Stammfunktionen

(i) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ für $\alpha \neq -1$ und entweder $\alpha \in \mathbb{N}$ oder $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ für $x \neq 0$.

(iii) $\int e^x dx = e^x + C$.

(iv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$ für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

(v) $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$.

(vi) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$.

(vii) $\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$ für $x \notin \{(n + \frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(viii) $\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + C$ für $x \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ix) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$.

(x) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$ für $x \in [-1, 1]$.

Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x - x_0| + C & \text{für } l = 1 \\ \frac{-1}{(l-1)(x-x_0)^{l-1}} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{(a+bx)dx}{(x^2+px+q)^l} = \\ = \begin{cases} \frac{b}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(a - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} + C & \text{für } l = 1 \\ \frac{-b}{2(l-1)(x^2+px+q)^{l-1}} + \left(a - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} = \\ = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C & l = 1 \\ \frac{2x+p}{(l-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{l-1}} + \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{l-1}} + C & l \neq 1. \end{cases}$$

Substitutionen

(i)

$$\int_a^b f(\alpha t+\beta)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)dx$$

(ii)

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt + C$$

für $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und einer Funktion $R(\cdot,\cdot)$ in zwei Variablen. Substituiere $t = \sqrt[n]{ax+b} \Longrightarrow ax+b = t^n \Longrightarrow x = \frac{t^n-b}{a}$ und $dx = \frac{nt^{n-1}}{a}dt$.

(iii)

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)dx = \int R(\sinh t, \cosh t)\cosh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \sinh t$, $\sqrt{x^2+1} = \cosh t$ und $dx = \cosh t dt$.

(iv)

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)dx = \pm\int R(\pm\cosh t, \sinh t)\sinh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \pm\cosh t$, $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$ und $dx = \pm\sinh t dt$.

(v)

$$\int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)dx = \mp\int R(\pm\cos t, \sin t)\sin t dt + C.$$

mit der Substitution $x = \pm\cos t$, $\sqrt{1-x^2} = \sin t$ und $dx = \mp\sin t dt$.

(vi)

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} + C$$

mit der Substition $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(t)$ und $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, so dass gilt

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos(x) \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(x).$$

(vii)

$$\int R(\cosh x, \sinh x)dx = \int R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right)\frac{dt}{t} + C$$

mit der Substition $t = e^x$, $x = \ln(t)$ und $dx = \frac{dt}{t}$.