Eine Bäcklundtransformation von der Kodaira- zur Weierstraßdarstellung einer quaternionischen konformen Immersion. Die Plückerformel

Alexander Klauer

16. April 2008

1 Einleitung

Vor einem Jahr haben wir den Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$ als assoziative $\mathbb{R}$-Algebra mit Erzeugern i, j, k und den Relationen

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

eingeführt. Jedes Quaternion $a \in \mathbb{H}$ mit $a^2 = -1$ erzeugt einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Unterkörper. Für diesen Vortrag wählen wir den von i erzeugten komplexen Körper und identifizieren $i \in \mathbb{H}$ mit $i \in \mathbb{C}$.

Lemma 1. *Mit der o.g. Identifizierung existieren für jedes Quaternion $a \in \mathbb{H}$ eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, so dass $a = a_1 + ja_2$ gilt. Analoges gilt auch für quaternionenwertige Abbildungen.*

Beweis. Folgt sofort aus $k = -ji$. □

Definition 1. Sei A ein Operator, der auf komplexwertigen Abbildungen operiert. Dann definieren wir die *Quaternionifizierung* von A via

$$Af = A(f_1 + jf_2) := Af_1 + j\overline{A\overline{f}_2}.$$

Beispiel 1. Mit dieser Definition lassen sich insbesondere die Multiplikation mit komplexen Zahlen und die Differentialoperatoren ∂ und $\overline{\partial}$ quaternionifizieren. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} zj &= j\bar{z} \qquad (z \in \mathbb{C}), \\ \partial j &= j\overline{\partial}, \\ \overline{\partial} j &= j\partial. \end{aligned}$$

Warnung. Die Quaternionifizierung der komplexen Konjugation ist nicht dasselbe wie die quaternionische Konjugation. In diesem Vortrag bezeichnet $\bar{\cdot}$ stets die Quaternionifizierung der komplexen Konjugation. Beispielsweise gilt

$$\overline{\partial\psi} = \overline{\partial}\bar{\psi}.$$

Definition 2. Im Vortrag von Markus haben wir gesehen, dass sich die holomorphen Schnitte eines komplex quaternionischen Linienbündels lokal als Kern eines Diracoperators

$$\overline{\partial} - jU$$

darstellen lassen. Das zugehörige Hopffeld bezeichnen wir mit $Q = U\mathrm{d}z$ und definieren

$$|Q|^2 := \frac{1}{2i}\bar{Q} \wedge Q = \frac{1}{2i}\bar{U}U\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z.$$
$$\|Q\|_2^2 := \iint |Q|^2.$$

Da wir in diesem Vortrag mit verschiedenen Hopffeldern arbeiten, bezeichnen wir im folgenden einen entsprechenden Schnitt als *U-holomorph*.

Definition 3. Seien X eine riemannsche Fläche und $F\colon X \to \mathbb{H}$ eine konforme Immersion. Sei ferner U ein lokal definiertes Potential des Diracoperators. Dann ist

$$\mathrm{d}F = |\phi|^2\bar{\phi}^{-1}\mathrm{d}z\psi$$

mit U-holomorphem ψ und $-\bar{U}$-holomorphen ψ eine lokale *Weierstraßdarstellung* von F bezüglich der durch U definierten holomorphen Struktur.

Sei nun A ein weiteres solches Potential des Diracoperators. Dann ist

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}(\chi^{-1}\xi)$$

mit A-holomorphen χ, ξ eine lokale *Kodairadarstellung* von F bezüglich der durch A definierten holomorphen Struktur.

2 Die lokale Bäcklundtransformation

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $A\colon \Omega \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Seien ferner ξ und χ holomorphe Schnitte des trivialen Linienbündels $\Omega \times \mathbb{H}$ mit der durch A definierten holomorphen Struktur. Wir nehmen an, dass χ nirgends verschwindet. Diese Situation kann man für jede lokale Trivialisierung eines quaternionisch holomorphen Linienbündels erzeugen.

