Funktionentheorie II

HS 07

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen

1.1 Riemannsche Flächen

Definition 1.1. *Eine komplexe Karte eines topologischen Raumes X ist ein Homöomorphismus φ von einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$. $n \in \mathbb{N}$ ist die komplexe Dimension der Karte.*

Wir beschäftigen uns in dieser Vorlesung mit sogenannten Riemannschen Flächen, also komplex eindimensionalen Mannigfaltigkeiten. Um den Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit einzuführen, definieren wir zunächst holomorphe Funktionen von mehreren Variablen.

Definition 1.2. *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt holomorph, wenn sie reell differenzierbar ist und die Ableitungen komplex lineare Abbildung von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^m$ sind.*

Wenn $m = 1 = n$ dann erhalten wir die holomorphen komplexen Funktionen.

Definition 1.3. *Zwei komplexe Karten $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{C}^m$ heißen komplex verträglich, wenn die Verkettungen*

$$\psi \mid_{U\cap V} \circ (\varphi \mid_{U\cap V})^{-1} \text{ und } \varphi \mid_{U\cap V} \circ (\psi \mid_{U\cap V})^{-1}$$

der Einschränkungen $\varphi \mid_{U\cap V}$ und $\psi \mid_{U\cap V}$ und ihrer Umkehrabbildungen beide holomorph sind, also zueinander inverse holomorphe Abbildungen von offenen Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$ auf offenen Teilmengen des $\mathbb{C}^m$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sind. Ein komplexer Atlas eines topologischen Raumes X ist eine Familie von paarweise miteinander verträglichen komplexen Karten, deren Definitionsbereiche X überdecken.

Definition 1.4. *Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist ein metrisierbarer separabler topologischer Raum mit einem komplexen Atlas. Die Dimension ist offenbar auf allen Zusammenhangskomponenten konstant.*

Man kann Riemannsche Flächen als zusammenhängende eindimenionale komplexe Mannigfaltigkeiten definieren. Wir wollen sie aber zunächst anders definieren. Später werden wir dann sehen, dass beide Definitionen überseintimmen.

Definition 1.5. *(Hausdorffraum) Eine topologischer Raum heißt Hausdorffraum, wenn je zwei verscheidenen Punkte offenen disjunkte Umgebungen besitzen.*

Definition 1.6. *Ein wegzusammenhängender topologischer Hausdorffraum heißt topologischer Fläche, wenn jeder Punkt eine offenen Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Umgebung von $\mathbb{C}$ ist. Eine topologische Fläche mit einem komplexen Atlas von komplex eindimensionalen Karten heißt Riemannsche Fläche.*

Beispiel 1.7. **(i)** *Jede zusammenhängende und damit auch wegzusammenhängende eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist offenbar eine topologische Fläche und damit auch eine Riemannsche Fläche.*

(ii) *Alle offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind offenbar Riemannsche Flächen.*

(iii) *Sei $\mathbb{P}^1$ der eindimensionale projektive komplexe Raum, d.h. die Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen in $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation*

$$(x,y) \sim (\lambda x, \lambda y) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Wenn $x \neq 0$, dann ist offenbar (x,y) äquivalent zu $(1, \frac{y}{x})$ und wenn $y \neq 0$, dann ist (x,y) äquivalent zu $(\frac{x}{y}, 1)$. Wir bezeichnen mit $z = \frac{x}{y}$. Dann entspricht die Teilmenge $\{[(x,y)] \in \mathbb{P}^1 \mid y \neq 0\}$ allen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ und die Teilmenge $\{[(x,y)] \in \mathbb{P}^1 \mid x \neq 0\}$ allen Zahlen $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$. Die Schnittmenge entspricht offenbar allen Zahlen $z \in \mathbb{C}^*$. Wir können $\mathbb{P}^1$ als topologischen Raum mit der Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von $\mathbb{C}$ identifizieren. Diese Einpunktkompaktifizierung ist die Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zusammen mit der Topologie, deren offene Menge aus den offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ und den Komplementen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ besteht.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir schonmal die Aussagen auflisten, aus denen dann folgt, dass jede Riemannsche Fläche umgekehrt auch eine zusammenhängende eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Satz 1.8. *Eine Riemannsche Fläche ist ein separabler metrisirebarer Raum.*

Dieser Satz ist eine Folgerung von einem Satz aus der Topologie und einem Satz, der im wesentlichen eine Folgerung daraus ist, dass auf jeder Riemannschen Fläche mit kompaktem Rand das Dirichletproblem lösbar ist. Um den Satz uas der Topologie zu formulieren benötigen wir

Definition 1.9. *Ein topologischer Hausdorffraum X heißt regulär, wenn jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ und jeder Punkt $x \in X \setminus A$ zwei disjunkte Umgebungen besitzen.*

Jede topologische Fläche X ist offenbar regulär. Sei nämlich $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Dann besitzt x eine offene Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Die Schnittmenge von A mit der offenen Umgebung ist dann eine abgeschlossene Teilmenge $\tilde{A}$ von der Umgebung. In jedem metrischen Raum X besitzt für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ jedes $x \in X \setminus A$ eine offene Umgebung U von x, so dass der Abschluss von U mit A disjunkt ist. Dann sind das Komplement vom Abschluss von U und U disjunkte offene Umgebungen von A und x. Also sind alle metrischen Räume regulär. Sei jetzt U eine offene Umgebung von x in der offenen Umgebung, die homöomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, deren Abschluss disjunkt zu $\tilde{A}$ ist. Dann sind das Komplement vom Abschluss von U und U disjunkte offene Umgebungen von A und X. Deshalb erfüllt jede topologische Fläche die Voraussetzungen des Satzes von Uryson, ist also metrisierbar. Daraus folgt, dass jede topologische Fläche mit einem komplexen Atlas eine Riemannsche Fläche ist. **q.e.d.**

Definition 1.10. *Eine Basis der offenen Mengen ist eine Teilmenge der offenen Mengen, so dass es für alle $x \in X$ und alle Umgebungen U von x eine Menge in der Basis gibt, die x enthält und in U enthalten ist. Ein topologischer Raum erfüllt das 2.Abzählbarkeitsaxiom, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.*

Satz 1.11. *(Uryson) Ein topologischer regulärer Hausdorffraum ist metrisierbar, wenn er das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Einen Beweis finden Sie in: B.v.Querenburg: Mengentheoretische Topologie, S. 110. Wenn ein topologischer Raum das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann erhalten wir eine abzählbare dichte Teilmenge, indem wir in jeder offenen Menge der abzählbaren Umgebungsbasis einen Punkt wählen. Also ist jeder topologische Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt auch separabel.

