Funktionentheorie II

HS 07

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen

1.1 Riemannsche Flächen

Definition 1.1. *Eine komplexe Karte eines topologischen Raumes X ist ein Homöomorphismus φ von einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$. $n \in \mathbb{N}$ ist die komplexe Dimension der Karte.*

Wir beschäftigen uns in dieser Vorlesung mit sogenannten Riemannschen Flächen, also komplex eindimensionalen Mannigfaltigkeiten. Um den Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit einzuführen, definieren wir zunächst holomorphe Funktionen von mehreren Variablen.

Definition 1.2. *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt holomorph, wenn sie reell differenzierbar ist und die Ableitungen komplex lineare Abbildung von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^m$ sind.*

Wenn $m = 1 = n$ dann erhalten wir die holomorphen komplexen Funktionen.

Definition 1.3. *Zwei komplexe Karten $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{C}^m$ heißen komplex verträglich, wenn die Verkettungen*

$$\psi\mid_{U\cap V} \circ(\varphi\mid_{U\cap V})^{-1} \text{ und } \varphi\mid_{U\cap V} \circ(\psi\mid_{U\cap V})^{-1}$$

der Einschränkungen $\varphi\mid_{U\cap V}$ und $\psi\mid_{U\cap V}$ und ihrer Umkehrabbildungen beide holomorph sind, also zueinander inverse holomorphe Abbildungen von offenen Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$ auf offenen Teilmengen des $\mathbb{C}^m$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sind. Ein komplexer Atlas eines topologischen Raumes X ist eine Familie von paarweise miteinander verträglichen komplexen Karten, deren Definitionsbereiche X überdecken.

Definition 1.4. *Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist ein metrisierbarer separabler topologischer Raum mit einem komplexen Atlas. Die Dimension ist offenbar auf allen Zusammenhangskomponenten konstant.*

Man kann Riemannsche Flächen als zusammenhängende eindimenionale komplexe Mannigfaltigkeiten definieren. Wir wollen sie aber zunächst anders definieren. Später werden wir dann sehen, dass beide Definitionen überseinstimmen.

Definition 1.5. *(Hausdorffraum) Eine topologischer Raum heißt Hausdorffraum, wenn je zwei verscheidenen Punkte offene disjunkte Umgebungen besitzen.*

Definition 1.6. *Ein wegzusammenhängender topologischer Hausdorffraum heißt topologische Fläche, wenn jeder Punkt eine offenen Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Umgebung von $\mathbb{C}$ ist. Eine topologische Fläche mit einem komplexen Atlas von komplex eindimensionalen Karten heißt Riemannsche Fläche.*

Beispiel 1.7. **(i)** *Jede zusammenhängende und damit auch wegzusammenhängende eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist offenbar eine topologische Fläche und damit auch eine Riemannsche Fläche.*

(ii) *Alle Gebiete in $\mathbb{C}$ sind offenbar Riemannsche Flächen.*

(iii) *Sei $\mathbb{P}^1$ der eindimensionale projektive komplexe Raum, d.h. die Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen in $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation*

$$(x, y) \sim (\lambda x, \lambda y) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Wenn $x \neq 0$, dann ist offenbar (x, y) äquivalent zu $(1, \frac{y}{x})$ und wenn $y \neq 0$, dann ist (x, y) äquivalent zu $(\frac{x}{y}, 1)$. Wir bezeichnen mit $z = \frac{x}{y}$. Dann entspricht die Teilmenge $\{[(x, y)] \in \mathbb{P}^1 \mid y \neq 0\}$ allen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ und die Teilmenge $\{[(x, y)] \in \mathbb{P}^1 \mid x \neq 0\}$ allen Zahlen $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$. Die Schnittmenge entspricht offenbar allen Zahlen $z \in \mathbb{C}^*$. Wir können $\mathbb{P}^1$ als topologischen Raum mit der Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von $\mathbb{C}$ identifizieren. Diese Einpunktkompaktifizierung ist die Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zusammen mit der Topologie, deren offene Menge aus den offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ und den Komplementen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ besteht.

Definition 1.8. *Eine glatte bzw. holomorphe Funktion auf einer Riemannschne Fläche X ist eine glatte bzw. holomorphe Funktion auf allen Definitionsbereichen von Karten eines komplexen Atlases, die auf den Schnittmengen überseinstimmt.*

Eine glatte bzw. holomorphe 1-Form ω auf einer Riemannschne Fläche X, besteht aus zwei glatten bzw. holomorphen Funktioen f_U und g_U auf den Definitionsbereichen

U aller Karten eines komplexen Atlases, die auf den Schnittmengen $U \cap V$ der Definitionsbereiche zweier Karten ϕ und ψ folgendes erfüllen:

$$f_V = \frac{d\psi}{d\phi} f_U \qquad\qquad g_V = \overline{\left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)} g_U.$$

Wir schreiben dann $\omega = f_U d\phi + g_U d\bar{\phi}$ auf dem Definitionsbereich U der Karte ϕ.

Eine glatte bzw. holomorphe 2-Form auf einer Riemannschen Fläche X ist eine glatte bzw. holomorphe Funktion f_U auf dem Definitionsbereich U jeder Karte eines komplexen Atlases, die auf den Schnittmengen $U \cap V$ zweier Karten ϕ und ψ folgendes erfüllen:

$$f_V = \frac{d\psi}{d\phi} \overline{\left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)} f_U.$$

Wir schreiben dann $\omega = f_U d\bar{\phi} \wedge d\phi$ auf dem Definitionsbereich U der Karte ϕ.

Wir haben die Abbildungen d', d'' und d von den glatten Funktionen in die glatten Einsformen, die auf den entsprechenden Funktionen auf dem Definitionsbereich U einer Karte ϕ eines komplexen Atlases definiert sind durch

$$d' f_U = \frac{\partial f_U}{\partial \phi} d\phi \qquad\qquad d'' f_U = \frac{\partial f_U}{\partial \bar{\phi}} d\bar{\phi} \qquad\qquad df = d'f + d''f.$$

Diese Abbildungen sind aucu auf den glatten 1-Formen definiert durch

$$d'(f_U d\phi + g_U d\bar{\phi}) = \frac{\partial f_U}{\partial \phi} d\bar{\phi} \wedge d\phi \quad d''(f_U d\phi + g_U d\bar{\phi}) = -\frac{\partial g_U}{\partial \bar{\phi}} d\bar{\phi} \wedge d\phi \quad d\omega = d'\omega + d''\omega.$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir schonmal die Aussagen auflisten, aus denen dann folgt, dass jede Riemannsche Fläche umgekehrt auch eine zusammenhängende eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Diese Aussage ist eine Folgerung von einem Satz aus der Topologie und einem Satz, der im wesentlichen eine Folgerung daraus ist, dass auf jeder Riemannschen Fläche mit kompaktem Rand das Dirichletproblem lösbar ist. Um den Satz aus der Topologie zu formulieren benötigen wir

Definition 1.9. *Ein topologischer Raum X heißt regulär, wenn jede abgschlossene Teilmenge $A \subset X$ und jedes $x \in X \setminus A$ zwei disjunkte Umgebungen $U \supset A$ und $V \ni X$ besitzen.*

Er heißt normal, wenn die Punkte abgschlossen sind und je zwei disjunkte abgschlossenen Mengen A und B disjunkte offene Umgebungen $U \supset A$ und $V \supset B$ besitzen.

Lemma 1.10. *Jede topologische Fläche X ist regulär.*

Beweis: Sei $A \subset X$ eine abgschlossene Teilmenge einer topologischen Fläche und $x \in X \setminus A$. Dann besitzt x eine offene Umgebung die hoöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Dann besitzt x auch eine offene Umgebung die homöomorph zu einer offenen Kugel $B(0, R) \subset \mathbb{C}$ ist, wobei der Homöomorphismus x aud 0 abbildet. Dann gibt es ein $0 < r < R$, so dass $B(0, r)$ homöomorph ist zu einer offenen Umgebung, die disjunkt ist zu A, weil andernfalls x im Abschluss von A liegen würde. Für kleinere $0 < r < R$ sind dann $B(0, r)$ hoöomoprh zu einer offenen Umgebung V von x, deren Abschluss disjunkt zu A ist. Dann ist das Komplement U von dem Abschluss eine Umgebung von A, die disjunkt zu V ist. **q.e.d.**

Definition 1.11. *Eine Basis der offenen Mengen ist eine Teilmenge der offenen Mengen, so dass es für alle $x \in X$ und alle Umgebungen U von x eine Menge in der Basis gibt, die x enthält und in U enthalten ist. Ein topologischer Raum erfüllt das 2.Abzählbarkeitsaxiom, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.*

Satz 1.12. *(Rado) Jede Riemannsche Fläche erfüllt das 2.Abzählbarkeitsaxiom.*

Wir beweisen diesen Satz im Abschnitt 1.7.

Lemma 1.13. *(Tychonoff) Jeder reguläre topologische Raum X, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist normal.*

Beweis: Die Punkte sind in einem regulären Raum abgschlossen. Seien A und B zwei abgeschlossene disjunkte Teilmengen von X. Weil X regulär ist besitzen A and B Überdeckungen durch offene Mengen, deren Abschlüsse disjunkt zu B bzw. A sind. Wenn X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann besitzen A und B sogar abzählbare Überdeckungen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch offene Mengen, deren Abschlüsse $\bar{U}_n \cap B = \emptyset$ bzw. $\bar{V}_n \cap A = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Wir ersetzen die beiden Folgen durch

$$U'_n = U_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \bar{V}_k \qquad V'_n = V_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \bar{U}_k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ offenen disjunkte Umgebungen von A und B. **q.e.d.**

Lemma 1.14. *(Urysohn) Für je zwei abgeschlossene disjunkte Teilmengen A und B eines normalen topologischen Raumes X gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.*

Beweis: Weil X normal ist, gibt es zwei offene Mengen G_0 und G_1, die folgendes erfüllen:

$$A \subset G_0 \subset \bar{G}_0 \subset G_1 \subset \bar{G}_1 \subset X \setminus B.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $D_n = \{t \in [0,1] \mid t2^n \in \mathbb{N}_0\}$ und $D_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ die Menge aller Zahlen im Intervall $[0,1]$, die sich als endliche Summen von Potenzen von $1/2$ schreiben lassen. Offenbar ist

$$\{0,1\} = D_0 \subset \{0, \tfrac{1}{2}, 1\} = D_1 \subset \{1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1\} = D_2 \subset D_3 \subset \ldots \subset D_\infty.$$

Wir definieren induktiv eine Abbildung G von D_∞ in die offenen Mengen von X, die folgendes erfüllt:

(i) $G(0) = G_0$ und $G(1) = G_1$.

(ii) Wenn $s < t \in D_\infty$, dann gilt $G(s) \subset \bar{G}(s) \subset G(t) \subset \bar{G}(t)$.

Weil es in jedem normalen Raum zwischen zwei offenen Mengen U und V, die $\bar{U} \subset V$ erfüllen eine weitere W gibt, die

$$U \subset \bar{U} \subset W \subset \bar{W} \subset V \subset \bar{V}$$

erfüllt, können wir solche Mengen induktiv für alle Zahlen in $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ definieren. Dann definieren wir eine Funktion

$$f : X \to [0,1], \quad t \mapsto f(x) = \begin{cases} \inf\{t \in D \mid x \in G(t)\} & \text{für } x \in G_1 \\ 1 & \text{für } x \notin G_1. \end{cases}$$

Diese Funktion erfüllt offenbar $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Wir müssen noch zeigen, dass f stetig ist. Sei $x \in X$ und $f(x) \in [0,1]$. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ und für $f(x) > 0$ eine Zahl $t_- \in D_\infty \cap (f(x) - \epsilon, f(x))$, und für $f(x) < 1$ eine Zahl $t_+ \in D_\infty \cap (f(x), f(x) + \epsilon)$. Für $f(x) = 0$ setzen wir $G(t_-) = \emptyset$ und für $f(x) = 1$ setzen wir $G(t_+) = X$. Dann gilt

$$G(t_-) \subset \bar{G}(t_-) \subset \bigcup_{t \in D_\infty \cap [0, f(x)]} G(t) \subset \bigcap_{t \in D_\infty \cap [f(x), 1]} \bar{G}(t) \subset G(t_+) \subset \bar{G}(t_+).$$

Also ist $(X \setminus \bar{G}(t_-)) \cap G(t_+)$ eine offene Umgebung von x, auf der $f(x)$ in $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ liegt. **q.e.d.**

Satz 1.15. *(Uryson) Ein topologischer regulärer Raum X ist metrisierbar und separabel, wenn er das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Beweis: Die Menge aller Paare von offenen Teilmengen U und V aus der abzählbaren Basis, die $\overline{U} \subset V$ erfüllen ist offenbar abzählbar. Deshalb gibt es eine Abzählung $(U_n, V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von solchen Paaren aus der abzählbaren Basis. Dann gibt es wegen dem Lemma von Urysohn eine Folge von stetigen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X nach $[0,1]$, die

$f_n|_{U_n} = 0$ und $f_n|_{X\setminus V_n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Diese Folge von Funktionen definiert also eine Abbildung F von X nach $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Auf dem Raum $[0,1]^{\mathbb{N}}$ der Folgen in $[0,1]$ definiert

$$d : [0,1]^{\mathbb{N}} \times [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, \quad ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n))_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|x_n - y_n|$$

eine Metrik. Offenbar ist die Abbildung F stetig. Wir zeigen jetzt, dass sie eine offene Abbildung auf das Bild als metrischen Unterraum von $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass für alle $x \in X$ und alle offenen Umgebungen $U \subset X$ von x, das Bild $F[U]$ die Schnittmenge einer offenen Umgebung von $F(x)$ mit $F[X]$ enthält. Für alle solchen $x \in U \subset X$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_N$ und $X \setminus U \subset V_N$. Dann enthält $F[U]$ die Menge aller $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F[X]$ mit $x_N \notin \overline{f_N[X \setminus U]}$. Also ist das Bild $F[U]$ in $F[X]$ offen.

