Vorname/Nachname:
Matrikelnummer:

Analysis I/HS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Zwischenklausur Analysis I

26.10.2007

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte 40.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1-11 stehen.
- Bitte schreiben Sie, bevor Sie mit der Klausur beginnen, auf das Deckblatt oben links *deutlich lesbar* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie *alle* Papierbögen wieder ab.
- Sie können ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen, ein Taschenrechner ist nicht erlaubt.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
mögliche Punkte	6	6	14	8	6	40
erreichte Punkte						

Analysis I/HS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis I am 26.10.2007

(a) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von

$$z := \frac{3-\imath}{2+\imath} + \frac{4+3\imath}{2-\imath}.$$

(3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie und skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z^2) = 0\}$$

(3 Punkte)

Analysis I/HS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

2. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis I am 26.10.2007

(a) Bestimmen Sie das Infimum und Supremum der Menge

$$B := \{3 - \tfrac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Existieren Minimum und Maximum? Begründen Sie Ihre Antworten.

(4 Punkte)

(b) Geben Sie (ohne Begründung) Infimum und Supremum der Menge

$$C := \{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$$

an. Existieren Minimum und Maximum ? Hinweis : $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$

(2 Punkte)

Analysis I/HS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

3. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis I am 26.10.2007

(a) Geben Sie **alle** Häufungspunkte der folgenden Folgen an und begründen Sie warum es Häufungspunkte sind.

(i) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n}{2n^2 + 5n + 2}$ *(3 Punkte)*

(ii) $a_n = (-1)^n + \imath^n$ *(3 Punkte)*

(b) Sei $b \in \mathbb{R}$ und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv definiert durch

$$a_1 = b \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$$

(i) Nehmen Sie an, dass die Folge für ein $a_1 = b \in \mathbb{R}$ konvergiert. Berechnen Sie unter dieser Annahme den Grenzwert. *(3 Punkte)*

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jeden beliebigen Startwert $a_1 = b \in \mathbb{R}$ monoton wachsend ist. *(3 Punkte)*

(iii) Bestimmen Sie alle Startwerte $a_1 = b \in \mathbb{R}$, so dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. *(2 Punkte)*

Analysis I/HS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

4. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis I am 26.10.2007

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion :

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(3 Punkte)

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(5 Punkte)

Analysis I/HS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

5. Aufgabe der Zwischenklausur Analysis I am 26.10.2007

Entscheiden Sie mit Begründung welche der folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3}{k!}$ *(3 Punkte)*

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+2k^2+5k-1}{2k^3+k+3}$ *(3 Punkte)*

Zusatzaufgabe :
Es gibt 2 Zusatzpunkte für jeden richtig berechneten Grenzwert der obigen Reihen, falls die betrachtete Reihe konvergiert.