Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

Übungsblatt 5

1. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz, Divergenz und Beschränktheit. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

   (a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

   (b) $b_n = \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2}$

   (c) $c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

   (d) $d_n = \frac{2^n+3^n}{5^n}$ *(4 Punkte)*

2. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. sie besitzt den Grenzwert 0. Beweisen Sie : $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n t_n) = 0$. *(2 Punkte)*

3. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie :

   (a) Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ hat die Folge $y_n := x_{n+k}$ genau dasselbe Konvergenzverhalten (und denselben Grenzwert) wie die Folge x_n.

   (b) Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Folge $(x_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Umordnung der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweisen Sie, dass die Folge $(x_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ das gleiche Konvergenzverhalten und im Falle der Konvergenz den gleichen Grenzwert wie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt.

   (c) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen den Grenzwert 0, wenn die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. *(4 Punkte)*

4. Finden Sie Beispiele für die folgenden Folgen und beweisen Sie, dass Ihre Wahl die Aussagen erfüllt.

   (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, aber $\lim a_n \neq \pm\infty$.

   (b) $\lim a_n = +\infty$ und $\lim b_n = -\infty$ und $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.

   (c) $\lim a_n = +\infty$ und $\lim b_n = -\infty$ und $\lim(a_n + b_n) = 0$.

   (d) $\lim a_n = +\infty$ und $\lim b_n = -\infty$ und $\lim(a_n + b_n) = -\infty$.

   (e) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim a_n = \lim b_n$. *(5 Punkte)*

5. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$. Beweisen Sie

   (a) Es gilt $a_n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Es gilt $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

   (d) Untersuchen Sie die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_1 = a$, $a \in [-1, 3]$ und $b_{n+1} = \sqrt{3 + 2b_n}$.

   (e) Was ändert sich in (d) bei Startwert $b_1 \in (3, +\infty)$? *(5 Punkte)*

Abgabe bis Freitag, den 12. Oktober um 10:00 Uhr in A5