Definition 4. Wir definieren $B, U\colon \Omega \to \mathbb{C}$ via

$$B + jU := -(\partial\chi)\chi^{-1}.$$

Lemma 2. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}|\chi|^2 &= -\bar{B}|\chi|^2,\\
\mathrm{d}\xi &= (\mathrm{d}z\partial + \mathrm{d}\bar{z}jA)\xi,\\
\mathrm{d}\chi &= (-\mathrm{d}z(B + jU) + \mathrm{d}\bar{z}jA)\chi,\\
\mathrm{d}\chi^{-1}\xi &= \chi^{-1}\mathrm{d}z(\partial + B + jU)\xi.
\end{aligned}$$

Beweis. Da χ A-holomorph ist und mit Definition 4 erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\partial\chi &= -B\chi - jU\chi,\\
\overline{\partial}\chi &= jA\chi.
\end{aligned}$$

Mit der Zerlegung $\chi = \chi_1 + j\chi_2$ gemäß Lemma 1 erhalten wir

$$\begin{aligned} -B\chi - jU\chi &= -B\chi_1 + \bar{U}\chi_2 + j(-\bar{B}\chi_2 - U\chi_1), \\ jA\chi &= jA\chi_1 - \bar{A}\chi_2, \end{aligned}$$

woraus wir

$$\begin{aligned} \partial\chi_1 &= -B\chi_1 + \bar{U}\chi_2, & \partial\chi_2 &= A\chi_1, \\ \overline{\partial}\chi_1 &= -\bar{A}\chi_2, & \overline{\partial}\chi_2 &= -\bar{B}\chi_2 - U\chi_1 \end{aligned}$$

erhalten. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{\partial}|\chi|^2 &= \overline{\partial}(\chi_1\bar{\chi}_1 + \chi_2\bar{\chi}_2) \\ &= (\overline{\partial}\chi_1)\bar{\chi}_1 + (\overline{\partial}\bar{\chi}_1)\chi_1 + (\overline{\partial}\chi_2)\bar{\chi}_2 + (\overline{\partial}\bar{\chi}_2)\chi_2 \\ &= -\bar{A}\bar{\chi}_1\chi_2 - \bar{B}\bar{\chi}_1\chi_1 + U\chi_1\bar{\chi}_2 - \bar{B}\chi_2\bar{\chi}_2 - U\chi_1\bar{\chi}_2 + \bar{A}\bar{\chi}_1\chi_2 \\ &= -\bar{B}(\chi_1\bar{\chi}_1 + \chi_2\bar{\chi}_2) = -\bar{B}|\chi|^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für $\mathrm{d}\xi$ und $\mathrm{d}\chi$ ergeben sich direkt aus der Definition von A, B, U. Schließlich gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\chi^{-1}\xi &= (\mathrm{d}\chi^{-1})\xi + \chi^{-1}\mathrm{d}\xi \\ &= -\chi^{-1}(\mathrm{d}\chi)\chi^{-1}\xi + \chi^{-1}\mathrm{d}\xi \\ &= \chi^{-1}(\mathrm{d}z(B + jU) - \mathrm{d}\bar{z}jA)\xi + \chi^{-1}(\mathrm{d}z\partial + \mathrm{d}\bar{z}jA)\xi \\ &= \chi^{-1}\mathrm{d}z(\partial + B + jU)\xi. \end{aligned}$$

□

Satz 1 (Nullkrümmungsgleichung)**.** *Es gilt*

$$\begin{aligned} \overline{\partial}B + \bar{U}U &= \bar{A}A, \\ \partial U - UB &= -\overline{\partial}A - \bar{B}A. \end{aligned}$$

