Zygmundräume und Tensorprodukte

Alexander Klauer

27. November 2007

1 Erinnerung und Einleitung

Im letzten Semester hatten wir in zwei Dimensionen die Schrödingergleichung

$$(-\Delta + u)\psi = \lambda\psi$$

und die Diracgleichung

$$\begin{pmatrix} v & \partial \\ -\overline{\partial} & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Dabei waren die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$, die Potentiale $u, v, w \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ und die Eigenfunktionen $\psi, \psi_1, \psi_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Die Differenzialoperatoren erfüllen die Eigenschaften

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Wir hatten periodische Potentiale und quasiperiodische Randbedingungen für die Eigenfunktionen vorausgesetzt, d.h. es gibt ein nicht entartetes Gitter $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ und einen Randbedingungsparameter $k \in \mathbb{C}^2$, so dass für alle $\gamma \in \Gamma$ und $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} u(x+\gamma) &= u(x), & \psi(x+\gamma) &= e^{2\pi i(k|\gamma)}\psi(x), \\ v(x+\gamma) &= v(x), & w(x+\gamma) &= w(x), \\ \psi_1(x+\gamma) &= e^{2\pi i(k|\gamma)}\psi_1(x), & \psi_2(x+\gamma) &= e^{2\pi i(k|\gamma)}\psi_2(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist $(\cdot|\cdot)$ die euklidische (nicht die hermitesche) Standardbilinearform. Die Randbedingung k hatten wir direkt in die Differenzialoperatoren eingebaut:

$$\Delta_k := (\nabla + 2\pi i k)^2, \qquad \partial_k := \partial + \pi i k_1 + \pi k_2, \qquad \overline{\partial}_k := \overline{\partial} + \pi i k_1 - \pi k_2.$$

Benutzt man diese in der Schrödinger- bzw. Diracgleichung und betrachtet Potentiale und Eigenfunktionen nur noch auf dem Torus $F := \mathbb{R}^2/\Gamma$, dann sind die Randbedingungen (1) automatisch eingebaut.

Zu diesen beiden Gleichungen lassen sich die *Fermikurven* definieren:

$$F_S(u) := \{k \in \mathbb{C}^2 : \text{Es gibt ein } \psi \neq 0 \text{ mit } (-\Delta_k + u)\psi = 0\},$$
$$F_D(v,w) := \left\{k \in \mathbb{C}^2 : \text{Es gibt ein } \psi \neq (0,0) \text{ mit } \begin{pmatrix} v & \partial_k \\ -\bar{\partial}_k & w \end{pmatrix} \psi = 0\right\}.$$

Stellt man gewisse Regularitätsbedingungen an die Potentiale und Eigenfunktionen, dann erhält man lokale Beschreibungen von F_S und F_D im Rahmen der Theorie der komplexen Räume. Optimale Regularitätsbedingungen sind wir in zwei Dimensionen bisher schuldig geblieben, und eine im letzten Jahr diesbezüglich von uns geäußerte Vermutung hat sich als nicht ganz korrekt herausgestellt. Wir gehen darauf im Abschnitt 2 ein.

Fasst man F_S als Abbildung auf, so ist es unser Ziel, einerseits das Bild von F_S und andererseits die Fasern von F_S zu verstehen (inverses Problem). Geeignete Regularitätsbedingungen liefern den Zusammenhang

$$F_S(u) = F_D(u/4, -1)$$

zwischen den beiden Fermikurven, so dass man statt F_S auch F_D betrachten kann. Da die Diracgleichung eine Differenzialgleichung von nur erster Ordnung ist, ist das einfacher, als die Schrödingergleichung direkt zu betrachten.

Sei Γ^* das zu Γ duale Gitter. Beim letzten Mal hatten wir folgende Eigenschaften der Fermikurve $F_D(v,w)/\Gamma^*$ hergeleitet.

1. Für die freie Fermikurve gilt

   $$F_D(0,0) = \{k \in \mathbb{C}^2/\Gamma^* : k_2 \pm ik_1 = 0\}/\{k_\kappa^+ = k_\kappa^-\}$$

   mit $k_\kappa^\pm = \frac{1}{2}(\pm\kappa_1 - i\kappa_2, \pm\kappa_2 + i\kappa_1)$ für alle $\kappa \in \Gamma^*$.

