Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 10

1. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion mit $a < b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$. *(3 Punkte)*

2. Geben Sie zwei unstetige Funktion $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ an, für die $f \circ g$ stetig ist. *(2 Punkte)*

3. Beweisen Sie : Für $x \neq 2k\pi$ ist

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) = \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})x\right)}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

Hinweis : Führen Sie die Funktion $d(x) := \sum_{-N}^{N} \exp(\imath nx)$ ein und untersuchen Sie den Zusammenhang zu der rechten Seite der obigen Gleichung. *(4 Punkte)*

4. Beweisen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$, die jeden ihrer Funktionswerte genau n mal $(n \in \mathbb{N}, n > 2)$ annimmt. Hinweis : Zwischenwertsatz und Satz 5.25 *(3 Punkte)*

5. Vereinfachen Sie für $0 < a < x$ den Ausdruck

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right) + \ln(\sqrt{a})$$

(2 Punkte)

6. Untersuchen Sie an welchen Punkten die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie ggf. die Ableitung

$$f(x) := \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$
$$g(x) := x^{-2}(2\sin(3x) + x^3\cos(x)) \quad x \neq 0$$
$$h(x) := \exp(|x|)$$

(6 Punkte)

Abgabe bis Freitag, den 16. November um 10 Uhr in A5