

Übungsblatt 7

Universität Mannheim
Analysis II / FSS 2008
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Finden Sie eine Funktion $x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, die die Wurzelfunktion auf $[0, 1]$ optimal quadratisch approximiert, d.h.

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - ax - b)^2 dx$$

soll möglichst klein werden. (4 Punkte)

2. Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung im Punkt $(1, 1)$ von

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^y \end{aligned}$$

Benutzen Sie das Taylorpolynom, um $1.05^{1.02}$ näherungsweise zu berechnen, vergleichen Sie mit dem Ergebnis eines Taschenrechners. (4 Punkte)

3. Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto (1 - y^2/3, 1 - x^2/4) \end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitzkonstanten $L < 1$ (benutzen Sie die Norm $\|\cdot\|_\infty$).
- (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung f genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn es ein $x \in [0, 1]$ gibt, das die Gleichung $-x^4 + 8x^2 - 48x + 32 = 0$ löst. Geben Sie eine Folge an, die gegen diesen Fixpunkt konvergiert. (4 Punkte)

4. Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1.$$

Benutzen Sie Picards Iterationsverfahren

$$\phi_{n+1}(x) = y(0) + \int_0^x \phi_n(t) dt \quad \phi_1(x) \equiv 1$$

um die ersten fünf Folgenglieder der Folge zu bestimmen, die nach dem Banachschen Fixpunktsatz gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert. (4 Punkte)

Abgabe bis Montag, den 21. April um 10:00 Uhr in A5