Weihnachtsfragen

Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Ein paar Aufgaben zur Klausurvorbereitung. Die Lösungen zu den Aufgaben werden Mitte Januar veröffentlicht.

1. Untersuchen Sie die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz.

$$\text{(a) } a_n = \left(\frac{1+\imath}{2}\right)^n \quad \text{(b) } a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}$$
$$\text{(c) } a_n = \frac{n}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^n} \quad \text{(d) } a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

2. Berechnen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot 2^n} \qquad \text{(b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

3. An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen stetig ?

$$\text{(a) } f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 < 2 \\ 1 & \text{für } x^2 > 2 \end{cases}$$

$$\text{(b) } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{(c) } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ 1/m & \text{für } x = n/m \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Hinweis : Teil (c) ist relativ schwer.

4. Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$ gleichmäßig stetig ?

5. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$$

Ist die Konvergenz gleichmäßig ?

6. Wo sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ?

$$\text{(a) } x \mapsto x \cdot |x| \quad \text{(b) } x \mapsto \begin{cases} x^2 + x & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

7. Bestimmen Sie mit der Regel von L'Hopital

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-\sin(x)+\cos(x)-2}{x^3}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} x(1-\cos(x^{-1}))$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$

8. Sei $f(x) = |x^2 - 4|$ definiert auf $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie, wo f differenzierbar ist und berechnen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion.

9. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Maxima und Minima der Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$

(a) $f(x) = xe^{-x}$ (b) $f(x) = \ln(\sqrt{1+\cos(x)})$

(c) $f(x) = e^{x^2+x}$ (d) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

10. Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 4 im Punkt $x_0 = 1$ von

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (b)$f(x) = e^{-x}(\operatorname{arctan}(x) + \operatorname{arccot}(x))$

11. Beweisen Sie für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

12. Berechnen Sie die folgenden Integrale ($n \in \mathbb{N}$)

(a) $\int x^2 \cos(3x)\, dx$ (b) $\int x^n \ln(x)\, dx$

(c) $\int \sqrt{\sqrt{x}+1}\, dx$ (d) $\int_0^\pi \sin^n(x)\, dx$

Frohe Weihnachten, einen guten Rutsch ins Jahr 2008 und frohes Lernen wünscht der Lehrstuhl für Mathematik III!