Spektralkurve von Rang 1 Willmore-Zusammenhängen

Jörg Zentgraf

29.04.2008

Das Ziel dieses Vortrags ist es die Spektralkurve zu einem Willmore Zusammenhang eines quaternionischen Linienbündels zu definieren. Dazu führen wir einen Spektralparameter in die Willmore-Bedingung ein und untersuchen dessen Holonomie.

Lemma 1. *Sei V ein quaternionisches Vektorbündel mit komplexer Struktur J und einem flachen Zusammenhang ∇. Wir betrachten die Familie von Zusammenhängen*

$$\nabla_\lambda = \nabla + (\lambda - 1)A$$

wobei A das Hopffeld des Zusammenhangs ist(der antiholomorphe und mit J antikommutierende Anteil des Zusammenhangs) und $\lambda = x + Jy \in \mathbb{C}$ Dann ist $\nabla = \nabla_1$ ein Willmore-Zusammenhang genau dann, wenn ∇_λ ein flacher Zusammenhang auf V für alle $\lambda \in S^1$ ist. Ist dies der Fall, dann ist auch ∇_λ ein Willmore-Zusammenhang für alle $\lambda \in S^1$.

Beweis. Dieses Lemma folgt direkt aus den Nullkrümmungsgleichungen. Wir ersetzen darin A durch λA, dann erhalten wir

$$\bar{\partial} B + \bar{U} U = \bar{\lambda} A \lambda A = \bar{A} A,$$

die genau dann erfüllt ist, wenn ∇ ein flacher Zusammenhang ist.
Dass jeder Zusammenhang der Familie ein Willmore-Zusammenhang ist, folgt aus

$$-\bar{\partial}(\lambda A) - \bar{B} \lambda A = \lambda(-\bar{\partial} A - \bar{B} A)$$

□

Die gesamte Familie von Willmore-Zusammenhängen induziert die gleiche holomorphe Struktur ∇''. Deshalb ist jeder paralle Schnitt ψ automatisch auch ein holomorpher Schnitt, d.h. $\nabla''_\lambda \psi = 0$. Im allgemeinen gibt es jedoch

keine holomorphen Schnitte für $\lambda \in S^1$. Um dies zu umgehen, erweitern wir die Familie zu einer Familie flacher Zusammenhänge, die durch $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ parametrisiert werden.
Sei I die quaternionische Multiplikation mit i. Dann ist I eine komplexe Struktur auf V, die nicht mehr quaternionisch linear ist, aber mit J, A, Q, ∇ kommutiert. Somit können wir V als ein Rang $2r$ komplexes Vektorbündel betrachten mit dem flachen Zusammenhang ∇. Wir betrachten nun die Familie

$$\nabla_\lambda = \nabla + (\lambda - 1)A$$

wobei nun der Parameter $\lambda = x + Jy$ gegeben ist durch

$$x = \frac{1}{2}(\mu + \mu^{-1}) \quad y = \frac{1}{2}(\mu^{-1} - \mu)I \quad \mu = a + bI \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Es gilt weiterhin $x^2 + y^2 = 1$, wir erhalten die neue Familie

$$\nabla_\mu = \nabla - A + \frac{\mu}{2}(1 - Ij)A + \frac{\mu^{-1}}{2}(1 + Ij)A$$

komplexer Zusammenhänge auf V, die nun über $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ parametrisiert ist. Wenn wir die Familie auf $\mu \in S^1$ einschränken erhalten wir wieder die Familie ∇_λ. Da I parallel ist und mit A kommutiert, können wir die gleichen Rechnungen wie im obigen Lemma durchführen und zeigen, dass ∇ genau dann Willmore ist, wenn ∇_μ für alle $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ flach ist.
Die Familie der komplexen Zusammenhänge ∇_μ besitzt auch eine Symmetrie, die durch die quaternionische Multiplikation M mit j von rechts gegeben ist. Wegen $MI = -IM$ haben wir $M\mu = \bar{\mu}M$ und deshalb

$$M\nabla_\mu = (\nabla - A + \frac{\bar{\mu}}{2}(1 + IS)A + \frac{\bar{\mu}^{-1}}{2}(1 - IS)A)M = \nabla_{\frac{1}{\bar{\mu}}}M$$

Hierbei haben wir benutzt, dass ∇ und A quaternionisch linear sind und somit mit M kommutieren. Aus dieser Symmetrie sehen wir, dass wenn ψ parallel ist bzgl. ∇_μ, dann ist $M\psi$ parallel bzgl. $\nabla_{\frac{1}{\bar{\mu}}}$. Deshalb spannen die holomorphen Schnitte, die man aus parallelen Schnitten von ∇_μ erhält, einen quaternionisch linearen Teilraum von $H^0(V)$ auf.