Satz 1.12. *(Rado) Jede topologische Fläche erfüllt das 2.Abzählbarkeitsaxiom.*

Einen Beweis finden Sie in: Forster: Riemannsche Flächen, § 23. Der Beweis ist im Wesentlichen eine Folgerung aus der Lösung des Dirichletproblems auf beilibigen Riemannschen Flächen mit kompaktem und glatten Rand.

1.2 Das analytische Gebilde

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Paare (a, f_a), wobei a ein Punkt von $\mathbb{C}$ ist und f_a ein Funktionskeim einer holomorphen Funktion f auf einer Umgebung von a. Für jede auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion f definiert für jedes $a \in U$ f offenbar einen Funktionskeim auf einer Umgebung von a. Deshalb definiert das Paar (U, f) eine Teilmenge $\{(a, f_a)|a \in U\} \subset \mathcal{R}$ von $\mathcal{R}$. Diese Teilmengen bilden die Umgebungsbasis einer Topologie auf $\mathcal{R}$. Eine Teilmenge $U \subset \mathcal{R}$ ist bezüglich dieser Topologie also genau dann offen, wenn es für jedes $(a, f_a) \in U$ einen Repräsentanten g von f_a gibt, der auf einer offenen Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ von a holomorph ist, so dass die Menge $\{(b, g_b)|b \in V\} \subset U$ in U enthalten ist.

Satz 1.13. **(i)** *$\mathcal{R}$ ist ein topologischer Hausdorffraum. .*

(ii) *Die Abbildung $p : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig.*

(iii) *Für jedes (a, f_a) in $\mathcal{R}$ gibt es eine offene Umgebung von (a, f_a) in $\mathcal{R}$, die durch p homöomorph auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ abgebildet wird.*

(iv) *Die Wegzusammenhangskomponente eines Elementes $(a, f) \in \mathcal{R}$ besteht aus allen analytischen Fortsetzungen von f_a läng stetiger Wege in $\mathbb{C}$ mit Anfangspunkt a. Diese Wegzusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$ sind Riemannsche Flächen.*

Beweis: Für (i) müssen wir zeigen, dass zwei verschiedene Elemente (a, f_a) und (b, g_b) von $\mathcal{R}$ disjunkte Umgebungen besitzen. Wenn a und b verschieden sind, besitzen a und b disjunkte offene Umgebungen $U \ni a$ und $V \ni b$. Dann gibt es auch zwei Repräsentanten f und g von f_a bzw. g_b, die auf disjunkten offenen Umgebungen $U \ni a$ und $V \ni b$ definiert sind. Die entsprechenden Mengen zu (U, f) und (V, g) sind dann disjunkte Umgebungen von (a, f_a) und (b, g_b). Wenn $a = b$ ist, dann kann die Differenz $f - g$ von zwei Repräsentanten f und g von f_a bzw. g_b bei $a = b$ höchstens eine Nullstelle endlicher Ordnung haben. Also gibt es wegen dem Nullstellensatz eine Umgebung U von $a = b$, auf der $f - g$ höchstens eine Nullstelle bei $a = b$ hat. Also sind die offenen Umgebungen zu (U, f) und (U, g) von (a, f_a) bzw. (b, g_b) disjunkt.
(ii) Jedes Element (a, f_a) im Urbild $p^{-1}[U]$ einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ besitzt einen Repräsentanten f von f_a, der auf einer offenen Umgebung $V \subset U$ definiert ist, dann enthält das Urbild die offene Umgebung (V, f) von (a, f_a). Also ist das Urbild jeder offenen Menge offen.
(iii) Sei $(a, f_a) \in \mathcal{R}$, f ein Repräsentant von f_a, der auf einer offenen Umgebung $U \ni a$ definiert ist. Dann ist die Einschränkung von p auf die offene Umgebung (U, f) von (a, f_a) ein Homöomorphismus von (U, f) auf U.

(iv) Die Topologie ist genau so definiert, dass jede stetige Abbildung $\varphi : I \to \mathcal{R}$ von einem (nicht notwendigerweise abgeschlossenem) Intervall I nach $\mathcal{R}$ eine analytische Fortsetzung eines Funktionskeimes längs des Weges $p \circ \varphi$ ist. Hierbei ist $p : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$, die Abbildung, die jedem Paar (a, f_a) den Fußpunkt $a \in \mathbb{C}$ zuordnet. Wegen (ii) ist $p \circ \varphi$ ein stetiger Weg in $\mathbb{C}$. Also bestehen die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}$ aus allen analytischne Fortsetzungen eines Kunktionskeimes längs setiger Wege in $\mathbb{C}$. Dann ist jede Wegsusammenhangskomponente eine Riemannsche Flache. **q.e.d.**

1.3 Überlagerungen und universelle Überlagerungen

Definition 1.14. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ topologischer Räume heißt Überlagerung, falls es zu jedem Punkt $b \in Y$ eine offene Umgebung V gibt und zu jedem Punkt $a \in f^{-1}[\{b\}]$ im Urbild von $\{b\}$ eine offene Umgebung $U(a)$ gibt, so dass*

(i) $f^{-1}[V] = \bigcup_{a \inf^{-1}[\{b\}]} U(a)$ *disjunkte Vereinigung.*

(ii) *Für alle $a \in f^{-1}[\{b\}]$ ist die Einschränkung von f auf $U(a)$ ein Homöomorphismus von $U(a)$ auf V.*

Satz 1.15. *Sei $f : X \to Y$ eine Überlagerung. Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ und zu jedem stetigen Weg*

$$\alpha : [a, b] \to Y, \quad \alpha(a) = f(x_0)$$

mit Anfangspunkt $f(x_0)$ existiert ein eindeutig bestimmter stetiger Weg $\beta : [a, b] \to X$ mit

(i) $f \circ \beta = \alpha$

(ii) $\beta(a) = x_0$

Der Satz besagt, dass wir alle stetigen Wege in Y eindeutig zu stetigen Wegen in X hochheben können. Mann nennt ihn deshalb auch Wegeliftung.

