Kapitel 12

Das Lebesgueintegral auf dem $\mathbb{R}^d$

12.1 Treppenfunktionen

Zunächst führen wir die Klasse der Mengen von Quader im $\mathbb{R}^d$ ein.

Definition 12.1. *Ein Quader ist ein d-faches kartesisches Produkt von Intervallen*

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1 \in I_1, \ldots, x_d \in I_d\} \subset \mathbb{R}^d,$$

wobei $I_1, \ldots, I_d \subset \mathbb{R}$ Intervalle sind. Sie können den linken bzw. rechten Rand enthalten und nicht enthalten. Wenn alle Intervalle beschränkt sind heißt der Quader endlich.

Für jeden solchen Quader definieren wir das Volumen als das Produkt der Längen aller Intervalle $I_1, \ldots, I_d$. Wenn die Intervalle alle beschränkt sind, sind alle ihre Längen endlich und das Volumen des entsprechenden Quaders ist dann auch endlich. Das Volumen bezeichnen wir mit $\mu(Q)$.

Definition 12.2. *Eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^d$ heißt Nullmenge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge von endlichen Quadern $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d$ gibt, mit*

$$A \subset \bigcup_{n+1}^{\infty} Q_n \quad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \leq \epsilon.$$

Lemma 12.3. *Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge und $\epsilon > 0$. Sei Q_n für alle $n \in \mathbb{N}$ der Quader mit Zentrum x_n, dessen Kantenlängen alle gleich $\sqrt[d]{\epsilon \cdot 2^{-n}}$ sind. Dann überdeckt die Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d$. Wegen der geometrischen Reihe gilt aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon \cdot 2^{-n} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \epsilon.$$

Also gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überdeckt, und deren Gesamtvolumen nicht größer als ϵ ist. **q.e.d.**

Lemma 12.4. *Eine höchstens abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine höchstens abzählbare Vereinigung von Nullmengen. Dann besitzt für jedes $\epsilon > 0$ jedes A_n eine Überdeckung von Quadern, deren gesamtes Volumen nicht größer ist als $\epsilon \cdot 2^{-n}$. Die höchstens abzählbare Vereinigung dieser jeweils höchstens abzählbar vielen Quader ist wegen Satz 2.48 eine höchstens abzählbare Menge von Quader mit einem Volumen nicht gößer als $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon$. Also wird $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ von abzählbar vielen Quadern überdeckt, deren Volumen nicht größer ist als ϵ. **q.e.d.**

Definition 12.5. *Eine Treppenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von endlichen Quadern, d.h. solcher Funktionen, die gleich* 1 *sind, auf Elementen des Quaders und sonst gleich* 0*.*

Proposition 12.6. *Endlich viele Quader lassen sich in endlich viele paarweise disjunkte Quader zerlegen. Jede Treppenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten endlichen Quadern.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass je zwei Quader Q_1 und Q_2 im $\mathbb{R}^d$ eine disjunkte Vereinigung von höchstens 3^d-Quadern ist. In einer Dimension folgt das daraus, dass zwei Intervalle in $\mathbb{R}$ entweder disjunkt sind, oder die Schnittmenge und die beiden Komplemente jeweils im anderen Intervall beides Intervalle sind, oder das eine Intervall in dem anderen enthalten ist und das Komplement dieses Intervalls in dem anderen Intervall eine disjunkte Vereinigung von höchstens zwei Intervallen ist. Wenn wir das auf alle Faktoren $\mathbb{R}$ im kartesischen Produkt anwenden, lassen sich zwei Quader in eine disjunkte Vereinigung von höchstens 3^d-Quadern zerlegen.

Wenn wir das auf alle endlichen Quader einer Treppenfunktion anwenden, dann nimmt diese Treppenfunktion auf jedem der paarweise disjunkten endlichen Quader genau einen Wert an und läßt sich als eine endliche Linearkombination von chrakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten endlichen Quadern schreiben. **q.e.d.**

Als nächstes wollen wir das Integral von Treppenfunktionen definieren. Zunächst definieren wir für jede charakteristische Funktion χ_Q eines Quaders das Integral

$$\int \chi_Q d\mu = \mu(Q).$$

Proposition 12.7. *Sei f eine Treppenfunktion und seien*

$$f = \sum_i c_i \chi_{Q_i} = \sum_j d_j \chi_{R_j}$$

zwei Zerlegungen in endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von endlichen Quadern. Dann ist

$$\int f d\mu = \sum_i c_i \mu(Q_i) = \sum_j d_j \mu(R_j).$$

Beweis: Wir zerlegen alle diese endlichen Quader Q_i und R_j in endlich viele paarweise disjunkte endliche Quader. Dabei zerlegen wir wie im vorangehenden Beweis beschrieben jeden der d Faktoren im kartesischen Produkt in eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen beschränkten Intervallen. Auf jedem Quader dieser Zerlegung nimmt f die Summe aller c_i bzw. d_j an, deren entsprechnende Quader Q_i bzw. R_j diesen Quader enthalten. Dann genügt es offenbar zu zeigen, dass die Maße $\mu(Q_i)$ bzw. $\mu(R_j)$ jeweils gleich der Summe der Maße aller der Quader der Zerlegung sind, die in Q_i bzw. R_j enthalten sind. Wegen dem Distributivgesetz folgt das aus dem Spezialfall mit $d = 1$. Der folgt daraus, dass die Gesamtlänge einer disjunkten Vereinigung von Intervallen gleich der Summe der Intervalllängen ist. **q.e.d.**

Wegen dieser Proposition definiert das Integral $f \mapsto \int f d\mu$ eine lineare Abbildung von dem Raum aller Treppenfunktionen nach $\mathbb{R}$.

Proposition 12.8. *Seien f und g zwei Treppenfunktionen mit $f \geq g$. Dann gilt*

$$\int f d\mu \geq \int g d\mu.$$

Beweis: Wir zerlegen die beiden Vereinigungen von Quadern der Treppenfunktion f und der Treppenfunktion g in eine gemeinsame disjunkte Vereinigung von Quadern. Auf jedem der Quader ist f größer oder gleich g. Deshalb gilt das auch für die Summen, die die entsprechenden Integrale berechnen. **q.e.d.**

12.2 Lebesgueintegrable Funktionen auf dem $\mathbb{R}^d$

Satz 12.9. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, deren Integrale $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind. Dann ist fogende Menge eine Nullmenge:*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht } \}.$$

Beweis: Sei $M > 0$ eine obere Schranke von $\left(\int (f_n - f_1) d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\int (f_n - f_1) d\mu \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist für alle $\epsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, die Menge

$$S_{n,\epsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, f_n(x) - f_1(x) \geq \frac{M}{\epsilon} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, f_n(x) \geq \frac{M}{\epsilon} + f_1(x) \right\}$$

eine monoton wachsende Folge von endlichen Vereinigungen von Quadern. Aus der Konstruktion einer gemeinsamen Zerlegung in eine disjunkte Vereinigung von Quadern im Beweis von Proposition 12.6 folgt, dass das relative Komplement eines Quaders in einem anderen Quader wieder eine disjunkte Vereinigung von Quadern ist. Dann ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} = S_{1,\epsilon} \cup (S_{2,\epsilon} \setminus S_{1,\epsilon}) \cup (S_{3,\epsilon} \setminus S_{2,\epsilon})$$

eine abzählbare Vereinigung von disjunkten Quadern. Weil $f_n - f_1$ nichtnegative Funktionen sind, ist $\frac{\epsilon}{M}(f_n - f_1)$ gößer oder gleich $\chi_{S_{n,\epsilon}}$. Also gilt für das Maß von $S_{n,\epsilon}$

$$\int \chi_{S_{n,\epsilon}} d\mu \leq \int \frac{\epsilon}{M}(f_n - f_1) d\mu = \frac{\epsilon}{M} \int (f_n - f_1) d\mu \leq \epsilon.$$

Wegen der Monotonie ist dann auch das Gesamtvolumen der abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon}$ nicht größer als ϵ. Weil die kritische Menge S gleich der Schnittmenge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht } \} = \bigcap_{\epsilon>0} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} \right)$$

ist, folgt, dass diese Menge S eine Nullmenge ist. **q.e.d.**

Die Komplemente von Nullmengen werden fast überall genannt. Also konvergiert jede monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen fast überall.

Satz 12.10. *Für jede Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass A in der Menge enthalten ist, auf der die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.*

Beweis: Sei A eine Nullmenge. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung von A mit abzählbar vielen Quadern, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als 2^{-n}. Sei nun $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Vereinigung aller dieser Quader. Dann gehört jeder Punkt von A zu unendlich vielen Quadern. Also definiert die Reihe $(\sum \chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die auf A nicht konvergiert. Die Integrale $(\sum \int \chi_{Q_n} d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt durch $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1$. **q.e.d.**

Für jede monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir jetzt den Grenzwert fast überall definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{wenn}(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt ist} \\ 0 & \text{wenn } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ nicht beschränkt ist.} \end{cases}$$

Dann wollen wir $\int f d\mu$ als den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ definieren. Damit diese Definition aber konsistent nur von der fast überall definierten Funktion f abhängt, benötigen wir noch die folgenden Lemmata.