2. Die Fermikurve ist die disjunkte Vereinigung

   $$F_D(v,w)/\Gamma^* = K \cup V^+ \cup V^- \cup \bigcup_{\substack{\kappa \in \Gamma^* \\ \|\kappa\| \gg 0}} H_\kappa.$$

   Dabei ist K kompakt und kann so gewählt werden, dass die H_κ die im Allgemeinen zu Henkeln deformierten Doppelpunkte in beliebig kleinen Umgebungen erfassen und ansonsten V^+ bzw. V^- zusammenhängend ist und beliebig nahe an der freien Fermikurve liegt.

Unser Ziel ist es nun, diese Eigenschaften genauer zu quantifizieren, d.h. wie genau weicht $F_D(v,w)$ von $F_D(0,0)$ in Abhängigkeit von v und w ab? Leider reicht die Zeit nicht, um auf diese Fragen im Speziellen einzugehen. Wir werden allerdings abstrakt eine hierzu hilfreiche Methode in Abschnitt 3 näher erläutern, nämlich die Darstellung gewisser banachraumwertiger Abbildungen als Tensorprodukte.

2 Zygmundräume

Die letzten Semester hatten wir nur Potentiale und Eigenfunktionen aus den Lebesgueräumen $L^p(F)$ bzw. aus den hiervon abgeleiteten Sobolewräumen $W^{m,p}(F)$ von m-fach differenzierbaren $L^p(F)$-Funktionen betrachtet. Wir erinnern uns: der wesentliche Schritt bei der Definition der Blochvarietät (und damit der Fermikurve) war (aufgrund o.g. Identifizierung genügt es, den Schrödingerfall zu betrachten),

$$u(\lambda - \Delta_k)^{-1}$$

als Operator $L^q(F) \to L^q(F)$ für ein geeignetes q zu definieren. Ist $u \in L^p(F)$ mit $p > 1$ (das ist in allen Dimensionen höher als 2 notwendig), dann gelingt dies für alle $q > 1$, denn man hat die folgenden Eigenschaften:

(R1) Ist $-\Delta\psi \in L^q(F)$, dann ist $\psi \in W^{2,q}(F)$.

(R2) Ist $u \in L^p(F)$ und $\psi \in W^{2,q}(F)$, dann ist $\|u\psi\|_q \leq \|u\|_p \|\psi\|_{W^{2,q}}$.

In zwei Dimensionen würden wir hingegen gerne $p = q = 1$ wählen. Dann allerdings gilt die erste der vorgenannten Eigenschaften nicht mehr. Gesucht wird daher ein Banachraum X, der diese Eigenschaften erfüllt und „zwischen" $L^1(F)$ und $L^p(F)$ mit $p > 1$ liegt, also einen Raum X mit

(X1) $L^p(F) \subseteq X \subseteq L^1(F)$ stetig für alle $p > 1$.

(X2) Ist $-\Delta\psi \in X$, dann ist $\psi \in W^{2,1}(F)$.

(X3) Ist $u \in X$ und $\psi \in W^{2,1}(F)$, dann ist $\|u\psi\|_X \leq \|u\|_X \|\psi\|_{W^{2,1}}$ (Höldersche Ungleichung).

Die oben genannte Eigenschaft (R1) kommt daher, dass für $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $q > 1$ auch die Konvolution von f mit $x_i/|x_i|^{n+1}$ $(1 \leq i \leq n)$ (die sog. *Riesztransformation* $R_i f$) immer in $L^q(\mathbb{R}^n)$ ist, wobei n die Dimension ist. Man kommt deswegen auf die Idee, einen Raum $H^1(\mathbb{R}^2)$ als den Raum aller derjenigen $L^1(\mathbb{R}^2)$-Funktionen f zu definieren, für die die Konvolution mit $x_i/|x_i|^3$ ($i \in \{1,2\}$) wieder in $L^1(\mathbb{R}^2)$ ist. Dies ist dann der sogenannte *Hardyraum*

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}^n) &:= \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : R_i f \in L^1(\mathbb{R}^n), 1 \leq i \leq n\} \\ \|f\| &:= \|f\|_1 + \sum_{i=1}^{n} \|R_i f\|_1. \end{aligned}$$

Das lokale Äquivalent bezeichnen wir mit $H^1(F)$. Dieser Raum erfüllt dann die Bedingung (R1) in maximaler Allgemeinheit, aber erfüllt er auch die Bedingung (R2)? Schwer zu sagen bei einer derart synthetischen Definition! Man definiert deswegen den Hardyraum lieber über eine gewisse Maximaleigenschaft, aber auch diese Definition hilft uns für unsere Zwecke nicht direkt weiter. Wir erwähnen aber folgende Charakterisierung:

