Seminar in Funktionentheorie

Holomorphe Abbildungen und komplexe Untermannigfaltigkeiten

16.10.2007

Jan Morgenthaler

Die aus der Analysis wohlbekannten Sätze von der impliziten und inversen Funktion lassen sich leicht auf holomorphe Funktionen und Abbildungen ausdehnen, indem man in den reell-differenzierbaren Versionen die gegebenen Funktionen als holomorph vorraussetzt und dann zeigt, dass die Funktionen, die man als Ergebnis der Sätze erhält, holomorph sind. Man kann diese Sätze allerdings auch mit rein funktionentheoretischen Mitteln zeigen, wodurch man eine tiefere Einsicht in das Verhalten von holomorphen Funktionen in mehreren Variablen erhält.

1 Der Satz über implizite Funktionen

(1.1) Definition
Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, $A \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht identisch 0 bei A. Dann ist die *totale Ordnung von f in A* definiert als

$$totalord_A(f) := min\left\{\nu \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{\partial^\nu f}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}}(A) \neq 0 \; mit \; i_1 + \ldots + i_n = \nu\right\}$$

Die Funktion f heißt *regulär in z_n im Punkt A*, wenn $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n)$ nicht identisch 0 als Funktion von z_n in einer Umgebung von a_n ist.
Wenn f regulär in z_n ist, dann definiert man die *Ordnung von f in z_n im Punkt A* durch

$$ord_A(f, z_n) := min\left\{\nu \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{\partial^\nu f}{\partial z_n^\nu}(A) \neq 0 \right\}$$

△

Wenn die Potenzreihenentwicklung von f im Punkt A in der Form $f(Z) = \sum_\mu f_\mu(Z)$ geschrieben wird, wobei f_μ ein homogenes Polynom der Ordnung μ in $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$ ist, dann ist $totalord_A(f)$ die kleinste Zahl ν für die f_ν nicht identisch 0 ist. Diese Zahl

ν ist eine wohldefinierte nichtnegative ganze Zahl, wenn f nicht identisch 0 in einer Umgebung von A ist und ist genau dann 0, wenn $f(A) \neq 0$.
Die Ordnung von f in z_n in A ist nur dann definiert, wenn $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n)$ nicht identisch 0 bei z_n in A ist und sie ist gerade die Ordnung der Nullstelle der holomorphen Funktion $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n)$ in a_n. Die Ordnung von f in z_n ist mindestens genauso groß wie die totale Ordnung von f, aber kann natürlich auch größer sein.

(1.2) Lemma
Wenn f eine holomorphe Funktion mit $totalord_0(f) = \nu$ ist, dann kann f durch einen geeigneten nichtsingulären linearen Koordinatenwechsel ϕ in $\mathbb{C}^n$ regulär in z_n gemacht werden, so dass $ord_0(f \circ \phi, z_n) = \nu$ gilt.

Beweis:
Die Funktion f hat eine Potenzreihenentwicklung der Form $f(Z) = \sum_\mu f_\mu(Z)$ mit f_μ homogene Polynome vom Grad μ in $z_1, \ldots, z_n$ und ν ist die kleinste Zahl für die f_ν nicht identisch 0 ist.
Wähle einen Punkt $B \in \mathbb{C}^n$, so dass $f_\nu(B) \neq 0$ ist. Nach einem nichtsingulären linearen Koordinatenwechsel ϕ, der B auf $(0, \ldots, 0, 1)$ abbildet, erhält man für $\tilde{f} = f \circ \phi$ eine korrespondierende Reihenentwicklung in homogene Polynome, in der $\tilde{f}_\mu \equiv 0$ für $\mu < \nu$ ist und $\tilde{f}_\nu(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$. Es folgt, dass $\tilde{f}$ regulär ist, da $\tilde{f}$ aufgrund von $\tilde{f}_\nu(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$ in einer Umgebung von 0 nicht identisch 0 sein kann und dass $ord_0(\tilde{f}, z_n) = \nu$ gilt. $\square$

Dieses Argument kann man genauso auf eine endliche Zahl von holomorphen Funktionen anwenden, so dass diese gleichzeitig regulär von entsprechender Ordnung gemacht werden können.