Lemma 12.11. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen Null konvergiert. Dann ist $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis: Kein $\int f_n d\mu$ kann kleiner Null sein, weil sonst f_n auf einem Quader mit positiven Maß negativ ist und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dort nicht gegen Null konvergiert. Offenbar gibt es einen kompakten Quader Q_0 außerhalb dessen f_1 verschwindet. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_n, also der Punkte, an denen f_n nicht lokal konstant ist. Dann ist A_n abgeschlossen und in Q_0 enthalten, und als eine endliche Vereinigung von $d-1$-dimensionalen Quadern eine Nullmenge. Dann ist auch $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge. Sei B die Nullmenge aller Punkte, an denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Überdeckung $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$ durch Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als $\frac{\epsilon}{2}$. Indem wir die Kanten aller Quader um ein hinreichend kleines ϵ' verlängern, dabei aber den Mittelpunkt festhalten, erhalten wir auch eine solche Überdeckung $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$ durch offene Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als ϵ. Für jeden Punkt $x \in Q_0 \setminus (A \cup B)$ gibt es ein N_x mit $f_{N_x}(x) \leq \epsilon$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt $f_n(x) \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$. Weil alle f_{N_x} bei den Punkten von $Q_0 \setminus (A \cup B)$ lokal konstant sind, gibt es eine offene Überdeckung von offenen Quadern $(R_x)_{x\in Q_0\setminus(A\cup B)}$ von $Q_0 \setminus (A \cup B)$, und entsprechende Zahlen $(N_x)_{x\in Q_0\setminus(A\cup B)}$, so dass auf R_x für $n \geq N_x$ gilt $f_n \leq \epsilon$. Dann bilden $(R_x)_{x\in Q_0\setminus(A\cup B)}$ zusammen mit $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Q_0. Weil Q_0 kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Wenn n größer ist als die entsprechenden endlich vielen N_x's können wir $\int f_n d\mu$ abschätzen durch

$$0 \leq \int f_n d\mu \leq \epsilon(\max\{f_1(x) \mid x \in Q_0\} + \mu(Q_0)).$$

Auf den Quadern $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ schätzen wir dabei f durch $\max\{f_1(x)|x \in Q_0\}$ ab und auf den Quadern $(R_x)_{x\in Q_0\setminus(A\cup B)}$ durch ϵ. Also konvergiert $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null. **q.e.d.**

Lemma 12.12. *Seien f und g fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn fast überall $f \geq g$ gilt, dann gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Beweis: Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ erfüllen die Funktionen

$$((g_m - f_n)^+)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}(g_m - f_n + |g_m - f_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

die Voraussetzungen von dem vorangehenden Lemma. Deshalb konvergieren die entsprechenden Integrale gegen Null. Wegen $g_m - f_n \leq (g_m - f_n)^+$ folgt aus Proposition 12.8 und Lemma 12.11

$$\int g_m d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq 0 \quad \text{und damit auch} \quad \lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.\textbf{q.e.d.}$$

Aus Lemma 12.12 folgt, dass wir das Integral auf die Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen konsistent fortsetzen können. Seien nämlich $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwerte fast überall übereinstimmen, dann können wir Lemma 12.12 sowohl auf diese Folge, als auch auf die vertauschten Folgen anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Definition 12.13. *Sei $L^1(\mathbb{R}^d)$ die Menge der Äquivalenzklassen von fast überall definierten Funktionen f, für die es monoton wachsende Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int h_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass fast überall gilt*

$$f = \lim_{n\to\infty} g_n - \lim_{n\to\infty} h_n.$$

Hierbei werden zwei Funktionen miteinander identifiziert, wenn sie fast überall miteinander übereinstimmen.

Satz 12.14. *(Eigenschaften der lebesgueintegrablen Funktionen)*

(i) *$L^1(\mathbb{R}^d)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und das Integral über Treppenfunktionen induziert eine lineare Abbildung*

$$\int : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, f \to \int f d\mu$$

(ii) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ fast überall nicht negativ ist, dann gilt* $\displaystyle\int f d\mu \geq 0.$

(iii) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist auch $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit* $\displaystyle\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu.$

Beweis: **(i)** Seien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn die Grenzwerte

$$g(x) - h(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) - \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

fast überall mit den Grenzwerten von

$$\tilde{g}(x) - \tilde{h}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) - \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(x)$$

übereinstimmen, dann stimmen auch die Funktionen $g(x) + \tilde{h}(x)$ und $\tilde{g}(x) + h(x)$ fast überall überein und sind fast überall auch die Grenzwerte von

$$(g_n + \tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bzw. } (\tilde{g}_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dann folgt aus Lemma 12.12

$$\int (g+\tilde{h})d\mu = \int gd\mu + \int \tilde{h}d\mu = \int \tilde{g}d\mu + \int hd\mu = \int (\tilde{g}+h)d\mu.$$

Daraus folgt wegen der Linearität des Integrals

$$\int (g-h)d\mu = \int gd\mu - \int hd\mu = \int \tilde{g}d\mu - \int \tilde{h}d\mu = \int (\tilde{g}-\tilde{h})d\mu.$$

Deshalb definiert $\int$ eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$. Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für Folgen und der Linearität des Integrals auf Treppenfunktionen.
(ii) Wenn $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen sind, so dass fast überall $\lim_{n\to\infty} g_n - \lim_{n\to\infty} h_n$ nicht negativ ist, dann ist auch fast überall $g = \lim_{n\to\infty} g_n \geq \lim_{n\to\infty} h_n = h$. Aus Lemma 12.12 folgt dann $\int gd\mu \geq \int hd\mu$ bzw. $\int (g-h)d\mu \geq 0$.
(iii) Sowohl die Minima als auch die Maxima von zwei monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen sind wieder monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn f fast überall die Differenz $g-h$ der Grenzwerte der monoton wachsenden Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen ist, dann ist $|f|$ fast überall die Differenz $\tilde{g}-\tilde{h}$ der Grenzwerte der monoton wachsenden Folgen $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\max\{g_n, h_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\min\{g_n, h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Deshalb ist $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wegen (ii) folgt dann aus $-|f| \leq f \leq |f|$

$$-\int |f|d\mu \leq \int fd\mu \leq \int |f|d\mu \quad \text{bzw.} \quad \left|\int fd\mu\right| \leq \int |f|d\mu. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Satz 12.15. *Eine beschränkte Funktion, die außerhalb einer beschränkten Menge verschwindet und deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bildet, gehört zu $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis: Wir wählen einen Quader $Q_0 = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$, außerhalb dessen die Funktion verschwindet. Wir zerlegen für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \ldots, d$ das Intervall $[a_i, b_i]$ in die Vereinigung der Intervalle

$$[a_i, b_i] = \left[a_i, a_i + \tfrac{b_i-a_i}{2^n}\right] \cup \left(a_i + \tfrac{b_i-a_i}{2^n}, a_i + 2\tfrac{b_i-a_i}{2^n}\right] \cup \ldots \cup \left(a_i + (2^n-1)\tfrac{b_i-a_i}{2^n}, b_i\right].$$

Die kartesischen Produkte dieser Zerlegungen ergeben eine Zerlegung $\mathcal{P}_n$ von Q_0 in eine Vereinigung von 2^{nd} paarweise disjunkten Quadern. Dann sei f_n die Treppenfunktion, die auf jedem der 2^{nd} Quader gleich dem Infimum der entsprechenden Funktionswerte von f ist. Offenbar ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, deren Integrale durch $\|f\|_\infty \cdot \mu(Q)$ beschränkt sind. An allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}^d$, an denen f stetig ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x \in B(x_0, \delta)$ folgt $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$. Dann gibt es auch ein $N \in \mathbb{N}$, so dass der Durchmesser von Q

kleiner ist als $N\delta$. Für alle $n \geq N$ ist dann der Teilquader der 2^{nd} Teilquader von Q, der x_0 enthält, in $B(x_0, \delta)$ enthalten. Deshalb gilt dann

$$f(x_0) - \epsilon < f_n(x_0) \leq f(x_0).$$

Also konvergiert $(f_n(x_0))$ gegen $f(x_0)$. Weil aber die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann fast überall gegen f. **q.e.d.**

Satz 12.16:* *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\int |f| d\mu = 0$. Dann ist f fast überall gleich Null.*

Beweis:* Seien $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass fast überall gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) - \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(x).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $\quad g_n = \max\{\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\}$ und $h_n = \min\{\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\}$.

Dann gilt fast überall $\quad |f(x)| = \lim_{n\to\infty} g_n(x) - \lim_{n\to\infty} h_n(x).$

Wenn $\int |f| d\mu = 0$ gilt also auch $\quad \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu.$

Für $\epsilon, \delta > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\quad \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu - \int h_m d\mu \leq \epsilon\delta.$

für alle $m \geq N$ gilt. Wir definieren g als den fast überall definierten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n$. Weil $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, ist die Menge

$\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| > \delta\}$ in den Mengen

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - h_m(x) > \delta\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_n(x) - h_m(x) > \delta \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

enthalten. Sei also $\quad A_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_1(x) - h_m(x) > \delta\}$ und für $n = 2, \ldots$

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_n(x) - h_m(x) > \delta \text{ und } g_{n-1}(x) - h_m(x) \leq \delta\}.$$ Dann ist

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - h_m(x) > \delta\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} \int (g_n - h_m) d\mu \leq \epsilon.$$

Also ist für alle $\delta > 0$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - \lim_{m\to\infty} h_m(x) > \delta\}$ eine Nullmenge. Weil die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, folgt, dass die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - \lim_{m\to\infty} h_m(x) > \frac{1}{n}\}$ eine Nullmenge ist. Also ist fast überall $g(x) \leq h(x) = \lim_{m\to\infty} h_m(x)$. Aufgrund der Konstruktion gilt aber fast überall $g(x) \geq h(x)$. Also ist fast überall $|f(x)| = g(x) - h(x) = 0$. **q.e.d.**

12.3 Das Riemann- und das Lebesgueintegral

In diesem Abschnitt wollen wir das Riemannintegral mit dem Lebesgueintegral in Beziehung setzen. Für $d > 1$ sind die riemannintegrablen Funktionen f auf einem endlichen Quader Q_0 dadurch charakterisiert, dass das Unterintegral, also das Supremum aller Integrale von Treppenfunktionen nicht größer als f, mit dem Oberintegral, also dem Infimum aller Integrale von Treppenfunktionen nicht kleiner als f, übereinstimmt. Zunächst wollen wir die riemannintegrablen Funktionen charakterisieren.

Satz 12.17. *(Lebesguekriterium) Eine beschränkte Funktion auf einem endlichen Quader $Q_0 = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ ist genau dann riemannintegrabel, wenn ihre Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. Insbesondere sind alle riemannintegrablen Funktionen auch lebesgueintegrabel und die beiden Integrale stimmen überein.*

Beweis: Wir zerlegen für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \ldots, d$ das Intervall $[a_i, b_i]$ in die Vereinigung der Intervalle

$$[a_i, b_i] = \left[a_i, a_i + \tfrac{b_i - a_i}{2^n}\right] \cup \left(a_i + \tfrac{b_i - a_i}{2^n}, a_i + 2\tfrac{b_i - a_i}{2^n}\right] \cup \ldots \cup \left(a_i + (2^n - 1)\tfrac{b_i - a_i}{2^n}, b_i\right].$$

Das entspricht für $d = 1$ der Partition $p_n \in \mathcal{P}[a, b]$ aus dem Beweis von Korollar 8.11. Die kartesischen Produkte dieser Zerlegungen ergeben eine Zerlegung $\mathcal{P}_n$ von Q_0 in eine Vereinigung von 2^{nd} paarweise disjunkte Quadern. Für alle $f \in B_{\mathbb{R}}(Q_0)$ seien

$$f_n(x) = \inf \{f(y) \mid y \in Q \text{ mit } Q \in \mathcal{P}_n \text{ und } x \in Q\}$$
$$F_n(x) = \sup \{f(y) \mid y \in Q \text{ mit } Q \in \mathcal{P}_n \text{ und } x \in Q\}$$

Es sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende bzw. monoton fallende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn die Folgen $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\int F_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, dann ist f riemannintegrabel.

