Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 2

1. Seien a, b, c und d reelle Zahlen. Beweisen Sie

   (a) $a < b$ und $c < d \Longrightarrow a + c < b + d$.

   (b) $0 < a < b$ und $0 < c < d \Longrightarrow ac < bd$.

   (c) $ab > 0 \Longleftrightarrow$ entweder $a > 0, b > 0$ oder $a < 0, b < 0$.

   (d) $ab < 0 \Longleftrightarrow$ entweder $a > 0$, $b < 0$ oder $a < 0$, $b > 0$. *(6 Punkte)*

2. Sei die Abbildung d gegeben durch

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \{0, 1\} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \end{aligned}$$

   Beweisen Sie, dass diese Abbildung auch die Eigenschaften des Abstands (Satz 2.21) erfüllt. *(3 Punkte)*

3. Seien A, B zwei nichtleere, beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}$ und die Menge S definiert durch $S := \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie

   (a) $\sup S = \sup A + \sup B$

   (b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ *(3 Punkte)*

4. Seien A, B zwei nichtleere, beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}$, so dass $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt. Zeigen Sie, dass A nach oben beschränkt ist, B nach unten beschränkt ist und die Ungleichung

$$\sup A \leq \inf B$$

   gilt. *(2 Punkte)*

5. Bestimmen Sie Infimum und Supremum der folgenden Mengen und geben Sie jeweils an, ob sie zu der Menge gehören (d.h. Minimum bzw. Maximum sind).

   (a) $M_1 := (0, 1) \setminus \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $M_2 := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$

   (c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x^2 - 1| < 3\}$

   (d) $M_4 := \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$ *(6 Punkte)*

Abgabe bis Freitag, den 21. September um 10:00 Uhr in A5