorraum (Algebra) ist, dann auch $C_b(X,Y)$.*

(iii) *Wenn Y vollständig ist, dann auch $C_b(X,Y)$.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz und Lemma 9.19 genügt es zu zeigen, dass für jede Folge in $C_b(X,Y)$, die als Folge in $B(X,Y)$ konvergiert, der Grenzwert in $C_b(X,Y)$ liegt. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_b(X,Y))$, die in $B(X,Y)$ gegen f konvergiert. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$. Weil f_n stetig bei $x \in X$ ist gibt es ein $\delta > 0$, so dass $d(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in B(x,\delta)$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &\leq d(f(x),f_n(x)) + d(f_n(x),f_n(y)) + d(f_n(y),f(y)) \\ &\leq d(f(x),f_n(x)) + d(f_n(x),f_n(y)) + d(f_n(y),f(y)) \\ &< \epsilon. \qquad \text{Also ist } f \text{ bei } x \in X \text{ stetig.} \end{aligned}$$

q.e.d.

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist notwendig (siehe Beispiel 5.24). Wenn Y ein Banachraum ist, dann sind sowohl $B(X,Y)$ als auch $C_b(X,Y)$ Banachräume. Wenn Y eine Banachalgebra ist wie z.B. $\mathbb{K}$, dann sind auch $B(X,Y)$ und $C_b(X,Y)$ Banachalgebren. Der Fall $Y = \mathbb{K}$ wird im Folgenden noch öfter vorkommen. Jetzt können wir die Vervollständigungen aller metrischen Räume leicht konstruieren:

Satz 9.47. *Sei X ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Für alle $x \in X$ gehört dann*

$$\begin{array}{llll} & I(x): X \to \mathbb{R} & y \mapsto d(x,y) - d(x_0,y) & \textit{zu } C_b(X,\mathbb{R}). \\ \textit{Die Abbildung} & I: X \to C_b(X,\mathbb{R}) & x \mapsto I(x) & \end{array}$$

ist eine isometrische Abbildung von X nach $C_b(X,\mathbb{R})$, d.h. es gilt $d(I(x),I(y)) = d(x,y)$ für alle $x,y \in X$. Für jede gleichmäßig stetige Abbildung f von X in einen vollständigen metrischen Raum Y, gibt es eine stetige Abbildung g von dem Abschluss des Bildes $I[X] \subset C_b(X,\mathbb{R})$ nach Y, so dass f gleich $g \circ I$ ist (vergleiche Übungsaufgabe 9.40).

Beweis: Wegen Beispiel 9.33 (iii) sind die reellen Funktionen $I(x)$ für alle $x \in X$ stetig. Wegen der Dreiecksungleichung gilt für alle $y \in X$

$$I(x)(y) = d(x,y) - d(x_0,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) - d(x_0,y) = d(x,x_0).$$

Also gehören diese Funktionen zu $C_b(X,\mathbb{R})$. Für $x,y \in X$ gilt

$$d(x,y) = d(x,y) - d(y,y) \leq d(I(x),I(y)) = \sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Also ist I eine isometrische Abbildung. Sei $h \in C_b(X,\mathbb{R})$ ein Element im Abschluss von $I[X]$ und $f: X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung in einen vollständigen metrischen Raum Y. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $d(f(x),f(y)) < \epsilon$ aus $d(x,y) < \delta$ folgt. Insbesondere haben alle Elemente von $\{f(x) \in Y \mid x \in X \text{ mit } d(I(x),h) < \frac{\delta}{2}\}$ paarweise einen Abstand kleiner als ϵ. Deshalb werden alle Folgen in X, deren Bilder unter I gegen h konvergieren, auf Cauchyfolgen in Y abgebildet, die alle gegen das gleiche Element von Y konvergieren. Indem wir h durch g auf diesen Grenzwert in Y abbilden, erhalten wir eine Abbildung g mit den gewünschten Eigenschaften. **q.e.d.**