Wenn die Menge $\{x \in Q_0 \mid \lim_{n\to\infty} F_n(x) > \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$ eine Nullmenge ist, folgt aus Lemma 12.12 $\lim_{n\to\infty} \int F_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. Umgekehrt folgt aus dieser Gleicheit, dass für alle $\epsilon > 0$ die Gesamtvolumen der Mengen

$$S_{n,\epsilon} = \{x \in Q_0 \mid F_n(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$$

im Grenzwert $n \to \infty$ nach Null konvergieren. Also ist dann die Schnittmenge

$$S_\epsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} = \left\{x \in Q_0 \mid \lim_{n\to\infty} F_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq \epsilon\right\}$$

aller dieser Mengen eine Nullmenge. Dann ist auch die Menge

$$\{x \in Q_0 \mid \lim_{n\to\infty} F_n(x) > \lim_{n\to\infty} f_n(x)\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_{\frac{1}{m}}$$

eine Nullmenge. Deshalb gilt genau dann $\lim_{n\to\infty}\int F_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu$, wenn die Menge $\{x \in Q_0 \mid \lim_{n\to\infty} F_n(x) > \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$ eine Nullmenge ist.

Wenn f bei x stetig ist, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass alle $x' \in B(x,\delta)\cap Q_0$ auch $|f(x') - f(x)| < \epsilon/2$ erfüllen. Dann gilt für $n > \frac{\|b-a\|}{\delta}$

$$|F_n(x) - f_n(x)| \leq |F_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Also ist f riemannintegrabel, wenn die Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge bilden.

Wenn umgekehrt f riemannintegrabel ist, dann folgt für $d = 1$ aus dem Kriterium von Riemann, dass die Integrale $(\int F_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die gleiche Zahl konvergieren. Für $d > 1$ gibt es zwei Folgen von Treppenfunktionen nicht kleiner bzw. nicht größer als f, deren Integrale gegen die gleiche Zahl konvergieren. Die Minima bzw. Maxima der jeweils ersten n Folgenglieder dieser beiden Folgen definieren eine monoton fallende $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, deren Integrale gegen die gleiche Zahl konvergieren. Die Differenz $(F_n - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Folge von nichtnegativen Treppenfunkltionen, deren Integrale gegen Null konvergieren. Wegen Satz 12.16 (siehe auch Korollar 12.23) konvergieren dann beide Folgen fast überall gegen die gleiche Funktion f. Die Unstetigkeitsstellen aller dieser Treppenfunktionen der beiden Folgen sind abzählbare Vereinigungen von Nullmengen und damit Nullmengen. Von jedem Punkt im Komplement dieser Nullmenge sind alle Quader der Treppenfunktionen, die den Punkt enthalten, eine Umgebung. Wenn f bei x im Komplement dieser Nullmenge unstetig ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ gilt:

$$\sup\{f(x') \mid x' \in B(x,\delta)\cap Q_0\} - \inf\{f(x') \mid x' \in B(x,\delta)\cap Q_0\} \geq \epsilon.$$

Deshalb konvergieren diese beiden Folgen nur dann fast überall gegen die gleiche Funktion, wenn die Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge bilden. **q.e.d.**

Beispiel 12.18. **(i)** *Sei* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Abzählung aller rationalen Zahlen in* $(0,1)$. *Dann ist für* $0 < \epsilon < 1$ *das Komplement der Teilmenge*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\big((r_n - 2^{-(n+1)}\epsilon, r_n + 2^{-(n+1)}\epsilon)\cap[0,1]\big)$$

von $[0,1]$ *keine Nullmenge, weil alle offenen Intervalle*

$$I_n = \big(r_n - 2^{-(n+1)}\epsilon, r_n + 2^{-(n+1)}\epsilon\big)\cap[0,1]$$

höchstens das Maß $\epsilon 2^{-n}$ *haben und* $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon 2^{-n} = \epsilon < 1$. *Also ist die Folge*

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(1-\chi_{I_k})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die gegen eine lebesgueintegrable Funktion konvergiert. Weil die rationalen Zahlen dicht in $[0,1]$ *liegen, ist diese Funktion an allen Punkten im Komplement der offenen Menge* $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ *unstetig. Also ist der Grenzwert von* $\left(\prod_{k=1}^{n}(1-\chi_{I_k})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine lebesgueintegrable Funktion, die nicht riemannintegrabel ist. Diese offene Menge ist also ein Beispiel für eine offene Menge, deren Rand positives Lebesguemaß hat, also eine charakteristische Funktion mit nicht verschwindendem Lebesgueintegral.*

(ii) *Sei* $p \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ *und* χ *die Funktion* $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \chi(x)$ *mit*

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 \text{ wenn es eine ganze Zahl } q \in \mathbb{Z} \text{ gibt mit } x - q \cdot p \in (1,2) \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann definiert die Folge $\left(\prod_{k=1}^{n} \chi(p^k \cdot x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen auf* $[0,1]$ *mit beschränkten Integralen. Auf* $[0,1]$ *ist die Funktion also lebesgueintegrabel. Sie hat aber offenbar Unstetigkeitsstellen bei allen Zahlen, deren p-adische Bruchdarstellung aus endlich vielen Ziffern aus* $\{0,2,\ldots,p-1\}$ *besteht, und am Ende eine* 1 *oder* 2 *hat. Der Abschluss dieser Menge besteht aus allen Zahlen aus den Komplementen der Vereinigung von den offenen Mengen mit p-adischen Büchen*

$$(0.z_1 \ldots z_n 1, \quad 0.z_1 \ldots z_n 2) \qquad\qquad z_1, \ldots, z_n \in \{0,2,\ldots,p-1\}.$$

Das Maß dieser disjunkten Vereinigung von offenen Menge ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n = 1.$$

Also ist das Komplement dieser offenen Menge eine Nullmenge. Diese Menge ist aber gleichmächtig zu der Menge aller Folgen mit Werten in $\{0,2,\ldots,p-1\}$*. Wenn* $p > 2$ *ist diese Menge nicht abzählbar. Aber der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{\infty} \chi(p^k x)\right)$ *ist riemannintegrabel und lebesgueintegrabel.*

12.4 Der Satz von Fubini

Für jeden Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_d \times I_{d+1} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ und jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \chi_Q(x,y)$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}$. Wenn wir diese Funktion integrieren erhalten wir eine Treppenfunktion auf dem $\mathbb{R}^d$:

$$\int \chi_Q(x,y)d\mu(y) = \begin{cases} \text{Länge von } I_{d+1} & \text{wenn } x \in I_1 \times \ldots \times I_d, \\ 0 & \text{wenn } x \notin I_1 \times \ldots \times I_d. \end{cases}$$

Also ist

$$\int \left(\int \chi_Q(x,y)d\mu(y)\right) d\mu(x) = \mu(Q).$$

Wegen der Linearität des Integrals definiert die Abbildung $\int d\mu(y)$ also eine lineare Abbildung von den Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$. Und für jede Treppenfunktion f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\int f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass diese Abbildung eine Abbildung

$$\int d\mu(y) : L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}^d)$$

induziert, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ gilt

$$\int \left(\int f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Wenn $f \geq g$ zwei Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ sind, dann erfüllen für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die entsprechenden Treppenfunktionen $f_x : y \to f(x,y)$ bzw. $g_x : y \to g(x,y)$ auch $f_x \geq g_x$. Wegen Proposition 12.8 gilt für die Integrale auch

$$\int f(x,y) d\mu(y) \geq \int g(x,y) d\mu(y).$$

Also definiert $\int d\mu(y)$ eine lineare monotone Abbildung von den Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$. Damit diese Abbildungen eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$ induziert, müssen zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Treppenfunktionen, die fast überall übereinstimmen, auch auf zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Treppenfunktionen abgebildet werden, die fast überall übereinstimmen.

Lemma 12.19. *Sei $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ eine Nullmenge. Dann ist fast überall in $x \in \mathbb{R}^d$, die Menge $S_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in S\}$ eine Nullmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis: Wegen Satz 12.10 gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ mit beschränkten Integralen, die auf S divergiert. Dann sind auch die entsprechenden Integrale $(\int f_n d\mu(y))_{n \in \mathbb{N}}$ über $\mathbb{R}$ monoton wachsende Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen auf $\mathbb{R}^d$. Wegen Satz 12.9 konvergieren die entsprechenden Integrale dann fast überall auf $x \in \mathbb{R}^d$. Für alle $x \in \mathbb{R}^d$, für die die Integrale konvergieren, sind die entsprechenden Einschränkungen auf $\{x\} \times \mathbb{R}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit beschränkten Integralen. Wegen Satz 12.9 sind also für alle $x \in \mathbb{R}^d$, so dass die Integrale über $\mathbb{R}$ konvergieren, die Mengen S_x Nullmengen. **q.e.d.**

Proposition 12.20. *Die Integration über $\mathbb{R}$ induziert eine lineare monotone Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ gilt*

$$\int \left(\int f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Beweis: Weil die Integration über $\mathbb{R}$ eine monotone lineare Abbildung von den Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$ definiert und wegen Lemma 12.19, induziert sie eine Abbildung von den Äquivalenzklassen von den Grenzwerten von monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die entsprechenden Äquivalenzklassen auf $\mathbb{R}^d$. Wegen der Konstruktion des Lebesgueintegrals induziert sie also auch eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$. Weil für alle Treppenfunktionen f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\int f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

gilt das auch für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$. **q.e.d.**

Die Argumente zeigen die analoge Aussage auch für die vertauschten Faktoren $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Wenn wir die mehrfach anwenden erhalten wir also

Korollar 12.21. *(Satz von Fubini) Für alle Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'})$ gilt*

$$\int \left(\int f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Mit dem Satz von Fubini und dem Lebesguekriterium können wir jetzt auch Integrale auf dem $\mathbb{R}^d$ ausrechnen. Als erstes können wir für fast alle $(x_2, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^d$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1$ ausrechnen. Dabei können wir die Methoden der eindimensionalen Integration, wie wir sie bei dem Riemannintegral kennen, benutzen. Dann integrieren wir genauso über $dx_2, \ldots, dx_d$ bis wir schließlich haben

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_d.$$

Wir können die Reihenfolge dieser eindimensionalen Integrale beliebig vertauschen.