Beweis: Eindeutigkeit: Wenn $\tilde{\beta}$ eine weitere Liftung mit Anfangswert x_0 ist, dann ist die Menge aller $t \in [a, b]$ mit $\beta(t) = \tilde{\beta}(t)$ wegen der Definition der Überlagerungsabbildung sowohl offen als auch abgeschlossen und deshalb gleich $[a, b]$.

Existenz: Wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ können wir den Weg x in endlich viele Abschnitte zerlegen, die jeweils in einer Menge V von der Form, wie sie in der Definition der Überlagerung beschrieben ist. Dann besitzt jeder Abschnitt offenbar eine Liftung. Aus diesen Liftungen können wir induktiv den Weg β zusammensetzen. **q.e.d.**

Dasselbe Beweisverfahren zeigt sogar:

Satz 1.16. *Sei $f : X \to Y$ eine Überlagerung, $Q = I \times J$, $(I, J$ Intervalle) ein nicht notwendigerweise kompaktes Rechteck und $H : Q \to Y$ eine stetige Abbildung mit $H(q_0) = x_0$ für fest gewählte $q_0 \in Q$ und $x_0 \in X$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{H} : Q \to X$ mit*

(i) $f \circ \tilde{H} = H$

(ii) $\tilde{H}(q_0) = x_0$.

Zum Beweis kann man annehmen, dass Q kompakt ist weil man jedes Rechteck als aufsteigende Vereinigungen von kompakten Rechtecken ausschöpfen kann. Man kann ebenfalls annehmen, dass q_0 ein Eckpunkt von Q ist, indem man Q eventuell zerlegt. Dann folgt der Beweis wie bei der Kurvenliftung. **q.e.d.**

Definition 1.17. *Ein topologischer Raum X heißt lokal wegzusammenhängend, wenn jeder Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von X eine wegzusammenhängende Umgebung V von x besitzt. Topologische Flächen sind offenbar wegzusammenhängend. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass alle auftretenden Räume lokal wegzusammenhängend sind.*

Satz 1.18. *Seien $f : X \to Y$ eine Überlagerung und $g : Z \to X$ eine stetige Abbildung eines einfach zusammenhängenden Raumes Z nach X. Seien $c \in Z$ und $b \in Y$ zwei Punkte mit demselben Bild in Y. Dann existeirt eine eindeutige Liftung $h : Z \to Y$ mit $f \circ h = g$ und $h(c) = b$.*

Beweis: Wir verbinden einen bliebigen Punkt $z \in Z$ durch einen Weg mit c:

$$\alpha : [0, 1] \to Z, \quad \alpha(0) = c \text{ und } \alpha(1) = z.$$

Sei β die eindeutige Liftung von $g \circ \alpha$. Dann definieren wir $h(z) = \beta(1)$. Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt, dass h nicht von der Wahl des Weges abhängt. Weil Z einfach zusammenhängend ist, können je zwei Wege stetig ineinander deformiert werden, sind also homotop. Dann sind wegen der Homotopieliftungseigenschaft auch die entsprechenden gelifteten Wege homotop. Deshalb hängt der Wert $h(z)$ der Abbildung h nicht von der Wahl des Weges α ab.

Für die Stetigkeit benutzen wir eine wegzusammenhängende Umgebung von $y_0 = h(z_0)$. Wir wählen zuerst eine offene Umgebung $V(y_0)$, die durch f homöomorph auf eine Umgebung von x_0 abgebildet wird. Danach wählen wir eine wegzusammenhängende Umgebung $W(z_0)$ mit $g[W(z_0)] \subset U(x_0)$. Wir behaupten, dass $h[W(z_0)]$ ganz in $V(y_0)$ enthalten ist. Das folgt wieder aus der Liftungseigenschaft von Wegen. **q.e.d.**

Korollar 1.19. *Sei $f : Y \to X$ eine Überlagerung eines einfach zusammenhängenden Raumes X. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis: Wende den vorangehenden Satz auf $Y = X$ und $g = \mathbb{1}_x$ an. Dann erhält man eine stetige Abbildung $h : X \to Y$ mit $f \circ h = \mathbb{1}_x$. Die Einschränkung von f auf das Bild $h[X]$ ist offenbar bijektiv. Weil X wegzusammenhängend ist, folgt aus der Liftungseigenschaft $h[X] = Y$. Also ist f ein Homöomorphismus. **q.e.d.**

Definition 1.20. *Eine Überlagerung $f : \tilde{X} \to X$ eines wegzusammenhängenden Raumes heißt universell, wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.*

Satz 1.21. *Sei $f : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung und $g : Y \to X$ eine beliebige Überlagerung. Dann existiert eine Überlagerung $h : \tilde{X} \to Y$, so dass $g \circ f - h$ ist.*

Beweis folgt aus dem vorangehenden Satz und Korollar. **q.e.d.**

Definition 1.22. *Sei $f : Y \to X$ eine Überlagerung. Eine Deckbewegung ist ein Homöomorphismus*

$$\gamma : Y \to Y \text{ mit } \gamma \circ f = f.$$

Die Gesamtheit aller Deckbewegungen einer Überlagerung bildet eine Gruppe und heißt Deckbewegungsgruppe.

Definition 1.23. *Sei Γ eine Untergruppe der Homöomorphismen eines topologischen Raumes X. Die Gruppe operiert frei, wenn folgendes gilt:*

(i) *Zu je zwei Punkten $a, b \in X$ existieren Umgebungen $U(a), U(b)$ mit*

$$\gamma[U(a)] \cap U(b) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(a) = b f.a. \gamma \in \Gamma$$

(ii) *Wenn ein $\gamma \in \Gamma$ einen Fixpunkt $a \in X$ hat, dann ist $\gamma = \mathbb{1}_X$.*

Man kann nun leicht sehen, dass Deckbewegungen frei operieren. Wenn eine Gruppe Γ auf einem topologischen Raum X durch Homöomorphismen operiert, dann definiert folgende Relation eine Äquivalenzrelation:

$$a\ b \Leftrightarrow \text{ es gibt ein } \gamma \in \Gamma \text{ mit } \gamma(a) = b.$$

Auf dem Raum der Äquivalenzklassen X/Γ nennen wir die Bilder von allen offenen Teilmengen von X offen, die Vereinigung von Äquivalenzklassen sinb, unter der kanonischen Abbildung $X \to X/\Gamma$. Dadurch wird die Menge der Äquivalenzklassen X/Γ zu einem topologischen Raum.