Satz 1 (Coifman, Fefferman, Goldberg, Latter, Stein)**.** *Es existiert ein nur von F abhängiges $\delta > 0$, so dass folgende Aussage gilt: Es ist $f \in H^1(F)$ genau dann, wenn eine Folge von Quadern $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F und eine Folge von Abbildungen $(a_n \colon F \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass gilt:*

1. *für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{supp} a_n \subseteq Q_n$,*
2. *für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|Q_n| < \delta \Longrightarrow \int\limits_F a_n = 0$ (Momentbedingung),*
3. *$f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |Q_n|\|a_n\|_\infty < \infty$.*

Gegebenenfalls existiert eine feste Konstante $C > 0$, so dass $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |Q_n|\|a_n\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$.

Wir erahnen anhand dieses Satzes, dass wir leider nicht $X = H^1(F)$ setzen können, da die Momentbedingung im allgemeinen dafür sorgt, dass die Höldersche Ungleichung nicht mehr erfüllt ist. Das gilt allerdings nicht für alle $H^1(F)$-Abbildungen. Beispielsweise gilt für die charakteristische Funktion χ_Q eines Quaders $Q \subseteq F$:

$$\|\chi_Q\|_{H^1} \sim |Q| \log |Q|.$$

Für derartige Abbildungen gilt auch die Höldersche Ungleichung. Deswegen definieren wir den *Zygmundraum*

$$L^1_{\log}(F) := \{f \in L^1(F) : |f| \log(2 + |f|) \in L^1(F)\}.$$

Man sieht dann, dass $L^p(F) \subseteq L^1_{\log}(F) \subseteq H^1(F) \subseteq L^1(F)$ für alle $p > 1$. Deswegen können wir $X = L^1_{\log}(F)$ setzen.

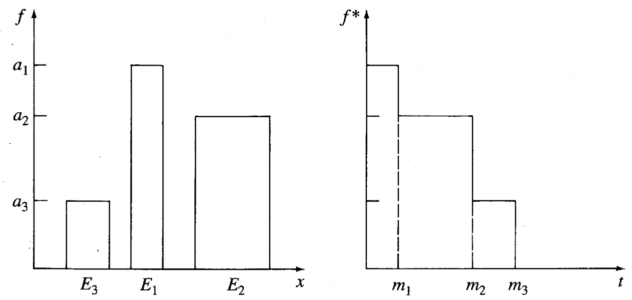

Figure 2. Graphs of f and f^*.

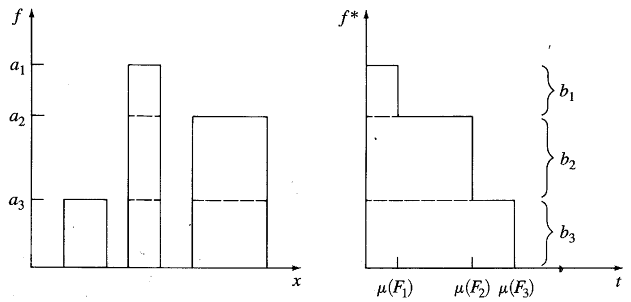

Figure 3. Graphs of f and f^*.

Allerdings haben wir jetzt ein neues Problem: ist $L^1_{\log}(F)$ überhaupt ein Banachraum? Welche Norm sollen wir benutzen? Der Ausdruck $|f|\log(2+|f|)$ ist ja nicht linear in $|f|$. Tatsächlich ist es aber möglich, eine Norm auf $L^1_{\log}(F)$ zu definieren. Dazu macht man sich die *Umschichtungsinvarianz* des $L^1(F)$ zunutze. Für ein $f \in L^1(F)$ hängt die Norm $\|f\|_1$ ja nur von in einem Koordinatensystem durch $|f|$ definierten Volumen ab. Inkompressible Veränderungen dieses Volumens ändern dann die Norm nicht. Diese Invarianz lässt sich ausnutzen, um eine Norm auf $L^1_{\log}(F)$ zu definieren. Für ein $f \in L^1(F)$ definieren wir zunächst die *Verteilungsfunktion*

$$\delta_f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \qquad \lambda \mapsto |\{x \in F : |f(x)| > \lambda\}|$$

und die *monoton fallende Umschichtung*

$$f^\star \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad t \mapsto \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \delta_f(\lambda) \leq t\}.$$