(1.3) Notation
Zur Vereinfachung führt man folgende Notationen ein: Für einen Punkt $Z \in \mathbb{C}^n$ schreibt man $Z = (Z', z_n)$, wobei $Z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ und einen Polyzylinder $\Delta(A; R) \subseteq \mathbb{C}^n$ schreibt man als Produkt $\Delta(A; R) = \Delta(A'; R') \times \Delta(a_n; r_n)$ mit $\Delta(A'; R') \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ und $\Delta(a_n; r_n) \subseteq \mathbb{C}^1$. $\triangle$

Zur Vorbereitung des Satzes von der impliziten Funktion benötigt man folgendes Lemma:

(1.4) Lemma
Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $ord_A(f, z_n) = \nu$ für ein $A \in D$. Dann existiert ein offener Polyzylinder $\Delta(A; R) = \Delta(A'; R') \times \Delta(a_n; r_n)$ mit $\overline{\Delta(A; R)} \subseteq D$, so dass für alle $Z' \in \Delta(A'; R')$ die Funktion $f(Z', z_n)$ als Funktion in z_n genau ν Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) in $\Delta(a_n; r_n)$ und auf $\partial\Delta(a_n; r_n)$ keine Nullstellen hat.

Beweis:
Nach Vorraussetzung ist f holomorph in einem Polyzylinder $\Delta(A;S) \subseteq D$ und $f(A', z_n)$ hat eine Nullstelle der Ordnung ν in a_n. Wähle nun $r_n \in (0, s_n)$ so, dass $f(A', z_n)$ in $\overline{\Delta(a_n; r_n)}$ keine weiteren Nullstellen hat, was aufgrund des Identitätssatzes möglich ist und setze

$$\epsilon = inf_{\{z_n : |z_n - a_n| = r_n\}} |f(A', z_n)| > 0$$

Da f in einer offenen Umgebung der kompakten Menge $\{Z = (Z', z_n) \in \mathbb{C}^n : Z' = A', z_n : |z_n - a_n| = r_n\}$ stetig ist, existieren Konstanten $r_j \in (0, s_j)$ für alle $1 \leq j \leq n-1$, so dass

$$|f(Z', z_n) - f(A', z_n)| < \epsilon \qquad \text{für } Z' \in \Delta(A'; R'), \forall z_n : |z_n - a_n| = r_n$$

Da $\epsilon \leq |f(A', z_n)|$ für alle z_n mit $|z_n - a_n| = r_n$, folgt mit dem Satz von Rouche, dass die Funktionen $f(A', z_n)$ und $f(Z', z_n)$ als Funktionen in z_n die gleiche Anzahl an Nullstellen in $\Delta(a_n; r_n)$ haben, also hat $f(Z', z_n)$ in diesem Ball genau ν Nullstellen. $\square$

(1.5) Satz (Satz von der impliziten Funktion)
Sei $A \in D \subseteq \mathbb{C}^n$, D offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die regulär in z_n ist und für die $ord_A(f, z_n) = 1$ gilt. Dann existiert für einen offenen Polyzylinder $\Delta(A; R) = \Delta(A'; R') \times \Delta(a_n; r_n)$ mit $\overline{\Delta(A; R)} \subseteq D$ eine holomorphe Funktion $g : \Delta(A'; R') \to \Delta(a_n; r_n)$, so dass

1. $g(A') = a_n$
2. $f(Z) = 0$ für ein $Z \in \Delta(A; R)$ genau dann wenn $z_n = g(Z')$

