

Vorname/Nachname:  
 Matrikelnummer:  
 Zufallszahl:

Analysis II/FSS 2008  
 Martin Schmidt  
 Jörg Zentgraf

## Zwischenklausur Analysis II

18.04.2008

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte 40.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1-11 stehen.
- Bitte schreiben Sie, bevor Sie mit der Klausur beginnen, auf das Deckblatt oben links *deutlich lesbar* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie *alle* Papierbögen wieder ab.
- Sie können ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen, ein Taschenrechner ist nicht erlaubt.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.
- Die Klausurergebnisse werden unter Angabe der obigen Zufallszahl (ohne Matrikelnummer) im Internet veröffentlicht.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
mögliche Punkte	8	10	11	4	7	40
erreichte Punkte						

## 1. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis II am 18.04.2008

---

- (a) Bestimmen Sie den Abstand der Punkte  $(1, 2, 3)$  und  $(-2, -4, -3)$  in  $\mathbb{R}^3$  bezüglich der Normen  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ . (3 Punkte)
- (b) Geben Sie eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  an, die ein Minimum und ein Maximum besitzt, aber nicht kompakt ist. Begründen Sie ihre Wahl. (3 Punkte)
- (c) Betrachten Sie das Polynom in zwei Variablen  $p(x, y) = x^4 + 2y^2 + 2xy + 4x - 5$ . Ist die Menge aller Punkte  $(x, y)$ , für die  $p(x, y)$  echt größer als Null ist,  
i) offen      ii) abgeschlossen      iii) weder offen noch abgeschlossen  
Begründen Sie ihre Wahl. (Hinweis : es ist nur eine der Aussagen richtig)  
(2 Punkte)

## 2. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis II am 18.04.2008

---

Sei die Abbildung  $f$  gegeben durch:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x)y^z \\ \frac{1}{z}e^{(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung. (6 Punkte)
- (b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1.Ordnung der Abbildung

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y, z) \mapsto \frac{1}{z}e^{(x^2+y^2)}$$

im Punkt  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ . (4 Punkte)

### 3. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis II am 18.04.2008

---

Gegeben ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^3 - 3x - 2y^3 + 6y \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und lokalen Extremwerte der Funktion  $f$ . *(8 Punkte)*
- (b) Untersuchen Sie welche der in (a) gefundenen lokalen Extremwerte auch globale Extremwerte sind. *(3 Punkte)*

#### 4. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis II am 18.04.2008

---

Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

im Punkt  $(0, 0)$  stetig ist.

*(4 Punkte)*

## 5. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis II am 18.04.2008

---

Gegeben sei  $d \in \mathbb{N}$  und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_d, t) \mapsto t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{4t}\right).$$

- (a) Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen von  $f$ . (4 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass  $f$  für alle  $(x_1, \dots, x_d, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$  folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_1, \dots, x_d, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, \dots, x_d, t) - \dots - \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_d}(x_1, \dots, x_d, t) = 0.$$

(3 Punkte)