12.5 Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt werden wir drei Aussagen darüber beweisen, wann Grenzwertbildungen mit der Integration vertauschen. Als erstes werden wir die Konvergenz von monotonen Folgen mit beschränkten Integralen beweisen.

Satz 12.22. *(Satz der monotonen Konvergenz von Beppo Levi) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion f in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Durch Übergang zu $(\pm f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir annehmen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen mit beschränkten Integralen ist. Für alle $n\in\mathbb{N}$ seinen $(\tilde{g}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass fast überall gilt

$$f_n = \lim_{m\to\infty}\tilde{g}_{nm} - \lim_{m\to\infty}\tilde{h}_{nm}.$$

Die entsprechenden Folgen der Integrale $(\int \tilde{g}_{nm}d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\int \tilde{h}_{nm}d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Für alle $n\in\mathbb{N}$ sei $M(n)\in\mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $m,m'\geq M(n)$ gilt

$$\left|\int \tilde{h}_{nm}d\mu - \int \tilde{h}_{nm'}d\mu\right| \leq 2^{-n}.$$

Für alle $n\in\mathbb{N}$ seien h_{nm} und g_{nm} induktiv definiert durch

$$h_{nm} = \begin{cases} h_{n-1m} & \text{für } m < M(n) \\ \tilde{h}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m} & \text{für } m \geq M(n) \end{cases} \quad \text{und} \quad g_{nm} = \tilde{g}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m}$$

mit $h_{0m}=0$ für alle $m\in\mathbb{N}$. Weil für alle $n\in\mathbb{N}$ die Folge $(\tilde{h}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, bestehen die Folgen $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ induktiv für alle $n\in\mathbb{N}$ nur aus nicht negativen Funktionen. Weil auch die Folgen $(\tilde{g}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, sind für alle $n\in\mathbb{N}$ auch die Folgen $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(h_{nm})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Aufgrund der Wahl von $M(n)$ sind die Integrale $(\int h_{nm}d\mu - \int h_{n-1m}d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch 2^{-n}. Also sind alle Integrale $(\int h_{nm}d\mu)_{n,m\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch 1. Weil $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind, sind auch die Integrale $(\int g_{nm}d\mu)_{n,m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Für alle $n\in\mathbb{N}$ bzw. $m\in\mathbb{N}$ seien

$$g_n = \lim_{m\to\infty} g_{nm} \quad \text{und} \quad h_n = \lim_{m\to\infty} h_{nm},$$
$$\tilde{g}_m = \max\{g_{1m},\ldots,g_{mm}\} \quad \text{und} \quad \tilde{h}_m = \max\{h_{1m},\ldots,h_{mm}\}.$$

Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ auch fast überall $f_n = g_n - h_n$. Außerdem ist die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Grund der Definition von h_{nm} fast überall monoton wachsend und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch. Offenbar sind $(\tilde{g}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Seien $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ die entsprechenden Grenzwerte. Für $n\leq m$ gilt

$$g_{nm} \leq \tilde{g}_m \quad \text{und} \quad h_{nm} \leq \tilde{h}_m.$$

Also gilt für die entsprechenden Grenzwerte $m \to \infty$ fast überall

$$g_n \leq \tilde{g} \quad \text{und} \quad h_n \leq \tilde{h}.$$

Weil $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall monoton wachsende Folgen sind, gilt fast überall

$$\tilde{g}_m \leq \max\{g_1, \ldots, g_m\} = g_m \quad \text{und} \qquad \tilde{h}_m \leq \max\{h_1, \ldots, h_m\} = h_m.$$

Also gilt fast überall $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$ bzw. $f = \tilde{g} - \tilde{h} = g - h$. Aus Lemma 12.12 folgt

$$\int f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \left(\tilde{g}_m - \tilde{h}_m\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (g_n - h_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 12.23. *(Norm $\|\cdot\|_1$) Auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ definiert*

$$\|\cdot\|_1 : \quad L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_1 = \int |f| d\mu \qquad \textit{eine Norm.}$$

Beweis: Die Dreiecksungleichung und die Eigenschaft

$$\|\lambda f\|_1 = \int |\lambda| \cdot |f| d\mu = |\lambda| \cdot \int |f| d\mu = |\lambda| \|f\|_1$$

folgt aus der Monotonie und der Linearität des Lebesgueintegrals. Zu zeigen bleibt noch, dass aus $\|f\|_1 = 0$ folgt $f = 0$ fast überall. Sei also $\int |f| d\mu = 0$. Dann konvergiert wegen dem Satz der monotonen Konvergenz die Folge $(n|f|)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall. Also gilt auch fast überall $|f| = 0$. **q.e.d.**

Korollar 12.24. *(Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass fast überall gilt $|f_n| \leq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergiert, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\int f d\mu$.*

Beweis: Seien $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$g_{nm} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\} \quad \text{und} \quad h_{nm} = \max\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind wegen den Eigenschaften der lebesgueintegrablen Funktionen $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Folgen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit durch $\int k d\mu$ beschränkten Integralen, und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Funktionen mit durch $\int k d\mu$ beschränkten Integralen. Wegen dem Satz der monotonen Konvergenz konvergieren diese Folgen fast überall gegen Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Fast überall sind

$$g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\} \quad \text{und} \quad h_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$$

monotone Folgen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Also konvergieren $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f. Dann gilt auch

$$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu \leq \int h_n d\mu \quad \text{und} \quad \int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \quad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 12.25. *(Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^d)$, Satz von Riesz-Fischer) $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist mit $\|\cdot\|_1$ ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(f_n)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_1 \leq 2^{-m}$. Die Reihe $\left(\sum_{m=1}^n \left|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt dann die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz. Also konvergiert sie fast überall gegen eine Funktion $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann konvergiert auch die Folge $(f_{n_m} - f_{n_1})_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall und erfüllt mit $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ die Voraussetzungen von Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz. Dann konvergiert auch die Teilfolge gegen einen Grenzwert $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, konvergiert $(\|f_n - f\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null, und damit auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f. **q.e.d.**

Satz 12.26. *(Fatou's Lemma) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ von fast überall nicht negativen Funktionen, die fast überall gegen f konvergieren. Wenn $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}_0} \int f_{n+m} d\mu.$$

Beweis: Sei wieder $g_{nm} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\}$. Dann erfüllen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folgen $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz. Also konvergieren für alle $n \in \mathbb{N}$ diese Folgen gegen $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$. Die Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllen wieder die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz und konvergieren fast überall gegen f. Also gilt auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und fast überall $f_{n+m} \geq g_n$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Es folgt $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu$ und $\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}_0} \int f_{n+m} d\mu$. **q.e.d.**

12.6 Messbare Mengen und Maße

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wann wir eine lebesgueintegrable Funktion über eine Teilmenge integrieren können. Das führt dann zu einer allgemeineren Definition vom Volumen von sogenannten messbaren Mengen. Dieses Volumen heisst Maß.

Definition 12.27. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heisst messbar, wenn für jede nicht negative Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ das Produkt $f \cdot \chi_A$ mit der charakteristischen Funktion von A lebesgueintegrabel ist.*

Für messbare Mengen A bilden die Produkte von lebesgueintegrablen Funktionen mit der charakteristischen Funktion χ_A von A den Teilraum von $L^1(\mathbb{R}^d)$ aller lebesgueintegrablen Funktionen, die außerhalb von A verschwinden. Als diesen Teilraum definieren wird den Raum $L^1(A)$ aller lebesgueintegrablen Funktionen auf A.

Definition 12.28. *Für messbare Teilmengen A von $\mathbb{R}^d$ sei $L^1(A) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ der Teilraum aller lebesgueintegrablen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$, die außerhalb von A verschwinden.*

Satz 12.29. **(i)** *Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.*

(ii) *Die Schnittmenge von abzählbar vielen messbaren Mengen ist messbar.*

(iii) *Jede offene Menge ist messbar.*

Beweis: **(i)** Weil die charakteristische Funktion des Komplements gerade 1 minus der charakteristischen Funktion ist, folgt (i) daraus, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$ ein Vektorraum ist.
(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Mengen und f eine nicht negative Funktion in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Folge $(f\prod_{k=1}^n \chi_{A_k})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Wegen dem Satz der monotonen Konvergenz konvergiert sie in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Der Grenzwert stimmt fast überall mit $f\chi_A$ überein, wobei $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$.
(iii) Jeder Quader ist messbar, weil die Multiplikation einer Stufenfunktion mit der charakteristischen Funktion eines Quaders eine Stufenfunktion ergibt. Die Menge aller offenen Quader mit rationalen Koordinaten ist abzählbar. Weil jede offene Menge U gleich der Vereinigung aller der offenen Quader ist, deren Koordinaten in $\mathbb{Q}^d$ liegen, und die in U liegen, folgt (iii) aus (i) und (ii) und den de Morganschen Regeln. **q.e.d.**

Definition 12.30. *Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X heisst σ–Algebra, wenn diese Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ unter Komplementbildung und dem Schnitt von abzählbar vielen Elementen von $\mathcal{B}$ abgeschlossen ist. Wenn X ein metrischer Raum ist, dann heissen die Elemente der kleinsten σ–Algebra, die alle offenen (und abgeschlossenen) Mengen enthält, Borelmengen.*

Definition 12.31. *Sei $\mathcal{B}$ eine σ–Algebra auf der Menge X. Dann heisst $\mu : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_0^+$ Maß, wenn für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{B}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

Satz 12.32. *(Lebesguemaß) Seien $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borelmengen von $\mathbb{R}^d$. Dann definiert*

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \bar{\mathbb{R}}_0^+, \quad A \mapsto \lim_{n\to\infty} \int \chi_{Q_n}\chi_A d\mu \quad \text{mit} \quad Q_n = (-n,n)^d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ein Maß auf den Borelmengen des $\mathbb{R}^d$, also ein Borelmaß. Es heißt Lebesguemaß.