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $\partial\overline{\partial}\chi = \overline{\partial}\partial\chi$. Wir berechnen nun die beiden Seiten dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial\overline{\partial}\chi &= \partial jA\chi \\ &= j\overline{\partial}A\chi \\ &= j((\overline{\partial}A)\chi + A\overline{\partial}\chi) \\ &= j(\overline{\partial}A)\chi + jAjA\chi \\ &= j(\overline{\partial}A)\chi - \bar{A}A\chi, \\ \overline{\partial}\partial\chi &= \overline{\partial}(-B\chi - jU\chi) \\ &= -\overline{\partial}B\chi - j\partial U\chi \\ &= -(\overline{\partial}B)\chi - B\overline{\partial}\chi - j(\partial U)\chi - jU\partial\chi \\ &= -(\overline{\partial}B)\chi - BjA\chi - j(\partial U)\chi - jU(-B\chi - jU\chi) \\ &= -(\overline{\partial}B)\chi - j\bar{B}A\chi - j(\partial U)\chi + jUB\chi - \bar{U}U\chi. \end{aligned}$$

Damit sind alle Differentialoperatoren eliminiert. Durch Rechtsmultiplikation mit χ^{-1} und Gleichsetzen erhalten wir

$$j(\overline{\partial}A) - \bar{A}A = -(\overline{\partial}B) - j\bar{B}A - j(\partial U) + jUB - \bar{U}U.$$

Aus Lemma 1 folgt dann die Behauptung. $\square$

Theorem 1 (Bäcklundtransformation)**.** *Die Funktionen*

$$\psi := (\partial + B + jU)\xi, \qquad \phi := |\chi|^{-2}\bar{\chi}$$

sind U- bzw. $-\bar{U}$-holomorph und es gilt

$$\mathrm{d}\chi^{-1}\xi = |\phi|^2\bar{\phi}^{-1}\mathrm{d}z\psi.$$

Sind umgekehrt ψ und ϕ U- bzw. $-\bar{U}$-holomorph, und verschwindet ϕ nirgends, dann ist $\mathrm{d}F := |\phi|^2\bar{\phi}^{-1}\mathrm{d}z\psi$ eine geschlossene Einsform und

$$\chi := |\phi|^{-2}\bar{\phi}, \qquad \xi := \chi F$$

sind A-holomorph mit einem komplexwertigen Potential A.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}(\overline{\partial} - jU)\psi &= (\overline{\partial} - jU)(\partial + B + jU)\xi\\ &= (\overline{\partial}\partial + \overline{\partial}B + j\partial U - jU\partial - jUB + \bar{U}U)\xi\\ &= (\partial\overline{\partial} + (\overline{\partial}B) + B\overline{\partial} + j(\partial U) - jUB + \bar{U}U)\xi\end{aligned}$$

Mit Satz 1 folgt (1)

$$\begin{aligned}&= (\partial\overline{\partial} + \bar{A}A + B\overline{\partial} - j(\overline{\partial}A) - j\bar{B}A)\xi\\ &= (\partial\overline{\partial} - jAjA + B\overline{\partial} - \partial jA + jA\overline{\partial} - BjA)\xi\\ &= ((\partial + B + jA)\overline{\partial} - (jA + \partial + B)jA)\xi\\ &= (\partial + B + jA)(\overline{\partial} - jA)\xi = 0.\end{aligned}$$

Für ϕ gilt:

$$\overline{\partial}\phi = \overline{\partial}|\chi|^{-2}\bar{\chi}$$

Da $|\chi|^{-2}$ reellwertig ist:

$$\begin{aligned}&= (\overline{\partial}|\chi|^{-2})\bar{\chi} + |\chi|^{-2}\overline{\partial\chi}\\ &= -|\chi|^{-4}(\overline{\partial}|\chi|^2)\bar{\chi} - |\chi|^{-2}(\bar{B} + j\bar{U})\bar{\chi}\end{aligned}$$

Mit Lemma 2:

$$\begin{aligned}&= |\chi|^{-2}(\bar{B}|\chi|^2)\phi - (\bar{B} + j\bar{U})\phi\\ &= -j\bar{U}\phi.\end{aligned}$$

Die Transformation von der Kodaira- zur Weierstraßdarstellung folgt nun aus Lemma 2.