Satz 1.24. **(i)** *Wenn Γ frei operiert, dann ist die natürliche Projektion $p : X \to X/\Gamma$ eine Überlagerung mit Deckbewegungsgruppe Γ.*

(ii) *Umgekehrt operiert die Deckbewegungsgruppe einer Überlagerung $F : X \to Y$ frei auf X*

(iii) *Sei schließlich $f : X \to Y$ eine reguläre Überlagerung, also eine Überlagerung, deren Deckbewegungsgruppe auf den Urbildern $f^{-1}[\{y\}]$ mit $y \in Y$ transitiv operiert. Dann ist Y ist homöomorph zu X/Γ, so dass die Überlagerung $f : X \to Y$ homöomorph ist zu $p : X \to X/\Gamma$.*

Beweis: (i) Wähle für ein $a \in X$ eine offene Umgebung $U(a)$, so dass $\gamma[U(a)] \cap U(a) = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. Dann ist $V(b) = p[U(a)]$ eine offene Umgebung von $b = p(a)$. Und das Urbild $p^{-1}[V(b)]$ besteht genau aus den Mengen $\gamma[U(a)]$ mit $\gamma \in \Gamma$. Aus $\gamma[U(a)] \cap \tilde{\gamma}[U(a)] \neq \emptyset$ folgt wegen der Gruppenwirkung von Γ auch $(\tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma)[U(a)] \cap U(a) \neq \emptyset$. Deshalb sind diese Mengen paarweise disjunkt und p ist eine Überlagerungsabbildung.
(ii) Wir zeigen zuerst (i) von der Definition einer freien Operation. Seien a und b zunächst Punkte in X mit $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es disjunkte offene Umgebungen von $f(a)$ und $f(b)$, deren Urbilder dann auch disjunkt sind. Für diese Urbilder gilt (i). Wenn a und b beide im Urbild eines Punkte von Y liegen, wählen wir eine entsprechende Umgebung, wie sie in der Definition der Überlagerungsabbildung beschrieben ist. Dann erfüllen die entsprechenden disjunkten Umgebungen von a und b die Bedingung (i). Aus der Eindeutigkeit der Liftung folgt auch (ii).
(iii) Offenbar gibt es ganau dann eine bijektive Abbildung von X/Γ auf Y, die die Überlagerungsabbildung f in die kanonische Abbildung $X \to X/\Gamma$ transformiert, wenn Γ transitiv auf allen Fasern wirkt. Dann folgt (iii) aus (ii). **q.e.d.**

Sei X ein wegzusammenhängender Raum und $\pi : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Dann läßt sich jeder geschlossene Weg von $x_0 \in X$ nach x_0 für jedes $y \in \pi^{-1}[\{x_0\}]$ zu einem Weg von y zu einem Element in $\pi^{-1}[\{x_0\}]$ liften. Das ergibt eine Abbildung von $\pi(x_0, X)$ in die Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\pi^{-1}[\{x_0\}]$. Wenn x_1 in einer wegzusammenhängenden Umgebung von x_0 liegt, dann werden die Fundamentalgruppen $\pi(x_0, X)$ und $\pi(_1, X)$ aufeinander abgebildet. Wegen der Eundeutigkeit der Liftung induziert jedes Element von $\pi(x_0, X)$ dann sogar eine Deckbewegungsabbildung von $\pi : \tilde{X} \to X$. Umgekehrt existiert für jede Deckbewegung γ und für jedes $y \in \tilde{X}$ ein Weg von y nach $\gamma(y)$. Die Komposition mit π ist dann ein stetiger Weg von $\pi(y)$ nach $\pi(y)$. Weil $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, sind alle Wege von y nach $\gamma(y)$ zueinander homotop. Deshalb hängt die Homotopieklasse des Weges von $\pi(y)$ nach $\pi(y)$ nicht von der Wahl des Weges ab. Dadurch ehalten wir einen Gruppenhomomorphismus von der Deckbewegungsgruppe in die Fundamentalgruppe von X. Diese beiden Gruppenhomomorphismen sind offenbar zueinander invers.

Korollar 1.25. *Sei $\pi : \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung eines wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raumes. Dann ist die Deckbewegungsgruppe isomorph zu der Fundamentalgruppe von X.*

Satz 1.26. *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, dessen Topologie eine Umgebungsbasis von einfach zuzsammenhängenden Mengen besitzt. Dann existiert eine universelle Überlagerung.*

Beweis: Wir wollen einen Punkt $a \in X$ und definieren $\tilde{X}$ zunächst als die Menge von Momotopieklassen von stetigen Wegen von X mit Anfangspunkt a. Die Abbildung π, die jeder Homotopieklasse eines Weges den Endpunkt zuordnet, definiert eine Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$. Für alle $x \in X$ nennenwir die Elemente von $\pi^{-1}[\{x\}]$, also die Homotopieklasse von Wegen von a nach x auch Makierungen des Punktes $x \in X$. Wenn $x \in X$ und $A \in \pi^{-1}[\{x\}]$ eine Makierung von x ist, dann können wir jeder offenen einfach zusammenhängenden Umgebung U von x die Menge $\tilde{U}$ aller Homotopieklassen von Verknüpfungen von A mit stetigen Wegen in U zuordnen. Die menge aller solcher Teilmengen $\tilde{U}$ bildet die Umgebungsbasis einer Topologie $\tilde{X}$. Offenbar ist $\tilde{X}$ dadurch zusammenhängend und die Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$ ist eine Überlagerung. Sei $x_0 \in \pi^{-1}]\{a\}]$. Dann ist die Komposition von einem Element in $\pi(x_0, \tilde{X})$ mit π ein Element von γ von $\pi(a, X)$. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung entspricht diesem Element eine Decktransformation, die x_0 auf x_0 abbildet. Dann folgt, dass γ homotop zur Identität ist. Wegen der Liftungseigenschaft ist dann auch das Element in $\pi(x_0, \tilde{X})$ homotop zur Identität. Also ist $\pi(x_0, \tilde{X})$ trivial. **q.e.d.**

Wenn eine Gruppe Γ auf einer Riemannschen Fläche X durch biholomorphe Abbildungen frei operiert, dann ist der Quotientenraum X/Γ offenbar auch eine Riemannsche Fläche.