Beweis: Wegen Satz 12.29 sind alle Borelmengen messbar. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Borelmengen. Für jede nichtnegative Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist

$$(gf_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad f_n = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \chi_{A_k}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

eine monoton wachsende Folge von Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Also konvergiert die Folge $(gf_n)_{n\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion gf in $L^1(\mathbb{R}^d)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int gf_n d\mu = \int gf d\mu.$$

Wenn wir diese Aussage auf die Folge $(\chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ der charakteristischen Funktionen von den Quadern Q_n anwenden, dann konvergiert die entsprechende Folge $(\chi_{Q_n}f)_{n\mathbb{N}}$ entweder gegen eine lebesgueintegrable Funktion, und $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ ist endlich, oder das Maß der disjunkten Vereinigung der Borelmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist undendlich. In beiden Fällen folgt die σ–Additivität aus den Rechenregeln für Folgen. **q.e.d.**

Definition 12.33. *Eine Äquivalenzklasse von fast überall definierten rellen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ heisst messbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die fast überall gegen einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse konvergiert.*

Satz 12.34. **(i)** *Die messbaren Funktionen bilden mit der punktweisen Addition und Multiplikation und der Skalarmultiplikation eine Algebra, die $L^1(\mathbb{R}^d)$ enthält.*

(ii) *Wenn f und g messbar sind, dann auch $|f|$, $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$. Ist außerdem fast überall f ungleich Null, dann ist auch $\frac{1}{f}$ messbar.*

(iii) *Der Grenzwert einer fast überall konvergenten Folge von messbaren Funktionen ist messbar.*

(iv) *Die Äquivalenzklassen von stetigen Funktionen sind messbar.*

(v) *Eine messbare Funktion ist genau dann lebesgueintegrabel, wenn ihr Betrag durch eine lebesgueintegrable Funktion beschränkt ist.*

(vi) *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann messbar, wenn χ_A messbar ist.*

Beweis (i): Die Treppenfunktionen bilden eine Algebra, und damit auch die messbaren Funktionen. Alle lebesgueintegrablen Funktionen sind nach unserer Definition messbar.
(ii): Der Betrag, das Maximum und das Minimum von Treppenfunktionen sind wieder Treppenfunktionen. Wenn eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen fast überall gegen eine nicht verschwindende Funktion f konvergiert, dann konvergiert die Folge

$$(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad g_n:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto g_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{f_n(x)} & \text{wenn } f_n(x)\neq 0\\ 0 & \text{wenn } f_n(x)=0\end{cases}$$

von Treppenfunktionen fast überall gegen $\frac{1}{f}$.
(iii): Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen, die fast überall gegen f konvergiert. Sei h folgende positive lebesgueintegrable Hilfsfunktion auf $\mathbb{R}^d$:

$$h: x\mapsto h(x)=\frac{2^{-n-d}}{n^d-(n-1)^d} \text{ mit } n\in\mathbb{N} \text{ so dass } x\in(-n,n)^d\setminus(1-n,n-1)^d.$$

Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen

$$g_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_n(x) = \frac{h(x)f_n(x)}{h(x) + |f_n(x)|} < h(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert fast überall gegen $g = \frac{h\cdot f}{h+|f|}$. Wegen Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz sind alle $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und dann auch g lebesgueintegrabel und damit auch messbar. Dann ist wegen (i) und (ii) auch folgende Funktion messbar:

$$\frac{hg}{h-|g|} = \frac{h\frac{hf}{h+|f|}}{h - \frac{h|f|}{h+|f|}} = \frac{h^2 f}{h^2 + h|f| - h|f|} = f.$$

(iv): Für jede stetige Funktion f und jeden Quader Q ist wegen Satz 12.15 das Produkt von f mit der charakteristischen Funktion von Q lebesgueintegrabel. Die Folge $(f\chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ der Produkte mit den charakteritischen Funktionen der Quader $Q_n = (-n,n)^d$ konvergiert punktweise gegen f. Also folgt (iv) aus (i) und (iii).
(v): Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert und $|f| \le k$ für ein $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann konvergiert auch $(\max\{-k, \min\{k, f_n\}\})_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f. Aus Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz folgt (v).
(iv): Für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ konvergieren die Produkte $(\chi_A\chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ der charakteristischen Funktionen mit denen der Quader $Q_n = (-n,n)^d$ punktweise gegen χ_A. Wegen (iii) ist also χ_A messbar. Die Umkehrung folgt aus (i) und (v). **q.e.d.**

Satz 12.35. (i) *Eine Äquivalenzklasse f von fast überall definierten reellen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ ist genau dann messbar, wenn*

(ii) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \le a\}$ messbar.*

(iii) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \ge a\}$ messbar.*

(iv) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a\}$ messbar.*

(v) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > a\}$ messbar.*

(vi) *Für alle $k \ge 0$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegt die Funktion $\max\{-k, \min\{k, f\}\}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis (i)⇒(ii) folgt aus Satz 12.34, weil die Folge $n\,(\max(a + 1/n, f) - \max(a, f))$ gegen die charakteristische Funktion der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \le a\}$ konvergiert.
(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇔(v): Wegen Satz 12.29 sind (ii) und (iv) bzw. (iii) und (v) äquivalent. Wegen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \le a - \frac{1}{n}\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \le a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\}$ sind auch (ii) und (iv) äquivalent.
(v)⇒(vi): Wenn eine Funktion f die äquivalenten Bedingungen (ii)–(v) erfüllt, dann sind folgende Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar:

$$f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n^2} \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^d \mid f(x) \ge \frac{l}{n^2}\right\}} - \chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^d \mid f(x) \le -\frac{l}{n^2}\right\}}.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f. Aus Satz 12.34 (iii) und (v) folgt (vi).
(vi)⇒(i): Sei Q_n für alle $n \in \mathbb{N}$ der Quader $Q_n = (-n,n)^d$. Wegen (vi) besteht die Folge $(\max\{-n\chi_{Q_n}, \min\{n\chi_{Q_n}, f\}\})_{n\in\mathbb{N}}$ aus lebsgueintegrablen Funktionen und konvergiert punktweise gegen f. Also folgt (i) aus Satz 12.34 (i) und (iii). **q.e.d.**

12.7 Die Räume $L^p(\mathbb{R}^d)$

Eine komplexwertige Funktion ist genau dann lebesgueintegrabel bzw. messbar, wenn sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil lebesgueintegrabel bzw. messbar sind. Eine messbare komplexe Funktion ist offenbar genau dann lebesgueintegrabel, wenn der Absolutbetrag lebesgueintegrabel ist. Aus Satz 12.35 folgt, dass für jede messbare Funktion f und $p \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $|f|^p$ messbar ist.

Definition 12.36. *Für alle $1 < p < \infty$ sei $L^p(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von fast überall definierten messbaren Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{K}$, für die die Funktion $|f|^p$ lebesgueintegrabel ist. Der Raum $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{K}$.*

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $p = 1$ stimmt diese Definition mit Definition 12.13 überein.

Satz 12.37. *Für alle $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(\mathbb{R}^d)$ zusammen mit der Abbildung*

$$\|\cdot\|: \quad L^p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \le p < \infty \\ \inf\{C \in \mathbb{R}_0^+ \mid |f| \le C \ a.e.\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

ein normierter Vektorraum. Für $1 \le p,q,r \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ gilt $fg \in L^r(\mathbb{R}^d)$ und die Höldersche Ungleichung: $\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$.

Die Dreiecksungleichung der Norm $\|\cdot\|_p$ wird wieder Minkowski–Ungleichung genannt: für alle $f,g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt $f+g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.
Beweis: Wir beweisen zuerst die Höldersche Ungleichung. Indem wir zu den Funktionen $|f|^r$ und $|g|^r$ übergehen anstatt der Funktionen f und g, und den Exponenten 1, $\frac{r}{p}$ und $\frac{r}{q}$ anstatt r, p und q, genügt es den Fall $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ für nicht–negative reelle Funktionen zu betrachten. Es gilt nämlich $\|f\|_p^r = \||f|^r\|_{\frac{p}{r}}$ bzw. $\|g\|_q^r = \||g|^r\|_{\frac{q}{r}}$. Für $p = 1,\ q = \infty$ bzw. $p = \infty,\ q = 1$ folgt die Höldersche Ungleichung aus den Eigenschaften der lebesguesintegrablen Funktionen. Für $f = 0$ oder $g = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $f \ne 0$, $g \ne 0$ und $1 < p,q < \infty$ mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Die Youngsche Ungleichung ergibt für die Funktionen $\frac{|f|}{\|f\|_p}$ und $\frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q} \le \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \text{ fast überall.}$$

Wegen $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ ist die rechte Seite lebesguesintegrabel und das Integral gleich 1. Also ist auch die linke Seite lebesguesintegrabel und das Integral kleiner oder gleich 1. Daraus folgt $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Wegen Korollar 12.23 erfüllen die Abbildungen $f \mapsto \|f\|_p$ die Positivität. Die Linearität ist offensichtlich. Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Dreieckungleichung schon gezeigt. Sei also $1 < p < \infty$ und $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Offenbar gilt für $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ fast überall $|f+g|^p \leq 2^p \max^p\{|f|, |g|\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$. Also liegt $f+g$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Die Höldersche Ungleichung ergibt für die Funktionen $|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}$ mit $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Leftrightarrow (p-1)q = p$

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f \cdot |f+g|^{p-1}\|_1 + \|g \cdot |f+g|^{p-1}\|_1 \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}.$$

Daraus folgt die Minkowski Ungleichung. **q.e.d.**

Satz 12.38. *(Satz von Riesz Fischer) Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\mathbb{R}^d)$ ein Banachraum.*

Beweis: Für $p = \infty$ folgt die Aussage aus den Sätzen 9.44 (iii) und 12.34 (iii). Sei $1 \leq p < \infty$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Sei $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_p \leq 2^{-m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die monoton wachsende Folge $g_m = |f_{n_1}| + \sum_{l=1}^m |f_{n_{l+1}} - f_{n_l}|$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt wegen der Minkowskiungleichung $\|g_m\|_p \leq 1 + \|f_{n_1}\|_p$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen dem Satz der monotonen Konvergenz, konvergiert $(g_m^p)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wegen dem Monotonieprinzip konvergiert $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine messbare Funktion g. Dann konvergiert $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine messbare Funktionen f. Wegen Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz ist $|f|^p$ lebesgueintegrabel und damit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Außerdem gilt fast überall $|f - f_{n_{m+1}}| \leq |g - g_m|$ und $\|g - g_m\|_p \leq 2^{-m}$. Also konvergiert $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ gegen f. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist konvergiert sogar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ gegen f. **q.e.d.**

Definition 12.39. *Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ und alle $1 \leq p \leq \infty$ sei $L^p(A)$ der Unterraum von $L^p(\mathbb{R}^d)$ aller Äquivalenzklassen von Funktionen, die außerhalb von A verschwinden.*

Für messbare Mengen A und $1 \leq p \leq \infty$ ist offenbar $L^p(A) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ abgeschlossen.