Weil X ein Hausdorffraum ist, gibt es für je zwei verschienene Punkte von X auch ein f_n, das die beiden Punkte auf 0 und 1 abbildet. Also ist F ein Homöomorphismus auf das Bild als topologischne Unterraum von $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Insbesondere ist X metrisierbar. Wenn wir aus jeder offenen Teilmenge der abzählbaren Umgebungsbasis ein Element wählen, erhalten wir eine abzählbare dichte Teilmenge. Also ist X separabel. **q.e.d.**

Korollar 1.16. *Eine Riemannsche Fläche ist separabel und metrisierbar.* **q.e.d.**

1.2 Das analytische Gebilde

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Paare (a, f_a), wobei a ein Punkt von $\mathbb{C}$ ist und f_a ein Funktionskeim einer holomorphen Funktion f auf einer Umgebung von a. Für jede auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion f definiert für jedes $a \in U$ f offenbar einen Funktionskeim auf einer Umgebung von a. Deshalb definiert das Paar (U, f) eine Teilmenge $\{(a, f_a)|a \in U\} \subset \mathcal{R}$ von $\mathcal{R}$. Diese Teilmengen bilden die Umgebungsbasis einer Topologie auf $\mathcal{R}$. Eine Teilmenge $U \subset \mathcal{R}$ ist bezüglich dieser Topologie also genau dann offen, wenn es für jedes $(a, f_a) \in U$ einen Repräsentanten g von f_a gibt, der auf einer offenen Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ von a holomorph ist, so dass die Menge $\{(b, g_b)|b \in V\} \subset U$ in U enthalten ist.

Satz 1.17. **(i)** *$\mathcal{R}$ ist ein topologischer Hausdorffraum. .*

(ii) *Die Abbildung $p : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig.*

(iii) *Für jedes (a, f_a) in $\mathcal{R}$ gibt es eine offene Umgebung von (a, f_a) in $\mathcal{R}$, die durch p homöomorph auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ abgebildet wird.*

(iv) *Die Wegzusammenhangskomponente eines Elementes $(a, f) \in \mathcal{R}$ besteht aus allen analytischen Fortsetzungen von f_a läng stetiger Wege in $\mathbb{C}$ mit Anfangspunkt a. Diese Wegzusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$ sind Riemannsche Flächen.*

Beweis: Für (i) müssen wir zeigen, dass zwei verschiedene Elemente (a, f_a) und (b, g_b) von $\mathcal{R}$ disjunkte Umgebungen besitzen. Wenn a und b verschieden sind, besitzen a und b disjunkte offene Umgebungen $U \ni a$ und $V \ni b$. Dann gibt es auch zwei Repräsentanten f und g von f_a bzw. g_b, die auf disjunkten offenen Umgebungen $U \ni a$ und $V \ni b$ definiert sind. Die entsprechenden Mengen zu (U, f) und (V, g) sind dann disjunkte Umgebungen von (a, f_a) und (b, g_b). Wenn $a = b$ ist, dann kann die Differenz $f - g$ von zwei Repräsentanten f und g von f_a bzw. g_b bei $a = b$ höchstens eine Nullstelle endlicher Ordnung haben. Also gibt es wegen dem Nullstellensatz eine Umgebung U von $a = b$, auf der $f - g$ höchstens eine Nullstelle bei $a = b$ hat. Also sind die offenen Umgebungen zu (U, f) und (U, g) von (a, f_a) bzw. (b, g_b) disjunkt.
(ii) Jedes Element (a, f_a) im Urbild $p^{-1}[U]$ einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt einen Repräsentanten f von f_a, der auf einer offenen Umgebung $V \subset U$ definiert ist, dann enthält das Urbild die offene Umgebung (V, f) von (a, f_a). Also ist das Urbild jeder offenen Menge offen.
(iii) Sei $(a, f_a) \in \mathcal{R}$, f ein Repräsentant von f_a, der auf einer offenen Umgebung $U \ni a$ definiert ist. Dann ist die Einschränkung von p auf die offene Umgebung (U, f) von (a, f_a) ein Homöomorphismus von (U, f) auf U.
(iv) Die Topologie ist genau so definiert, dass jede stetige Abbildung $\varphi : I \to \mathcal{R}$ von einem (nicht notwendigerweise abgeschlossenem) Intervall I nach $\mathcal{R}$ eine analytische Fortsetzung eines Funktionskeimes längs des Weges $p \circ \varphi$ ist. Hierbei ist $p : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$, die Abbildung, die jedem Paar (a, f_a) den Fußpunkt $a \in \mathbb{C}$ zuordnet. Wegen (ii) ist $p \circ \varphi$ ein stetiger Weg in $\mathbb{C}$. Also bestehen die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$ aus allen analytischne Fortsetzungen eines Kunktionskeimes längs setiger Wege in $\mathbb{C}$. Dann ist jede Wegsusammenhangskomponente eine Riemannsche Flache. **q.e.d.**

1.3 Die universelle Überlagerung

Definition 1.18. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume heißt Überlagerung, falls es zu jedem Punkt $b \in Y$ eine offene Umgebung V gibt und zu jedem Punkt $a \in f^{-1}[\{b\}]$ im Urbild von $\{b\}$ eine offene Umgebung $U(a)$ gibt, so dass*

(i) $f^{-1}[V] = \bigcup_{a \in f^{-1}[\{b\}]} U(a)$ *disjunkte Vereinigung.*

(ii) *Für alle $a \in f^{-1}[\{b\}]$ ist die Einschränkung von f auf $U(a)$ ein Homöomorphismus von $U(a)$ auf V.*

Satz 1.19. *Sei $f : X \to Y$ eine Überlagerung. Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ und zu jedem stetigen Weg*

$$\alpha : [a,b] \to Y, \quad \alpha(a) = f(x_0)$$

mit Anfangspunkt $f(x_0)$ existiert ein eindeutig bestimmter stetiger Weg $\beta : [a,b] \to X$ mit

(i) $f \circ \beta = \alpha$

(ii) $\beta(a) = x_0$

Der Satz besagt, dass wir alle stetigen Wege in Y eindeutig zu stetigen Wegen in X hochheben können. Mann nennt ihn deshalb auch Wegeliftung.
Beweis: Eindeutigkeit: Wenn $\tilde{\beta}$ eine weitere Liftung mit Anfangswert x_0 ist, dann ist die Menge aller $t \in [a,b]$ mit $\beta(t) = \tilde{\beta}(t)$ wegen der Definition der Überlagerungsabbildung sowohl offen als auch abgeschlossen und deshalb gleich $[a,b]$.
Existenz: Wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ können wir den Weg x in endlich viele Abschnitte zerlegen, die jeweils in einer Menge V von der Form, wie sie in der Definition der Überlagerung beschrieben ist. Dann besitzt jeder Abschnitt offenbar eine Liftung. Aus diesen Liftungen können wir induktiv den Weg β zusammensetzen. **q.e.d.**

Dasselbe Beweisverfahren zeigt sogar:

Satz 1.20. *Sei $f : X \to Y$ eine Überlagerung, $Q = I \times J$, (I, J Intervalle) ein nicht notwendigerweise kompaktes Rechteck und $H : Q \to Y$ eine stetige Abbildung mit $H(q_0) = x_0$ für fest gewählte $q_0 \in Q$ und $x_0 \in X$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{H} : Q \to X$ mit*

(i) $f \circ \tilde{H} = H$

(ii) $\tilde{H}(q_0) = x_0$.

Zum Beweis kann man annehmen, dass Q kompakt ist weil man jedes Rechteck als aufsteigende Vereinigungen von kompakten Rechtecken ausschöpfen kann. Man kann ebenfalls annehmen, dass q_0 ein Eckpunkt von Q ist, indem man Q eventuell zerlegt. Dann folgt der Beweis wie bei der Kurvenliftung. **q.e.d.**

Definition 1.21. *Ein topologischer Raum X heißt lokal wegzusammenhängend, wenn jeder Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von X eine wegzusammenhängende Umgebung V von x besitzt. Topologische Flächen sind offenbar wegzusammenhängend. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass alle auftretenden Räume lokal wegzusammenhängend sind.*

Satz 1.22. *Seien $f : X \to Y$ eine Überlagerung und $g : Z \to X$ eine stetige Abbildung eines einfach zusammenhängenden Raumes Z nach X. Seien $c \in Z$ und $b \in Y$ zwei Punkte mit demselben Bild in Y. Dann existeirt eine eindeutige Liftung $h : Z \to Y$ mit $f \circ h = g$ und $h(c) = b$.*

Beweis: Wir verbinden einen bliebigen Punkt $z \in Z$ durch einen Weg mit c:

$$\alpha : [0,1] \to Z, \quad \alpha(0) = c \text{ und } \alpha(1) = z.$$

Sei β die eindeutige Liftung von $g \circ \alpha$. Dann definieren wir $h(z) = \beta(1)$. Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt, dass h nicht von der Wahl des Weges abhängt. Weil Z einfach zusammenhängend ist, können je zwei Wege stetig ineinander deformiert werden, sind also homotop. Dann sind wegen der Homotopieliftungseigenschaft auch die entsprechenden gelifteten Wege homotop. Deshalb hängt der Wert $h(z)$ der Abbildung h nicht von der Wahl des Weges α ab.

Für die Stetigkeit benutzen wir eine wegzusammenhängende Umgebung von $y_0 = h(z_0)$. Wir wählen zuerst eine offene Umgebung $V(y_0)$, die durch f homöomorph auf eine Umgebung von x_0 abgebildet wird. Danach wählen wir eine wegzusammenhängende Umgebung $W(z_0)$ mit $g[W(z_0)] \subset U(x_0)$. Wir behaupten, dass $h[W(z_0)]$ ganz in $V(y_0)$ enthalten ist. Das folgt wieder aus der Liftungseigenschaft von Wegen. **q.e.d.**

Korollar 1.23. *Sei $f : Y \to X$ eine Überlagerung eines einfach zusammenhängenden Raumes X. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis: Wende den vorangehenden Satz auf $Y = X$ und $g = \mathbb{1}_x$ an. Dann erhält man eine stetige Abbildung $h : X \to Y$ mit $f \circ h = \mathbb{1}_x$. Die Einschränkung von f auf das Bild $h[X]$ ist offenbar bijektiv. Weil X wegzusammenhängend ist, folgt aus der Liftungseigenschaft $h[X] = Y$. Also ist f ein Homöomorphismus. **q.e.d.**

Definition 1.24. *Eine Überlagerung $f : \tilde{X} \to X$ eines wegzusammenhängenden Raumes heißt universell, wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.*

Satz 1.25. *Sei $f : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung und $g : Y \to X$ eine beliebige Überlagerung. Dann existiert eine Überlagerung $h : \tilde{X} \to Y$, so dass $g \circ f - h$ ist.*

Beweis folgt aus dem vorangehenden Satz und Korollar. **q.e.d.**

Definition 1.26. *Sei $f : Y \to X$ eine Überlagerung. Eine Deckbewegung ist ein Homöomorphismus*

$$\gamma : Y \to Y \text{ mit } \gamma \circ f = f.$$

Die Gesamtheit aller Deckbewegungen einer Überlagerung bildet eine Gruppe und heißt Deckbewegungsgruppe.

Definition 1.27. *Sei Γ eine Untergruppe der Homöomorphismen eines topologischen Raumes X. Die Gruppe operiert frei, wenn folgendes gilt:*

(i) *Zu je zwei Punkten $a, b \in X$ existieren Umgebungen $U(a), U(b)$ mit*

$$\gamma[U(a)] \cap U(b) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(a) = b f.a. \gamma \in \Gamma$$

(ii) *Wenn ein $\gamma \in \Gamma$ einen Fixpunkt $a \in X$ hat, dann ist $\gamma = 1\!\!1_X$.*

Man kann nun leicht sehen, dass Deckbewegungen frei operieren. Wenn eine Gruppe Γ auf einem topologischen Raum X durch Homöomorphismen operiert, dann definiert folgende Relation eine Äquivalenzrelation:

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt ein } \gamma \in \Gamma \text{ mit } \gamma(a) = b.$$

Auf dem Raum der Äquivalenzklassen X/Γ nennen wir die Bilder von allen offenen Teilmengen von X offen, die Vereinigung von Äquivalenzklassen sind, unter der kanonischen Abbildung $X \to X/\Gamma$. Dadurch wird die Menge der Äquivalenzklassen X/Γ zu einem topologischen Raum.