Satz 1.27. *Zu jeder Riemannschen Fläche X existiert eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\tilde{X}$ und eine frei operierende Untergruppe Γ der biholomorphen Abbildungen von $\tilde{X}$, so dass X biholomorph ist zu $\tilde{X}/\Gamma$. Dabei ist $\tilde{X}$ die universelle Überlagerung von X und Γ die Gruppe der Decktransformationen von $\pi : \tilde{X} \to X$.*

Beweis: Offenbar erfüllt jede topologische Fläche die Voraussetzungen des letzten Satzes und besitzt also eine universelle Überlagerung. Diese universelle Überlagerung ist offenbar wieder eine topologische Fläche, und die universelle Überlagerung einer Riemannschen Fläche wieder eine Riemannsche Fläche, so dass $\pi : \tilde{X} \to X$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung ist. Dann wirken die Decktransformationen durch biholomorphe Abbildungen. Deshalb wirkt $\pi_1(x)$ auf $\tilde{X}$ durch biholomorphe Abbildungen und frei. Der Quotient dieser Wirkung ist offenbar wieder die Riemannsche Fläche X. **q.e.d.**

Die Quotientenflächen von zwei frei operierenden Untergruppen Γ und Γ' der Gruppe der biholomorphen Abbildungen einer Riemannschen Fläche stimmen offenbar genau dann überein, wenn die beiden Gruppen Γ und $\tilde{\Gamma}$ zueinander konjugiert sind.

Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen entweder biholomorph zu $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ oder $\mathbb{P}^1$ sind. Die biholomorphen

Abbildungen von allen diesen drei Riemannschen Flächen, haben wir schon als Untergruppe der Möbiusgruppe bestimmt. Also werden wir sehen, dass man jede Riemannsche Fläche entweder als den Quotientenraum von $\mathbb{C}/\Gamma$ oder $\mathbb{D}/\Gamma$ oder $\mathbb{P}^1/\Gamma$ realisieren kann. Im letzten Fall ist Γ eine frei wirkende Untergruppe von der Möbisugruppe, im ersten Fall eine auf $\mathbb{C}$ frei wirkende Untergruppe von

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \Big/_{\{\mathbb{1},-\mathbb{1}\}} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

und im zweiten eine auf $\mathbb{D}$ frei wirkende Untergruppe von

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Big/_{\{\mathbb{1},-\mathbb{1}\}} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\}.$$

1.4 Dirichletproblem auf $\mathbb{D}$

Im Dirichletproblem wird nach einer Funktion gesucht, die innerhalb eines beschränkten Gebietes harmonisch ist und auf dem Rand gleich einer gegebenen Funktion ist. Wir wollen uns hier auf Kreise $B(z_0, r)$ beschränken.

Definition 1.28. *Sei $g : \partial B(z_0, r) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Suche nach einer stetigen reellen Funktion f auf $\overline{B(z_0, r)}$, die*

(i) *auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist, und*

(ii) *deren Einschränkung auf $\partial B(z_0, r)$ gleich g ist,*

heißt Dirichletproblem.

Die Differenz zweier Lösungen des Dirichletproblems ist eine harmonische Funktion auf $B(z_0, r)$, die auf dem Rand verschwindet. Wenn alle solchen Funktionen identisch verschwinden, ist also die Lösung des Dirichletproblems, soweit sie existiert, eindeutig. Das folgt aus dem Maximumprinzip:

Satz 1.29. *(Maximumprinzip für harmonische Funktionen) Sei f eine harmonische reelle Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.*

(i) *Wenn $z_0 \in G$ ein lokales Maximum oder Minimum von f ist, dann ist f konstant.*

(ii) *Auf einer kompakten Menge $K \subset G$ nimmt f das Maximum und das Minimum auf dem Rand von K an.*

Beweis: Wenn z_0 ein Maximum bzw. Minimum von f ist, dann ist wegen dem Mittelwertsatz der Mittelwert von der nicht positiven bzw. negativen Funktion $f(z) - f(z_0)$ über kleine Kreise $\partial B(z_0, \epsilon)$ gleich Null. Also ist diese Funktion auf den kleinen Kreisen gleich Null. Dann ist das Urbild von $\{f(z_0)\}$ unter f sowohl offen als auch abgeschlossen, also gleich G. Daraus folgt (i). (ii) folgt sofort aus (i). **q.e.d.**

Die Verkettung einer holomorphen Funktion mit einer harmonischen Funktion lokal wieder der Realteil einer holomorphen Funktion und damit harmonisch. Das wollen wir jetzt ausnutzen. um den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen ähnlich wie die Cauchysche Formel auf harmonische Funktionen zu verallgmeinern. Weil wir jeden Ball $B(z_0, r)$ durch die biholomorphe Abbildung $z \to \frac{z-z_0}{r}$ auf den Ball $B(0,1)$ abbilden, genügt es diesen Ball $\mathbb{D}$ zu betrachten. Weil die Möbiustransformation Φ mit $\Phi(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ den Ball $\mathbb{D}$ auf sich selber abbildet und 0 nach z_0 abbildet, ist für jede harmonische Funktion auf $\mathbb{D}$, die sich stetig auf $\bar{\mathbb{D}}$ fortsetzen läßt, $f \circ \Phi$ eine harmonische Funktion auf $\mathbb{D}$, die sich stetig auf $\bar{\mathbb{D}}$ fortsetzen läßt. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz

$$(f \circ \Phi)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \circ \Phi)(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Damit erhalten wir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\varphi} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\varphi}}\right) d\varphi$$

Wir substituieren jetzt

$$e^{i\psi} = \frac{e^{i\varphi} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\varphi}}$$

und erhalten

$$e^{i\varphi} = \frac{e^{i\psi} - z_0}{1 - \bar{z}_0 e^{i\psi}}$$

bzw.

$$ie^{i\varphi} d\varphi = \frac{ie^{i\psi}(1 - \bar{z}_0 e^{i\psi}) - \bar{z}_0 ie\psi^(e^{i\psi} - z_0)}{(1 - \bar{z}_0 e^{i\psi})^2} d\psi$$

$$d\varphi = \frac{(1 - z_0\bar{z}_0)e^{i\psi}}{(1 - \bar{z}_0 e^{i\psi})^2} \frac{1 - \bar{z}_0 e^{i\psi}}{(e^{i\psi} - z_0)} d\psi = \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{(e^{-i\psi} - \bar{z}_0)(e^{i\psi} + z_0)} d\psi$$