Korollar 12.40. *Für A messbar und $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(A)$ ein Banachraum.* **q.e.d.**

Satz 12.41. *Für alle messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und alle $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist folgende Abbildung eine Isometrie:*

$$j : L^q(A) \to \mathcal{L}(L^p(A), \mathbb{K}), \quad g \mapsto j(g) \textit{ mit } \quad j(g) : L^p(A) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int\limits_A fgd\mu.$$

Beweis: Für messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist j wegen der Hölderschen Ungleichung lipschitzstetig mit $L = 1$. Wir definieren f so, dass im Beweis der Hölderschen Ungleichung die Youngsche Ungleichung eine Gleichheit wird. Sei also

$$f = \frac{|g|^{\frac{q}{p}+1}}{g} = \frac{|g|^{q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}}{g} = \frac{|g|^q}{g} \qquad \text{mit } f(x) = 0 \text{ für } g(x) = 0.$$

Für $1 \leq q < \infty$ ist f messbar und liegt in $L^p(A)$. Es gilt $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$ und $\|fg\|_1 = \|g\|_q^q$. Daraus folgt

$$\|g\|_q = \|g\|_q^{q-q\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \frac{\|gf\|_1}{\|f\|_p} \leq \|j(g)\| \leq \|g\|_q \text{ für alle } g \in L^q(A) \setminus \{0\}.$$

Also ist für $1 < p \leq \infty$ die Abbildung j eine Isometrie. Für $p = 1$, $q = \infty$ und jedes $\epsilon > 0$ ist $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \epsilon\}$ keine Nullmenge und messbar. Auf allen Funktionen $f \in L^1(A)$, die außerhalb dieser Menge verschwinden, nimmt $|j(g)|$ größere Werte als $(\|g\|_\infty - \epsilon)\|f\|_1$ an. Also gilt für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $g \in L^\infty(A) \setminus \{0\}$ auch $\|g\|_\infty - \epsilon \leq \|j(g)\| \leq \|g\|_\infty$. Dann ist auch für $p = 1$ j eine Isometrie. **q.e.d.**

12.8 Jacobi's Transformation von Maßen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich die Integration unter Koordinatentransformationen verhält. Wir verallgemeinern also die Substitutionsregel auf $\mathbb{R}^d$. Wir benutzen in diesem Abschnitt auf $\mathbb{R}^d$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ aus Definition 9.9. Dann sind nämlich die offenen Bälle genau die offenen Quader mit gleichen Kantenlängen.

Lemma 12.42. **(i)** *Die Multiplikation mit einer beschränkten messbaren Funktion f ist eine lineare Abbildung in $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^d))$, deren Norm beschränkt ist durch $\|f\|_\infty$.*

(ii) *Sei $\Phi : U \to O$ eine bijektive lipschitzstetige Abbildung zwischen den offenen Mengen $U, O \subset \mathbb{R}^d$ mit Lipschitzkonstante L. Dann ist $f \mapsto f \circ \Phi^{-1}$ eine lineare stetige Abbildung $L^1(U) \to L^1(O)$, deren Norm beschränkt ist durch L^d.*

(iii) *Sei $\Phi : U \to O$ eine bijektive Abbildung zwischen offenen Mengen $U, O \subset \mathbb{R}^d$ mit $\|\Phi(x) - \Phi(y) - (x - y)\|_\infty \leq \epsilon\|x - y\|_\infty$ für $x, y \in U$ und ein $\epsilon \in (0, 1)$. Dann gilt*

$$\left| \int_U f \circ \Phi d\mu - \int_O f d\mu \right| \leq ((1-\epsilon)^{-d} - 1)\|f\|_1 \qquad \textit{für alle } f \in L^1(O).$$

Beweis: **(i)** folgt aus der Hölderschen Ungleichung in Satz 12.37: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.
(ii) Im Beweis von Satz 12.29 (iii) haben wir gesehen, dass die Schnittmenge eines offenen Quaders $Q \subset \mathbb{R}^d$ mit U als offene Menge eine Vereinigung von den abzählbar

vielen offenen endlichen Quadern $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit rationalen Koordinaten ist. Wir können sogar erreichen, dass die Abschlüsse dieser Quader in U liegen. Wegen Proposition 12.6 ist $Q_{n+1}\setminus(Q_1\cup\ldots\cup Q_n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen Quadern. Induktiv erhalten wir $Q\cap U$ als eine abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten endlichen Quadern mit rationalen Koordinaten, deren Abschlüsse in U liegen. Also liegen die Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von Quadern mit rationalen Koordinaten, deren Abschlüsse in U liegen, dicht in $L^1(U)$. Für jeden Quader Q in U ist $\chi_Q\circ\Phi^{-1}=\chi_{\phi[U]}$. Jeder Quader mit rationalen Koordinaten ist eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen Quadern mit gleichen Kantenlängen, also bis auf eine Nullmenge eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen offenen Bällen bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ aus Definition 9.9. Wegen Satz 12.29 ist $\Phi[U]$ messbar. Wenn Q gleiche Kantenlängen hat liegt das Bild $\Phi[Q]$ innerhalb des Quaders mit dem Volumen $L^d\cdot\mu(Q)$, dessen Zentrum das Bild des Zentrums von Q ist, und dessen Kantenlängen L mal der Kantenlängen von Q sind. Für jede Treppenfunktion $f\in L^1(U)$ ist dann $f\circ\Phi^{-1}$ lebesgueintegrabel und es gilt

$$\|f\circ\Phi^{-1}\|_1\leq L^d\|f\|_1.$$

Die Abbildung $f\mapsto f\circ\Phi^{-1}$ setzt sich zu einer linearen stetigen Abbildung $L^1(U)\to L^1(O)$ fort, deren Norm beschränkt ist durch L^d.
(iii) Wie in (ii) genügt es die Behauptung für chrakteristischen Funktionen von offenen Bällen bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ zu beweisen. Aus $\|\Phi(x)-\Phi(y)-(x-y)\|_\infty\leq\epsilon\|x-y\|_\infty$ folgt

$$(1-\epsilon)\|x-y\|_\infty\leq\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_\infty\leq(1+\epsilon)\|x-y\|_\infty.$$

Aus $\Phi(x)\in B(\Phi(y),r)$ folgt $x\in B(y,\frac{r}{1-\epsilon})$ und $\Phi(x)\in B(\Phi(y),r)$ aus $x\in B(y,\frac{r}{1+\epsilon})$. Wegen $1-(1+\epsilon)^{-d}\leq(1-\epsilon)^{-d}-1$ folgt dann

$$\left|\int\chi_Q\circ\Phi d\mu-\int\chi_Q d\mu\right|\leq\left((1-\epsilon)^{-d}-1\right)\mu(Q).$$

Wegen der Linearität und der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung für alle Treppenfunktionen f, und weil diese dicht liegen für alle $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$. **q.e.d.**

Satz 12.43. *Sei $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ein invertierbare lineare Abbildung. Dann ist*

$$\pi(A):L^1(\mathbb{R}^d)\to L^1(\mathbb{R}^d),\quad f\mapsto\pi(A)f\quad\textit{mit }(\pi(A)f)(x)=f(A^{-1}x)$$

eine stetige lineare Abbildung, deren Norm beschränkt ist durch $\|A\|^d$.Es gilt

$$\int\pi(A)fd\mu=|\det(A)|\int fd\mu\quad\textit{für alle }f\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Beweis: Wegen Lemma 12.42 (ii) ist die Abbildung

$$\pi(A) : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto \pi(A)f$$

beschränkt durch $\|A\|^d$. Alle Quader mit rationalen Kanten sind disjunkte Vereinigungen von Quadern mit gleichen Kantenlängen. Weil die charakteristischen Funktionen von Quadern mit rationalen Kantenlängen dicht liegen in den charakteristischen Funktionen von allen Quadern, liegen die Treppenfunktionen von Quadern mit gleichen Kantenlängen dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Für diagonale Matrizen A gilt wegen dem Satz von Fubini $\alpha(A) = |\det(A)|$. Dann gilt für alle A

$$\int f \circ A^{-1} d\mu = \alpha(A) \int f d\mu \quad \text{mit} \quad \alpha(A) = \int \chi_{A[[0,1]^d]} d\mu \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Für zwei invertierbare Elemente $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\pi(A \cdot B) = \pi(A) \cdot \pi(B)$. Also gilt $\alpha(A \cdot B) = \alpha(A)\alpha(B)$. Aus $\alpha(\mathbb{1}) = 1$ folgt $\alpha(A^{-1}) = \alpha^{-1}(A)$. Dann gilt $\alpha(A) = |\det(A)|$ für alle diagonalisierbaren Matrizen A. Aufgrund der Jordanschen Normalform, ist jede Matrix A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten diagonalisierbar. Weil die Diskriminante des charakteristischen Polynoms einer Matrix A ein Polynom in den Einträgen von A ist, liegt die Teilmenge aller Matrizen, deren Diskrimante nicht verschwindet, dicht in allen Matrizen. Also liegen die diagonalisierbaren Matrizen dicht in allen invertierbaren Matrizen. Wegen Lemma 12.42 (iii) folgt $|\alpha(A^{-1}) - \alpha(\mathbb{1})| \leq ((1-\epsilon)^{-d} - 1)\alpha(\mathbb{1})$ aus $\|A^{-1} - \mathbb{1}\| \leq \epsilon$. Dann folgt $|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq ((1 - \|A^{-1}\|\epsilon)^{-d} - 1)|\alpha(A)|$ aus $\|A - B\| \leq \epsilon$. Also ist α stetig. Für alle A gilt dann $\alpha(A) = |\det(A)|$. **q.e.d.**