Lemma 2. *Sei V ein quaternionisches Linienbündel mit komplexer Struktur J und sei ∇ ein Willmore-Zusammenhang, so dass A und Q beide nicht identisch null sind. Seien $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ verschieden und $\psi_k \in \Gamma(V)$ nichttriviale parallele Schnitte von ∇_{μ_k}, dann sind die ψ_k komplex linear unabhängig als Schnitte in dem komplexen Rang 2 Bündel V mit komplexer Struktur I. Im speziellen gibt es nur endlich viele $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass ∇_μ trivial ist, da*

$H^0(V)$ über einer kompakten Riemannschen Fläche endlichdimensional ist. Anders ausgedrückt sagt dies, dass wenn die Familie ∇_μ trivial ist, dann ist entweder $A = 0$ oder $Q = 0$ und somit ist J eine Abbildung in die 2-Sphäre.

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zu dem Beweis aus der Linearen Algebra, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Wir bezeichnen mit

$$\nabla^{(1,0)} = \frac{1}{2}(\nabla - I * \nabla)$$

den $(1,0)$-Anteil des Zusammenhangs ∇ bzgl. der komplexen Struktur I. Berechnen wir nun aus der Definition den entsprechenden Anteil von ∇_μ, so erhalten wir

$$\nabla_\mu^{(1,0)} = \nabla^{(1,0)} + \frac{1}{2}(\mu - 1)(1 - Ij)A =: \partial + \mu\omega$$

wobei ∂ alle μ-unabhängigen Teile enthält und $\omega = (1 - Ij)A$ eine $End(V)$-wertige $(1,0)$-Form ist. Parallele Schnitte von ∇_μ sind auch im Kern von $\nabla_\mu^{(1,0)}$. Seien ψ_k für $k = 1, \ldots, n$ linear unabhängige Schnitte in $\Gamma(V)$, die bzgl. ∇_{μ_k} parallel sind für verschiedene μ_k, sie erfüllen außerdem

$$\partial\psi_k + \mu_k\omega\psi_k = 0.$$

Sei $\psi_0 = \sum_k c_k\psi_k, c_k \in \mathbb{C}$ ein paralleler Schnitt von ∇_{μ_0}, wobei das μ_0 verschieden von allen μ_k ist. Wir müssen nun zeigen, dass alle $c_k = 0$ sind. Wegen

$$0 = (\partial + \mu_0\omega)\psi_0 = \sum_{k=1}^{n}(\mu_0 - \mu_k)c_k\omega\psi_k$$

und $\mu_0 - \mu_k \neq 0$ reicht es aus zu zeigen, dass alle $\omega\psi_k$ linear unabhängig sind. Weil parallele Schnitte auch holomorph sind, folgt dies, falls wir zeigen können, dass

$$\omega : H^0(V) \to \Gamma(KV)$$

injektiv ist. Außerhalb der isolierten Nullstellen von A hat die Bündelabbildung ω den Kern des i-Eigenbündels $W \subset V$ von S. Deshalb besteht der Kern von ω auf $H^0(V)$ aus Schnitten $\psi \in \Gamma(V)$, für die

$$0 = \nabla''\psi = \bar{\partial}\psi + Q\psi$$

gilt. Der Operator $\bar{\partial}$ erhält die Schnitte von W, im Gegensatz dazu bildet Q sie auf Schnitte von $-Wi$ ab. Da Q auch nur an isolierten Punkten verschwindet, gilt somit $\psi = 0$. $\square$

Zu dem Zusammenhang ∇ können wir eine reelle, geschlossene 1-Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$ addieren und erhalten so einen anderen Willmore-Zusammenhang $\tilde{\nabla} = \nabla + \omega$. Benutzen wir diese Freiheit den Zusammenhang zu ändern, können wir erreichen, dass das reelle Linienbündel von quaternionisch hermiteschen Formen auf V triviale Holonomie besitzt. Somit können wir annehmen, dass V eine parallele quaternionische hermitesche Form

$$< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{H}$$

besitzt, so dass die Holonomie

$$H : \pi(M) \to S^3 \subset \mathbb{H}$$

Werte in den unitären Quaternionen annimmt. Da V Rang 1 hat, ist S automatisch schief-hermitsch, dann sind aber auch A und Q schief-hermtisch und somit ist $< \cdot, \cdot >$ parallel bzgl. des komplexen Zusammenhangs $\partial + \bar{\partial}$. Die hermitesche Form können wir zerlegen in