Satz 9.48. *(Satz von Stone–Weierstraß) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subset C_b(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra, die die konstanten Funktionen enthält und die Punkte trennt, d.h. für alle $x \neq y \in X$ gibt es $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann ist der Abschluss von A gleich $C_b(X, \mathbb{R})$.*

Lemma 9.49. *Auf $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ konvergiert die induktiv definierte Folge von Polynomen $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x))$ mit $p_0 = 0$, gleichmäßig gegen die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$.*

Beweis : Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass $0 \leq p_n(x)$ und $0 \leq p_n^2(x) \leq x$ für $x \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Beides ist für $n = 0$ offensichtlich.

$$\begin{aligned} x - p_{n+1}^2(x) &= x - p_n^2(x) - p_n(x)\left(x - p_n^2(x)\right) - \frac{1}{4}\left(x - p_n^2(x)\right)^2 \\ &= (x - p_n^2(x))\left(1 - p_n(x) - \frac{1}{4}(x - p_n^2(x))\right) \\ &= (x - p_n^2(x))\left(\left(1 - \frac{p_n(x)}{2}\right)^2 - \frac{x}{4}\right) \end{aligned}$$

Aus $p_n^2(x) \leq x \leq 1$ folgt $p_n(x) \leq 1$ und damit $1 - \frac{p_n(x)}{2} \geq \frac{1}{2}$ und $(1 - \frac{p_n(x)}{2})^2 \geq \frac{1}{4} \geq \frac{x}{4}$. Deshalb ist die Folge $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für $x \in [0, 1]$ monoton wachsend und $0 \leq p_n^2(x) \leq x$. Dann gilt auch $((1 - \frac{p_n(x)}{2})^2 - \frac{x}{4}) \leq 1 - \frac{x}{4}$ und deshalb auch $0 \leq x - p_n^2(x) \leq x \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n$. Wegen $\frac{1}{1 - \frac{x}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{4})^n \geq 1 + \frac{x}{4}$ folgt dann aus der Beroulli Ungleichung $\frac{1}{(1 - \frac{x}{4})^n} \geq 1 + \frac{nx}{4}$ und $0 \leq x - p_n^2(x) \leq \frac{x}{1 + \frac{nx}{4}} < \frac{4}{n}$. Also konvergiert $(p_n^2(x))_{n \in \mathbb{N}}$ auf $x \in [0, 1]$ gleichmäßig gegen x. Die Funktion $[0, 1] \to [0, 1], \quad x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $[0, 1] \to [0, 1], \quad x \mapsto x^2$. Weil die zweite Funktion stetig ist, ist wegen Korollar 5.18 die erste stetig und wegen Satz 5.22 sogar gleichmäßig stetig. Dann konvergiert die Folge $(p_n(x) = \sqrt{p_n^2(x)})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$. **q.e.d.**

Beweis des Satzes von Stone–Weierstraß: Wegen Lemma 9.49 gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen $x \to \sqrt{x}$ konvergieren. Deshalb gehört $|f| = \|f\|_\infty \sqrt{(\frac{f}{\|f\|_\infty})^2}$ für jedes $f \in A$ zu dem Abschluss $\bar{A}$ von A. Für $f, g \in \bar{A}$ gehören

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{und} \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

zu $\bar{A}$. Weil A die Punkte von X trennt, gibt es für alle $x \neq y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Element $f \in A$ mit $f(x) = \alpha$ und $f(y) = \beta$. Sei nämlich g eine Funktion mit $g(x) \neq g(y)$. Dann ist $f = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g - g(x))$ eine solche Funktion.