Satz 12.44. *(Jacobische Transformationsformel) Sei $\Phi : U \to O$ eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung von der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ auf die offene Menge $O \subset \mathbb{R}^d$. Wenn Φ' auf U in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ invertierbar ist, dann ist die Abbildung $f \to |\det(\Phi')|(f \circ \Phi)$ eine Isometrie von $L^1(O)$ nach $L^1(U)$, d.h. für $f \in L^1(O)$ gilt*

$$\int_U |\det(\Phi')|(f \circ \Phi) d\mu = \int_O f d\mu.$$

Beweis: Im Beweis von Lemma 12.42 (ii) haben wir gesehen, dass die Treppenfunktionen mit kompaktem Träger in O dicht in $L^1(O)$ liegen. Deshalb genügt es

$$\int_U |\det(\Phi')|(\chi_Q \circ \Phi) d\mu = \mu(Q)$$

für alle charakteristischen Funktionen χ_Q von kompakten Quadern in $Q \subset O$ zu zeigen. Weil Φ' auf U in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ invertierbar ist, ist wegen dem Satz der inversen Funktion Φ^{-1} stetig differenzierbar und die Ableitung $\frac{d\Phi}{dx}$ auf $\Phi[Q]$ wegen Korollar 9.35 beschränkt und wegen Satz 9.39 gleichmäßig stetig. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $Q =$

$Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$ in paarweise disjunkte Quader, auf deren Urbilder $\Phi^{-1}[Q_1], \ldots, \Phi^{-1}[Q_N]$ jeweils $\|\Phi' - A\| < \|A\|\epsilon$ oder auch $\|\Phi' \circ A^{-1} - \mathbb{1}\| < \|A\| \cdot \|A^{-1}\|\epsilon \leq \epsilon$ gilt, wobei A der Wert von Φ' an einem Punkt x_0 des Urbildes des jeweiligen Quaders ist. Aus dem Schrankensatz folgt $\|(\Phi \circ A^{-1})(x) - (\Phi \circ A^{-1})(y) - (x-y)\|_\infty \leq \epsilon\|x-y\|_\infty$. Aus Lemma 12.42 (iii) folgt für $n = 1, \ldots, N$

$$\left|\int \chi_{Q_n} \circ \Phi \circ A^{-1} d\mu - \mu(Q_n)\right| \leq \left((1-\epsilon)^{-d} - 1\right)\mu(Q_n).$$

Auf den Quadern $x \in Q_1, \ldots, Q_N$ liegen jeweils alle Eigenwerte von $\Phi'(x) \circ A^{-1}$ in $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Es folgt $|\det(\Phi') - \det(A)| \leq |\det(A)|((1+\epsilon)^d - 1)$. Satz 12.43 ergibt

$$\left|\int |\det(\Phi')|(\chi_{Q_n} \circ \Phi)d\mu - \int \chi_{Q_n} \circ \Phi \circ A^{-1} d\mu\right| \leq \left((1+\epsilon)^d - 1\right)(1-\epsilon)^{-d}\mu(Q_n).$$

Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ folgt dann $\displaystyle\int |\det(\Phi')|(\chi_Q \circ \Phi)d\mu = \mu(Q)$. **q.e.d.**

12.9 Integration über den Rand einer Menge

In diesem Abschnitt definieren wir die Integration über den Rand einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Dafür muss dieser Rand allerdings stetig differenzierbar sein.

Definition 12.45. *(Zerlegung der Eins) Eine glatte Zerlegung der Eins bezüglich einer offenen Überdeckung einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ist eine abzählbare Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $f_n : \Omega \to [0,1]$, so dass*

(i) *für jedes $x \in \Omega$ auf einer Umgebung von x nur endlich viele f_n ungleich Null sind.*

(ii) *Für alle $x \in \Omega$ gilt $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = 1$.*

(iii) *Jedes f_n außerhalb eines Elementes der offenen Überdeckung verschwindet.*

Satz 12.46. *(Existenz der Zerlegung der Eins) Jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ besitzt eine glatte Zerlegung der Eins.*

Beweis: Für $0 < a < b < \infty$ sei $f_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ definiert durch

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |x| \leq a \\ \exp\left(\frac{1}{x^2-b^2}\exp\left(\frac{-1}{x^2-a^2}\right)\right) & \text{für } a < |x| < b \\ 0 & \text{für } b \leq |x| \end{cases}$$

Jeder Punkt x einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist im Inneren eines abgschlossenen Balles $\overline{B(y,r)} \subset \Omega$ mit rationalem Zentrum $y \in \Omega \cap \mathbb{Q}^d$ und rationalem $r \in \mathbb{Q}$ enthalten.

Deshalb ist jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine abzählbare Vereinigung von relativkompakten offenen Teilmengen von Ω. Weil der Abschluss von endlich vielen Teilmengen dieser abzählbaren Überdeckung jeweils kompakt ist und deshalb von endlich vielen Elementen der Überdeckung überdeckt wird, gibt es eine Folge von offenen Teilmengen $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ω, die Ω überdecken, und deren Abschlüsse $\bar{O}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in O_{n+1} enthalten sind. Wir setzen $O_0 = O_{-1} = \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist jeder Punkt $x \in \bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ in einem Ball $B(y, r)$ enthalten, für den $B(y, 2r)$ in $O_{n+1} \setminus \bar{O}_{n-2}$ und in einer der offenen Mengen von $\mathcal{U}$ enthalten ist. Also wird die kompakte Menge $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ von endlich vielen solchen Bällen überdeckt. Wir erhalten induktiv eine Folge von offenen Bällen $(B(y_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$, die Ω überdecken, und deren Bälle $(B(y_n, 2r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils in einer der offenen Mengen von $\mathcal{U}$ enthalten sind, und die jeweils nur mit endlich vielen anderen Bällen von $(B(y_n, 2r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht schnittfremd sind. Dann ist die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} f_n : \Omega \to [0, 1], \quad x \mapsto f_n(x) &= f_{r_n,2r_n}(\|x - y_n\|) \prod_{m=1}^{n-1} (1 - f_{r_m,2r_m}(\|x - y_m\|)) \\ &= \prod_{m=1}^{n-1} (1 - f_{r_m,2r_m}(\|x - y_m\|)) - \prod_{m=1}^{n} (1 - f_{r_m,2r_m}(\|x - y_m\|)). \end{aligned}$$

eine glatte Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$. Denn induktiv gilt

$$f_1(x)+\ldots+f_n(x)+(1-f_{r_1,2r_1}(\|x-y_1\|)\cdots(1-f_{r_n,2r_n}(\|x-y_n\|) = 1 \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N},$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ verschwindet $(1 - f_{r_n,2r_n}(\|x - y_n\|)$ auf $B(y_n, r_n)$. **q.e.d.**

Die Mengen, die wir im Gauß'schen Satz betrachten wollen, sollen einen zweimal differenzierbaren Rand haben.

Definition 12.47. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ hat einen k–mal (stetig) differenzierbaren Rand $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \Omega^c$, wenn jeder Punkt $x \in \overline{\Omega}$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ und eine bijektive, k–mal (stetig) differenzierbare Abbildung $\Phi : U \to O \subset \mathbb{R}^d$ auf eine offene Teilmenge mit k–mal (stetig) differenzierbarer Umkehrabbildung besitzt, so dass*

$$\begin{aligned} \Phi[\Omega \cap U] &= B(0, r) \cap \{x \in \mathbb{R}^d | x_d > 0\} \\ \Phi[\Omega^c \cap U] &= B(0, r) \cap \{x \in \mathbb{R}^d | x_d \leq 0\} \\ \Phi[\partial\Omega \cap U] &= B(0, r) \cap \{x \in \mathbb{R}^d | x_d = 0\} \end{aligned}$$

Ein Vektor y gehört genau dann bei $x \in \partial\Omega$ zum Tangentialraum an $\partial\Omega$, wenn gilt

$$\Phi'(x)y \cdot e_d = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \cdot (\Phi'(x))^t e_d = 0 \qquad \text{mit } e_d = (0, \ldots, 0, 1).$$

Deshalb ist der äußere Normalvektor $N(x)$ im Punkt x gegeben durch

$$N(x) = -\left\| (\Phi'(x))^t e_d \right\|^{-1} (\Phi'(x))^t e_d.$$

Unter stetig differenzierbaren Abbildungen Φ mit stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen transformieren sich der Tangentialraum an den Rand durch die Jacobimatrix und der Normalenvektor durch die transponierte der Jacobimatrix.

Beispiel 12.48. (i): *Sei f eine einmal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^d$, deren Gradient ∇f keine gemeinsamen Nullstellen mit f hat. Dann hat die Menge $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < 0\}$ einen stetig differenzierbaren Rand. Der Rand $\partial\Omega$ ist die Hyperfläche, auf der f verschwindet, die wegen dem Satz der impliziten Funktion lokal das Bild einer stetig differenzierbaren Abbildung von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{d-1}$ nach $\mathbb{R}^d$ ist. Auf dem Rand $\partial\Omega$ ist ∇f ein Vektor, der orthogonal auf dem Tangentialraum an den Rand steht, und nach außen zeigt. Deshalb ist $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ die äußere Normale.*
(ii): *Der Ball $B(y,r)$ mit $y \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ im $\mathbb{R}^d$ ist gleich der Menge $B(y,r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x-y)^2 - r^2 < 0\}$. Die Funktion $f(x) = (x-y)^2 - r^2$ ist offenbar unendlich oft differenzierbar, und der Gradient $\nabla f(x) = 2(x-y)$ hat nur eine Nullstelle bei $x = y$. Also hat der Ball $B(y,r)$ einen unendlich oft differenzierbaren Rand.*

Lemma 12.49. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit stetig differenzierbarem Rand und $\Phi : U \to O \subset \mathbb{R}^d$ eine einmal stetig differenzierbare Abbildung mit den Eigenschaften wie in Definition 12.47. Sei f eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$ mit kompaktem Träger die außerhalb von U verschwindet. Dann ist das Lebesgueintegral*

$$\int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]} \left(\left\|(\Phi')^t\, e_d\right\| \cdot \left|\det(\Phi')\right|^{-1} f\right) \circ \Phi^{-1} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}$$

unabhängig von der Wahl von Φ. Hierbei ist $e_d = (0,\ldots,0,1)$.

