Faktorisierungssätze

Jörg Zentgraf

25.09.2007

1 Faktorisierungssatz von Weierstraß

Sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Wenn $z = \lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n z_n$ existiert, dann ist z das *unendliche Produkt* der Zahlen z_n

$$z = \prod_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Ist keines der $z_n = 0$ und $z \neq 0$, so muss für die Konvergenz des Produktes sicherlich $\lim z_n \to 1$ gelten. Andererseits gilt für $z_n = a$ mit $|a| < 1$ auch $\prod z_n = 0$, obwohl der Grenzwert $\lim z_n = a \neq 0$ ist. Da die Exponentialfunktion einer Summe das Produkt der Exponentialfunktionen der einzelnen Summanden ist, ist es möglich (wenn die 0 nicht auftritt) die Konvergenz des Produktes zu diskutieren, indem man die Konvergenz der Reihe $\sum \log z_n$ betrachtet. Hierbei ist log der Hauptzweig des Logarithmus. Somit müssen wir z_n einschränken, so dass auch $\log z_n$ sinnvoll ist. Wenn das Produkt ungleich 0 ist, gilt $\lim z_n = 1$, somit ist es keine Einschränkung $Re\, z_n > 0$ anzunehmen. Nehmen wir nun an, dass die Reihe $\sum \log z_n$ konvergiert. Dann gilt für $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \log z_k$ mit $s_n \to s$ auch $\exp(s_n) \to \exp(s)$. Aber $\exp(s_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} z_n$, also konvergiert $\prod\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ gegen $z = \exp(s) \neq 0$.

Vorab einige Lemmas, die Aussagen über die Konvergenz von unendlichen Produkten liefern. Dazu sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.

Lemma 1.1. *Sind die Realteile der Zahlen z_n alle positiv, dann konvergiert das Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ genau dann gegen eine Zahl ungleich 0, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log z_n$ konvergiert.*

Zur Vorbereitung auf das folgende Lemma betrachten wir die folgende Abschätzung. Die Potenzreihe von $\log(1+z)$ ist gegeben durch

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$$

mit Konvergenzradius 1. Für $|z| < 1$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{\log(1+z)}{z}\right| &= \left|\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2 + \dots\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|z| + |z|^2 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|} \end{aligned}$$

Fordern wir zusätzlich $|z| < \frac{1}{2}$, so erhalten wir

$$\left|1 - \frac{\log(1+z)}{z}\right| \leq \frac{1}{2}$$

und somit

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

Lemma 1.2. *Sind die Realteile der Zahlen z_n alle größer als -1, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+z_n)$ absolut genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut konvergiert.*

Definition 1.3. *Sind die Realteile der Zahlen z_n alle positiv, dann heißt das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut konvergent genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$ absolut konvergiert.*

Wir suchen nun nach analytischen Funktionen, die ein vorgegebenes Nullstellenverhalten besitzen. Dazu geben wir uns eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vor, die uns die Nullstellen liefert. Diese Folge darf keinen Häufungspunkt besitzen, einzelne Folgenglieder können aber in endlicher Anzahl auftreten. Definieren wir naiv die Funktion $h(z) = \prod(z - a_n)$, so bekommen wir Probleme mit der Konvergenz des Produktes, deswegen müssen wir einen anderen Weg einschlagen. Die folgenden Definitionen und Sätze findet man größtenteils in Conway (Functions of one complex variable), die Beweise kann man dort auch nachlesen.

Definition 1.4. *Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **ganz**, wenn sie überall holomorph ist.*

Theorem 1.5. *Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $\{f_n\}$ eine Folge analytischer Funktionen, so dass kein f_n identisch verschwindet. Wenn $\sum(f_n(z)-1)$ absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G konvergiert, dann konvergiert $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ gegen eine analytische Funktion $f(z)$. Ist a eine Nullstelle der Funktion f, dann ist a eine Nullstelle nur endlich vieler Funktionen f_m und die Vielfachheit von a ist die Summe der Vielfachheiten von den Nullstellen der Funktionen f_m in a.*

Aufgrund dieses Theorems können wir die folgende Beobachtung machen. Wenn wir eine Funktion $g_n(z)$ finden können, die analytisch auf einem Gebiet ist, dort keine Nullstellen besitzt und $\sum |(z-a_n)g_n(z) - 1|$ auf kompakten Teilmengen des Gebietes gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert $\prod(z-a_n)g_n(z)$ gegen eine analytische Funktion, die exakt die Nullstellen a_n besitzt. Um auszudrücken, dass $g_n(z)$ nirgendwo verschwindet schreiben wir $g_n(z) = \exp(h_n(z))$, hierbei ist $h_n(z)$ eine analytische Funktion.