Sei jetzt $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ eine fest vorgegebene Funktion und $\epsilon > 0$. Dann gibt es für alle $x, y \in X$ eine Funktion $g_{x,y} \in \bar{A}$ die bei x und y mit f übereinstimmt. Dann gibt es ein $\delta_{x,y} > 0$, so dass $g_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon$ für alle $z \in B(y, \delta_{x,y})$ gilt. Durch Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung von $\{B(y, \delta_{x,y}) \mid y \in X\}$ und dem Infimum der entsprechenden Funktionen $g_{x,y} \in \bar{A}$ gibt es eine Funktion $g_x \in \bar{A}$, die $g_x(x) = f(x)$ und $g_x < f + \epsilon$ erfüllt. Wegen der Stetigkeit von f und g_x gibt es für alle $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, so dass $f(y) - \epsilon < g_x(y)$ für alle $y \in B(x, \delta_x)$ gilt. Durch Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung von $\{B(x, \delta_x) \mid x \in X\}$ und dem Supremum der entsprechenden Funktionen g_x finden wir schließlich eine Funktion g in $\bar{A}$, die $f - \epsilon < g < f + \epsilon$ auf X erfüllt. Weil ϵ beliebig ist folgt $f \in \bar{A}$. **q.e.d.**

Satz 9.50.* *(Satz von Dini) Auf einem kompakten metrischen Raum (X, d) konvergiert eine monotone Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen reellen Funktionen gleichmäßig, wenn sie punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert.*

Beweis*: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $C_b(X, \mathbb{R})$, die punktweise gegen $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ und $x \in X$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$, so dass $f(x) - f_{n(x)}(x) < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Da $f_{n(x)}$ und f stetig sind gibt es ein $\delta(x)$, so dass

$$|f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{und} \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } y \in B(x, \delta(x)) \text{ gilt.}$$

Dann gilt dort auch $f(y) - f_{n(x)}(y) < \epsilon$. Wähle eine endliche Teilüberdeckung von $\{B(x, \delta(x)) \mid x \in X\}$. Dann gilt für $m \geq$ Maximum der entsprechenden $n(x)$

$$f(y) - f_m(y) \leq f(y) - f_{n(x)}(y) < \epsilon$$

auf den Mengen der Teilüberdeckung. Das zeigt die gleichmäßige Konvergenz. **q.e.d.**

Definition 9.51. *(relativkompakt) Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heisst relativkompakt, wenn der Abschluss kompakt ist.*

Lemma 9.52. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist genau dann relativkompakt, wenn jede Folge in A eine in X konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis: Wenn A relativkompakt ist, dann besitzt wegen Satz 9.24 jede Folge in A eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert im Abschluss $\bar{A}$ liegt. Hat umgekehrt jede Folge in A eine konvergente Teilfolge, dann gibt es wegen Lemma 9.19 für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Abschluss von A auch eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $d(x_n, a_n) < \frac{1}{n}$. Dann konvergiert die jeder konvergenten Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsprechende Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert wie die entsprechende Teilfoge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen Satz 9.24 ist dann der Abschluss von A kompakt. **q.e.d.**

Satz 9.53.* *(Arzela–Ascoli) Sei X ein kompakter und Y ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset C_b(X, Y)$ ist genau dann relativkompakt, wenn*

(i) *für jedes $x \in X$ die Menge $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ relativkompakt ist, und*

(ii) *für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x') \in B(f(x), \epsilon)$ für alle $x' \in B(x, \delta), f \in \mathcal{F}$.*

Beweis*: Zunächst nehmen wir an, dass die Menge $\mathcal{F}$ die Bedingungen (i)-(ii) erfüllt. Wir zeigen dann, dass jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ eine in $C_b(X,Y)$ konvergente Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt. Dafür zeigen wir zuerst, dass $\mathcal{F}$ auf X sogar gleichmäßig gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in X$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $f \in \mathcal{F}$ aus $d(x,y) < 2\delta_y$ folgt. Wegen der Kompaktheit von X hat die Überdeckung $\{B(y,\delta_y) \mid y \in X\}$ eine endliche Teilüberdeckung $X = B(y_1,\delta_1)\cup\ldots\cup B(y_N,\delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1,\ldots,\delta_N$. Dann entält für alle Paare $x, x' \in X$ mit $d(x,x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1,\delta_1),\ldots,B(y_N,\delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1, 2\delta_1),\ldots,B(y_N, 2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f(x), f(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig auf ganz X.

Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in X dicht liegt. Wegen (i) ist für alle $m \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_m der Menge $\{f_n(x_m) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine kompakte Teilmenge von Y. Wir definieren induktiv eine Teilfolge von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in Y, so dass $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$ gilt. Dafür wählen wir zunächst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $d(g_n(x_1), a_1) \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Induktiv wählen wir für jedes $M \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ einen Häufungspunkt a_M von $(g_n(x_M))_{n\in\mathbb{N}}$ und ersetzen alle Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes$\geq M$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq M}$, so dass $d(g_n(x_M), a_M) < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq M$ gilt. Dann gilt $d(g_n(x_m), a_m) < \frac{1}{n}$ für alle $m = 1,\ldots,M$ und $n \geq m$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x, x' \in X$ mit $d(x,x') < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(g_n(x), g_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$. Die Überdeckung $(B(x_m,\delta))_{m\in\mathbb{N}}$ von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass alle $l, n \geq M$ an den Zentren der Bälle der Teilüberdeckung $d(g_l(x_m), g_n(x_m)) < \frac{\epsilon}{3}$ erfüllen. Dann folgt für alle $x \in X$ und alle $l, n \geq M$

$$d(g_l(x), g_n(x)) \leq d(g_l(x), g_l(x_m)) + d(g_l(x_m), g_n(x_m)) + d(g_n(x_m), g_n(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_b(X,Y)$ eine Cauchyfolge. Wegen der Bedingung (i) konvergiert sie dann in $B(X,Y)$. Wegen Satz 9.46 liegt der Grenzwert in $C_b(X,Y)$.

Wenn umgekehrt $\mathcal{F}$ relativkompakt ist, dann besitzt wegen Lemma 9.52 mit jeder Folge in $\mathcal{F}$ für jedes $x \in X$ auch die Folge der entsprechenden Funktionswerte eine konvergente Teilfolge. Also erfüllt $\mathcal{F}$ die Bedingung (i).

Ausserdem gibt es für jedes $x \in X$ und $\epsilon > 0$ endlich viele $f_1,\ldots,f_k$ im Abschluss von $\mathcal{F}$, so dass $B(f_1,\epsilon/3) \cup \ldots \cup B(f_k,\epsilon/3)$ den Abschluss von $\mathcal{F}$ überdeckt. Weil $f_1,\ldots,f_k$ stetig sind, gibt es $\delta_1,\ldots,\delta_k > 0$, so dass für alle $i = 1,\ldots,k$ aus $x' \in B(x,\delta_i)$ folgt $f_i(x') \in B(f(x),\epsilon/3)$. Dann gibt es für alle $f \in \mathcal{F}$ ein f_i so dass für alle $x' \in B(x,\delta)$

$$d(f(x'), f(x)) \leq d(f(x'), f_i(x')) + d(f_i(x'), f_i(x)) + d(f_i(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

gilt mit $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_k\}$. **q.e.d.**

9.5 Lineare Operatoren

Die Ableitung einer Funktion von mehreren Veränderlichen ist eine lineare Abbildung. Zur Vorbereitung der Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher behandeln wir in diesem Abschnitt solche linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen. Dabei betrachten wir wieder Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$.