Wie die monoton fallende Umschichtung einer Abbildung $F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ aussieht, ist in der Grafik schematisch dargestellt (der Einfachheit halber nur in einer Dimension). Für allgemeine Abbildungen ist folgendes Lemma sofort klar:

Lemma 1. *Seien $f, g \colon F \to \mathbb{C}$ Abbildungen, wobei $|g(x)| = 1$ für alle $x \in F$ gilt. Dann ist $\delta_{gf} = \delta_f$, insbesondere also $(gf)^\star = f^\star$.*

Dieselbe Eigenschaft besitzen auch alle $L^p(F)$-Normen; Sobolewnormen im Allgemeinen jedoch nicht.

Die monoton fallende Umschichtung besitzt bereits die für eine Norm notwendige Linearitätseigenschaft. Um von $L^1(F)$ zu $L^1_{\log}(F)$ zu kommen, definieren wir die *Maximalfunktion*:

$$f^{\star\star}\colon (0,|F|] \to \mathbb{R} \cup \infty, \qquad x \mapsto \frac{1}{x}\int\limits_0^x f^\star(t)\mathrm{d}t.$$

Dann ist

$$L^1_{\log}(F) := \{f \in L^1(F) : \|f^{\star\star}\|_1 < \infty\}.$$

Aus Zeitgründen werden wir dies nicht explizit beweisen. Erwähnt sei aber noch, dass $f^\star(t) \leq \|f\|_1/t$ gilt und man durch eine partielle Integration die Gleichung

$$\|f\|_{L^1_{\log}} = \int\limits_0^{|F|} f^\star(t)\log\frac{|F|}{t}\mathrm{d}t$$

erhält.

3 Banachraumwertige Funktionen

Sei E ein Banachraum. Anstatt Abbildungen $F \to \mathbb{C}$ wollen wir in diesem Kapitel Abbildungen $F \to E$ betrachten und zu einem Banachraum $X(F)$ von Abbildungen $F \to \mathbb{C}$ einen analogen Banachraum $X(F,E)$ einführen, nämlich den Raum der Bochner-X-integrablen Funktionen. Man kann allgemein Räume von Bochner-integrablen Abbildungen $F \to E$ analog zu Räumen von Lebesgue-integrablen Abbildungen definieren, indem man, analog zu Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Quadern in F, Funktionen $F \to E$ mit endlichem Bild betrachtet und dann einen Grenzprozess durchführt. Aufgrund eines Satzes von Bochner lässt sich in unseren Fällen $X(F,E)$ auch relativ direkt aus $X(F)$ definieren:

Definition 1. Für eine Abbildung $f\colon F \to E$ definieren wir die *Normfunktion*

$$m_f\colon F \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto \|f(x)\|.$$

Dann definieren wir

$$X(F,E) := \{f\colon F \to E | m_f \in X(F)\}.$$

Der Raum $X(F,E)$ enthält dann *bochnerintegrable* Abbildungen. Wir möchten $X(F,E)$ gerne zu einem normierten Raum machen. Es liegt nahe, eine Norm für $f \in X(F,E)$ durch

$$\|f\| := \|m_f\|$$

zu definieren. Für den Fall, dass dies tatsächlich eine Norm ist, ist $X(F,E)$ ein Banachraum (da auch E ein Banachraum ist). Dies gelingt insbesondere für folgende Unterklasse von Räumen $X(F)$:

Definition 2. Ein Banachraum $X(F)$ heißt *monoton*, falls für alle $f,g \in X(F)$ mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ fast überall auch $\|f\| \leq \|g\|$ folgt.

Beispielsweise sind $L^p(F)$ und $L^1_{\log}(F)$ monoton, nicht aber die Sobolewräume. Im folgenden werden wir stets voraussetzen, dass $X(F)$ monoton ist.

Um derartige Räume besser behandeln zu können, werden wir sie mit Tensorprodukten von Banachräumen in Verbindung bringen.

Definition 3. Seien X, Y Vektorräume und $\mathrm{Bil}(X,Y)$ der Raum aller bilinearen Abbildungen $X \times Y \to \mathbb{C}$. Für $x \in X$ und $y \in Y$ definieren wir dann die Abbildung

$$x \otimes y \colon \mathrm{Bil}(X,Y) \to \mathbb{C}, \qquad A \mapsto A(x,y).$$

Die Menge aller dieser Abbildungen erzeugt einen Vektorraum $X \otimes Y$, der das *Tensorprodukt* von X und Y genannt wird.