Definition 1.6. *Ein **elementarer Faktor** ist eine der Funktionen $E_p(z)$, definiert durch*

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1 - z, \\ E_p(z) &= (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \end{aligned}$$

für $p = 0, 1, \ldots$

Diese Funktionen helfen die Konvergenz der Produkte zu erzeugen.
Die Funktion $E_p(z/a)$ hat eine einfache Nullstelle an der Stelle a und keine weiteren. Mit Hilfe der elementaren Faktoren werden wir nun analytische Funktionen erzeugen, die vorgegebene Nullstellen besitzen. Zunächst eine weitere Ungleichung, die uns dann erlauben wird, Theorem 1.5 anzuwenden und somit ein konvergentes unendliches Produkt zu erhalten.

Lemma 1.7. *Ist $|z| < 1$ und $p \geq 0$, dann gilt $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.*

Beweis. Wir können uns auf den Fall $p \geq 1$ beschränken. Für ein festes p sei

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

die Reihenentwicklung in $z = 0$, Leiten wir dies und die ursprüngliche Definition ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \\ &= -z^p \exp\left(z + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \end{aligned}$$

Vergleichen wir diese Ausdrücke, so erhalten wir $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ und ausserdem, da die Koeffizienten der Reihenentwicklung von $\exp\left(z + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$ alle positiv sind, $a_k \leq 0$ für $k \geq p+1$. Somit gilt $|a_k| = -a_k$ für $k \geq p+1$, dies ergibt

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k$$

oder

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1$$

Schliesslich erhalten wir für $|z| < 1$

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &= |\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k| \\ &= |z|^{p+1} |\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1}| \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| \\ &= |z|^{p+1}. \end{aligned}$$

□

Nun kommen wir zu einem Ergebnis für ganze Funktionen.

Theorem 1.8. *Es sei $\{a_n\}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim |a_n| = \infty$ und $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$. Ist nun $\{p_n\}$ eine Folge von ganzen Zahlen, so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty \tag{1}$$

für alle $r > 0$ gilt (dies ist für $p_n = n - 1$ immer erfüllt), dann konvergiert

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

gegen eine ganze Funktion. Diese Funktion besitzt Nullstellen genau an den Punkten a_n. Tritt α in der Folge $\{a_n\}$ exakt m-mal auf, dann hat f eine Nullstelle der Ordnung m in α.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass es ganze Zahlen p_n gibt, so dass (1) erfüllt ist. Dann gilt wegen Lemma 1.7

$$|1 - E_p(z/a_n)| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

für $|z| \leq r$ und $r \leq |a_n|$. Für ein festes $r > 0$ gibt es eine ganze Zahl N, so dass $|a_n| \geq r$ für $n > N$, da $|a_n| \to \infty$. Somit wird für jedes r die Reihe $|1 - E_p(z/a_n)|$ auf $\bar{B}(0;r)$ majorisiert durch die konvergente Reihe (1). Somit konvergiert $\Sigma\,[1 - E_p(z/a_n)]$ absolut.

Nun müssen wir noch die Existenz der Folge $\{p_n\}$ für ein beliebiges r zeigen. Dazu sei N eine ganze Zahl, so dass $|a_n| > 2r$ für alle $n \geq N$ gilt. Somit gilt $\left(\frac{r}{|a_n|}\right) < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N$. Wählen wir nun $p_n = n - 1$, so wird das Ende der Reihe (1) majorisiert von $\sum(\frac{1}{2})^n$. Somit konvergiert (1). □

Die Folge $\{p_n\}$ kann unterschiedlich gewählt werden. Die Größe der ganzen Zahlen p_n wird bestimmt durch das Maß, wie stark die Folge $\{a_n\}$ gegen unendlich konvergiert, dies werden wir noch genauer untersuchen. Der nächste Satz wird uns zeigen, wie man analog zur Linearfaktorzerlegung bei endlich vielen Nullstellen, eine ganze Funktion mit unendlich vielen Nullstellen faktorisieren kann.