Satz 1.28. **(i)** *Wenn Γ frei operiert, dann ist die natürliche Projektion $p : X \to X/\Gamma$ eine Überlagerung mit Deckbewegungsgruppe Γ.*

(ii) *Umgekehrt operiert die Deckbewegungsgruppe einer Überlagerung $F : X \to Y$ frei auf X*

(iii) *Sei schließlich $f : X \to Y$ eine reguläre Überlagerung, also eine Überlagerung, deren Deckbewegungsgruppe auf den Urbildern $f^{-1}[\{y\}]$ mit $y \in Y$ transitiv operiert. Dann ist Y ist homöomorph zu X/Γ, so dass die Überlagerung $f : X \to Y$ homöomorph ist zu $p : X \to X/\Gamma$.*

Beweis: **(i)** Wähle für ein $a \in X$ eine offene Umgebung $U(a)$, so dass $\gamma[U(a)] \cap U(a) = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. Dann ist $V(b) = p[U(a)]$ eine offene Umgebung von $b = p(a)$. Und das Urbild $p^{-1}[V(b)]$ besteht genau aus den Mengen $\gamma[U(a)]$ mit $\gamma \in \Gamma$. Aus $\gamma[U(a)] \cap \tilde{\gamma}[U(a)] \neq \emptyset$ folgt wegen der Gruppenwirkung von Γ auch $(\tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma)[U(a)] \cap U(a) \neq \emptyset$. Deshalb sind diese Mengen paarweise disjunkt und p ist eine Überlagerungsabbildung.
(ii) Wir zeigen zuerst (i) von der Definition einer freien Operation. Seien a und b zunächst Punkte in X mit $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es disjunkte offene Umgebungen von $f(a)$ und $f(b)$, deren Urbilder dann auch disjunkt sind. Für diese Urbilder gilt (i). Wenn a und b beide im Urbild eines Punkte von Y liegen, wählen wir eine entsprechende Umgebung, wie sie in der Definition der Überlagerungsabbildung beschrieben ist. Dann

erfüllen die entsprechenden disjunkten Umgebungen von a und b die Bedingung (i). Aus der Eindeutigkeit der Liftung folgt auch (ii).
(iii) Offenbar gibt es ganau dann eine bijektive Abbildung von X/Γ auf Y, die die Überlagerungsabbildung f in die kanonische Abbildung $X \to X/\Gamma$ transformiert, wenn Γ transitiv auf allen Fasern wirkt. Dann folgt (iii) aus (ii). **q.e.d.**

Sei X ein wegzusammenhängender Raum und $\pi : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Dann läßt sich jeder geschlossene Weg von $x_0 \in X$ nach x_0 für jedes $y \in \pi^{-1}[\{x_0\}]$ zu einem Weg von y zu einem Element in $\pi^{-1}[\{x_0\}]$ liften. Das ergibt eine Abbildung von $\pi(x_0, X)$ in die Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\pi^{-1}[\{x_0\}]$. Wenn x_1 in einer wegzusammenhängenden Umgebung von x_0 liegt, dann werden die Fundamentalgruppen $\pi(x_0, X)$ und $\pi(_1, X)$ aufeinander abgebildet. Wegen der Eundeutigkeit der Liftung induziert jedes Element von $\pi(x_0, X)$ dann sogar eine Deckbewegungsabbildung von $\pi : \tilde{X} \to X$. Umgekehrt existiert für jede Deckbewegung γ und für jedes $y \in \tilde{X}$ ein Weg von y nach $\gamma(y)$. Die Komposition mit π ist dann ein stetiger Weg von $\pi(y)$ nach $\pi(y)$. Weil $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, sind alle Wege von y nach $\gamma(y)$ zueinander homotop. Deshalb hängt die Homotopieklasse des Weges von $\pi(y)$ nach $\pi(y)$ nicht von der Wahl des Weges ab. Dadurch ehalten wir einen Gruppenhomomorphismus von der Deckbewegungsgruppe in die Fundamentalgruppe von X. Diese beiden Gruppenhomomorphismen sind offenbar zueinander invers.

Korollar 1.29. *Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung eines wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raumes. Dann ist die Deckbewegungsgruppe isomorph zu der Fundamentalgruppe von X.*

Satz 1.30. *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, dessen Topologie eine Umgebungsbasis von einfach zuzsammenhängenden Mengen besitzt. Dann existiert eine universelle Überlagerung.*

Beweis: Wir wollen einen Punkt $a \in X$ und definieren $\tilde{X}$ zunächst als die Menge von Momotopieklassen von stetigen Wegen von X mit Anfangspunkt a. Die Abbildung π, die jeder Homotopieklasse eines Weges den Endpunkt zuordnet, definiert eine Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$. Für alle $x \in X$ nennenwir die Elemente von $\pi^{-1}[\{x\}]$, also die Homotopieklasse von Wegen von a nach x auch Makierungen des Punktes $x \in X$. Wenn $x \in X$ und $A \in \pi^{-1}[\{x\}]$ eine Makierung von x ist, dann können wir jeder offenen einfach zusammenhängenden Umgebung U von x die Menge $\tilde{U}$ aller Homotopieklassen von Verknüpfungen von A mit stetigen Wegen in U zuordnen. Die menge aller solcher Teilmengen $\tilde{U}$ bildet die Umgebungsbasis einer Topologie $\tilde{X}$. Offenbar ist $\tilde{X}$ dadurch zusammenhängend und die Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$ ist eine Überlagerung. Sei $x_0 \in \pi^{-1}]\{a\}]$. Dann ist die Komposition von einem Element in $\pi(x_0, \tilde{X})$ mit π ein Element von γ von $\pi(a, X)$. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung entspricht diesem

Element eine Decktransformation, die x_0 auf x_0 abbildet. Dann folgt, dass γ homotop zur Identität ist. Wegen der Liftungseigenschaft ist dann auch das Element in $\pi(x_0, \tilde{X})$ homotop zur Identität. Also ist $\pi(x_0, \tilde{X})$ trivial. **q.e.d.**

Wenn eine Gruppe Γ auf einer Riemannschen Fläche X durch biholomorphe Abbildungen frei operiert, dann ist der Quotientenraum X/Γ offenbar auch eine Riemannsche Fläche.

Satz 1.31. *Zu jeder Riemannschen Fläche X existiert eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\tilde{X}$ und eine frei operierende Untergruppe Γ der biholomorphen Abbildungen von $\tilde{X}$, so dass X biholomorph ist zu $\tilde{X}/\Gamma$. Dabei ist $\tilde{X}$ die universelle Überlagerung von X und Γ die Gruppe der Decktransformationen von $\pi : \tilde{X} \to X$.*

Beweis: Offenbar erfüllt jede topologische Fläche die Voraussetzungen des letzten Satzes und besitzt also eine universelle Überlagerung. Diese universelle Überlagerung ist offenbar wieder eine topologische Fläche, und die universelle Überlagerung einer Riemannschen Fläche wieder eine Riemannsche Fläche, so dass $\pi : \tilde{X} \to X$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung ist. Dann wirken die Decktransformationen durch biholomorphe Abbildungen. Deshalb wirkt $\pi_1(x)$ auf $\tilde{X}$ durch biholomorphe Abbildungen und frei. Der Quotient dieser Wirkung ist offenbar wieder die Riemannsche Fläche X. **q.e.d.**

Die Quotientenflächen von zwei frei operierenden Untergruppen Γ und Γ' der Gruppe der biholomorphen Abbildungen einer Riemannschen Fläche stimmen offenbar genau dann überein, wenn die beiden Gruppen Γ und $\tilde{\Gamma}$ zueinander konjugiert sind.

1.4 Dirichletproblem auf $\mathbb{D}$

Im Dirichletproblem wird nach einer Funktion gesucht, die innerhalb eines beschränkten Gebietes harmonisch ist und auf dem Rand gleich einer gegebenen Funktion ist. Wir wollen uns hier auf Kreise $B(z_0, r)$ beschränken.

Definition 1.32. *Sei $g : \partial B(z_0, r) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Suche nach einer stetigen reellen Funktion f auf $\overline{B(z_0, r)}$, die*

(i) *auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist, und*

(ii) *deren Einschränkung auf $\partial B(z_0, r)$ gleich g ist,*

heißt Dirichletproblem.

Die Differenz zweier Lösungen des Dirichletproblems ist eine harmonische Funktion auf $B(z_0, r)$, die auf dem Rand verschwindet. Wenn alle solchen Funktionen identisch verschwinden, ist also die Lösung des Dirichletproblems, soweit sie existiert, eindeutig. Das folgt aus dem Maximumprinzip:

Satz 1.33. *(Maximumprinzip für harmonische Funktionen) Sei f eine harmonische reelle Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.*

(i) *Wenn $z_0 \in G$ ein lokales Maximum oder Minimum von f ist, dann ist f konstant.*

(ii) *Auf einer kompakten Menge $K \subset G$ nimmt f das Maximum und das Minimum auf dem Rand von K an.*

Beweis: Wenn z_0 ein Maximum bzw. Minimum von f ist, dann ist wegen dem Mittelwertsatz der Mittelwert von der nicht positiven bzw. negativen Funktion $f(z) - f(z_0)$ über kleine Kreise $\partial B(z_0, \epsilon)$ gleich Null. Also ist diese Funktion auf den kleinen Kreisen gleich Null. Dann ist das Urbild von $\{f(z_0)\}$ unter f sowohl offen als auch abgeschlossen, also gleich G. Daraus folgt (i). (ii) folgt sofort aus (i). **q.e.d.**

Die Verkettung einer holomorphen Funktion mit einer harmonischen Funktion lokal wieder der Realteil einer holomorphen Funktion und damit harmonisch. Das wollen wir jetzt ausnutzen. um den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen ähnlich wie die Cauchysche Formel auf harmonische Funktionen zu verallgmeinern. Weil wir jeden Ball $B(z_0, r)$ durch die biholomorphe Abbildung $z \to \frac{z-z_0}{r}$ auf den Ball $B(0,1)$ abbilden, genügt es diesen Ball $\mathbb{D}$ zu betrachten. Weil die Möbiustransformation Φ mit $\Phi(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ den Ball $\mathbb{D}$ auf sich selber abbildet und 0 nach z_0 abbildet, ist für jede harmonische Funktion auf $\mathbb{D}$, die sich stetig auf $\bar{\mathbb{D}}$ fortsetzen läßt, $f \circ \Phi$ eine harmonische Funktion auf $\mathbb{D}$, die sich stetig auf $\bar{\mathbb{D}}$ fortsetzen läßt. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz

$$(f \circ \Phi)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \circ \Phi)(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Damit erhalten wir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\varphi} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\varphi}}\right) d\varphi$$

Wir substituieren jetzt

$$e^{i\psi} = \frac{e^{i\varphi} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\varphi}}$$

und erhalten

$$e^{i\varphi} = \frac{e^{i\psi} - z_0}{1 - \bar{z}_0 e^{i\psi}}$$

bzw.

$$ie^{i\varphi} d\varphi = \frac{ie^{i\psi}(1 - \bar{z}_0 e^{i\psi}) - \bar{z}_0 ie\psi^(e^{i\psi} - z_0)}{(1 - \bar{z}_0 e^{i\psi})^2} d\psi$$

$$d\varphi = \frac{(1 - z_0\bar{z}_0)e^{i\psi}}{(1-\bar{z}_0 e^{i\psi})^2}\frac{1-\bar{z}_0 e^{i\psi}}{(e^{i\psi} - z_0)}d\psi = \frac{1-z_0\bar{z}_0}{(e^{-i\psi}-\bar{z}_0)(e^{i\psi}+z_0)}d\psi$$

Insgesamt folgt dann

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\psi})\frac{1-z_0\bar{z}_0}{|e^{i\psi}-z_0|^2}d\psi$$

Allgemein gilt dann

Satz 1.34. *(Poissonsche Darstellungsformel) Sei f eine stetige Funktion auf $\overline{B(z_0,r)}$, die auf $B(z_0,r)$ harmonisch ist. Dann gilt für alle $z \in B(z_0,r)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\psi})\frac{r^2 - |z-z_0|^2}{|z_0 + re^{i\psi} - z|^2}d\psi.$$

q.e.d.