Die Elemente von $X \otimes Y$ werden *Tensoren* genannt. Aufgrund der Definition über Bilinearformen ergeben sich folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y,\\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2,\\ \lambda(x \otimes y) &= (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)\end{aligned}$$

für $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt: ist B_X eine (Hamel-)Basis von X und B_Y eine Basis von Y, dann ist $B_X \times B_Y$ eine Basis von $X \otimes Y$. Deswegen besitzt jedes $u \in X \otimes Y$ eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i,$$

wobei wir die λ_i noch in einen der Faktoren absorbieren können.

Betrachten wir nun den Fall, in dem X und Y Banachräume sind. Wie definieren wir dann eine Norm auf $X \otimes Y$? Es gibt hier mehrere Möglichkeiten. Eine ist die *projektive Norm.* Sei $u \in X \otimes Y$ und definiere

$$\|u\|_\pi := \inf\left\{\sum_{i=1}^n \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right\}.$$

Damit wird $X \otimes Y$ zum normierten Raum, aber im Allgemeinen noch nicht zum Banachraum. Deswegen werden wir die Vervollständigung von $X \otimes Y$ bezüglich der projektiven Norm benutzen und diese mit $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ bezeichnen.

Bemerkung 1. Im Prinzip könnte man in der Definition von $\|\cdot\|_\pi$ auf das Infimum verzichten, wenn man eine Hamelbasis vorgibt und dann analog zum $\mathbb{R}^n$ eine p-Norm auf $X \otimes Y$ definiert. Allerdings gibt es auf vielen Banachräumen keine kanonische Hamelbasis. In vielen Beispielen ist es sogar unmöglich überhaupt irgendeine Hamelbasis explizit anzugeben. Deswegen bevorzugt man diese Definition.

Die zweite Möglichkeit ist, bei Tensorprodukten der Form $X(F) \otimes E$ eine Identifikation mit einer Teilmenge von $X(F, E)$ vorzunehmen.

Lemma 2. *Die Abbildung*

$$X(F) \otimes E \to X(F, E), \qquad f \otimes y \mapsto (x \mapsto f(x)y)$$

(definiert durch lineare Erweiterung) ist injektiv.

Aufgrund dieses Lemmas erhalten wir eine Norm $\|\cdot\|_X$ auf $X(F) \otimes E$. Die Vervollständigung bezeichnen wir mit $X(F) \widehat{\otimes}_X E$.

Lemma 3. *Es gilt:*

$$L^1(F) \widehat{\otimes}_\pi E = L^1(F) \widehat{\otimes}_{L^1} E.$$

Als nächstes werden wir lineare Abbildungen zwischen Tensorprodukten von Banachräumen betrachten. Dabei ist folgendes Lemma oft hilfreich:

Lemma 4 (Dichtigkeitssatz)**.** *Sei E ein Vektorraum mit zwei Normen, $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$, für die ein $c > 0$ existiert, so dass für alle $x \in E$ gilt:*

$$\|x\|'' \leq c\|x\|'.$$

Seien G ein weiterer normierter Raum und $T\colon (E, \|\cdot\|') \to G$ eine stetige lineare Abbildung, für die ein $\lambda > 0$ existiert, so dass für alle x aus einer dichten Teilmenge von $(E, \|\cdot\|')$ gilt:

$$\|Tx\| \leq \lambda\|x\|''.$$

Dann ist $T\colon (E, \|\cdot\|'') \to G$ stetig mit $\|T\| \leq \lambda$.

Wir wollen nun die Stetigkeit von linearen Abbildungen zwischen Tensorprodukten von Banachräumen im Hinblick auf $X(F)$ untersuchen.

Definition 4. Seien E_1, E_2, G_1, G_2 Vektorräume und $T_i\colon E_i \to G_i$, $i \in \{1, 2\}$ lineare Abbildungen. Dann definieren wir

$$T_1 \otimes T_2\colon E_1 \otimes E_2 \to G_1 \otimes G_2, \qquad x \otimes y \mapsto (T_1x) \otimes (T_2y).$$

Lemma 5. *Seien E, G Banachräume und $T\colon E \to G$ eine stetige, lineare Abbildung. Dann ist auch die Abbildung $1 \otimes T\colon X(F) \otimes E \to X(F) \otimes G$ stetig.*