Beweis:
Wähle einen offenen Polyzylinder $\Delta(A; R) \subseteq D$ für den das vorherige Lemma gilt, was heißt, dass die Funktion $f(Z', z_n)$ genau eine Nullstelle in $\Delta(a_n; z_n)$ hat. Definiere nun eine Funktion $g : \Delta(A'; R') \to \Delta(a_n; z_n)$, die jedem Punkt $Z' \in \Delta(A'; R')$ den eindeutigen Punkt $g(Z') \in \Delta(a_n; r_n)$ zuordnet, so dass $f(Z', g(Z')) = 0$. Damit erfüllt die Funktion g die beiden geforderten Bedingungen. Es bleibt zu zeigen, dass g holomorph in $\Delta(A'; R')$ ist.
Für jedes feste $Z' \in \Delta(A'; R')$ hat die Funktion $f(Z', z_n)$ eine einfache Nullstelle in $z_n = g(Z')$ und ist ansonsten ungleich 0 in $\overline{\Delta(a_n; r_n)}$. Es folgt

$$g(Z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{\zeta_n}{f(Z', \zeta_n)} \frac{\partial f(Z', \zeta_n)}{\partial \zeta_n} d\zeta_n$$

Die Funktion $f(Z', \zeta_n)$ ist ungleich 0, wenn $|\zeta_n - a_n| = r_n$ und $Z' \in \Delta(A'; R')$, so dass der Integrand holomorph in Z' im Polyzylinder $\Delta(A'; R')$ ist, was zeigt, dass g in diesem Polyzylinder holomorph ist. $\square$

Als nächstes verallgemeinern wir den Satz von der impliziten Funktion auf Abbildungen. Dazu einige Notationen:

(1.6) Notation
Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $F : D \to \mathbb{C}^m$ eine holomorphe Abbildung, die durch ihre Koordinatenfunktionen $F = (f_1, \ldots, f_m)$ beschrieben ist. Dann ist die *Jacobi-Matrix* von F in $A \in D$ die $m \times n$-Matrix

$$J_F(A) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(A) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \right\}$$

Die Abbildung F ist *nichtsingulär in* A, wenn ihre Jacobi-Matrix maximalen Rang in diesem Punkt hat, d.h. wenn $rank\ J_F(A) = min(m, n)$. F ist nichtsingulär in D, wenn F nichtsingulär in allen Punkten von D ist.
Für eine Zerlegung $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$ mit $n \geq m$ schreibt man einen Punkt $Z \in \mathbb{C}^n$ als $Z = (Z', Z'')$, wobei $Z' \in \mathbb{C}^{n-m}$ und $Z'' \in \mathbb{C}^m$. Genauso schreibt man für die Jacobi-Matrix einer holomorphen Abbildung $F : D \to \mathbb{C}^m$ in einem Punkt $A \in \mathbb{C}^n$ $J_F(A) = (J_F'(A), J_F''(A))$, wobei $J_F'(A)$ eine $m \times (n-m)$-Matrix und $J_F''(A)$ eine $m \times m$-Matrix ist. △

(1.7) Satz (Satz von der impliziten Abbildung)
Sei $m \leq n$, U eine offene Umgebung eines Punktes $A \in \mathbb{C}^n$ und $F : U \to \mathbb{C}^m$ holomorph mit $F(A) = 0$ und $rank\ J_F(A) = m$. Dann existiert für einen offenen Polyzylinder $\Delta(A; R) = \Delta(A'; R') \times \Delta(A''; R'') \subseteq \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Abbildung $G : \Delta(A'; R') \to \Delta(A''; R'')$, so dass

1. $G(A') = A''$
2. $F(Z) = 0$ für ein $Z = (Z', Z'') \in \Delta(A; R)$ genau dann wenn $Z'' = G(Z')$

Beweis:
Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Dimension m:
Der Fall $m = 1$ ist genau der Satz von der impliziten Funktion.
Sei also $m > 1$ und der Satz bewiesen für Dimension $m-1$. Da nur das Nullstellenverhalten von F von Interesse ist, kann man statt F die Komposition $T \circ F$ betrachten, wobei T ein nichtsingulärer linearer Koordinatenwechsel in $\mathbb{C}^m$ ist. Man kann also annehmen, dass $J_F''(A) = I_m$ ist. Da nun $\partial f_m / \partial z_n(A) = 1$ gilt, kann man den Satz der impliziten Funktion auf die Funktion f_m anwenden:

Für einen offenen Polyzylinder $\Delta(A;R)$ auf dem F und damit auch f_m holomorph ist, existiert eine holomorphe Funktion

$$g' : \Delta(a_1, \ldots, a_{n-1}; r_1, \ldots, r_{n-1}) \to \Delta(a_n; r_n)$$

so dass $g'(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n$ und $f_m(Z) = 0$ für ein $Z \in \Delta(A;R)$ genau dann wenn $z_n = g'(z_1, \ldots, z_{n-1})$ ist.
Definiere nun eine holomorphe Funktion

$$F' : \Delta(a_1, \ldots, a_{n-1}; r_1, \ldots, r_{n-1}) \to \mathbb{C}^{m-1} \text{ durch } F' = (f'_1, \ldots, f'_{m-1})$$
$$\text{mit } f'_i(z_1, \ldots, z_{n-1}) = f_i(z_1, \ldots, z_{n-1}, g'(z_1, \ldots, z_{n-1})) \text{ für } 1 \leq i \leq m-1$$

Da für $1 \leq i \leq m-1$

$$f'_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) = f_i(a_1, \ldots, a_{n-1}, g'(a_1, \ldots, a_{n-1})) = f_i(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = 0$$

gilt, folgt, dass $F'(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$. Außerdem ist für $1 \leq i, j \leq m-1$

$$\frac{\partial f'_i}{\partial z_{n-m+j}}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \delta_{ij} = I_{m-1}$$

so dass $rank\ J_{F'}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = m - 1$ ist.
Nun kann auf F' die Induktionsvoraussetzung angewendet werden, so dass, nach einer eventuell weiteren Einschränkung des Polyzylinders $\Delta(a_1, \ldots, a_{n-1}; r_1, \ldots, r_{n-1})$, eine holomorphe Abbildung

$$G' : \Delta(A'; R') \to \Delta(a_{n-m+1}, \ldots, a_{n-1}; r_{n-m+1}, \ldots, r_{n-1})$$

existiert mit $G'(A') = (a_{n-m+1}, \ldots, a_{n-1})$ und $F'(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$ für ein $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \Delta(a_1, \ldots, a_{n-1}; r_1, \ldots, r_{n-1})$ genau dann wenn $(z_{n-m+1}, \ldots, z_{n-1}) = G'(Z')$.
Da $F(Z) = 0$ für ein $Z \in \Delta(A;R)$ genau dann wenn $z_n = g'(z_1, \ldots, z_{n-1})$ und $F'(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$, folgt für die Abbildung

$$G : \Delta(A'; R') \to \Delta(A''; R'') \text{ definiert durch } G(Z') = (G'(Z'), g'(Z', G'(Z')))$$

zum einen $G(A') = (G'(A'), g'(A', G'(A'))) = (a_{n-m+1}, \ldots, a_{n-1}, g'(A', a_{n-m+1}, \ldots, a_{n-1}) = (a_{n-m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n) = A''$ und zum anderen $F(Z', Z'') = 0$ für ein $(Z', Z'') \in \Delta(A;R)$ genau dann wenn $Z'' = G(Z')$. □

2 Der Satz von der inversen Abbildung

Mit dem Satz über implizite Abbildungen lässt sich der Satz von der inversen Abbildung leicht folgern, aus dem man einen vorläufigen Begriff der Biholomorphie erhält.

(2.1) Satz (Satz von der inversen Abbildung)
Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, $A \in U$ und $F : U \to \mathbb{C}^n$ eine nichtsinguläre holomorphe Abbildung für die $F(A) = B$ gilt. Dann hat F in einer Umgebung von B eine nichtsinguläre holomorphe Umkehrabbildung.