Satz 1.35. *Umgekehrt sei g eine gegebene stetige reelle Funktion auf $\partial B(z_0,r)$. Dann ist die eindeutige Lösung des Dirichletproblems mit dem Randwert g gegeben durch*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\psi}-z|^2}d\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\Re\left(\frac{z_0+re^{i\varphi}+z}{z_0+re^{i\varphi}-z}\right)d\psi.$$

Beweis: Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $z \mapsto \frac{z_0+re^{i\varphi}+z}{z_0+re^{i\varphi}-z}$ offenbar auf $z \in B(z_0,r)$ eine konvergente Potenzreihe, die für alle $\epsilon > 0$ auf $z \in B(z_0, r-\epsilon)$ sogar gleichmäßig konvergiert. Also ist auch die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\frac{z_0+re^{i\varphi}+z}{z_0+re^{i\varphi}-z}d\psi$$

auf $B(z_0,r)$ eine konvergente Potenzreihe und damit holomorph. Dann ist f im Inneren von $B(z_0,r)$ der Realteil einer holomorphen Funktion und damit harmonisch.

Wir müssen noch zeigen, dass sich f stetig auf $\overline{B(z_0,r)}$ fortsetzen läßt und dort gleich g ist. Dazu bemerken wir, dass die Funktion $\varphi \mapsto \frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\varphi}-z|^2}$ für alle $z \in B(z_0,r)$ auf $\varphi \in [0,2\pi]$ positiv ist und wegen dem Poissonschen Darstellungssatz für $f = 1$ den Mittelwert 1 besitzt. Außerdem folgt für alle $\varphi \in [0,2\pi]$ und alle $0 < \delta \leq \sqrt[3]{2r}$ aus $|z_0 + re^{i\varphi} - z| \geq \delta$ und $r - \delta^3 < |z - z_0| < r$

$$\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\varphi}-z|^2} < \frac{r^2-(r-\delta^3)^2}{\delta^2} = \frac{\delta^3(2r-\delta^3)}{\delta^2} < 2r\delta.$$

Wegen der Stetigkeit von g gibt es für jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass für alle $\psi \in [0, 2\pi]$ mit $|z_0 + re^{i\varphi} - z_0 - re^{i\psi}| = |re^{i\varphi} - re^{i\psi}| < 2\delta$ gilt $|g(z_0 + e^{i\varphi}) - g(z_0 + e^{i\psi})| < \frac{\epsilon}{2}$. Weil $\partial B(z_0, r)$ kompakt ist, ist $|g|$ beschränkt durch ein $M > 0$. Offenbar können wir δ sogar immer kleiner oder gleich $\min\{1, \sqrt[3]{2r}, \frac{\epsilon}{8rM}\}$ wählen. Dann folgt für alle $z \in B(z_0, r) \cap B(z_0 + re^{i\varphi}, \delta^3)$

$$\begin{aligned}|f(z) - g(z_0 + e^{i\varphi})| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + e^{i\varphi})\right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z_0 + e^{i\psi} - z| < \delta} \left|g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + e^{i\varphi})\right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z_0 + e^{i\psi} - z| \geq \delta} \left|g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + e^{i\varphi})\right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi.\end{aligned}$$

Wegen $\delta \leq 1$ folgt aus $|z_0 + e^{i\varphi} - z| < \delta^3$ und $|z_0 + e^{i\varphi} - z| < \delta$ auch $|re^{i\varphi} - re^{i\psi}| < \delta + \delta^3 \leq 2\delta$. Wegen der Setigkeit von g ist dann das erste Integral kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Das zweite Integral ist wegen der obigen Abschätzung von $\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\varphi} - z|^2}$ kleiner als $2r\delta 2M$. Wegen $\delta \leq \frac{\epsilon}{8rM}$ ist dann auch das zweite Integral kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Also folgt

$$|f(z) - g(z_0 + e^{i\varphi})| < \epsilon \quad \text{für alle } z \in B(z_0, r) \cap B(z_0 + re^{i\varphi}, \delta^3).$$

Dann läßt sich f stetig auf $\overline{B(z_0, r)}$ fortsetzen und auf $\partial B(z_0, r)$ gilt $f = g$. **q.e.d.**

Korollar 1.36. *Sei f eine stetige Funktion auf einer offene Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$. Wenn f die Mittelwerteigenschaft hat, also für jeden abgschlossenen Ball in G der Funktionswert von f am Zentrum des Balles mit mit dem Miitelwert von F übere den Rand des Balles übereinstimmt, dann ist f harmonisch.*

Beweis: Für jeden abgeschlossenen Ball $\overline{B(z_0, r)}$ hat die Lösung g des Dirichlet Problems auf $\overline{B(z_0, r)}$, die auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$ gleich f ist die Mittelwerteigenschaft. Wegen der Linearität hat dann auch $f - g$ die Mittelwerteigenschaft und verschwindet auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$. In dem Beweis des Maximumprinzips haben wir nur die Mittelerteigenschaft benutzt. Also erfüllt $f - g$ auch das Maximumprinzip. Dann ist $f - g$ identisch gleich Null. Weil g auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist, ist dann auch $B(z_0, r)$ harmonisch. **q.e.d.**

Seien jetzt $0 < r < R$ zwei Radien, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Dann haben wir

$$R - r = |Re^{i\varphi}| - |z| \leq |Re^{i\varphi} - z| \leq |Re^{i\varphi}| + |z| = R + r.$$

Daraus folgt

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2-r^2}{|Re^{i\varphi}-z|^2} \leq \frac{R+r}{R-r}.$$

Satz 1.37. *(Harnackungleichung) Sei f eine positive harmonische Funktion auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$. Wenn G einen abgschlossenen Ball $\overline{B(z_0, R)}$ enthält, denn gilt für alle $z \in G$ mit $|z - z_0| = r < R$*

$$f(z_0)\frac{R-r}{R+r} \leq f(z) \leq f(z_0)\frac{R+r}{R-r}.$$

Beweis: Wenn wir die obige Ungleichung für den Poissonkern in die Poissonsche Darstellungdformel einsetzen, erhalten wir sofort diese beiden Ungleichungen. **q.e.d.**

Satz 1.38. *(Satz von Harnack) Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Dann ist jeder kompakte Grenzwert von auf G harmonischen Funktionen wieder harmonisch. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von auf G harmonischen Funktionen. Dann konvergiert entweder u kompakt gegen ∞ oder kompakt gegen eine harmonische Funktion.*

Beweis: Der Grenzwert einer auf G kompakt konvergenten Folge von stetigen Funktionen, die die Mittelwerteigenschaft haben, hat auch die Mittelwerteigenschaft. Wegen Korollar 1.36 ist dann der Grennzwert einer auf G kompakt konvergenten Folge von harmonischen Funktionen auch harmonisch.

Durch Übergang zu der Folge $(f_n - f_1)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir annehmen, dass alle Elemente der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht negativ sind. Wenn eine monoton wachsende Folge von auf G harmonischen Funktionen an einer Stelle $z_0 \in G$ konvergiert, dann wegen der Harnackschen Ungleichung auch glecihmäßig auf den Bällen um z_0 , deren entsprechende abgschlossene Bälle um z_0 mit doppeltem Radius in G enthalten ist. Auf den. Weil wir jede kompakte Teilmenge von G durch endlich viele Bälle überdecken können, so dass die entsprechenden abgschlossenen Bälle mit doppeltem Radius in G enthalten sind, folgt aus der Harnackungleichung, dass dann die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf allen kompakten Teilmengen von K gleichmäßig konvergiert. Die analogen Aussagen gelten auch, wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ konvergiert. **q.e.d.**

1.5 Subharmonische Funktionen

Um die einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen zu konstruieren, wollen wir auf solchen Flächen konforme Abbildungen konstruieren. Es stellt sich aber als leichter heraus die Existenz von harmonischen Funktionen zu zeigen und aus diesen dann holomorphe Funktionen zu konstruieren. Harmonische Funktionen haben gegenüber holomorphen Funktionen den Vorteil, dass wir auf sie als reelle Funktionen das Prinzip der monotonen Konvergenz anwenden können, wie wir es schon im letzten Abschnitt mit dem Satz von Harnack gemacht haben. Diesen Vorteil werden wir in diesem Abschnitt weiter entwickeln. Dazu erweitern wir zunächst die harmonischne Funktionen auf die sogenannten subharmonsichen Funktionen.

Definition 1.39. *Eine auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ stetige reelle Funktion heißt subharmonisch bzw. superharmonisch, wenn sie für jeden in G enhthalten abgsclossenen Ball $\overline{B(z_0, r)}$ am Zentrum z_0 einen Wert $f(z_0)$ annimmt, der nicht größer ist als der Mittelwert von f auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$, bzw. nicht kleiner ist als dieser Mittelwert.*

Offenbar ist die Summe, aber im Allgemeinen nicht die Differenz von zwei subharmonischen bzw. superharmonischenFunktionen wieder subharmonisch bzw. superharmonisch. Dasselbe gilt auch für das Produkt mit nicht negativen Zahlen. Während das Produkt einer subharmonischne Funktion mit einer negativen Zahl superharmonisch ist und umgekehrt.

Einige Eigenschaften von harmonischne Funktionen übertragen sich auf subharmonische Funktionen. Hier ist vor allem das Maximumprinzip zu nennen.

Satz 1.40. *(Maximumprinzip)*

(i) *Sei f eine subharmonsiche Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wenn f auf G ein Maximum besitzt, dann ist f konstant.*

(ii) *Seien f und g eine subharmonsiche und eine superharmonsiche Funktion auf einer beschränkten offenen Teilmenge G, die sich beide stetig auf den Rand von G fortsetzen lassen. Wenn $f(z) \leq g(z)$ für alle $z \in \partial G$ gilt, dann auch für alle $z \in G$.*

Beweis: (i) Sei $z_0 \in G$ ein Maximum von f, dann verschwindet der Mittelwert von der nicht positiven Funktion $f - f(z_0$ über die Ränder aller abgeschlossenen Bälle um z_0 in G. Also ist die Menge $z \in G \mid f(z) = f(z_0)\}$ sowohl abgeschlossen als auch offen, und damit gleich G.
(ii) Die Funktion $f - g$ is subharmonisch und nimmt auf dem Abschluss $\bar{G}$ von G ein Maximum an. Wegen (i) muss dieses auf dem Rand ∂G liegen, und ist deshalb nicht positiv. **q.e.d.**

Umgekehrt können wir auch subharmonische Funktionen durch ein solches Maximumprinzip charakterisieren.

Satz 1.41. *Eine stetige Funktion f auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann subharmonisch, wenn für jede auf einem offenen Gebiet $U \subset G$ harmonische Funktion g entweder $f + g$ auf U konstant ist oder kein Maximum annimmt. Analog ist f genau dann superharmonisch, wenn für jede auf einem offenen Gebiet $U \subset G$ harmonischne Funktionen g entweder $f + g$ auf U konstant ist oder kein Minimum besitzt.*

Beweis: Sei f eine auf G stetige Funktion f, die die Bedingungen von diesem Satz erfüllt. Auf einem Ball $B(z_0, r)$, dessen Abschluss in G enthalten ist, gibt es dann eine harmonische Funktion g, die auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$ mit f übereistimmt. Dann erfüllen $f - g$ auf $B(z_0, r)$ das Maximumprinzip in der Form (i). Also gilt $f(z) \leq g(z)$ für alle $z \in B(z_0, r)$, weil sonst die auf $\overline{B(z_0, r)}$ stetige Funktion $f - g$ auf $B(z_0, r)$ eine Maximum hätte. Damit ist f subharmonisch. Der Beweis für superharmonsiche Funktionen ist analog. **q.e.d.**

Korollar 1.42. *Eine auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ stetige Funktion f ist genau dann subharmonisch, wenn für jede kompakte Teilmenge $A \subset G$ jede auf A stetige Funktion, die auf dem Inneren von A harmonsich ist, genau dann auf A eine obere Schranke von f ist, wenn sie auf dem Rand ∂A eine obere Schranke von f ist.* **q.e.d.**

Korollar 1.43. *Das Maximum zweier subharmonischer Funktionen ist wieder subharmonisch.*

Beweis: Auf dem Rand ∂A einer abgschlossenen Teilmenge $A \subset G$ und auf A ist eine auf A stetige Funktion genau dann eine obere Schranke von dem Maximum zweier subharmonischer Funktionen, wenn sie eine obere Schranke von beiden subharmonischen Funktionen ist. Dann folgt sie Aussage aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

Korollar 1.44. *Eine auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ stetige Funktion f ist genau dann subharmonisch, wenn alle $z \in G$ eine offenen Umgebung besitzen, auf der f subharmonisch ist.*

Beweis: Für eine auf G stetige Funktion f sei die Bedingung erfüllt. Sei g eine auf einem Gebiet $U \subset G$ harmonische Funktion. Dann ist auch die Einschränkung von g auf eine Wegzusammenhangskomponente der Schnittmenge $U \cap V$ von U mit einer offenen Teilmenge $V \subset G$ ein Gebiet. Deshalb erfüllt $f + g$ dort das Maximumprinzip. Weil das für alle Wegsuzammenhangskomponenten von $U \cap V$ und für offenen Umgebungen V von allen Punkten von G gilt, erfüllt $f + g$ auf ganz U das Maximumprinzip. Also ist f subharmonisch. **q.e.d.**

Korollar 1.45. *Sei f eine auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ subharmonische Funktion. Für einen abgschlossenen Ball $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ sei g die Lösung des Dirichletproblems auf $B(z_0, r)$ mit Randwert $f|_{\partial B(z_0,r)}$. Dann ist auch die folgende Funktion subharmonisch:*

$$h: \quad G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{für } z \in B(z_0, r) \\ f(z) & \text{für } z \in G \setminus B(z_0, r). \end{cases}$$

Beweis: Auf $B(z_0, r)$ und $G\setminus\overline{B(z_0, r)}$ ist h wegen Korollar 1.44 subharmonisch. Wegen Korollar 1.42 ist auf $B(z_0, r)$ die Funktion g eine obere Schranke von f, und deshalb h auf G eine obere Schranke von f. Dann erfüllt h offenbar auch auf $\partial B(z_0, r)$ die Bedingung von Satz 1.41. **q.e.d.**

Wir können harmonsiche Funktionen als Grenzwerte von subharmonischne Funktionen konstruieren. Eins solches Verfahren geht auf Perron zurück.

