

Übungsblatt 3

Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion :

- (a) $10^n + 18n - 28$ ist durch 27 teilbar.
- (b) Jede endliche nichtleere Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Minimum und ein Maximum.
- (c) Für eine beliebige reelle Zahl $a \neq 1$ gilt

$$\sum_{j=0}^n a^j = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

- (d) Für jede beliebige natürliche Zahl $k \leq n$ gilt

$$\sum_{l=1}^n \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Dabei ist $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ und $n! = 1 \cdot \dots \cdot n$, sowie $0! = 1$. Für $v, w \in \mathbb{N}$ und $v < w$ ist $\binom{v}{w} = 0$. (8 Punkte)

2. Finden Sie eine Formel für $\sum_{k=1}^n k^3$ mit Hilfe von Aufgabe 1(d). Hinweis : Schreiben Sie

$$k^3 = \alpha \binom{k}{3} + \beta \binom{k}{2} + \gamma \binom{k}{1}$$

und bestimmen Sie zunächst α, β und γ . Dann bilden Sie auf beiden Seiten die Summe $\sum_{k=1}^n$ und benutzen Aufgabe 1(d). (3 Punkte)

3. Beweisen Sie

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < a\} = a$$

für eine beliebige Zahl $a \in \mathbb{R}$. (3 Punkte)

4. Finden Sie zwei abzählbare Teilmengen A, B der natürlichen Zahlen mit $A \cup B = \mathbb{N}$ und $A \cap B = \emptyset$. (3 Punkte)

Bitte wenden !!!!

5. Beweisen Sie die Bijektivität der folgenden Abbildung :

$$f : (-2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{x+2} & x \leq 0 \\ \frac{x}{3-x} & x > 0 \end{cases}$$

Hinweis : Eine Funktion ist auch injektiv, wenn aus $x < y$ die Ungleichung $f(x) < f(y)$ folgt. (3 Punkte)

6.* Sei A eine Menge und $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ eine injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass $A \setminus \{f(2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichmächtig zu A ist. (3 Zusatzpunkte)

Abgabe bis Freitag, den 28. September um 10:00 Uhr in A5

Es gab Änderungen bei den Kriterien für die Klausuren, hier die aktuellen Anforderungen:

Bachelor (Wirtschaftsinformatik, Mathe/Informatik, SIT und VWL)
Zulassung zu der Endklausur : 40 % der Punkte der Übungsblätter, davon 20 % in der zweiten Hälfte des Semesters (also die zweite Hälfte getrennt betrachtet auch 40 %). Die Zwischenklausur darf jeder mitschreiben. Es wird zwei Teilklausuren geben, eine Zwischenklausur (26.10. 8.30 Uhr in A3), Gewichtung 1-fach und eine Endklausur (28.1.), Gewichtung 2-fach. Die Gesamtpunktzahl der Klausur errechnet sich als gewichtete Summe der Punkte der beiden Teilklausuren. Es wird kein Schein benötigt.

Lehramt und Diplom-Studiengänge :

Scheinkriterium : 50 % der Punkte der Übungsblätter, davon 25 % in der zweiten Hälfte des Semesters (also die zweite Hälfte getrennt betrachtet auch 50 %). Es wird zwei Teilklausuren geben, eine Zwischenklausur (26.10. 8.30 Uhr in A3), Gewichtung 1-fach und eine Endklausur (28.1.), Gewichtung 2-fach. Die Gesamtpunktzahl der Klausur errechnet sich als gewichtete Summe der Punkte der beiden Teilklausuren. Es gibt keine Voraussetzungen für die Zulassung zu den Klausuren.

Wirtschaftspädagogen mit Wahlfach Mathematik brauchen keinen Schein, sie müssen nur die Klausur (bestehend aus den beiden Teilklausuren mit der obigen Gewichtung gerechnet) bestehen.

Wirtschaftspädagogen mit Wahlfach Wirtschaftsinformatik brauchen nur einen Schein.