Wir skizzieren die Umkehrung. Wir definieren

$$B - j\bar{A} := (\partial\phi)\phi^{-1}.$$

Dann erhalten wir

$$\overline{\partial}|\phi|^2 = -\bar{B}|\phi|^2$$

mit derselben Rechnung wie in Lemma 2 (diese Rechnung war ja unabhängig von ψ, ξ und A). Daraus folgt

$$\overline{\partial}|\phi|^{-2} = -|\phi|^{-4}\overline{\partial}|\phi|^2 = |\phi|^{-4}\bar{B}|\phi|^2 = \bar{B}|\phi|^{-2}.$$

Wenden wir dies auf $\chi := |\phi|^{-2}\bar{\phi}$ an, ergibt sich

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\chi &= \overline{\partial}|\phi|^{-2}\bar{\phi} \\ &= (\overline{\partial}|\phi|^{-2})\bar{\phi} + |\phi|^{-2}(\overline{\partial}\bar{\phi}) \\ &= \bar{B}|\phi|^{-2}\bar{\phi} - |\phi|^{-2}(\bar{B} - jA)\bar{\phi} \\ &= jA|\phi|^{-2}\bar{\phi} = jA\chi.\end{aligned}$$

Für diese A, B, U gilt auch wieder die Nullkrümmungsgleichung und daher die im ersten Teil des Beweises hergeleitete Operatorgleichung (1). Daher ergeben sich alle weiteren Aussagen automatisch, wenn wir zeigen können, dass ein ξ mit $(\partial + B + jU)\xi = \psi$ existiert. Aus dem dolbeaultschen Lemma folgt, dass es komplexe Operatoren T_1, T_2 gibt, so dass

$$\partial_{\mathbb{C}}T_1 = 1, \qquad \overline{\partial}_{\mathbb{C}}T_2 = 1.$$

Daraus ergibt sich die Existenz eines entsprechenden quaternionischen Operators T mit $\partial_{\mathbb{H}}T = 1$. Der Operator $T(1 + (B + jU)T)^{-1}$ ist wohldefiniert, man darauf achtet, dass T, B, U, ξ und ψ aus den richtigen Räumen mit geeigneten Normen stammen. (siehe meine früheren Vorträge zum inversen Problem des Schrödinger- bzw. Diracoperators). Wir haben dann

$$(\partial + B + jU)T(1 + (B + jU)T)^{-1} = (1 + (B + jU)T)(1 + (B + jU)T)^{-1} = 1$$

und können daher

$$\xi := T(1 + (B + jU)T)^{-1}\psi$$

definieren. □

3 Die Plückerformel

Seien X eine kompakte riemannsche Fläche mit kanonischem Divisor K und L ein quaternionisch holomorphes Linienbündel über X mit Divisor D. Die zugehörige Schnittgarbe bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}_D$.

Satz 2. *Seien $\chi, \xi \in H^0(X, \mathcal{Q}_D)$ nichttriviale Schnitte. Die lokalen Bäcklund-transformationen gemäß Theorem 1 induzieren eine globale Transformation von Hopffeldern*

$$Q \mapsto Q_1 = U\mathrm{d}z$$

bzw.

$$Q \mapsto -\bar{U}\mathrm{d}z$$

und liefert entsprechende Schnitte $\phi \in H^0(X, \mathcal{Q}_{-D})$*,* $\psi \in H^0(X, \mathcal{Q}_{D+K})$*. Für die Hopffelder gilt:*

$$\|Q\|_2^2 - \|Q_1\|_2^2 = -\pi \deg(D).$$

Beweis. Sei $\{x_1, \dots, x_l\}$ der Träger von D und $U_i := B_\epsilon(x_i)$ für ein $\epsilon > 0$, das so klein ist, dass die U_i paarweise disjunkt sind. Setze

$$X_0 := X \setminus \bigcup_{i=1}^{l} U_i.$$

Mit geeignetem A und U gilt:

$$|Q|^2 - |Q_1|^2 = \frac{1}{2i}(\bar{A}A - \bar{U}U)\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z$$