Definition 1.46. *(Perronfamilie) Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene beschränkte Teilmenge und f eine stetige Funktion auf ∂G. Dann enthält die Perronfamilie $\mathcal{P}(G, f)$ alle auf G subharmonischne Funktionen g, die für alle $z_0 \in \partial G$ folgende Bedingung erfüllen:*

$$\limsup_{z\to z_0} g(z) \leq f(z).$$

Satz 1.47. *(Methode von Perron) Sei G eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ und f eine stetige Funktion auf ∂G. dann definiert*

$$h : G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto h(z) = \sup\{g(z) \mid g \in \mathcal{P}(G, f)\}$$

eine harmonsiche Funktion auf G.

Beweis: Weil G beschraänkt ist, ist ∂G kompakt, und f beschränkt. Jede obere Schranke von f ist wegen dem Maximumprinzip eine obere Schranke an alle Elemente der Perronfamilie $\mathcal{P}(G, f)$. Deshalb ist das Supremum in der Definition von h endlich und h eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion auf G. Für ein $z_0 \in G$ sei $B(z_0, r)$ ein Ball um z_0, dessen Abschluss in G enthalten ist. Dann existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$, deren Funktionswerte $(g_n(z_0)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $h(z_0)$ konvergiert. Wir konstruieren eine monton wachsende Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$ die auf $B(z_0, r)$ harmonisch sind und gegen h konvergieren. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei h_n auf $G \subset B(z_0, r)$ das Maximum von $g_1, \ldots, g_n$. Auf $B(z_0, r)$ sei h_n die Lösung des Dirichletproblems zu dem Randwert $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$ auf $\partial B(z_0, r)$. Wegen Krorllar 1.43 sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$ subharmonsich. Mit diesen Funktionen erfüllen dann auch die Funktionen h_n die Charakterisierung von subharmonischen Funktionen durch das Maximumprinzip in Satz 1.41. Dann ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar eine monoton wachsende Folge von subharmonischen Funktionen in $\mathcal{P}(G, f)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist insbesondere $h(z_0)$ eine obere Schranke an $h_n(z_0)$ und $g(z_0)$ eine untere Schranke. Deshalb konvergiert $(h_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $h(z_0)$. Wegen dem Satz von Harnack konvergiert dann $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $B(z_0, r)$ kompakt gegen eine harmonische Funktion H mit $H(z_0 = h(z_0)$.

Sei jetzt $z_1 \in B(z_0, r)$. Dann gibt es eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$, die bei z_1 gegen $h(z_1)$ konvergiert. Wir definieren wieder eine monoton wachsende Folge $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von harmonischen Funktionen auf $B(z_0)$, so dass h_n für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem Rand

$\partial B(z_0, r)$ mit dem Maxium von $g_1, \ldots, g_n, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n$ übereinstimmt. Auch diese Folge konvergiert wegen dem Satz von Harnack auf $B(z_0, r)$ kompakt gegen eine harmonische Funktion $\tilde{H}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auf $B(z_0, r)$ wegen dem Maximumprinzip $h_n \leq \tilde{h}_n$. Also gilt auch $H \leq \tilde{H}$. Bei z_0 stimmen aber beide Funktionene überein. Also ist z_0 eine lokales Minimum von $\tilde{H} - H$. Wegen dem Maximumprinzip müssen dann H und $\tilde{H}$ übereinstimmen. Aufgrund der Wahl von $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\tilde{H}(z_1) = h(z_1$. Also gilt auch $H(z_1) = h(z_1$. Weil das für alle $z_1 \in B(z_0, r)$ gilt, folgt auf $B(z_0, r)$ auch $h = H$. Also ist h harmonisch. **q.e.d.**

1.6 Das Allgemeine Dirichletproblem

Definition 1.48. *Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt Dirichletgebiet, wenn für jede stetige Funktion g auf ∂G eine harmonische Funktion f auf G existiert, die sich stetig auf den Abschluss von G fortsetzen läßt, und auf ∂G mit g übereinstimmt.*

Wir haben schon gesehen, dass alle offenen Bälle Dirichletgebiete sind. Wir werden jetzt gleich sehen, dass alle beschränkten Gebiete mit hinreichend glatten Rändern Dirichletgebiet sind.

Definition 1.49. *Sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $z_0 \in \partial G$. Eine Barriere für G in z_0 ist eine Familie $\{\psi_r / r < 0\}$ von Funktionen, so dass*

(i) *ψ_r ist auf $G \cap B(z_0, r)$ subharmonisch und nicht negativ.*

(ii) *ψ_r läßt sich stetig auf dem Abschluss von $G \cap B(z_0, r)$ fortsetzen. Die Fortsetzung verschwindet bei z_0 und ist auf $\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)$ gleich 1.*

Satz 1.50. *Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann ein Dirichletgebiet, wenn alle Randpunkte von G eine Barriere haben.*

Beweis: Sei zunächst G ein Dirichletgebiet. Für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ ist $z \mapsto (z - z_0)$ eine stetige Funktion, die nur bei z_0 verschwindet. Also gibt es für alle $z_0 \in \partial G$ auch eine stetige Funktion auf ∂G, die nur bei z_0 verschwindet. Sei f die entsprechende Lösung des Dirichletproblems. Für $r < 0$ sei c_r das Minimum von der Einschränkung von f auf $\bar{G} \cap \partial B(z_0, r)$. Wenn $c_r = 0$ wäre, hätte f in G ein Minimum und wäre damit konstant. Also ist $c_r < 0$. Die Familie $\frac{1}{c_r} \min\{f, c_r\}$ ist offenbar eine Barriere für G bei z_0. Also besitzt ein Dirichletgebiet an allen Randpunkten eine Barriere.

Sei jetzt umgekehrt G ein Gebiet, dass an einem $z_0 \in \partial G$ eine Barriere besitzt. Sei g eine stetige Funktion auf ∂G ist f die entpsrechende Perronfunktion. Wir können $g(z_0) = 0$ annehmen. Sei $\delta > 0$ so gewählt, dass $|g(z)| < \epsilon$ für alle $|z - z_0| < 2\delta$. Sei

$$\psi(2) = \begin{cases} \psi_\delta(z) & \text{für } z \in G \cap \overline{B(z_0, \delta)} \\ 1 & \text{für } z \in G \setminus B(z_0, \delta) \end{cases}$$

Offenbar ist ψ superharmonisch. Sei M das Maximum von $|g|$ auf ∂G. Wir behaupten jetzt, dass $-M\psi - \epsilon$ zu der Perronfamilie $\mathcal{P}(G, g)$ gehört. $-M\psi - \epsilon$ ist offenbar subharmonisch. Auf $\partial G \cap B(z_0, \delta)$ ist g größer als $-\epsilon$, und damit auch als $-M\psi - \epsilon$. An allen anderen Randpunkten ist g größer als $-M$ und damit auch als $-M\psi - \epsilon$. Dann folgt $f \geq -M\psi - \epsilon$. Umgekehrt sind alle Element von $\mathcal{P}(G, g)$ auf dem Rand ∂G durch $M\psi + \epsilon$ nach oben beschränkt. Wegen dem Maximumprinzip ist dann $M\psi + \epsilon$ von allen Elementen von $\mathcal{P}(G, g)$ auch eine obere Schranke. Also folgt auch $-M\psi - \epsilon \leq f \leq M\psi + \epsilon$. Weil das für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt $f(z_0)00 = g(z_0)$. Wenn also G bei allen Randpunkten $z_0 \in \partial G$ eine Barriere besitzt, ist die entsprechende Perronfunktion eine Lösung des Dirichletproblems. **q.e.d.**

Lemma 1.51. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Wenn für ein $a \in \partial G$ die konvexe Verbindungsgerade zwischen a und einer $b \in \mathbb{C} \setminus \bar{G}$ nicht zu $\bar{G}$ gehört, dann besitzt G bei a eine Barriere.*

Beweis: Die Möbiustransformation $z \to \frac{z-a}{z-b}$ bildet offenbar die konvexe Verbindungsgerade zwischen a und b auf $\mathbb{R}_0^-$ ab. Es gilt nämlich

$$\frac{z-a}{z-b} = -t \Leftrightarrow z(1+t) = a + bt \Leftrightarrow z = a + \frac{b-a}{1+t}t.$$

Die Teilmenge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ ist offenbar einfach zusammenhängend und besitzt die Abbildung $z \mapsto \sqrt{z}$ auf die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 0\}$. Diese wird durch eine geeignete Möbiustransformation offenbar auf $\mathbb{D}$ abgebildet. Dabei werden die beiden Blätter von $\sqrt{z}$ auf $\mathbb{R}_0^-$ offenbar auf dem Rand von $\mathbb{D}$ abgebildet. Weil wir das Dirichletproblem von $\mathbb{D}$ schon gelöst haben, besitzt also das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ bei 0 eine Barriere. Dann ist die Komposition mit obiger Möbiustransformation eine Barriere von dem Gebiet G bei $a \in \partial G$. **q.e.d.**

Jetzt können wir auch das Dirichletproblem auf beliebigen Riemannschen Flächen mit kompaktem Rand lösen.

Satz 1.52. *Sei X eine Riemannsche Fläche mit kompaktem Rand ∂X. Dann gibt es für jede stetige Funktion f auf ∂X eine harmonische Funktion auf X, die auf ∂X mit f übereinstimmt.*

Beweis: Wenn X nicht kompakt ist, sind die stetigen Funktionen auf X im Allgemeinen nicht beschränkt. Deshalb müssen wir die Perronfamilie modifizieren. Wir definieren in diesem Fall $\mathcal{P}(X, f)$ als die Menge aller subharmonischer Funktionen g auf dem Inneren von X, die für alle $x_0 \in \partial X$

$$\lim_{x \to x_0} \sup g(x) \leq f(x_0)$$

erfüllen und durch $\sup_{x\in\partial X} f(x)$ beschränkt sind. Offenbar ist dann auch das Maximum von zwei Elementen in dieser modifizierten Perronfamilie ein Element der modifizierten Perronfamilie, und für ein Element f aus der dieser modifizierten Perronfamilie, die in Korrolar 1.45 konstruierte subharmonische Funktion h auch ein Element der modifizierten Perronfamilie. Dann übertragen sich die Argumente vom Beweis vom Satz 1.47 und Satz 1.50 und zeigen, dass die entsprechende Perronfunktion

$$h : X \setminus \partial X \to \mathbb{C}, x \mapsto h(x) = \sup\{g(x) | g \in \mathcal{P}(G, f)$$

sich stetig auf X fortsetzen läßt und auf ∂X mit f übereinstimmt. Hierbei ist zu beachten, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand natürlich die Bedingung von Lemma 1.51 erfüllt. **q.e.d.**

1.7 Die Abzählbarkeit der Topologie

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Rado und die Existenz einer Zerlegung der Eins. Als Vorbereitung zeigen wir zunächst

Lemma 1.53. *(Poincare-Volterra) Sei X eine topologische Fläche, Y ein Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie, und $f : X \to Y$ eine stetige Abbbildung, so dass für alle $y \in Y$ die Urbilder $f^{-1}[\{y\}]$ diskrete Teilmengen sind, also Teilmengen, in denen alle Punkte offen sind. Dann hat auch X abzählbare Topologie.*

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie von Y. Dann sei $\mathcal{V}$ die Menge aller offenen Teilmengen $V \subset X$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) V hat abzählbare Topologie.

(ii) V ist für ein $U \in \mathcal{U}$ eine Zusammenhangskomponente von $f^{-1}[U]$.

Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{V}$ eine Basis der Topologie von X ist. Sei also $x \in X$ und $D \subset X$ eine Umgebung von x, Dann müssen wir zeigen, dass es ein $V \in \mathcal{V}$ gibt, mit $x \in V \subset D$. Weil die Faser $f^{-1}[\{f(x)\}]$ diskret ist, gibt es eine relativkompakte Umgebung $W \subset D$ von x, dessen kompakter Rand ∂W diese Faser $f^{-1}[\{f(x)\}]$ nicht trifft Dann ist auch $f[\partial W]$ kompakt und deshalb aggschlossen. Deshalb gibt es eine von ∂W disjunkte Umgebung $U \in \mathcal{U}$. Sei V die Zusammenhangskomponente von $f^{-1}[U]$, die x enthält. Weil V und ∂W disjunkt sind, ist V in W enthalten. Also ist $\mathcal{V}$ eine Basis der Topologie.