Insgesamt folgt dann

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\psi}) \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{|e^{i\psi} - z_0|^2} d\psi$$

Allgemein gilt dann

Satz 1.30. *(Poissonsche Darstellungsformel) Sei f eine stetige Funktion auf $\overline{B(z_0,r)}$, die auf $B(z_0,r)$ harmonisch ist. Dann gilt für alle $z \in B(z_0,r)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\psi})\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\psi}-z|^2}d\psi. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Satz 1.31. *Umgekehrt sei g eine gegebene stetige reelle Funktion auf $\partial B(z_0,r)$. Dann ist die eindeutige Lösung des Dirichletproblems mit dem Randwert g gegeben durch*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\psi}-z|^2}d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\Re\left(\frac{z_0+re^{i\varphi}+z}{z_0+re^{i\varphi}-z}\right)d\psi.$$

Beweis: Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $z \mapsto \frac{z_0+re^{i\varphi}+z}{z_0+re^{i\varphi}-z}$ offenbar auf $z \in B(z_0,r)$ eine konvergente Potenzreihe, die für alle $\epsilon > 0$ auf $z \in B(z_0, r-\epsilon)$ sogar gleichmäßig konvergiert. Also ist auch die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{i\psi})\frac{z_0+re^{i\varphi}+z}{z_0+re^{i\varphi}-z}d\psi$$

auf $B(z_0,r)$ eine konvergente Potenzreihe und damit holomorph. Dann ist f im Inneren von $B(z_0,r)$ der Realteil einer holomorphen Funktion und damit harmonisch.

Wir müssen noch zeigen, dass sich f stetig auf $\overline{B(z_0,r)}$ fortsetzen läßt und dort gleich g ist. Dazu bemerken wir, dass die Funktion $\varphi \mapsto \frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\varphi}-z|^2}$ für alle $z \in B(z_0,r)$ auf $\varphi \in [0,2\pi]$ positiv ist und wegen dem Poissonschen Darstellungssatz für $f = 1$ den Mittelwert 1 besitzt. Außerdem folgt für alle $\varphi \in [0,2\pi]$ und alle $0 < \delta \leq \sqrt[3]{2r}$ aus $|z_0+re^{i\varphi}-z| \geq \delta$ und $r-\delta^3 < |z-z_0| < r$

$$\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|z_0+re^{i\varphi}-z|^2} < \frac{r^2-(r-\delta^3)^2}{\delta^2} = \frac{\delta^3(2r-\delta^3)}{\delta^2} < 2r\delta.$$

Wegen der Stetigkeit von g gibt es für jedes $\varphi \in [0,2\pi]$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass für alle $\psi \in [0,2\pi]$ mit $|z_0+re^{i\varphi}-z_0-re^{i\psi}| = |re^{i\varphi}-re^{i\psi}| < 2\delta$ gilt $|g(z_0+e^{i\varphi})-g(z_0+e^{i\psi})| < \frac{\epsilon}{2}$. Weil $\partial B(z_0,r)$ kompakt ist, ist $|g|$ beschränkt durch ein $M > 0$. Offenbar können wir δ sogar immer kleiner oder gleich $\min\{1, \sqrt[3]{2r}, \frac{\epsilon}{8rM}\}$

wählen. Dann folgt für alle $z \in B(z_0, r) \cap B(z_0 + re^{i\varphi}, \delta^3)$

$$\begin{aligned}
|f(z) - g(z_0 + e^{i\varphi})| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + e^{i\varphi}) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z_0 + e^{i\psi} - z| < \delta} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + e^{i\varphi}) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z_0 + e^{i\psi} - z| \geq \delta} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g(z_0 + e^{i\varphi}) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi.
\end{aligned}$$

Wegen $\delta \leq 1$ folgt aus $|z_0 + e^{i\varphi} - z| < \delta^3$ und $|z_0 + e^{i\varphi} - z| < \delta$ auch $|re^{i\varphi} - re^{i\psi}| < \delta + \delta^3 \leq 2\delta$. Wegen der Setigkeit von g ist dann das erste Integral kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Das zweite Integral ist wegen der obigen Abschätzung von $\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\varphi} - z|^2}$ kleiner als $2r\delta 2M$. Wegen $\delta \leq \frac{\epsilon}{8rM}$ ist dann auch das zweite Integral kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$. Also folgt

$$|f(z) - g(z_0 + e^{i\varphi})| < \epsilon \quad \text{für alle } z \in B(z_0, r) \cap B(z_0 + re^{i\varphi}, \delta^3).$$

Dann läßt sich f stetig auf $\overline{B(z_0, r)}$ fortsetzen und auf $\partial B(z_0, r)$ gilt $f = g$. **q.e.d.**

Korollar 1.32. *Sei f eine stetige Funktion auf einer offene Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$. Wenn f die Mittelwerteigenschaft hat, also für jeden abgschlossenen Ball in G der Funktionswert von f am Zentrum des Balles mit mit dem Miitelwert von F übere den Rnd des Balles übereinstimmt, dann ist f harmonisch.*

Beweis: Für jeden abgeschlossenen Ball $\overline{B(z_0, r)}$ hat die Lösung g des Dirichlet Problems auf $\overline{B(z_0, r)}$, die auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$ gleich f ist die Mittelwerteigenschaft. Wegen der Linearität hat dann auch $f - g$ die Mittelwerteigenschaft und verschwindet auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$. In dem Beweis des Maximumprinzips haben wir nur die Mittelerteigenschaft benutzt. Also erfüllt $f - g$ auch das Maximumprinzip. Dann ist $f - g$ identisch gleich Null. Weil g auf $B(z_0, r)$ harmonisch ist, ist dann auch $B(z_0, r)$ harmonisch. **q.e.d.**

Seien jetzt $0 < r < R$ zwei Radien, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Dann haben wir

$$R - r = |Re^{i\varphi}| - |z| \leq |Re^{i\varphi} - z| \leq |Re^{i\varphi}| + |z| = R + r.$$

Daraus folgt

$$\frac{R - r}{R + r} \leq \frac{R^2 - r^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} \leq \frac{R + r}{R - r}.$$