Satz 1.9 (Faktorisierungssatz von Weierstraß)**.** *Es sei f eine ganze Funktion und $\{a_n\}$ die Folge der Nullstellen von f mit Vielfachheiten gezählt, dabei sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$. An der Stelle 0 habe f eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 0$. Dann existiert eine ganze Funktion g und eine Folge von ganzen Zahlen $\{p_n\}$, so dass $f(z)$ geschrieben werden kann als*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Beweis. Nach dem vorherigen Theorem können wir eine Folge $\{p_n\}$ von ganzen Zahlen wählen, so dass

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

die gleichen Nullstellen inklusive Multiplizität wie f besitzt. Es folgt, dass $f(z)/h(z)$ hebbare Singularitäten bei $z = 0, a_1, a_2, \ldots$ besitzt. Somit ist f/h eine ganze Funktion, die keine Nullstellen besitzt. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es somit eine ganze Funktion $g(z)$ mit

$$\frac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)}$$

□

2 Jensen's Formel

Nun stellen wir weitere Fragen. Wir geben uns schöne Eigenschaften von $g(z)$ und $P(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$ vor, welche Eigenschaften erfüllt $f(z)$? Wie müssen wir $f(z)$ einschränken, so dass g und P bestimmte Eigenschaften besitzen ? Der Plan ist anzunehmen, dass f und P gewisse Eigenschaften erfüllen, dann die Eigenschaften von f herzuleiten und zuletzt die Umkehrung zu beweisen.
Die erste Einschränkung an g ist sicherlich anzunehmen, dass $g(z)$ ein Polynom ist. Mit dieser Annahme müssen wir zusätzlich eine Wachstumsbedingung an $g(z)$ stellen. Eine übliche Annahme über $P(z)$ ist, dass alle ganzen Zahlen p_n gleich sind. Diese Annahme bedeutet

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p} < \infty$$

und somit eine Wachstumsbedingung für die Nullstellen von $f(z)$. Zunächst beweisen wir Jensen's Formel, die eine Beziehung zwischen der Wachstumsrate der Nullstellen von $f(z)$ und dem Wachstum von $M(r) := \{|f(re^{i\theta})|, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ herstellt.
Vorüberlegung zu Jensen's Formel :
Wenn f auf einer offenen Menge, die $\bar{B}(0; r)$ enthält, analytisch ist und in der abgeschlossenen Kugel nicht verschwindet, dann ist $\log|f|$ dort harmonisch. Somit besitzt es die Mittelwerteigenschaft

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta \tag{2}$$

Wenn f genau eine Nullstelle $a = re^{i\alpha}$ auf dem Kreis $|z| = r$ besitzt, dann kann die obige Gleichung auf $g(z) = f(z)(z-a)^{-1}$ angewendet werden :

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\log|f(re^{i\theta})| - \log|re^{i\theta} - re^{i\alpha}|]d\theta$$

Wegen $\log|g(0)| = \log|f(0)| - \log r$, folgt dass (2) weiter gilt auch wenn f eine einfache Nullstelle auf $|z| = r$ besitzt, falls

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|re^{i\theta} - re^{i\alpha}|d\theta = \log r$$

oder ebenso

$$\int_0^{2\pi}\log|1 - e^{i\theta}|d\theta = 0.$$

Aber dies folgt aus

$$\int_0^{2\pi}\log(\sin^2 2\theta)d\theta = -4\pi\log 2$$

Also gilt (2), falls f eine einfache Nullstelle auf $|z| = r$ besitzt und per Induktion folgt die gleiche Aussage, falls f keine Nullstellen innerhalb von $B(0;r)$ besitzt. Als nächstes untersuchen wir, was passiert, falls f Nullstellen im Inneren hat. In diesem Fall ist $\log|f(z)|$ nicht länger harmonisch, somit gilt auch die Mittelwerteigenschaft nicht mehr.

Theorem 2.1 (Jensen's Formel)**.** *Sei f eine analytische Funktion auf einem Gebiet, das $\bar{B}(0,r)$ enthält und seien $a_1,\ldots,a_r$ die Nullstellen von f in $B(0;r)$ wiederholt bzgl. Multiplizität. Für $f(0) \neq 0$ gilt*

$$\log|f(0)| = -\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{r}{|a_k|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta}|d\theta.$$

Beweis. Für $|b| < 1$ bildet die Abbildung $(z-b)(1-\bar{b}z)^{-1}$ den Kreis $B(0;1)$ auf sich selbst ab und den Rand auf sich selbst. Somit bildet

$$\frac{r^2(z-a_k)}{r^2 - \bar{a_k}z}$$

den Kreis $B(0;r)$ auf sich selbst ab und den Rand auf den Rand. Deshalb ist

$$F(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2 - \overline{a_k}z}{r(z-a_k)}$$

analytisch auf einer offenen Menge, die $\bar{B}(0;r)$ enthält, besitzt außerdem keine Nullstellen in $B(0;r)$ und es gilt $|F(z)| = |f(z)|$ für $|z| = r$. Wenden wir nun (2) auf F an, so erhalten wir

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

Es gilt

$$F(0) = f(0)\prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{r}{a_k}\right)$$

und somit erhalten wir Jensen's Formel.