Mit Satz 1:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i}(\bar{\partial}B)\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i}\mathrm{d}B\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Aus Lemma 2 folgt, dass $B\mathrm{d}z = -2\partial \ln|\chi|\mathrm{d}z$. Bei nichttrivialem D hat also die Einsform $B\mathrm{d}z$ Singularitäten. Um den Beitrag dieser Singularitäten bestimmen zu können, betrachten wir transformierte Kozykeln. Sei nun f ein komplex holomorphes 0-Kozykel mit Divisor $-D$. Wir brauchen f nur auf $\bigcup_{i=1}^{l} U_i$ zu definieren; dort ist dies auch global möglich. Wir definieren die transformierten Kozykeln via

$$\tilde{\zeta} := f\zeta.$$

Für Operatoren definieren wir

$$\tilde{A} := fAf^{-1}.$$

Dann gilt

$$A\alpha = \beta \Longleftrightarrow \tilde{A}\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}.$$

Mit diesen Definitionen hat $\tilde{\chi}$ einen trivialen Divisor. Wir bezeichnen die zu $\tilde{\chi}$ und $\tilde{\xi}$ gehörenden zu B, U, Q und Q_1 gehörenden analogen Größen mit $B_\sim$, $U_\sim$, $Q_\sim$ und $Q_{1\sim}$ (diese Größen sind nicht zu verwechseln mit der Operatorentransformation, d.h. im Allgemeinen ist z.B. $\tilde{B} \neq B_\sim$). Der Zusammenhang zwischen B und $B_\sim$ ergibt sich aus den Operatortransformationen

$$\begin{aligned} \tilde{\partial} &= f\partial f^{-1} = f(-f^{-2}(\partial f) + f^{-1}\partial) = \partial - \frac{f'}{f}, \\ \tilde{B} &= B, \\ \widetilde{jU} &= j\frac{\bar{f}}{f}U. \end{aligned}$$

Aus

$$\partial + \widetilde{B + jU} = \partial + B_\sim + jU_\sim$$

folgt dann

$$B = B_\sim + \frac{f'}{f}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\|Q\|_2^2 - \|Q_1\|_2^2 &= \iint\limits_X \mathrm{d}B\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{X_0} \mathrm{d}B\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{l} \iint\limits_{U_i} \mathrm{d}(B_\sim + f'f^{-1})\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{X_0} \mathrm{d}B\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{l} \iint\limits_{U_i} \mathrm{d}B_\sim\mathrm{d}z + \frac{1}{2i}\sum_{i=1}^{l} \oint\limits_{\partial U_i} f'f^{-1}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Mit $\epsilon \to 0$ verschwinden die ersten beiden Summanden, da B bzw. $B_\sim$ in den jeweiligen Integrationsbereichen keine Singularitäten haben. Übrig bleibt das nullstellenzählende Integral:

$$\frac{1}{2i}\sum_{i=1}^{l} \oint\limits_{\partial U_i} f'f^{-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2i} 2\pi i \deg(-D) = -\pi \deg(D).$$

Die restlichen Aussagen folgen aus den Definitionen von ϕ und ψ sowie aus Theorem 1. □

Definition 5. Seien $x \in X$ und $\psi \in H^0(L)$ ein holomorpher Schnitt. Dann existieren eine lokale Koordinate z und ein bzgl. dieser Koordinate nichtverschwindender Schnitt $\phi \in H^0(L)$, so dass

$$\psi = \phi z^n + O(z^{n+1})$$

mit geeignetem $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Wir definieren die *Ordnung* von ψ in x:

$$\mathrm{ord}_x\, \psi := n.$$

Im folgenden sei $H \subseteq H^0(X, \mathcal{Q}_D)$ ein m-dimensionales lineares System. Ist $x \in X$, dann wird mit einer Koordinate z wie in der vorhergehenden Definition typischerweise ein $\psi \in H$ existieren, das so aussieht:

$$\psi = \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \cdots + \phi_m z^m + O(z^{m+1})$$

mit lokal nicht verschwindenden holomorphen Schnitten $\phi_1, \ldots, \phi_m$. An isolierten Punkten kann es jedoch zu Lücken in der Folge der Potenzen $1, \ldots, m$ kommen.