Satz 1.33. *(Harnackungleichung) Sei f eine positive harmonische Funktion auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$. Wenn G einen abgschlossenen Ball $\overline{B(z_0, R)}$ enthält, denn gilt für alle $z \in G$ mit $|z - z_0| = r < R$*

$$f(z_0)\frac{R-r}{R+r} \leq f(z) \leq f(z_0)\frac{R+r}{R-r}.$$

Beweis: Wenn wir die obige Ungleichung für den Poissonkern in die Poissonsche Darstellungdformel einsetzen, erhalten wir sofort diese beiden Ungleichungen. **q.e.d.**

Satz 1.34. *(Satz von Harnack) Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Dann ist jeder kompakte Grenzwert von auf G harmonischen Funktionen wieder harmonisch. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von auf G harmonischen Funktionen. Dann konvergiert entweder u kompakt gegen ∞ oder kompakt gegen eine harmonische Funktion.*

Beweis: Der Grenzwert einer auf G kompakt konvergenten Folge von stetigen Funktionen, die die Mittelwerteigenschaft haben, hat auch die Mittelwerteigenschaft. Wegen Korollar 1.32 ist dann der Grennzwert einer auf G kompakt konvergenten Folge von harmonischen Funktionen auch harmonisch.

Durch Übergang zu der Folge $(f_n - f_1)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir annehmen, dass alle Elemente der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht negativ sind. Wenn eine monoton wachsende Folge von auf G harmonischen Funktionen an einer Stelle $z_0 \in G$ konvergiert, dann wegen der Harnackschen Ungleichung auch glecihmäßig auf den Bällen um z_0 , deren entsprechende abgschlossene Bälle um z_0 mit doppeltem Radius in G enthalten ist. Auf den. Weil wir jede kompakte Teilmenge von G durch endlich viele Bälle überdecken können, so dass die entsprechenden abgschlossenen Bälle mit doppeltem Radius in G enthalten sind, folgt aus der Harnackungleichung, dass dann die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf allen kompakten Teilmengen von K gleichmäßig konvergiert. Die analogen Aussagen gelten auch, wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ konvergiert. **q.e.d.**

1.5 Subharmonische Funktionen

Um die einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen zu konstruieren, wollen wir auf solchen Flächen konforme Abbildungen konstruieren. Es stellt sich aber als leichter heraus die Existenz von harmonischen Funktionen zu zeigen und aus diesen dann holomorphe Funktionen zu konstruieren. Harmonische Funktionen haben gegenüber holomorphen Funktionen den Vorteil, dass wir auf sie als reelle Funktionen das Prinzip der monotonen Konvergenz anwenden können, wie wir es schon im letzten Abschnitt mit dem Satz von Harnack gemacht haben. Diesen Vorteil werden wir in diesem Abschnitt weiter entwickeln. Dazu erweitern wir zunächst die harmonischne Funktionen auf die sogenannten subharmonsichen Funktionen.

Definition 1.35. *Eine auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ stetige reelle Funktion heißt subharmonisch bzw. superharmonisch, wenn sie für jeden in G enhthalten abgsclossenen Ball $\overline{B(z_0, r)}$ am Zentrum z_0 einen Wert $f(z_0)$ annimmt, der nicht größer ist als der Mittelwert von f auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$, bzw. nicht kleiner ist als dieser Mittelwert.*

Offenbar ist die Summe, aber im Allgemeinen nicht die Differenz von zwei subharmonischen bzw. superharmonischenFunktionen wieder subharmonisch bzw. superharmonisch. Dasselbe gilt auch für das Produkt mit nicht negativen Zahlen. Während das Produkt einer subharmonischne Funktion mit einer negativen Zahl superharmonisch ist und umgekehrt.

Einige Eigenschaften von harmonischne Funktionen übertragen sich auf subharmonische Funktionen. Hier ist vor allem das Maximumprinzip zu nennen.

Satz 1.36. *(Maximumprinzip)*

(i) *Sei f eine subharmonsiche Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wenn f auf G ein Maximum besitzt, dann ist f konstant.*

(ii) *Seien f und g eine subharmonsiche und eine superharmonsiche Funktion auf einer beschränkten offenen Teilmenge G, die sich beide stetig auf den Rand von G fortsetzen lassen. Wenn $f(z) \leq g(z)$ für alle $z \in \partial G$ gilt, dann auch für alle $z \in G$.*

Beweis: **(i)** Sei $z_0 \in G$ ein Maximum von f, dann verschwindet der Mittelwert von der nicht positiven Funktion $f - f(z_0$ über die Ränder aller abgeschlossenen Bälle um z_0 in G. Also ist die Menge $z \in G \mid f(z) = f(z_0)\}$ sowohl abgeschlossen als auch offen, und damit gleich G.
(ii) Die Funktion $f - g$ is subharmonisch und nimmt auf dem Abschluss $\bar{G}$ von G ein Maximum an. Wegen (i) muss dieses auf dem Rand ∂G liegen, und ist deshalb nicht positiv. **q.e.d.**

Umgekehrt können wir auch subharmonische Funktionen durch ein solches Maximumprinzip charakterisieren.

Satz 1.37. *Eine stetige Funktion f auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann subharmonisch, wenn für jede auf einem offenen Gebiet $U \subset G$ harmonische Funktion g entweder $f + g$ auf U konstant ist oder kein Maximum annimmt. Analog ist f genau dann superharmonisch, wenn für jede auf einem offenen Gebiet $U \subset G$ harmonischne Funktionen g entweder $f + g$ auf U konstant ist oder kein Minimum besitzt.*

Beweis: Sei f eine auf G stetige Funktion f, die die Bedingungen von diesem Satz erfüllt. Auf einem Ball $B(z_0, r)$, dessen Abschluss in G enthalten ist, gibt es dann eine harmonische Funktion g, die auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$ mit f übereistimmt. Dann erfüllen $f - g$ auf $B(z_0, r)$ das Maximumprinzip in der Form (i). Also gilt $f(z) \leq g(z)$ für alle $z \in B(z_0, r)$, weil sonst die auf $\overline{B(z_0, r)}$ stetige Funktion $f - g$ auf $B(z_0, r)$ eine Maximum hätte. Damit ist f subharmonisch. Der Beweis für superharmonsiche Funktionen ist analog. **q.e.d.**