Für ein $V_0 \in \mathcal{V}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Teilmengen $\mathcal{V}_n$, die alle Elemente enthalten, so dass es eine $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ gibt mit $V_{k-1} \cap V_k \not{\emptyset}\emptyset$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Für jedes $U \in \mathcal{U}$ sind die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}[U]$ disjunkt. Weil $\mathcal{U}$

abzählbar ist, gibt es für jedes $V \in \mathcal{V}$ höchstens abzählbar viele Elemente von $\mathcal{V}$, die nicht disjunkt sind zu V. Also ist insbesodere $\mathcal{V}_1$ abzählbar. Induktiv folgt auch, dass alle $\mathcal{V}_n$ abzählbar sind. Weil X zusammenhängend ist, ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ gleich $\mathcal{V}$. Also besitzt X eine abzählbare Basis $\mathcal{V}$. **q.e.d.**

Beweis von Satz 1.12 von Rado: Sei X eine Riemannsche Fläche und $D \subset X$ eine offene Teilmenge, die homöomorph zu einer offenen Kugel in $\mathbb{C}$ ist. Dann gibt es in D zwei disjunkte kompakte Teilmengen A und B, die homöomorph zu zwei disjunkten kompakten Bällen sind. Insbeondere hat $Y = X \setminus (A \cup B)$ einen glatten und kompakten Rand. Dann gibt es eine Lösung h des Dirichletproblems auf Y, die auf ∂A gleich Null ist, und auf B gleich Eins. Dann ist $dh + i * dh$ eine geschlossene holomorphe Einsform, die auf der universellen Überlagerung $\tilde{Y}$ auch exakt ist. Also gibt es eine holomorphe Funktion $f : \tilde{Y} \to \mathbb{C}$, die nicht konstant ist. Wegen dem Satz vom offenen Bild, erfüllt f die Vorraussetzungen im vorangehenden Lemma. Also erfüllt die universelle Überlagerung $\tilde{Y}$ von $X \setminus (A \cup B)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Sei $\pi : \tilde{Y} \to Y$ die universelle Überlagerungsabbildung, und $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie von $\tilde{Y}$. Weil π offen ist, sind für alle $U \in \mathcal{U}$ die Mengen $\pi[U]$ offen in Y. Weil $\mathcal{U}$ erine Basis der Topologie von $\tilde{Y}$ ist, gibt es für jedes $x \in \tilde{Y}$ und jede Umgebung $V \subset Y$ von $\pi(x)$ ein Element $U \in \mathcal{U}$, das x enthält. Dann ist $\pi[U]$ eine Umgebung von $\pi(x)$ in V. Also ist $\{\pi[U] \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von Y. Dann erfüllt auch X das zweite Abzählbarkeitsaxiom. **q.e.d.**

Definition 1.54. *Ein topologischer Raum heißt lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine relativ kompakte Umgebung besitzt. Dabei heißt eine Menge relativkompakt, wenn ihr Abschluss kompakt ist.*

Wegen Heine-Borel sind alle endlichdimensionalen Räume $\mathbb{C}^n$ lokal kompakt. Deshalb ist auch jede komplexe Mannigfaltigkeit lokal kompakt. Also sind komplexe Mannigfaltigkeiten auch lokal kompakte metrisierbare Räume.

Satz 1.55. *Für einen lokalkompakten metrischen Raum X ist folgendes äquivalent:*

(i) *Es gibt eine wachsende Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener relativ kompakter Teilmengen von X, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\bar{O}_n \subset O_{n+1}$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$.*

(ii) *X ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen.*

(iii) *X ist separabel.*

Beweis: Die abzählbare Vereinigung $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bar{O}_n$ der kompakten Mengen $(\bar{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (i) überdeckt X, deshalb folgt (ii) aus (i).

Jeder kompakte metrische Raum besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Überdeckung von Kugeln mit Radius $1/n$. Die Menge aller Zentren dieser abzählbaren Menge von Kugeln, liegt offenbar dicht in dem metrischen Raum. Deshalb ist jeder kompakte metrische Raum separabel. Die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen, die jeweils in den Mitgliedern einer abzählbaren Überdeckung von X dicht liegen, liegt dicht in ganz X. Deshalb ist eine abzählbare Vereinigung von separablen Räumen separabel und (iii) folgt aus (i).

Sei X jetzt separabel. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die in X dicht liegt. Weil X lokalkompakt ist, besitzt jedes $x \in X$ eine relativ-kompakte offene Umgebung W_x. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $B(x, \frac{1}{N}) \subset W_x$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X dicht liegt, gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $x_M \in B(x, \frac{1}{2N})$. Wegen der Dreiecksungleichung liegt dann $B(x_M, \frac{1}{2N})$ in W_x und enthält x. Weil W_x relativ-kompakt ist, ist auch $B(x_M, \frac{1}{2N})$ relativ-kompakt. Also gibt es eine abzählbare Familie $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen relativ-kompakten Teilmengen von X, so dass jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus der Familie $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.(Eine solche Familie wird Basis der Topologie genannt).

Weil X lokalkompakt ist, gibt es für jedes $x \in X$ ein $r(x) > 0$, so dass $B(x, 2r(x))$ relativkompakt ist. Dann besitzt für jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ die offene Überdeckung $A \subset \bigcup\limits_{X\in A} B(x, r(x))$ eine endliche Teilüberdeckung. Die entsprechende endliche Vereinigung $B(x_1, 2r(x_1)) \cup \ldots \cup B(x_N, 2r(x_N))$ ist dann relativkompakt und enthält alle Kugeln $B(x, r)$ mit $x \in A$ und $r \leq \min\{r(x_1), \ldots, r(x_N)\}$. Also gibt es für jede kompakte Teilmenge A von X ein $r > 0$, so dass $\bigcup\limits_{x\in A} B(x, r)$ relativ kompakt ist.

Jetzt definieren wir induktiv eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von X, die die Bedingung (i) erfüllt. O_1 sei gleich V_1 und für jedes $n > 1$ sei $O_{n+1} = V_{n+1} \cup \bigcup\limits_{x\in\bar{O}_n} B(x, r)$, wobei r so gewählt ist, dass $\bigcup\limits_{x\in\bar{O}_n} B(x, r)$ relativkompakt ist. Weil $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = X$ gilt auch $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$ und nach Konstruktion sind alle $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativkompakt. Also folgt (i) aus (iii). **q.e.d.**

Lemma 1.56. *Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ einer komplexen Mannigfaltigkeit X gibt es eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Karten mit Definitionsbereichen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass*

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ϕ_n eine biholomorphe Abbildung von U_n auf eine offene Kugel $B(0, r_n) \subset \mathbb{C}^m$ mit Radius $r_n > 0$.*

(ii) $(\phi_n^{-1}[B(0, \frac{r_n}{2})])_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine offene Überdeckung von X.*

(iii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist U_n in einer offenen Menge von $\mathcal{U}$ enthalten.*

(iv) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind alle bis auf endlich viele Elemente von $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ schnittfremd mit U_n.*

Beweis: Für jeden Punkt $x \in X$ der komplexen Mannigfaltigkeit X gibt es offenbar eine Karte ϕ_x aus dem komplexen Atlas von X, deren Definitionsbereich x enthält und ein Mitglied der offenen Überdeckung, das auch x enthält. Indem wir die Karten $(\phi_x)_{x\in X}$ auf kleine offene Teilmengen einschränken, erhalten wir Karten $(\phi_x)_{x\in X}$, die sowohl (i) als auch (iii) erfüllen. Also gibt es für jede Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ von X und Karten $(\phi_x)_{x\in X}$, die (i) und (iii) erfüllen.

Jede komplexe Mannigfaltigkeit ist ein separabler metrisierbarer Raum. Deshalb gibt es eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen, die (i) aus dem vorangehenden Satz erfüllt. Wir definieren jetzt eine Folge von Überdeckungen $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von den komplexen Mannigfaltigkeiten $X_n = O_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ indem wir die Mitglieder von $\mathcal{U}$ mit der Menge $O_{n+1} \setminus \bar{O}_{n-2}$ schneiden und zu diesen Mengen noch O_{n-1} hinzufügen. Hierbei setzen wir $O_0 = O_{-1} = \emptyset$. Also besitzen für alle $n \in \mathbb{N}$ die kompakten Teilmengen $\bar{O}_n \setminus O_{n-1} \subset X_n$ von X_n Überdeckungen durch die Urbilder der offenen Bälle mit den halben Radien von den Karten. Diese Karten erfüllen dann bezüglich der Überdeckungen $\mathcal{U}_n$ die Bedingungen (i) und (iii). In $X_1 = O_2$ besitzt dann $\bar{O}_1$ eine endliche Teilüberdeckung durch Urbilder solcher offenen Bälle mit den halben Radien von den entsprechenden Karten. In $X_2 = O_3$ besitzt dann $\bar{O}_2 \setminus O_1$ eine endliche Teilüberdeckung durch Urbilder solcher offenen Bälle mit den halben Radien der entsprechenden Karten. Und für alle $n > 2$ ist $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ eine kompakte Teilmenge von X_n und besitzt eine solche endliche Teilüberdeckung durch Urbilder von offenen Bällen mit den halben Radien der entsprechenden Karten. Alle diese abzählbar vielen endlichen Teilüberdeckungen zusammen erfüllen offenbar (i)-(iii). Aufgrund der Konstruktion sind die Definitionsbereiche der Karten der Teilüberdeckungen von $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ und $\bar{O}_m \setminus O_{m-1}$ schnittfremd, wenn $|n - m| > 1$. Deshalb erfüllen alle diese Karten zusammen auch die Bedingung (iv). **q.e.d.**

Definition 1.57. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen $[0, 1]$-wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X heißt Zerlegung der Eins, wenn sie folgende beiden Bedingungen erfüllt:*

(i) Lokale Endlichkeit *Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U, auf der alle bis auf endlich viele Funktionen der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verschwinden.*

(ii) *Für alle $x \in X$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$. Wegen (i) ist diese Summe immer endlich.*

In diesem Abschnitt beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.58. *(Existenz einer glatten Zerlegung der Eins) Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine glatte Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X, so dass alle Funktionen f_n außerhalb einer abgeschlossenen Menge in den offenen Menge $U_n \in \mathcal{U}$ verschwinden.*

Beweis der Existenz der Zerlegung der Eins: Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann ist die reelle Funktion $f_{a,b}: \quad \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto f_{a,b}(x)$ mit

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq a \\ \exp(\frac{1}{x-b}\exp(\frac{1}{a-x})) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{für } b \leq x \end{cases}$$

eine glatte Funktion. Für alle $r > 0$ ist dann die Funktion $g_r(x) = f_{r/2,2r/3}(\|x\|)$ eine glatte Funktion auf dem $\mathbb{C}^n$, die außerhalb von $B(0,2r/3)$ verschwindet und auf $B(0,r/2)$ gleich 1 ist. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $\phi_n : U_n \to B(0,r_n)$ die Folge von Karten, die (i) aus dem vorangehenden Lemma erfüllt. Dann setzen wir die Funktion $h_n = g_{r_n} \circ \phi_n$ zu einer glatten Funktion auf X fort, indem wir sie außerhalb des Definitionsbereichs U_n der Karte ϕ_n gleich Null setzen. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die beiden Funktionen h_n und $1 - h_n$ eine Zerlegung der Eins auf X. Jetzt können wir eine Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den gewünschten Eigenschaften definieren:

$$f_n = h_n \prod_{l=1}^{n-1}(1-h_l) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_1 + \ldots + f_n + \prod_{l=1}^{n}(1-h_l) = 1.$$

Wegen der Bedingung (iv) sind auf einer Umgebung von jedem Punkt $x \in X$ nur endlich viele Funktionen h_n ungleich Null. Deshalb erfüllt diese Folge die Bedingung der lokalen Endlichkeit. Umgekehrt ist wegen (ii) in der Umgebung jedes Punktes mindestens eine Funktion $(1 - h_n)$ gleich Null. Deshalb ist die Summe $\sum f_n$ aller f_n überall gleich Eins. Wegen der Bedingung (iii) verschwindet jedes Element der Zerlegung der Eins außerhalb einer offenen Menge von $\mathcal{U}$. **q.e.d.**

Zum Abschluss können wir noch alle Elemente einer solchen Zerlegung der Eins, die außerhalb derselben offenen Menge in $\mathcal{U}$ verschwinden, zu einer Funktion aufsummieren. Das ist wegen der lokalen Endlichkeit offenbar möglich. Dadurch können wir erreichen, dass die abzählbare Familie der Funktionen der Zerlegung der Eins durch eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ durchnummeriert wird.

1.8 Der große Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Abschnitt werden wir aus dem Riemannschen Abbildungssatz und der Lösung des Dirichletproblems aus dem letzten Abschnitt den großen Riemannschen Abbildungssatz folgern.