Definition 9.54. *Eine Abbildung $A : V \to W$ von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W heißt linear, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt*

$$A(v + w) = Av + Aw \quad \text{und} \quad A(\lambda v) = \lambda Av.$$

Satz 9.55. *Seien V und W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist folgendes äquivalent:*

(i) *A ist stetig in 0.*

(ii) *A ist stetig.*

(iii) *A ist gleichmäßig stetig.*

(iv) *Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\|Av\| \le C\|v\|$.*

(v) *A ist auf $B(0, 1)$ beschränkt, d.h. $\|Av\| \le C$ für alle $\|v\| < 1$ mit $0 < C < \infty$.*

Beweis:(i)⇒(v): Wenn A in 0 stetig ist, dann enthält das Urbild jedes Balles $B(0, \epsilon) \subset W$ einen Ball $B(0, \delta) \subset V$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\|Av\| < 1$ aus $\|v\| < \delta$ folgt. Wegen der Linearität folgt dann $\|Av\| = \frac{1}{\delta}\|A\delta v\| < \frac{1}{\delta}$ aus $\|v\| < 1$. Also ist (v) erfüllt.
(v)⇒(iv): Wegen der Linearität folgt aus (v), dass für alle $v \in V$ gilt

$$\|Av\| = A\left(2\|v\| \cdot \frac{v}{2\|v\|}\right) = 2\|v\| \cdot A\left(\frac{v}{2\|v\|}\right) \le 2C\|v\|.$$

(iv)⇒(iii): Für $v, w \in V$ folgt $\|A(v - w)\| \le C\|v - w\|$ aus (iv). Also ist A sogar Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante C. Dann gilt auch (iii).
(iii)⇒(ii) und (ii)⇒(i): Sind offensichtlich. **q.e.d.**

Satz 9.56. *Jede lineare Abbildung A von $\mathbb{K}^n$ in einen normierten Vektorraum ist stetig.*

Beweis: Wir benutzen wieder die Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{K}^n$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{K}^n$

$$\|Av\| \le |v_1| \cdot \|Ae_1\| + \ldots + |v_n| \cdot \|Ae_n\| \qquad \le \|v\|_1 \max\{\|Ae_1\|, \ldots, \|Ae_n\|\}.$$

Also folgt die Aussage aus Satz 9.37. **q.e.d.**

Definition 9.57. *Seien V, W normierte Vektorräume. Dann sei $\mathcal{L}(V,W)$ die Menge aller linearen stetigen Abbildungen von V nach W zusammen mit den Abbildungen:*

$$\begin{aligned} + : \quad \mathcal{L}(V,W) \times \mathcal{L}(V,W) &\to \mathcal{L}(V,W), \quad (A,B) \mapsto A+B : \quad V \to W, \quad v \mapsto Av + Bv \\ \cdot : \quad \mathbb{K} \times \mathcal{L}(V,W) &\to \mathcal{L}(V,W), \quad (\lambda, A) \mapsto \lambda A : \quad V \to W, \quad v \mapsto \lambda Av \end{aligned}$$

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(V,W) \to \mathbb{R}, A \mapsto \|A\| = \sup\{\|Av\| \mid v \in B(0,1)\} = \sup\{\|Av\| \mid v \in \overline{B(0,1)}\}.$$

Satz 9.58. *$\mathcal{L}(V,W)$ ist ein normierter Vektorraum.*

Beweis: Aus der Linearität von A und B folgt die Linearität von $A + B$ und $\lambda \cdot A$. Wegen der Dreiecksungleichung folgt aus der Stetigkeit von A und B auch die Stetigkeit von $A + B$. Und schließlich folgt aus der Linearität und der Stetigkeit von A auch die Stetigkeit von $\lambda \cdot A$. Weil W ein Vektorraum ist, ist dann auch $\mathcal{L}(V,W)$ ein Vektorraum. Wegen der Linearität der Elemente von $\mathcal{L}(V,W)$ und weil W ein normierter Vektorraum ist, ist auch $\mathcal{L}(V,W)$ ein normierter Vektorraum. **q.e.d.**