Korollar 1.38. *Eine auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ stetige Funktion f ist genau dann subharmonisch, wenn für jede kompakte Teilmenge $A \subset G$ jede auf A stetige Funktion, die auf dem Inneren von A harmonsich ist, genau dann auf A eine obere Schranke von f ist, wenn sie auf dem Rand ∂A eine obere Schranke von f ist.* **q.e.d.**

Korollar 1.39. *Das Maximum zweier subharmonischer Funktionen ist wieder subharmonisch.*

Beweis: Auf dem Rand ∂A einer abgschlossenen Teilmenge $A \subset G$ und auf A ist eine auf A stetige Funktion genau dann eine obere Schranke von dem Maximum zweier subharmonischer Funktionen, wenn sie eine obere Schranke von beiden subharmonischen Funktionen ist. Dann folgt sie Aussage aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

Korollar 1.40. *Eine auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ stetige Funktion f ist genau dann subharmonisch, wenn alle $z \in G$ eine offenen Umgebung besitzen, auf der f subharmonisch ist.*

Beweis: Für eine auf G stetige Funktion f sei die Bedingung erfüllt. Sei g eine auf einem Gebiet $U \subset G$ harmonische Funktion. Dann ist auch die Einschränkung von g auf eine Wegzusammenhangskomponente der Schnittmenge $U \cap V$ von U mit einer offenen Teilmenge $V \subset G$ ein Gebiet. Deshalb erfüllt $f + g$ dort das Maximumprinzip. Weil das für alle Wegsuzammenhangskomponenten von $U \cap V$ und für offenen Umgebungen V von allen Punkten von G gilt, erfüllt $f + g$ auf ganz U das Maximumprinzip. Also ist f subharmonisch. **q.e.d.**

Korollar 1.41. *Sei f eine auf einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ subharmonische Funktion. Für einen abgschlossenen Ball $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ sei g die Lösung des Dirichletproblems auf $B(z_0, r)$ mit Randwert $f|_{\partial B(z_0,r)}$. Dann ist auch die folgende Funktion subharmonisch:*

$$h : \quad G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto h(z) = \begin{cases} g(z) & \text{für } z \in B(z_0, r) \\ f(z) & \text{für } z \in G \setminus B(z_0, r). \end{cases}$$

Beweis: Auf $B(z_0, r)$ und $G \setminus \overline{B(z_0, r)}$ ist h wegen Korollar 1.40 subharmonisch. Wegen Korollar 1.38 ist auf $B(z_0, r)$ die Funktion g eine obere Schranke von f, und deshalb h auf G eine obere Schranke von f. Dann erfüllt h offenbar auch auf $\partial B(z_0, r)$ die Bedingung von Satz 1.37. **q.e.d.**

Wir können harmonsiche Funktionen als Grenzwerte von subharmonischne Funktionen konstruieren. Eins solches Verfahren geht auf Perron zurück.

Definition 1.42. *(Perronfamilie) Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene beschränkte Teilmenge und f eine stetige Funktion auf ∂G. Dann enthält die Perronfamilie $\mathcal{P}(G, f)$ alle auf G subharmonischne Funktionen g, die für alle $z_0 \in \partial G$ folgende Bedingung erfüllen:*

$$\limsup_{z \to z_0} g(z) \leq f(z).$$

Satz 1.43. *(Methode von Perron) Sei G eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ und f eine stetige Funktion auf ∂G. dann definiert*

$$h : G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto h(z) = \sup\{g(z) \mid g \in \mathcal{P}(G, f)\}$$

eine harmonsiche Funktion auf G.

Beweis: Weil G beschraänkt ist, ist ∂G kompakt, und f beschränkt. Jede obere Schranke von f ist wegen dem Maximumprinzip eine obere Schranke an alle Elemente der Perronfamilie $\mathcal{P}(G, f)$. Deshalb ist das Supremum in der Definition von h endlich und h eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion auf G. Für ein $z_0 \in G$ sei $B(z_0, r)$ ein Ball um z_0, dessen Abschluss in G enthalten ist. Dann existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$, deren Funktionswerte $(g_n(z_0)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $h(z_0)$ konvergiert. Wir konstruieren eine monton wachsende Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$ die auf $B(z_0, r)$ harmonisch sind und gegen h konvergieren. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei h_n auf $G \subset B(z_0, r)$ das Maximum von $g_1, \ldots, g_n$. Auf $B(z_0, r)$ sei h_n die Lösung des Dirichletproblems zu dem Randwert $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$ auf $\partial B(z_0, r)$. Wegen Krorllar 1.39 sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$ subharmonsich. Mit diesen Funktionen erfüllen dann auch die Funktionen h_n die Charakterisierung von subharmonischen Funktionen durch das Maximumprinzip in Satz 1.37. Dann ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar eine monoton wachsende Folge von subharmonischen Funktionen in $\mathcal{P}(G, f)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist insbesondere $h(z_0)$ eine obere Schranke an $h_n(z_0)$ und $g(z_0)$ eine untere Schranke. Deshalb konvergiert $(h_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $h(z_0)$. Wegen dem Satz von Harnack konvergiert dann $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $B(z_0, r)$ kompakt gegen eine harmonische Funktion H mit $H(z_0 = h(z_0)$.

Sei jetzt $z_1 \in B(z_0, r)$. Dann gibt es eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(G, f)$, die bei z_1 gegen $h(z_1)$ konvergiert. Wir definieren wieder eine monoton wachsende Folge $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von harmonischen Funktionen auf $B(z_0)$, so dass h_n für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem Rand $\partial B(z_0, r)$ mit dem Maxium von $g_1, \ldots, g_n, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n$ übereinstimmt. Auch diese Folge konvergiert wegen dem Satz von Harnack auf $B(z_0, r)$ kompakt gegen eine harmonische Funktion $\tilde{H}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auf $B(z_0, r)$ wegen dem Maximumprinzip $h_n \leq \tilde{h}_n$. Also gilt auch $H \leq \tilde{H}$. Bei z_0 stimmen aber beide Funktionene überein. Also ist z_0 eine lokales Minimum von $\tilde{H} - H$. Wegen dem Maximumprinzip müssen dann H und $\tilde{H}$ übereinstimmen. Aufgrund der Wahl von $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\tilde{H}(z_1) = h(z_1$. Also gilt auch $H(z_1) = h(z_1$. Weil das für alle $z_1 \in B(z_0, r)$ gilt, folgt auf $B(z_0, r)$ auch $h = H$. Also ist h harmonisch. **q.e.d.**