Definition 1.59. *Eine Riemannsche Fläche X ohne Rand heißt planar, wenn jede geschlossene 1 Form mit kompaktem Träger exakt ist.*

Zunächst beweisen wir den sogenannten Anulus Satz. In dem Beweis benutzen wir Differentialformen auf Riemannschen Flächen und den $*$-Operator. Er ist so definiert, dass in beliebigen holomorphen Kordinaten $*dz = idz$ und $*d\bar{z} = id\bar{z}$ gilt. Weil unter holomorphen Koordinatenwecheln $z \mapsto \tilde{z}$, die Einsformen sich folgendermaßen transformieren, ist die Definition unabängig von den Koordinaten:

$$d\tilde{z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} dz \qquad\qquad d\bar{\tilde{z}} = \overline{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}} d\bar{z}.$$

Im Beweis benutzen wir drei lokale Eigenschaften, die man auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ leicht nachrechnen kann:

(i) Eine zweimal differenzierbare Funktion h ist genau dann harmonisch, wenn $*dh$ geschlossen ist, also $d * dh = 0$ gilt.

(ii) Für jede harmonische Funktion h ist jede komplexe Funktion f, die $df = dh + i * dh$ erfüllt, holomorph.

(iii) Für jede reelle 1-Form ω auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ ist $\omega \wedge *\omega$ bezüglich der Standardorientierung von $\mathbb{C}$ eine nicht negative Volumenform, die nur an den Nullstellen von ω Nullstellen hat.

Lemma 1.60. *(Anulus Satz) Sei X eine komplakte planare Riemannsche Fläche. Sei $D \subset X$ eine offene Teilmenge, die biholomorph ist zu $\mathbb{D}$. Dann ist das Komplement von zwei disjunkten abgeschlossenen Bällen in D als Riemannsche Fläche mit Rand mit einem geeigneten $R > 1$ biholomorph zu*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R\}$$

Für den Beweis benötigen wir noch etwas Vorbereitung. Wir identifizieren D mit $\mathbb{D}$ und wählen zwei Punkte $a, b \in \mathbb{D} \simeq D$ aus. Wir bezeichnen mit A_ϵ und B_ϵ die abgeschlossenen Bälle um a und b mit Radius ϵ und mit X_ϵ die Riemannsche Fläche $X \setminus (A_\epsilon \cup B_\epsilon)$. Hierbei sei ϵ klein genug, so dass sich A_ϵ und B_ϵ nicht schneiden. C sei die geschlossenen Kurve $\partial B(a, r)$ mit $\epsilon < r$ und klein genug, so dass sich auch $\overline{B(a, r)}$ und $\overline{B(b, \epsilon)}$ nicht schneiden.

Lemma 1.61. *Für jede geschlossene* 1 *Form* w *auf* X_ϵ *folgt aus* $\int_c w \in \mathbb{Z}$ *auf* $\int_\gamma w \in \mathbb{Z}$ *für alle abgeschlossenen Wege* γ *in* X_ϵ*.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass jede geschlossene 1 Form w, die $\int_c w = 0$ erfüllt, exakt ist. Wegen dem Satz von Stohes folgt aus $\int_c w = 0$ für kleine $t > 0$ $\int_{\partial A_\epsilon + t} w = 0$ und $\int_{\partial B_\epsilon + t} w = 0$. Also gibt es glatte Funktionen φ und ψ, die außerhalb von $A_{\epsilon+t}$ bzw. $B_{\epsilon+t}$ verschwinden, so dass $w - d\varphi - d\psi$ in einer Umgebung von ∂A_ϵ und ∂B_ϵ verschwindet. Dann läßt sich $w - d\varphi - d\psi$ zu einer geschlossenen 1 Form auf X mit kompaktem Träger fortsetzen. Weil X planar ist, folgt, dass $w - d\varphi - d\psi$ exakt ist. Also ist auch w auf X_ϵ exakt.

Als nächstes zeigen wir, dass es eine geschlossene Form Ω auf X_ϵ gibt, so dass $\int_c \Omega = 1$ und $\int_\gamma \Omega \in \mathbb{Z}$ für alle geschlossenen Wege $\gamma - X_\epsilon$ gilt. Dazu definieren wir zunächst

$$\Omega' = \frac{1}{2\pi} \Im \left(\frac{dz}{z-b} - \frac{dz}{z-a} \right) \text{ auf } \mathbb{D} \setminus \{a, b\}.$$

Dann gilt $\int_C \Omega' = 1$ mit der entsprechenden Orientierung von C und $\int_{\partial B(0,t)} \Omega' = 0$ für $t < 1$ aber dicht bei 1. Also gibt es eine glatte Funktion ζ auf X, so dass $\Omega' - d\zeta$ auf einer Umgebung von $\partial B(0, 1)$ verschwindet. Dann ist die Fortsetzung von $\Omega' - d\zeta$ auf X, die auf D verschwindet, exakt. Also gibt es eine geschlossene Form Ω auf X_ϵ, die auf $D \setminus \{a, b\}$ mit Ω' übereinstimmt, und auf $X \setminus \bar{D}$ exakt ist. Jeder geschlossene Weg von X_ϵ läßt sich zerlegen in geschlossene Wege in $B(0, t) \subset D$ mit $t < 1$ aber dicht bei t und geschlossene Wege in $X \setminus \bar{D}$. Dann folgt die Behauptung.

Für jede geschlossene 1 Form w auf X_ϵ, die $\int_C w \in \mathbb{Z}$ erfüllt, ist dann $w' = w - \left(\int_C\right) \Omega$ eine geschlossene 1 Form, die $\int_C w' = 0$ erfüllt. Diese ist also wegen der ersten Aussage geschlossen. Dann folgt für alle geschlossenen Wege γ in X_ϵ

$$\int_\gamma w = \int_C w \int_\gamma \Omega + \int_\gamma w' = \int_C w \int_\gamma \Omega \in \mathbb{Z}.$$

q.e.d.

Beweis des Anulus Satzes: Für $c > 0$ sei h_c die Lösung des Dirichletproblems von $\bar{X}_\epsilon$, die auf ∂B_ϵ verschwindet und auf ∂A_ϵ gleich c ist. Weil $\bar{X}_\epsilon$ kompakt ist, sind wegen dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen diese Lösung des Dirichletproblems eindeutig und alle $h_c = ch_1$ proportional zu h_1. Dann folgt

$$\int_{X_\epsilon} dh_c \wedge *dh_c = \int_{\bar{X}_\epsilon} d(h \cdot *dh_c) = \int_{\partial A_\epsilon} h_c * dh_c + \int_{\partial R_\epsilon} h_c * dh_c = c \int_c *dh_c > 0.$$

Also gibt es genau ein $c > 0$ mit $\int_c *dh_c = 1$. Dann folgt aus dem Lemma $\int_\gamma *dh_c \in \mathbb{Z}$ für alle geschlossenen Wege γ in X_ϵ. Also ist

$$f(x) = \exp\left(2\pi \int_{X_0}^{X} dh + i * dh\right) \exp(2\pi h(x_0))$$

für ein beliebiges $x_0 \in X_\epsilon$ eine glatte Funktion auf X_ϵ, die holomorph ist. Offenbar gilt für alle $x \in X_\epsilon$ $|f(x)| = \exp(2\pi h(x))$. Dann folgt aus dem Maximumsprinzip für harmonische Funktionen, dass das Bild von f in $\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < \exp(2\pi c)\}$ liegt. Das Bild von f ist also eine abgeschlossene und wegen dem Satz vom offenen Bild auch eine offene Teilmenge von $\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < \exp(2\pi c)\}$. Weil dieser Anulus zusammenhängend ist, ist f also eine surjektive Abbildung auf diesen Anulus. Wir zeigen jetzt, dass

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\bar{X}_\epsilon} df \wedge d\bar{f} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\{z \in \mathbb{C} || < |z| < \exp(2\pi c)} dz \wedge d\bar{z} = \exp(4\pi c) - 1.$$

gilt. Das folgt aus

$$df \wedge d\bar{f} = f\bar{f}\frac{df}{f} \wedge \frac{d\bar{f}}{f} = -2i4\pi^2 \exp(4\pi h) dh \wedge *dh$$

und wegen

$$\int_{\partial A_c} *dh = -\int_{\partial B_\epsilon} *dh = -1.$$

Dann ist f aber auch injektiv, und damit auch biholomorph. **q.e.d.**

In dem Beweis des großen Riemannschen Abbildungssatzes benötigen wir neben der Lösung des Dirichletproblems aus dem letzten Abschnitt und dem Anulus Satz auch noch eine erweiterte Version des Saztes von Montel, die die Konvergenz von sogenannten schlichten Funktionen charakterisiert. Bevor wir diesen Satz von Köbe beweisen können benötigen wir noch etwas Vorbereitung.

Lemma 1.62. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $\mathbb{C} \setminus G$ innere Punkte enthält. Dann besitzt jede Folge von holomorphen Funktionen von $\mathbb{D}$ nach G, die 0 auf ein Element $x_0 \in G$ abbildet, eine kompakt konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $a \in \mathbb{C}$ ein innerer Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$. Dann wird durch $z \to \frac{1}{z-a}$ das Gebiet G biholomorph auf ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ abgebildet. Also folgt die Aussage aus dem Satz von Montel. **q.e.d.**

Lemma 1.63. *Die Menge der schlichten Funktionen f von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist kompakt. D.h. jede Folge in dieser Menge besitzt eine komapkt konvergente Teilfolge und die Grenzwerte liegen auch in dieser Menge.*

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfoge von schlichten Funktionen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder eine schlichte Funktion ist. Sei r_n für alle $n \in \mathbb{N}$ der maximale Radius, so dass $f_n[\mathbb{D}] \supset B(0, r_n)$ enthält. Sei $a \in \partial B(0, r_n)$ ein Punkt, der nicht zu $f[\mathbb{D}]$ gehört. Dann setzen wir $g_n = f_{n\setminus a}$. Offenbar bildet dann g_n $\mathbb{D}$ auf eine Menge ab, die $\mathbb{D}$ enthält, aber nicht 1. Weil $g_N[\mathbb{D}]$ einfach zusammenhängend ist, gibt es dann eine holomorphe Funktion $\psi g_n[\mathbb{D}] \to \mathbb{C}^x$ mit $\psi(0) = i$ und $\psi^2(z) = z - 1$ für alle $z \in g_n[\mathbb{D}]$. Wir setzen $h_n = \psi \circ g_n$. Dann gilt $h_n^2 = g_n - 1$.

Wir behaupten jetzt, dass aus $w \in h_n[\mathbb{D}]$ folgt $-w \in h_n[\mathbb{D}]$. Das folgt wie im Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes aus der Injektivität von g_n. Weil $\mathbb{D} \subset g_n[\mathbb{D}]$ ist, ist $U = \psi[\mathbb{D}] \subset h_n[\mathbb{D}]$. Daraus folgt $-U \cap h_n[\mathbb{D}] = \emptyset$. Wegen dem vorangehenden Lemma besitzt dann $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Da $f_n = a_n(1 + h_n^2)$ und $|a_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, besitzt dann auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert f ist dann entweder injektiv oder konstant. Weil $f(0) = 1$ gilt ist f eine schlichte Funktion. **q.e.d.**

Korollar 1.64. *(Köbe) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $x_0 \in G$. Dann ist die Menge aller auf G schlichten Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 1$ kompakt. D.h. jede Folge in dieser Menge besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge und der Grenzwert liegt auch in der Menge.*

Beweis: Jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ besitzt eine endliche Überdeckung von offenen Bällen, deren Abschlüsse in G enthalten sind. Also gibt es auch endlich viele Kreisketten mit Anfangspunkt x_0 von abgeschlossenen Bällen in G deren Einkreise K überdecken. Für jede solche Kreikette folgt die kompakte Konvergenz aus dem vorangehenden Lemma. Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine dicht Teilmenge von G. Wie in dem Beweis vom Satz von Arzela Ascoli existiert dann eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die bei allen $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $|g_n(x_m) - y_m| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq m$ erfüllt. Diese Teilfolge konvergiert dann kompakt auf G gegen eine schlichte Funktion. **q.e.d.**

Lemma 1.65. *Die Riemannsche Fläche X sei eine abzählbare Vereinigung von offenen zusammenhängenden Teilmengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt:*

(i) *$U_{n+1} \supset U_n$ und*

(ii) *es gibt eine biholomorphe Abbildung f_n von U_n auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung f von X auf eine Gebiet in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir wählen einen Punkt $x_0 \in U_1$ und einen lokalen Parameter z bei x_0 mit $z(x_0) = 0$ und $z'(x_0) \neq 0$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eineutige komplexe Zahlen a_n und b_n, so dass die Funktionen

$$g_n(x) = a_n f_n(x) + b_n g_n(x_0) = 0 \text{ und } \frac{dg}{dz}(x_0) = 1$$

erfüllen. Wir behaupten jetzt, dass eine Teilfolge von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X kompakt gegen eine injektive holomorphe Funktion f konvergiert, die also X biholomorph auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ abbildet. Offenbar genügt es zu zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(g_{n+m}g_m^{-1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $g_m[U_m] \subset \mathbb{C}$ kompakt gegen eine injektive holomorphe Funktion von $g_m[U - m]$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ konvergiert. Aufgrund der Definition von g_m gilt offenbar für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(g_{n+m}g_m^{-1})(0) = 0 \quad \text{und} \quad (g_{n+m}g_m^{-1})'(0) = 1.$$