Wenn $V = \mathbb{K}^n$, dann ist der Abschluss der Einheitskugel $\overline{B(0,1)} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ kompakt. Deshalb gibt es also für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, W)$ ein $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, so dass gilt $\|A\| = \|A\frac{v}{\|v\|}\| = \frac{\|Av\|}{\|v\|}$. Weil für jeden linearen Operator $A \in \mathcal{L}(V,W)$ gilt $Av = \|v\| \cdot A(\frac{v}{\|v\|})$ ist jeder lineare Operator A durch seine Werte auf $\overline{B(0,1)}$ eindeutig bestimmt. Die Norm von $\mathcal{L}(V,W)$ ist dann einfach die Supremumsnorm der stetigen Abbildung von $\overline{B(0,1)}$ nach W. Deshalb ist der normierte Vektorraum $\mathcal{L}(V,W)$ ein Unterraum von $C_b(\overline{B(0,1)}, W)$. So folgt z.B. aus der Konvergenz einer Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(V,W)$ die gleichmäßige Konvergenz auf $\overline{B(0,1)}$ (und sogar die punktweise Konvergenz auf V).

Satz 9.59. *Seien V ein normierter Vektorraum und W ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{L}(V,W)$ ein Banachraum.*

Beweis: Wir müssen wegen Satz 9.58 nur zeigen, dass $\mathcal{L}(V,W)$ vollständig ist. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(V,W)$. Für jedes $v \in V$ ist wegen $\|(A_n - A_m)v\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|v\|$ die Folge $(A_n v)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in W, die konvergiert. Wir definieren als den Grenzwert von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgende Abbildung von V nach W:

$$A : V \to W, \quad v \mapsto Av = \lim_{n\to\infty} A_n v \quad \text{für alle } v \in V.$$

Wir müssen noch $A \in \mathcal{L}(V,W)$ zeigen, und dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A konvergiert. Weil $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n - A_m\| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$. Für jedes $v \in V$ gibt es ein $m \geq N$ mit $\|Av - A_n v\| < \frac{\epsilon}{2}\|v\|$. Es folgt

$$\|(A - A_n)v\| \leq \|(A - A_m)v\| + \|(A_m - A_n)v\| < \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right)\|v\| = \epsilon\|v\|.$$

Also konvergiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A. Aus der Linearität von A_n folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\|A(v+w) - (Av + Aw)\| \leq \\
&\leq \|(A - A_n)(v+w) - (A - A_n)v - (A - A_n)w))\| + \|A_n(v+w) - (A_n v + A_n w)\| \\
&\qquad\qquad \leq \|A - A_n\| \left(\|v+w\| + \|v\| + \|w\|\right), \text{ und} \\
&\|\lambda Av - A(\lambda v)\| \leq \|\lambda(A - A_n)v - (A - A_n)(\lambda v)\| + \|\lambda A_n v - A_n(\lambda v)\| \\
&\qquad\qquad \leq \|A - A_n\| \left(|\lambda| \cdot \|v\| + \|\lambda v\|\right).
\end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ konvergieren die rechten Seiten gegen Null, so dass A linear ist. Weil die Konvergenz in $\mathcal{L}(V,W)$ die gleichmäßige Konvergenz auf $\overline{B(0,1)} \subset V$ ist, folgt aus Satz 9.44 (iii), dass der Grenzwert A auf $\overline{B(0,1)} \subset V$ beschränkt ist, und damit wegen Satz 9.55 stetig. **q.e.d.**

Satz 9.60. *Seien U, V und W normierte Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(U,V)$ und $B \in \mathcal{L}(V,W)$, dann ist $B \circ A \in \mathcal{L}(U,W)$ und es gilt $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. Insbesondere ist die Abbildung $\circ : \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(U,W), \quad (A,B) \mapsto B \circ A$ stetig.*