Beweis:
Sei $\widetilde{U}$ eine offene Umgebung von $(B, A) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{2n}$ und definiere eine holomorphe Abbildung $H : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^n$ durch

$$H(Z', Z'') = F(Z'') - Z' \quad \forall Z = (Z', Z'') \in \widetilde{U}$$

Es gilt $H(B, A) = F(A) - B = 0$ und die Matrix

$$\left\{ \frac{\partial h_i}{\partial z_{n+j}}(B, A) : 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

ist nichtsingulär. Aus Satz 1.7 folgt, dass eine holomorphe Abbildung G von einer offenen Umgebung von B nach $\mathbb{C}^n$ existiert, für die gilt

1. $G(B) = A$
2. $H(Z', Z'') = 0$ für (Z', Z'') in einer Umgebung von (B, A) genau dann wenn $Z'' = G(Z')$

Es folgt für alle (Z', Z'') in einer Umgebung von (B, A)

$$0 = H(Z', Z'') = H(Z', G(Z')) = F(G(Z')) - Z' \text{ , also } F(G(Z')) = Z'$$

Somit ist G eine holomorphe Umkehrabbildung von F in einer Umgebung von B.
Da $F \circ G = id_{\mathbb{C}^n}$, folgt mit der Kettenregel

$$I = J_{F \circ G}(B) = J_F(A) \cdot J_G(B)$$

Also ist $J_G(B)$ invertierbar und G somit nichtsingulär. □

(2.2) Definition
Eine *biholomorphe Abbildung* $F : U \to V$ mit $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ offen ist eine holomorphe Abbildung für die eine holomorphe Umkehrabbildung existiert. △

Aus der Funktionentheorie in einer Variablen weiß man, dass jede injektive holomorphe Funktion auf einem Gebiet eine bijektive holomorphe Funktion auf ein Gebiet mit holomorpher Umkehrabbildung ist, also eine biholomorphe Abbildung von einem Gebiet auf ein Gebiet ist. Hier ist die Biholomorphie durch eine stärkere Aussage definiert, aber letztlich lässt sich die Aussage in $\mathbb{C}$ auch auf $\mathbb{C}^n$ übertragen, also dass jede injektive holomorphe Abbildung auf geeigneten Gebieten eine holomorphe Umkehrfunktion besitzt. Im Reellen gilt dies so nicht. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3$ ist injektiv, aber hat keine differenzierbare Umkehrfunktion.

Eine wichtige Konsequenz des Satzes von der inversen Abbildung ist der Rangsatz, der besagt, dass eine Abbildung mit konstantem Rang lokal durch Koordinatenwechsel in eine einfache Gestalt gebracht werden kann.

(2.3) Satz (Rangsatz)
Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $F : D \to \mathbb{C}^m$ eine holomorphe Abbildung mit $rank\ J_F(Z) = k$ für alle $Z \in D$. Dann existieren für jeden Punkt $A \in D$ offene Umgebungen $U_A \subseteq \mathbb{C}^n$ von A und $U_B \subseteq \mathbb{C}^m$ von $B = F(A)$ und biholomorphe Abbildungen $G_A : U_A \to \Delta(0; R_A)$ und $G_B : U_B \to \Delta(0; R_B)$ mit Polyzylindern $\Delta(0; R_A) \subseteq \mathbb{C}^n$ und $\Delta(0; R_B) \subseteq \mathbb{C}^m$ für die $G_A(A) = 0$ und $G_B(B) = 0$ gilt, so dass die Abbildung $G_B \circ F \circ G_A^{-1} : \Delta(0; R_A) \to \Delta(0; R_B)$ folgende Gestalt hat:

$$G_B \circ F \circ G_A^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$$

Beweis:
Zur Vereinfachung kann man $A = B = 0$ annehmen. Weiter kann man durch nichtsinguläre lineare Koordinatenwechsel in $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^m$ annehmen, dass

$$J_F(0) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun folgt, dass für die Abbildung

