Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 4

1. Sei V ein normierter Vektorraum. Die Abbildung D_A ist für jedes $A \in \mathcal{L}(V)$ gegeben durch $D_A : \mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ mit $B \mapsto AB - BA$.

   (a) Berechnen Sie $D_A(B)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. *(2 Punkte)*

   (b) Beweisen Sie, dass D_A eine Derivation ist. *(2 Punkte)*

   (c) Seien V ein normierter Vektorraum und D eine Derivation von $\mathcal{L}(V)$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, und alle $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt:
   $$D^n(AB) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(A) D^k(B).$$ *(2 Punkte)*

   *(d)** Sei V ein Banachraum und D eine Derivation von $\mathcal{L}(V)$. Zeigen Sie, dass $\exp(D)$ ein Algebraisomorphismus ist, d.h. ein invertierbares Element von $\{C \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V)) |\ C(AB) = C(A)C(B), \forall A, B \in \mathcal{L}(V)\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$. *(2 Zusatzpunkte)*

   *(e)** Sei V ein Banachraum und D_A wie in (a) definiert mit $A \in \mathcal{L}(V)$. Zeigen Sie, dass in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ gilt $\exp(D_A)B = \exp(A) \cdot B \cdot \exp(-A)$. *(2 Zusatzpunkte)*

2. Sei $f(x, y) = 2x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2$ und $a = (1, 1)$. Bestimmen Sie Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ und Funktionen $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass gilt :
   $$f(x, y) = f(a) + A(x - 1) + B(y - 1) + g_1(x, y)(x - 1) + g_2(x, y)(y - 1)$$
   Außerdem erfüllen g_1 und g_2 die Gleichungen
   $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} g_1(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} g_2(x, y) = 0$$ *(2 Punkte)*

3. Sei $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ die Projektion auf die $i-$te Komponente. $P_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

   (a) Geben Sie die Abbildungsvorschrift der Abbildung $P_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ an. *(1 Punkt)*

   (b) Raten Sie die lineare Abbildung, die die Ableitung der obigen Abbildung P_3 im Punkt $x = (0, 0, 0, 0, 0)$ ist. *(1 Punkt)*

   (c) Beweisen Sie allgemein mit Definition 10.1, dass P_i in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist. *(2 Punkte)*

Bitte wenden !!!

4. Welche der folgenden auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetigen Funktionen sind im Ursprung stetig fortsetzbar? (d.h.man kann einen Wert $f(0,0)$ so wählen, dass f in $(0,0)$ stetig ist)

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{|x|+|y|}$

   (b) $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

   (c) $h(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(6 Punkte)

5.* Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die nicht stetig ist, aber eingeschränkt auf jede Gerade in $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
Hinweis: Man kann es mit einer Funktion versuchen, die außerhalb von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}x^2 < y < 2x^2\}$ gleich null ist... *(4 Zusatzpunkte)*

Abgabe bis Montag, den 31. März um 10:00 Uhr in A5