Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 6

1. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$f(x, y, z) = x^3 + e^y \sin(z)$$
im Punkt $x_0 = (1, \log 3, \pi/3)$ in Richtung $v = (3, -2, 6)$. *(2 Punkte)*

2. Sei $f : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$. Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Abbildung, sowie die Determinante der Jacobi-Matrix. Was ist das Bild der Abbildung ? *(2 Punkte)*

3. Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
   (a) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$ *(4 Punkte)*
   (b) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ *(6 Punkte)*

4. Sei
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (zx, zy, zz) \end{aligned}$$
   (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f. *(1 Punkt)*
   (b) Berechnen Sie Divergenz und Rotation von f. *(2 Punkte)*

5. Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein beliebiges Vektorfeld, außerdem sei g zweimal stetig differenzierbar.
   (a) Berechnen Sie $\operatorname{div}(\operatorname{rot} g)$. *(1 Punkt)*
   *(b)** Zeigen Sie, dass g nur dann der Gradient einer reellwertigen Funktion sein kann, wenn $\operatorname{rot}(g) = 0$ gilt. *(2 Zusatzpunkte)*
   *(c)** Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Gradient
$$(x, y, z) \mapsto (2x + y^2 - z^2, 2y(x - z^2), -2z(x + y^2))$$
   ist. *(2 Zusatzpunkte)*

Abgabe bis Montag, den 14. April um 10:00 Uhr in A5