$$\varphi : D \to \mathbb{C}^n \text{ definiert durch } \varphi(Z) = (f_1(Z), \dots, f_k(Z), z_{k+1}, \dots, z_n)$$

gilt: $J_\varphi(0) = I_n$. Aufgrund des Satzes der inversen Abbildung existiert eine offene Umgebung U_A von 0 in $\mathbb{C}^n$, welche durch φ biholomorph auf einen Polyzylinder $\Delta(0; R_A)$ abgebildet wird. Setze $G_A := \varphi_{|U_A}$. Für $W \in \Delta(0; R_A)$ und $Z := G_A^{-1}(W)$, hat man

$$(f_1, \dots, f_m)(Z) = F(Z) = F \circ G_A^{-1}(W) =: (w_1, \dots, w_k, h_{k+1}(W), \dots, h_m(W))$$

wobei jedes h_j holomorph ist. Da man $rank\ J_F = k$ auf $\Delta(0; R_A)$ annehmen kann, folgt mit der Kettenregel

$$rank\ J_{F\circ G_A^{-1}} = k \ \Rightarrow\ \frac{\partial h_j}{\partial w_l} = 0\ \forall j, l \geq k+1$$

Es folgt, dass die h_j nicht von den Variablen $w_{k+1}, \ldots, w_n$ abhängen. Ihre Restriktionen auf die ersten k Komponenten ergeben eine Abbildung $H : \Delta(0; S) \to \mathbb{C}^{m-k}$ mit $\Delta(0; S) \subseteq \mathbb{C}^k$. Die bijektive Abbildung

$$\gamma : \Delta(0; S) \times \mathbb{C}^{m-k} \to \Delta(0; S) \times \mathbb{C}^{m-k} \text{ definiert durch } \gamma(u, v) = (u, v - H(u))$$

hat die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & I_{m-k} \end{pmatrix}$$

und ist wegen des Satzes von der inversen Abbildung biholomorph. Nun wählt man einen ausreichend großen Polyzylinder $\Delta(0; S') \subseteq \mathbb{C}^{m-k}$, so dass

$$\gamma \circ F \circ G_A^{-1}(\Delta(0; R_A)) \subset \Delta(0; S) \times \Delta(0; S') =: \Delta(0; R_B) \subseteq \mathbb{C}^m$$

Für $U_B := \gamma^{-1}(\Delta(0; R_B))$ und $G_B := \gamma_{|U_B}$ folgt nun

$$G_B \circ F \circ G_A^{-1}(W) = \gamma(w_1, \ldots, w_k, h_{k+1}(W), \ldots, h_m(W)) = (w_1, \ldots, w_k, 0, \ldots, 0) \qquad \square$$

3 Komplexe Untermannigfaltigkeiten

(3.1) Notation
Zur Vereinfachung schreibe Δ^n für einen Polyzylinder $\Delta(0; R) \subseteq \mathbb{C}^n$. $\triangle$

Der Rangsatz gibt Anlass zur folgenden Definition:

(3.2) Definition
Eine *komplexe Untermannigfaltigkeit* M einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ist eine in D abgeschlossene Teilmenge, so dass gilt: Für alle $A \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von A und eine biholomorphe Abbildung $\phi : U \to \Delta^n$ mit $\phi(A) = 0$, so dass mit der Zerlegung $\Delta^n = \Delta^s \times \Delta^{n-s}$ gilt

$$M \cap U = \phi^{-1}(\{Z \in \Delta^n : z_{s+1} = \cdots = z_n = 0\}) = \phi^{-1}(\Delta^s \times 0) \quad \text{für ein } s \in \mathbb{Z} \qquad \triangle$$