Wegen dem Satz von Köbe folgt, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ diese Folgen kompakt konvergente Teilfogen besitzen. Wir wählen also zuerst eine auf U_1 kompakt konvergente Teilfolge. Danach modifizieren wir induktiv für alle $m \in \mathbb{N}$ jeweils die Elemente mit Index $n \geq m$, so dass die Teilfolgen auf U_m konvergieren. Dadurch erhalten wir eine auf X kompakt konvergente Teilfolge. Der Grenzwert ist eine injektive holomorphe Funktion f mit $f(x_0) = 0$ und $\frac{df}{dz}(x_0) = 1$. **q.e.d.**

Lemma 1.66. *Jede kompakte planare Riemannsche Fläche X ist biholomorph zu $\mathbb{P}^1$.*

Beweis: Wir wählen eine offene Teilmenge $D \subset X$, die biholomorph zu D ist, und zwei Punkte $a, b \in D$. Dann ist $X \setminus \{a, b\}$ wegen dem Annulus Satz eine abzählbare Vereinigung von offenen Mengen $U_n = X \setminus (B(a, \frac{1}{n}) \cup B(b, \frac{1}{n})$ die alle Voraussetzungen im vorangehenden Lemma erfüllen. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung f von $X \setminus \{a, b\}$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wenn f bei a oder b beschränkt ist, dann läßt sich f wegen dem Riemannschen Hebbarkeitssatz auf $X \setminus \{b\}$ bzw. $X \setminus \{a\}$ holomorph fortsetzen. Die holomorphe Fortsetzung ist dann offenbar auch injektiv. Weil f injeitiv ist kann f also nicht bei a und b beschränkt sein. Wegen dem Satz von Casorati Weierstraß un der Injektivität von f, kann f bei a und b keine wesentliche Singularität haben. Dann hat f bei a und b höchstens einen Pol erster Ordnung, weil sonst f nicht injeitv wäre. Also können wir an den Singularitäten von f, f auf $\mathbb{P}^1$ holomorph fortsetzen. Wegen der Injektivität von f können also a und b nicht beides Pole von f sein. Also ist eine Element von $\{a, b\}$ ein Pol erster Ordnung und ein Element eine hebbare Singularität. Dann läßt sich f zu einer injektiven holomorphen Abbildung von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{P}^1$ fortsetzen. Das Bild unter der Fortsetzung ist kompakt und wegen dem Satz vom offenen Bild offen. Weil $\mathbb{P}^1$ zusammenhängend ist also ganz $\mathbb{P}^1$. Also läßt sich f zu einer biholomorphen Abbildung von X nach $\mathbb{P}^1$ fortsetzen. **q.e.d.**

Lemma 1.67. *Sei X eine Riemannsche Fläche mit zwei offenen Teilmengen U und D, wobei D biholomorph zu $\mathbb{D}$ ist und $X = U \cup D$. Wenn U planar ist, dann auch X.*

Beweis: Sei ω eine geschlossene 1-Form auf X. Dann ist $\omega|_D$ eine geschlossene 1-Form auf $D \simeq \mathbb{D}$. Weil $\bar{\mathbb{D}}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es dann eine glatte Funktion f auf $\mathbb{D}$, so dass $\omega|_{\bar{D}} = df$ gilt. Mit einer zu $X = U \cup D$ gehörenden Zerlegung der Eins gibt es eine glatte Funktion f auf D, so dass $\omega|_{X \setminus U} = df|_{X \setminus U}$ gilt, und die außerhalb von D verschwindet. Dann ist $\omega - df$ eine Eins-Form mit kompaktem Träger in U, die geschlossen ist. Weil U planbar ist, ist dann $\omega - df$ exakt, und deshalb auch ω. **q.e.d.**

Lemma 1.68. *Jede Riemannsche Fläche ist eine abzählbare Vereinigung von offenen Mengen $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die gilt*

(i) *$O_{n+1} \supset O_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *$\bar{O}_n$ ist kompakt und ∂O_n besitzt an allen Punkten eine Barriere.*

Beweis: Wir benutzen die offenen Mengen $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die entpdrechenden Karten $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir zeiegn dass für eine geeignete Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Radien mit $0 < \frac{r_n}{2} \leq R_n < r_n$ die offenen Mengen

$$O_n = \bigcup_{k=1}^{n} \phi_n^{-1}[B(0, R_n)] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

die Bedingungen (i)-(ii) erfüllen. Indem wir die Radien induktiv auswählen, genügt es offfenbar zu zeigen, dass wir für alle $n \in \mathbb{N}$ den Radius $\frac{r_{n+1}}{2} \leq R_{n+1} < r_{n+1}$ sowählen können, dass der Rand $\partial\phi_{n+1}^{-1}[\overline{B(0, R_{n+1})}]$ den Ränder der vorherigen Mengen $\partial\phi_1^{-1}[\overline{B(0, R_1)}], \ldots, \partial\phi_n^{-1}[\overline{B(0, R_n)}]$ in jeder Karte des komplexen Atlasses transversal schneidet. Die Realteile der logarithmischen Koordinaten $\ln(\phi_{n+1})$ sind die Logarithmen der Abstände zu $\phi_{n+1}^{-1}(0) \in U_{n+1}$. Weil der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch ist, sind die Funktionen auf den Rändern der obigen Mengen reellanalytisch. Deshalb gibt es höchstens endliche viele kritische Werte von dieser reell analytischen Funktion auf $\partial\phi_1^{-1}[\overline{B(0, R_1)}], \ldots, \partial\phi_n^{-1}[\overline{B(0, R_n)}]$, und damit auch ein $\frac{r_{n+1}}{2} \leq R_{n+1} < r_{n+1}$ mit den gewünschten Eigenschaften. **q.e.d.**

Satz 1.69. *Für jede planare Riemannsche Fläche X gibt es eine biholomorphe Abbildung f von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{P}^1$.*

Beweis: Wenn X kompakt ist, haben wir $X = \mathbb{P}^1$ gezeigt. Sei also X nicht kompakt. Dann ist X eine abzählbare Vereinigung von offenen Mengen $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die (i) und (ii) aus dem vorangehenden Lemma erfüllen. Jedes $\bar{O}_n$ ist kompakt. Der Rand ist dann eine eindliche Vereinigung von S^1. Der Beweis des vorangehenden Lemmas zeigt sogar, dass jede Randkomponente auch einen Kragen besitzt, also eine Menge, die homöomorph zu $S^1 \times [0, 1)$ ist. Der Beweis des Anulus Satzes zeigt dann, dass diese Mengen biholomorph zu einem Anulus sind. Also können wir $\bar{O}_n$ durch Vereinigungen mit endlich vielen kreisscheiben $\mathbb{D}$ kompaktifizieren. Wegen Lemma sind alle diese Kompaktifizierungen planar, also biholomorph zu $\mathbb{P}^1$. Dann sind alle O_n biholomorph zu offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Also folgt aus Lemma, dass X biholomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. **q.e.d.**

Satz 1.70. *Für eine Riemannsche Fläche X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Jede geschlossene reelle glatte 1-Form ist exakt.*

(ii) *X ist entweder biholomorph zu $\mathbb{P}^1$, oder zu $\mathbb{C}$, oder zu $\mathbb{D}$.*

(iii) *X ist einfach zusammenhängend.*

Beweis: (i)$\Longrightarrow$(ii) Jede Riemannsche Fläche X, die (i) erfüllt ist insbesondere planar. Also ist sie biholomorph zu einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, das (i) erfüllt. In dem Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes wird nur benutzt, dass für alle $a \notin G$ die holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ eine holomorphe Stammfuncktion besitzt. Das folgt aus (i). Deshalb ist folgt (ii) aus (i). (iii) folgt offenbar aus (ii).
(iii)$\Longrightarrow$(i) Wir können jede Homotopie auf einer Riemannschen Fläche aus endliche vielen Homotopien innerhalb des Definitionsbereiches einer Karte zusammensetzen. Deshalb gilt der Monodromiesatz auch auf Riemannschen Flächen. Insbesondere ist auf einer einfach zusammenhängendend Riemannschen Fläche X jede geschlossene Einsform exakt. **q.e.d.**

Satz 1.71. *(Uniformisierung) Jede Riemannsche Fläche X gehört zu einer der folgenden Klassen:*

(i) *X ist biholomorph zu $\mathbb{P}^1$.*

(ii) *Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ ist biholomorph zu $\mathbb{C}$, und X is entweder biholomorph zu $\mathbb{C}$, oder zu $\mathbb{C}^*$ oder zu einer elliptischen Kurve.*

(iii) *Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ is biholomorph zu $\mathbb{D}$, und X ist biholomorph zu dem Quotienten von $\mathbb{D}$ modulo einer frei auf $\mathbb{D}$ operierendend Untergruppe von der Untergruppe der Möbiusgruppe, die $\mathbb{D}$ auf sich selber abbildet.*

Beweis: Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ ist wegen dem vorangehenden Satz entweder biholomorph zu $\mathbb{P}^1$, oder zu $\mathbb{C}$, oder zu $\mathbb{D}$. Also genügt es zu zeigen, dass im ersten Fall (i), im zweiten Fall (ii) und im dritten Fall (iii) gilt.

Sei $\tilde{X}$ biholomorph zu $\mathbb{P}^1$. Dann ist X biholomorph zu dem Quotienten von $\mathbb{P}^1$ modulo einer frei operierenden Untergruppe der biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{P}^1$. Jede biholomorphe Abbildung von $\imath^1$ ist offenbar eine Komposition einer Möbiustrasnsformation, die das Urbild von ∞ auf ∞ abbildet, mit einer biholomorphen Abbildung von $\mathbb{C}$. Jede biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ ist offenbar eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ mit isolierter Singularität be ∞. Wegen dem Satz von Casorati Weierstraß, kann die isolierte Singularität keine wesentliche Singulariäte sein. Dann ist sie entweder eine hebbare Singulariät oder ein Pol erster Ordnung. Wegen dem Satz von Liouville kann sie keine hebbare Singularäte haben, Also sind alle biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}$ von der Form $z \mapsto az + b$ mit $a \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$. Insbesondere sind alle biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{P}^1$ Möbiustransformationen. Jede Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ hat für $c \neq 0$ offenbar mindestens eine Fixpunkt auf $\mathbb{C}$ und für $c = 0$ eine Fixpunkt bei ∞. Also ist jede frei auf $\mathbb{P}^1$ operierende Untergruppe der Möbiusgruppe trivial.

Sei $\tilde{X}$ biholomoph zu $\mathbb{C}$. Wir haben schon gezeigt, dass alle biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}$ von der Form $z \mapsto az + b$ mit $a \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$. Wenn $a \neq 1$, dann hat sie offenbar einen Fixpunkt. Also ist jede frei auf $\mathbb{C}$ frei operierende Untergrupppe der Untergruppe der Möbiusgruppe, die ∞ auf sich selber abbildet eine diskrete Untergruppe der Translationen $z \mapsto z + b$. Diese Untergruppen haben wir klassifiziert. Sie sind entweder trivial, oder konjugiert zu der Untergruppe, die $b \in \mathbb{Z}$ entspricht, oder konjugiert zu der Untergruppe, die $b \in \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ mit $\Im(\tau) > 0$ entspricht. Die entsprechenden Quotienten von $\mathbb{C}$ sind, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ mit der universellen Überlagerungsabbildung $z \mapsto \exp(2\pi i z)$ und die elliptischen Kurve zum Modulus τ.

Sei zuletzt $\tilde{X}$ biholomorph zu $\mathbb{D}$. Für jede biholomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ gibt es eine Möbiustrasformation, die $\mathbb{D}$ auf sich selber abbildet, und das Bild von Null auf Null. Als ist jede biholomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ die Komposition einer Möbiustrasformation, die $\mathbb{D}$ auf sich selber abbildet, mit einer biholomorphen Abbildung von $\mathbb{D}$, die Null auf Null abbildet. Deren Ableitungen bei Null sind wegen dem Lemma von Schwarz Pick kleiner gleich Eins, und genau dann gleich Eins, wenn sie Rotaionen sind. Im Beweis vom Riemannschen Abbildungssatz haben wir gezeigt, dass eine solchen schlichte Funktion auf $\mathbb{D}$ genau dann eine surjektive Abbildung auf $\mathbb{D}$ ist, wenn $|f'(0)|$ maximal ist. Also ist jede biholomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ eine Möbiustransformation, die $\mathbb{D}$ auf sich selber abbildet. **q.e.d.**

Die Gruppen der biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sind also

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \Big/_{\{\mathbb{1},-\mathbb{1}\}} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Big/_{\{\mathbb{1},-\mathbb{1}\}} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\}.$$