Beweis: Seien Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei solche stetig differenzierbare Abbildungen von der offenen Teilmenge U nach O bzw. $\tilde{O}$. Dann ist $\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$ eine stetig differenzierbare Abbildung von O nach $\tilde{O}$. Im Folgenden seien $y = \Phi(x)$ die entsprechenden Koordinate von O und $\tilde{\Phi}(x)$ von $\tilde{O}$. Dann ist die letzte Komponente der Koordinaten von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ identisch gleich Null. Also verschwinden auf dem Rand $\partial\Omega$ alle Einträge der letzten Zeile bis auf das letzte $(\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})'_{dd}$ von der Jacobimatrix $(\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})'$. Außerdem ist die Determinante dieser Jacobimatrix gleich dem Produkt von $(\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})'_{dd}$ mit der Unterdeterminante der entsprechenden $(d-1) \times (d-1)$ Matrix, in der die letzte Zeile und die letzte Spalte gestrichen wurde. Also sind folgende Vektoren gleich:

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})'_{dd} e_d &= ((\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})')^t e_d \\ (\tilde{\Phi}')^t e_d &= (\Phi')^t ((\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})')^t e_d = (\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})'_{dd} (\Phi')^t e_d. \end{aligned}$$

Weil e_d in beide Mengen $\Phi[\Omega \cap U]$ und $\tilde{\Phi}[\Omega \cap U]$ hineinzeigt, ist $(\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})'_{dd}$ positiv.

Dann ergibt Satz 12.44

$$\int\limits_{\tilde{\Phi}[\partial\Omega\cap U]} \left(\left\| (\tilde{\Phi}')^t e_d \right\| \cdot \left| \det(\tilde{\Phi}') \right|^{-1} f \right) \circ \tilde{\Phi}^{-1} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} =$$

$$\int\limits_{\tilde{\Phi}[\partial\Omega\cap U]} \frac{|\det((\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})')|}{(\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})'_{dd}} \left(\left\| (\tilde{\Phi}')^t e_d \right\| \cdot \left| \det(\tilde{\Phi}') \right|^{-1} f \right) \circ \tilde{\Phi}^{-1} \circ (\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1}) d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} =$$

$$= \int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]} \left(\left\| (\Phi')^t e_d \right\| \left| \det(\Phi') \right|^{-1} f \right) \circ \Phi^{-1}) d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Mit Hilfe dieses Lemma's definieren wir das Integral einer Funktion auf $\partial\Omega$.

Definition 12.50. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge mit stetig differenzierbarem Rand, und f eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$. Dann definieren wir das Integral $\int_{\partial\Omega} f d\sigma$ indem wir den Rand $\partial\Omega$ lokal auf Teilmengen von $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ abbilden und es dann mit einer entsprechenden Zerlegung der Eins in eine Summe über die entsprechenden Integrale aus dem vorangehenden Lemma auswerten. Wegen dem vorangehenden Lemma ist das entsprechende Integral, wenn es existiert, unabhängig von den lokalen Abbildungen.*

12.10 Der Gaußsche Satz

Satz 12.51. *(Gauß'scher Satz oder Divergenzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes beschränktes Gebiet mit zweimal differenzierbarem Rand und f eine auf $\overline{\Omega}$ stetig $\mathbb{R}^d$-wertige Funktion, die auf Ω stetig differenzierbar ist, und deren partielle Ableitungen sich stetig auf $\bar{\Omega}$ forstsetzen lassen. Dann gilt:*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int\limits_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma$$

Hierbei ist N die äußere Normale auf dem Rand $\partial\Omega$.

Beweis: Offenbar sind die linke und die rechte Seite der Gleichung linear in f. Deshalb können wir mit Hilfe einer Zerlegung der Eins die Funktion f in eine Summe von Funktionen mit Trägern in kleinen offenen Mengen zerlegen. Außerdem können wir f in eine Summe $f = \sum_{i=1} e_i f_i$ mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_d$ von $\mathbb{R}^d$ zerlegen. Zunächst möchten wir solche f betrachten, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω verschwinden. Für jedes $i = 1, \ldots, d$ gibt es dann ein Intervall I_i, so dass f_i außerhalb der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i \in I_i\}$ verschwindet. Wegen dem Hauptsatz verschwindet dann für jedes $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ das Integral $\int_{I_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_d) dx_i$ über das

Intervall I_i. Wegen dem Satz von Fubini folgt dann $\int_\Omega \nabla \cdot e_i f_i d\mu = 0$ Also erfüllen alle Funktionen mit kompaktem Träger in Ω den Gaußschen Satz.

Zuletzt betrachten wir Funktionen f die außerhalb einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ eines Randpunktes verschwinden, wie sie in Definition 12.47 beschrieben ist. Es existiert also eine zweimal differenzierbare Abbildung $\Phi : U \to O \subset \mathbb{R}^d$ mit zweimal differenzierbarer Umkehrabbildung, so dass Φ den Teil $U \cap \partial\Omega$ vom Rand in U auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ abbildet. Wir definieren $\tilde{f} = \left(|\det(\Phi')|^{-1}(\Phi' f)\right) \circ \Phi^{-1}$, wobei wir punktweise die Ableitung Φ' auf den Vektor f wirken lassen. Dann folgt aus der Definition 12.50

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma &= \int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]} \left(\left\|(\Phi')^t e_d\right\| |\det(\Phi')|^{-1} f \cdot N\right) \circ \Phi^{-1} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} \\
&= -\int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]} \left(|\det(\Phi')|^{-1} f \cdot (\Phi')^t e_d\right) \circ \Phi^{-1} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} \\
&= -\int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]} \tilde{f} \cdot e_d d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} = \int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]} \tilde{f} \cdot \tilde{N} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die äußere Normalen $N(x) = -\|(\Phi')^t e_d\|^{-1} (\Phi')^t e_d$ und $\tilde{N} = -e_d$ eingesetzt. Wenn wir f durch $\tilde{f}$ ausdrücken und Jacobi's Transformation von Maßen benutzen, erhalten wir

$$\int\limits_\Omega \nabla \cdot f d\mu = \int\limits_{\Phi[\Omega\cap U]} \left(|\det(\Phi')|^{-1} \left(\nabla_x \cdot |\det(\Phi')| (\Phi')^{-1} \tilde{f} \circ \Phi\right)\right) \circ \Phi^{-1} d\mu$$

Im Folgenden bezeichnen wir mit y die Koordinaten auf O und mit J die Jacobimatrix $J_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$. Mit Satz 10.4 (iii) und Korollar 11.7 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nabla_x (\Phi')^{-1} \tilde{f} \circ \Phi &= \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial J^{-1}_{ij}}{\partial x_i} \tilde{f}_j \circ \Phi + \sum_{i,j,k=1}^d J^{-1}_{ij} J_{ki} \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y_k} \circ \Phi \\
&= -\sum_{i,j,k,l=1}^d J^{-1}_{ij} \frac{\partial J_{jk}}{\partial x_i} J^{-1}_{kl} \tilde{f}_l \circ \Phi + (\nabla_y \cdot \tilde{f}) \circ \Phi.
\end{aligned}$$

Um den Gradienten der Determinante der Jacobimatrix zu berechnen, benötigen wir

Lemma 12.52. *Sei A eine differenzierbare Abbbildung von $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ in die $n \times n$–Matrizen. Wenn $A(t_0)$ invertierbar ist, dann gilt*

$$\frac{d \det(A(t_0))}{dt} = \det(A(t_0)) \operatorname{Spur}\left(A^{-1}(t_0) \frac{dA(t_0)}{dt}\right).$$

Beweis: Für zwei $n \times n$–Matrizen A und B gilt

$$\det(A + tB) = \det(A)\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B).$$

Offenbar ist $\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B)$ ein Polynom in t vom Grad n, und die Koeffizienten sind Polynome in den Koeffizienten von $A^{-1}B$. Weil aber die Unterdeterminanten von $\mathbb{1}$ genau dann nicht verschwinden, wenn die genausovielte Spalte wie Zeile gestrichen wird und dann die Unterdeterminanten gleich Eins sind, gilt

$$\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B) = 1 + t\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B) + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

Damit folgt $\left.\frac{d}{dt}\det(A + tB)\right|_{t=0} = \det(A)\,\mathrm{Spur}(A^{-1}B)$. **q.e.d.**

Damit erhalten wir

$$(\nabla_x |\det(\Phi')|) \cdot (\Phi')^{-1} \tilde{f} \circ \Phi \quad = \quad |\det(\Phi')| \sum_{i,j,k,l=1}^{d} J^{-1}_{ij} \frac{\partial J_{ji}}{\partial x_k} J^{-1}_{kl} \tilde{f}_l \circ \Phi.$$

Wegen dem Satz von Schwarz gilt

$$\frac{\partial J_{ji}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial J_{jk}}{\partial x_i}, \text{ und damit auch } \int\limits_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int\limits_{\Phi[\Omega \cap U]} \nabla_y \cdot \tilde{f} d\mu.$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Gaußsche Satz für Funktionen f, die außerhalb einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ verschwinden, wie sie in Definitiopn 12.47 beschrieben ist, genau dann gilt, wenn er für die entsprechenden Funktionen $\tilde{f}$ gilt:

$$\int\limits_{\Phi[\Omega \cap U]} \nabla_y \cdot \tilde{f} d\mu = \int\limits_{\Phi[\partial\Omega \cap U]} \tilde{f} \cdot \tilde{N} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}.$$

Für die Funktionen $\tilde{f}$ gilt für alle $i = 1, \ldots, d-1$ wieder $\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_i} d\mu = 0$. Für $i = d$ benutzen wir den Satz von Fubini und den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung und erhalten

$$\int\limits_{\Phi[\Omega \cap U]} \frac{\partial \tilde{f}_d}{\partial y_d} d\mu = - \int\limits_{\Phi[\partial\Omega \cap U]} \tilde{f}_d d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}.$$

Daraus folgt der Gauß'sche Satz. **q.e.d.**