Beweis. Sei $\sum_i f_i \otimes y_i \in X(F) \otimes E$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| (1 \otimes T) \left(\sum_i f_i \otimes y_i \right) \right\| &= \left\| \sum_i f_i \otimes (Ty_i) \right\| \\
&= \left\| x \mapsto \left\| \sum_i f_i(x) T y_i \right\| \right\| \\
&= \left\| x \mapsto \left\| T \left(\sum_i f_i(x) y_i \right) \right\| \right\|
\end{aligned}$$

Wegen der Monotonie gilt dann:

$$\begin{aligned}
&\le \left\| x \mapsto \|T\| \left\| \sum_i f_i(x) y_i \right\| \right\| \\
&= \|T\| \left\| x \mapsto \left\| \sum_i f_i(x) y_i \right\| \right\| \\
&= \|T\| \left\| \sum_i f_i \otimes y_i \right\| .
\end{aligned}$$

□

Die Abbildung $S \otimes T$ ist für stetige lineare S, T nicht unbedingt stetig. Für spezielle S lässt sich aber Stetigkeit erzwingen. Dazu definieren wir:

Definition 5. Sei $S\colon X_1(F) \to X_2(F)$ eine lineare Abbildung zwischen monotonen Banachräumen $X_1(F)$, $X_2(F)$. Dann heißt S *disjunktionserhaltend*, falls für beliebige paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_l \subseteq F$ mit charakteristischen Funktionen χ_i, $1 \le i \le l$, in der Summe

$$\sum_{k=1}^{l} (S\chi_i)(x)$$

für jedes $x \in F$ höchstens ein nicht verschwindender Summand auftritt.

Typisches Beispiel für disjunktionserhaltende S sind Multiplikationsoperatoren $f \mapsto gf$ für ein festes g.

Wir sind nun in der Lage, den wichtigsten Satz dieses Abschnittes zu beweisen.

Satz 2. *Seien E und G Banachräume und*

$$S\colon L^1_{\log}(F) \to L^1_{\log}(F), \qquad T\colon E \to G$$

stetige lineare Abbildungen, wobei S positiv oder disjunktionserhaltend ist. Dann ist auch

$$S \otimes T\colon L^1_{\log}(F) \otimes E \to L^1_{\log}(F) \otimes G$$

stetig.

Beweis. Es ist $S \otimes T = (1 \otimes T) \circ (S \otimes 1_E)$. Die Stetigkeit von $1 \otimes T$ wurde bereits in Lemma 5 bewiesen. Wegen $L^1_{\log}(F) \subseteq L^1(F)$ und wegen Lemma 4 genügt es, die Stetigkeit von $S \otimes 1_E$ für Elemente der Form $\sum_i \chi_i \otimes y_i$ zu zeigen, wobei die χ_i charakteristische Funktionen paarweise disjunkter Mengen $A_i \subseteq F$ sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| (S \otimes 1_E) \left(\sum_i \chi_i \otimes y_i \right) \right\| &= \left\| \sum_i (S\chi_i) \otimes y_i \right\| \\
&= \int_0^{|F|} \left(x \mapsto \left\| \sum_i (S\chi_i)(x) y_i \right\| \right)^{\star\star} (t) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

und wegen der Monotonie

$$\leq \int_0^{|F|} \left(x \mapsto \sum_i |(S\chi_i)(x)| \|y_i\| \right)^{\star\star} (t) \mathrm{d}t$$

Ist S positiv, dann können wir die Betragstriche weglassen. Wegen Lemma 1 geht das auch dann, wenn S disjunktionserhaltend ist.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{|F|} \left(\sum_i \|y_i\| S\chi_i \right)^{\star\star} (t) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{|F|} \left(S \left(\sum_i \chi_i \|y_i\| \right) \right)^{\star\star} (t) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Nun nutzen wir die Stetigkeit von S aus:

$$\leq \|S\| \int\limits_0^{|F|} \left(\sum_i \chi_i \|y_i\| \right)^{\star\star} (t) \mathrm{d}t$$

Da die A_i paarweise disjunkt sind, folgt

$$\begin{aligned} &= \|S\| \int\limits_0^{|F|} \left(x \mapsto \left\| \sum_i \chi_i(x) y_i \right\| \right)^{\star\star} (t) \mathrm{d}t \\ &= \|S\| \left\| \sum_i \chi_i \otimes y_i \right\|. \end{aligned}$$

□

Dieser Satz ist auch dann gültig, wenn man ein oder beide $L^1_{\log}(F)$ durch einen Lebesgueraum ersetzt.