$$< \cdot, \cdot >= (\cdot, \cdot) + j \det$$

Wir erhalten die hermitsche Form $(\cdot, \cdot)$ und die Determinantenform det auf dem komplexen Rang 2 Bündel V mit komplexer Struktur I. Beide Formen sind parallel bezüglich ∇_μ für $\mu \in \S^1$, da λA nichts an der Parallelität ändert. Außerdem ist ∇_μ parallel bzgl. det für alle $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, somit ist ∇_μ eine Familie von $SL(2, \mathbb{C})$-Zusammenhängen, die speziell unitär für $\mu \in S^1$ ist.
Für einen festen Basispunkt auf M erhalten wir eine Familie von Holonomie-Darstellungen

$$H_\mu : \pi_1(M) \to SL(2, \mathbb{C}), \qquad \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Für $\mu \in S^1$ erhalten wir die Darstellung

$$H_\mu : \pi_1(M) \to SU(2, \mathbb{C}), \qquad \mu \in S^1.$$

Diese Darstellung besitzt die Symmetrie

$$H_{\frac{1}{\bar{\mu}}} = J H_\mu J^{-1},$$

somit ist H_μ quaternionisch linear für unitäres μ. Da der Zusammenhang ∇_μ holomorph von μ abhängt, hängt auch die Holonomie H_μ holomorph von μ ab.
Wir suchen nun μ, so dass der Zusammenhang einen parallelen Schnitt besitzt. Anders gesagt, suchen wir nach Werten von μ, so dass die Holonomie einen Eigenvektor mit Eigenwert 1 besitzt.

Wir nehmen nun an, dass die kompakte Riemannsche Fläche M ein Torus ist und somit die abelsche Fundamentalgruppe $\pi_1(M) = \mathbb{Z}^2$ besitzt.
Zunächst schliessen wir den Fall von trivialer Holonomie aus, dies entspricht Abbildungen von dem Torus nach S^2. Äquivalent dazu können wir auch $\deg(V) = 0$ fordern, da der Grad von V kleiner gleich $g - 1$ ist.
Da die Holonomie holomorph von μ abhängt haben wir im Standardfall zwei verschiedene Eigenlinien von H_μ. Außerhalb dieser generischen Menge hat die Holonomie $H_\mu(\gamma)$ zusammenfallende Eigenwerte für jeden Zykel $\gamma \in \pi_1(M)$ oder äquivalent dazu für zwei erzeugende Zykel. Ansonsten gäbe es einen Zykel, für den $H_\mu(\gamma)$ verschiedene Eigenwerte besitzt und somit hätte die Darstellung zwei verschiedene Eigenlinien. Da H_μ eine $SL(2, \mathbb{C})$-Darstellung ist, ist die Eigenschaft zusammenfallende Eigenwerte zu haben, äquivalent zu

$$H_\mu = \pm \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf einer höchstens 4-fachen Überlagerung des Torus liefern die Werte μ, für die H_μ zusammenfallend Eigenwerte besitzt, parallele Schnitte von ∇_μ. Wegen Lemma 2 kann es nur endlich viele solcher Werte geben.
Wir definieren nun $B \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ als die endliche Menge aller Punkte μ, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $H_\mu(\gamma)$ hat für zwei erzeugende Zykel der Fundamentalgruppe zusammenfallende Eigenwerte und somit für alle.

2. H_μ hat keine zwei verschiedenen Eigenlinien.

3. Die holomorphe Abbildung $tr\,(H(\gamma) - \mathbb{1})$ hat Nullstellen ungerader Ordnung bei μ für alle Zykel $\gamma \in \pi_1(M)$.

Die Menge B ist invariant unter der Anti-Involution $\mu \mapsto \bar{\mu}^{-1}$. Außerdem kann kein μ auf dem Einheitskreis S^1 liegen, da sonst H_μ der Grenzwert von $SU(2, \mathbb{C})$ Darstellungen wäre, die zueinander senkrechte Eigenlinien besitzen. Somit hätte auch H_μ zueinander senkrechte Eigenlinien. Die Menge

$$B = \{\mu_1, \ldots, \mu_g, \overline{\mu_1}^{-1}, \ldots, \overline{\mu_g}^{-1}\}$$

ist also eine Sammlung von g Paaren von Punkten in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, die symmetrisch bzgl. des Einheitskreises ist.

Definition 3. *Sei V ein quaternionisches Linienbündel mit einer komplexen Struktur S vom Grad Null über einem Torus und sei ∇ ein Willmore-Zusammenhang. Die Spektralkurve von ∇ ist die hyperelliptische Riemannsche Fläche*

$$\mu : \Sigma \to \mathbb{CP}^1$$

die an den Werten $\mu \in B \cup \{0, \infty\}$ verzweigt ist, ihr Geschlecht ist somit g. Wir nennen g das Spektralgeschlecht des Willmore-Zusammenhangs ∇.