Übungsblatt 6

Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Bestimmen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert der Folgen (a_n)
   (a) $a_n = \left(\frac{3+4\imath}{5}\right)^n$
   (b) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *(3 Punkte)*

2. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen (z_n)
   (a) $z_n = \imath^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   (b) $z_n = \left(\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}\right)$
   Hinweis : Berechnen Sie die ersten Folgenglieder. *(3 Punkte)*

3. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die Folge $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_{n+1} = a_n(1 + \frac{2-a_n^2}{2a_n^2}) = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert (Beispiel 3.9.). Wir definieren nun die Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ durch $p_1 = 3$, $q_1 = 2$ und
   $$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{2q_n} + \frac{q_n}{p_n} = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{2p_nq_n}$$
   und definieren induktiv die Folge $(p_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(p_1, q_1) = (3, 2)$ und $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (p_n^2 + 2q_n^2, 2p_nq_n)$.
   (a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$.
   (b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{(\sqrt{2}+\frac{3}{2})q_n^2} \leq |\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2\sqrt{2}q_n^2}$.
   (c) Bestimmen Sie durch Ausrechnen der ersten Folgenglieder das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass $|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}| < 10^{-10}$. *(6 Punkte)*

4. (a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Zeigen Sie, dass dann auch
   $$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$
   konvergent ist mit dem gleichen Grenzwert x.
   (b) Finden Sie ein Beispiel für eine divergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. *(4 Punkte)*

5. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ beide gegen den gleichen Grenzwert a konvergieren. Zeigen Sie, dass dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. *(2 Punkte)*

6. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie :
   $$\overline{\lim}(a_n + b_n) = \overline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$$
   (2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, den 19. Oktober um 10:10 Uhr in A5