Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

# Übungsblatt 9

1. Zeigen Sie mit Definition 5.12. von Stetigkeit, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 3 \end{aligned}$$

   im Punkt $x = 2$ stetig ist. *(3 Punkte)*

2. Wo sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ?

   (a) $$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq -1 \\ x^2 + 5x + 7 & -1 < x \leq 0 \\ x + 7 & x > 0 \end{cases}$$

   (b) $$f(x) = \begin{cases} 1, \text{falls x rational} \\ 0, \text{falls x irrational} \end{cases}$$

   *(5 Punkte)*

3. Ist die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ Lipschitz-stetig ?
   Begründen Sie Ihre Aussage. *(3 Punkte)*

4. Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2nx + 2 & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass $f_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist und untersuchen Sie die Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Was ist die Grenzfunktion, ist die Folge gleichmäßig konvergent ? *(5 Punkte)*

5. Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $A \subset X$. Zeigen Sie : $A$ ist genau dann offen in $X$, wenn es eine offene Menge $U$ in $\mathbb{R}$ gibt mit $A = X \cap U$. *(4 Punkte)*

**Abgabe bis Freitag, den 9. November um 10 Uhr in A5**