Wenn M eine Untermannigfaltigkeit wie in der Definition ist, dann ist die Umkehrabbildung von $\phi_{|M\cap U}$ eine nichtsinguläre holomorphe Abbildung $\psi : \Delta^s \to \mathbb{C}^n$ mit $\psi(\Delta^s) = M \cap U$. Sind ψ_1 und ψ_2 solche Abbildungen, dann ist die Komposition $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$ eine biholomorphe Abbildung, was bedeutet, dass die Zahl s unabhängig von der Wahl der Abbildungen ϕ oder ψ ist. Dies führt zu folgender Definiton:

(3.3) Definition
Die so beschriebene Zahl s heißt die *(komplexe) Dimension der Untermannigfaltigkeit M im Punkt A* und wird als $dim_A(M)$ bezeichnet.
Da die Dimension lokal konstant ist, ist sie also konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von M. Wenn alle Zusammenhangskomponenten von M dieselbe Dimension s haben, dann sagt man einfach, dass M die Dimension s hat. △

Eine Art Untermannigfaltigkeiten zu charakterisieren, ist sie als Bilder von holomorphen Abbildungen zu beschreiben:

(3.4) Proposition
Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $M \subseteq D$ abgeschlossen in D. Dann ist M genau dann eine Untermannigfaltigkeit von D, wenn für alle $A \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von A, ein Polyzylinder Δ^k und eine holomorphe Abbildung $F : \Delta^k \to U$ existieren, so dass

1. $F(0) = A$
2. $U \cap M = F(\Delta^k)$
3. J_F hat konstanten Rang

In diesem Fall gilt $J_F(A) = dim_A(M)$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“ :
Sei $A \in M$ und k die Dimension von M bei A. Wähle nun wie in Definition 3.2 eine biholomorphe Abbildung $\phi : U \to \Delta^n$, so dass $M \cap U = \phi^{-1}(\Delta^k \times 0)$. Dann ist $F := \phi^{-1}_{|\Delta^k}$ holomorph und die Jacobi-Matrix hat konstanten Rang k.
„$\Leftarrow$“ :
Sei nun umgekehrt $rank\ J_F(Z) = r$ für alle $Z \in \Delta^k$. Wegen des Rangsatzes gibt es biholomorphe Abbildungen $\varphi : \Delta^k \to \Delta_1^n$ und $\psi : U \to \Delta_2^n$ mit

$$\chi : \Delta_1^n \to \Delta_2^n \text{ definiert durch } \chi(Z) := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}(Z) = (z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0)$$

Dann folgt $U \cap M = F(\Delta^k) = F \circ \varphi^{-1}(\Delta_1^n) = \psi^{-1} \circ \chi(\Delta_1^n)$. Aufgrund der Konstruktion von χ haben wir $\chi(\Delta_1^n) = \Delta^r \times 0 \subseteq \Delta_2^n$, woraus $U \cap M = \psi^{-1}(\Delta^r \times 0)$ folgt. Also ist M eine Untermannigfaltigkeit mit $r = dim_A(M)$. □

Man kann Untermannigfaltigkeiten noch auf eine andere Art charakterisieren. Folgende Proposition (ohne Beweis) besagt, dass man jede Untermannigfaltigkeit als Nullstellenmenge von holomorphen Funktionen schreiben kann, was man auch *analytische Menge* nennt. Also ist jede Untermannigfaltigkeit eine analytische Menge.

(3.5) Proposition
Sei $D \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $M \subseteq D$ abgeschlossen in D. Dann ist M genau dann eine Untermannigfaltigkeit von D, wenn gilt: Für alle $A \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von A und eine holomorphe Abbildung $F : U \to \mathbb{C}^m$, so dass $U \cap M = \{Z \in U \,|F(Z) = 0\}$ und der Rang von $J_F(Z)$ konstant für alle $Z \in U$ ist.
Wenn M eine Untermannigfaltigkeit von D ist, dann gilt $dim_A(M) = n - rank\ J_F(A)$.

Literatur

[1] Robert C. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions in Several Variables, Volume I: Function Theory*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990

[2] Ludger Kaup, Burchard Kaup, *Holomorphic Functions of Several Variables*, De Gruyter, 1983