Beweis: Für alle $v \in U$ gilt $\|(B \circ A)u\| \leq \|B\| \cdot \|Au\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|u\|$. Also folgt die Ungleichung $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ aus Satz 9.55. Für zwei normierte Vektorräume V, W mit Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ ist

$$\|\cdot\|_{V\times W} : V \times W \to \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \|v\|_V + \|w\|_W$$

eine Norm auf $V \times W$ und induziert die Metrik des kartesischen Produktes der metrischen Räume V und W. Für $(A,B), (A',B') \in \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\|B \circ A - B' \circ A'\| &= \|B \circ A - B \circ A' + B \circ A' - B' \circ A'\| \\
&= \|B \circ (A - A') + (B - B') \circ A'\| \\
&\leq \|B\| \cdot \|A - A'\| + \|B - B'\| \cdot \|A'\| \\
&\leq (\|A - A'\| + \|B - B'\|)(\|B\| + \|A'\|) \\
&\leq (\|A - A'\| + \|B - B'\|)(\|B\| + \|A\| + \|A - A'\|) \\
&\leq (\|(A,B) - (A',B')\|(\|B\| + \|A\| + \|(A,B) - (A',B')\|).
\end{aligned}$$

Also ist diese Abbildung im Punkt $(A,B) \in \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W)$ stetig. **q.e.d.**

Wir bezeichnen die Komposition $B \circ A$ von linearen Operatoren auch mit BA.

Definition 9.61. *Auf einem normierten Vektorraum V ist $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ mit*

$$\circ : \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad (A,B) \mapsto AB \quad \textit{und} \quad \|\cdot\| : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \|A\|$$

eine normierte Algebra. Für einen Banchraum V ist $\mathcal{L}(V)$ eine Banachalgebra.

Satz 9.62. *(Neumannsche Reihe) Sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$ ein Operator mit $\|A\| < 1$. Dann ist $\mathbb{1} - A$ invertierbar und es gilt $(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Beweis: Wegen $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ ist $(\sum A^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $\|A\| < 1$ eine Cauchyfolge mit

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} A^n \right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Wegen Satz 9.59 konvergiert diese Reihe gegen ein $B \in \mathcal{L}(V)$. Offenbar gilt

$$(\mathbb{1} - A)B = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = \mathbb{1} \quad \text{und genauso} \quad B(\mathbb{1} - A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = \mathbb{1}.$$

Also ist $(\mathbb{1} - A)$ invertierbar und es gilt $\qquad (\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$

Insbesondere gilt $\qquad \left\|(\mathbb{1} - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$ **q.e.d.**

Jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ definiert also eine Abbildung $f : \{A \in \mathcal{L}(V) \mid \|A\| < R\} \to \mathcal{L}(V), A \mapsto f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$. Viele der Aussagen, die wir für Potenzreihenfunktionen auf $\mathbb{K}$ gezeigt haben, lassen sich jetzt auf Potenzreihenfunktionen auf $\mathcal{L}(V)$ ausdehnen. Aber weil im Allgemeinen $AB \neq BA$ für $A, B \in \mathcal{L}(V)$, gilt im Allgemeinen auch $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(A + B)$.

Definition 9.63. *Eine Derivation einer Algebra $\mathcal{L}(V)$ ist ein Operator $D \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$, der die Bedingung $D(AB) = D(A) \cdot B + A \cdot D(B)$ erfüllt.*

Übungsaufgabe 9.64. (i) *Zeige, dass für jedes $A \in \mathcal{L}(V)$, die Abbildung*

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad B \mapsto AB - BA \quad \textit{eine Derivation ist.}$$

(ii) *Sei V ein Banachraum und D eine Derivation von $\mathcal{L}(V)$. Zeige dass $\exp(D)$ ein Algebraisomorphismus ist, d.h. ein invertierbares Element von*

$$\{C \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V)) \mid C(AB) = C(A)C(B) \textit{ für alle } A, B \in \mathcal{L}(V)\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}(V)).$$

(iii) *Zeige $\exp(D_A)B = \exp(A) \cdot B \cdot \exp(-A) \quad \forall A, B \in \mathcal{L}(V)$ eines Banchraums V.*