Definition 6. Für jedes $x \in X$ ordnen wir die auftretenden Potenzen gemäß Definition 5 der Schnitte in H:

$$0 < n_1(x) < n_2(x) < \cdots < n_m(x).$$

Die Abweichung von der Folge $0, 1, \ldots, m$ misst man über die *Ordnung* von H in x.

$$\operatorname{ord}_x H := \sum_{j=1}^{m} (n_j(x) - j).$$

Da X kompakt ist, können wir auch die *Gesamtordnung* von H

$$\operatorname{ord} H := \sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x H$$

definieren.

Theorem 2 (Plückerformel). *Es gilt für alle linearen Systeme $H \subseteq H^0(X, \mathcal{Q}_D)$:*

$$\frac{1}{\pi}\|Q\|_2^2 \geq \dim H((1-g)(\dim H - 1) - \deg(D)) + \operatorname{ord} H.$$

Dabei ist g das Geschlecht von X.

Beweis. Sei $m := \dim H$. Wir betrachten zunächst den Fall $\operatorname{ord} H = 0$. Wähle $\chi \in H$, so dass $\operatorname{ord}_x \chi = 1$ für alle $x \in X$. Dann erfüllt χ die Voraussetzungen für Satz 2 und wir können für alle $\xi \in H$ die Bäcklundtransformation durchführen. Sind ξ und χ linear abhängig, dann verschwindet ψ aufgrund der Definition von B und U. Andernfalls erhält man einen neuen nichttrivialen Schnitt in $H^0(X, \mathcal{Q}_{D+K})$. Insgesamt erhält man also ein neues lineares System $H_1 \subseteq H^0(X, \mathcal{Q}_{D+K})$, das jedoch nur noch $(m-1)$-dimensional ist. Diese Transformation können wir jetzt insgesamt m Mal durchführen. Wir erhalten also eine Kette von Hopffeldern

$$Q := Q_0 \mapsto Q_1 \mapsto Q_2 \mapsto \cdots \mapsto Q_m$$

und eine Kette von linearen Systemen

$$H := H_0 \mapsto H_1 \mapsto H_2 \mapsto \cdots \mapsto H_m = 0$$

mit $H_j \subseteq H^0(X, \mathcal{Q}_{D+jK})$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\|Q\|_2^2 &\geq \frac{1}{\pi}(\|Q\|_2^2 - \|Q_m\|_2^2) \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{m-1}(\|Q_j\|_2^2 - \|Q_{j+1}\|_2^2)
\end{aligned}$$

Mit Satz 2:

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{j=0}^{m-1} \deg(D + jK) \\
&= -\deg(D)m - \deg(K)\frac{m(m-1)}{2}
\end{aligned}$$

Mit $\deg(K) = 2g - 2$:

$$= \dim H((1-g)(\dim H - 1) - \deg(D)).$$

Nun zum allgemeinen Fall: hier kann es passieren, dass das $\chi \in H_i$ mit niedrigster Ordnung nicht Ordnung 1 hat. In diesem Fall ändern wir den Divisor des Linienbündels durch eine Transformation, so wie wir es im Beweis von Satz 2 gemacht hatten. Mit derselben Rechnung ergibt sich ein zusätzlicher lokaler Beitrag von $\pi \sum_{x \in X} (n_j(x) - j)$ zu $\|Q_j\|_2^2 - \|Q_{j+1}\|_2^2$, der sich für alle Bäcklundtransformationen zu $\pi \operatorname{ord} H$ aufsummiert. Damit folgt die Formel in der Behauptung. $\square$