□

3 Faktorisierungssatz von Hadamard

Nun folgt eine Klassifizierung von ganzen Funktionen.

Definition 3.1. *Es sei f eine ganze Funktion mit den Nullstellen $\{a_n\}$, die mit Vielfachheiten wiederholt werden. Außerdem seien die Nullstellen betragsmäßig angeordnet $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. Dann ist f von* ***endlichem Rang****, wenn eine ganze Zahl p existiert mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p-1} < \infty.$$

Ist $\hat{p}$ die kleinste ganze Zahl die dies erfüllt, dann ist f vom ***Rang*** *$\hat{p}$. Eine Funktion mit nur endlich vielen Nullstellen hat Rang 0.*

Wenn f endlichen Rang hat, dann kann f geschrieben werden als

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z)$$

mit

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/a_n). \tag{3}$$

Das Produkt heißt **Standardform** von f. Man sieht, dass die Wahl von p nicht eindeutig ist, man kann jedes p größer als der Rang nehmen. Wenn man allerdings das p exakt als den Rang wählt, dann ist die obige Formel eindeutig bis auf $g + 2\pi m i$ für eine ganze Zahl m.

Definition 3.2. *Eine ganze Funktion f hat* ***endliches Geschlecht****, wenn f endlichen Rang hat und darstellbar ist als*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z),$$

wobei P in Standardform und g ein Polynom ist. Ist p der Rang von f und q der Grad des Polynoms g, dann heißt $\rho = \max(p, q)$ ***Geschlecht*** *von f.*

Das Geschlecht von f ist eine wohldefinierte ganze Zahl. Sobald P in Standardform ist, dann ist g eindeutig bestimmt bis auf die Addition von Vielfachen von $2\pi i$. Insbesondere ist der Grad von g festgelegt.

Theorem 3.3. *Ist f eine ganze Funktion vom Geschlecht μ, dann existiert für jede positive Zahl α eine Zahl r_0, so dass für $|z| > r_0$*

$$|f(z)| < \exp(\alpha |z|^{\mu+1})$$

gilt.

Dieses Theorem sagt aus, wenn man die Wachstumsrate der Nullstellen der ganzen Funktion $f(z) = z^m \exp(g(z)) P(z)$ einschränkt und annimmt, dass g ein Polynom ist, dann wird das Wachstum von $M(r) = \{|f(re^{i\theta})| \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ dominiert durch $\exp(\alpha|z|^{\mu+1})$ für ein μ und ein $\alpha > 0$. Nun wollen wir die Umkehrung dieser Aussage beweisen.

Definition 3.4. *Eine ganze Funktion f hat* ***endliche Ordnung****, wenn eine positive Konstante α und ein $r_0 > 0$ existieren, so dass*

$$|f(z)| < \exp(|z|^{\alpha})$$

für $|z| > r_0$ gilt. Wenn f endliche Ordnung hat, dann heißt die Zahl

$$\lambda = \inf\{a \mid |f(z)| < \exp(|z|^a) \text{ für } |z| \text{ groß genug}\}$$

Ordnung *von f.*

Gilt $|f(z)| < \exp(|z|^a)$ für $|z| > r_a > 1$ und $b > a$, dann gilt auch $|f(z)| < \exp(|z|^b)$. Die nächste Proposition ist eine direkte Folgerung dieser Beobachtung.

Proposition 3.5. *Ist f eine ganze Funktion mit endlicher Ordnung λ und $\varepsilon > 0$, dann gilt $|f(z)| < \exp(|z|^{\lambda+\varepsilon})$ für alle genügend großen $|z|$. Es kann außerdem ein z gefunden werden, so dass $|f(z)| \geq \exp(|z|^{\lambda-\varepsilon})$ gilt.*

Die Definition von Ordnung ist äquivalent zu den Folgerungen von Theorem 3.3. Also ist es wünschenswert zu wissen, dass eine Funktion endlicher Ordnung auch endliches Geschlecht besitzt (eine Umkehrung von Theorem 3.3). Dies wird der Faktorisierungssatz von Hadamard liefern.

Proposition 3.6. *Sei f eine ganze Funktion mit Ordnung λ und sei $M(r) := \max\{|f(z)| \mid |z| = r\}$, dann gilt*

$$\lambda = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

Betrachte die Funktion $f(z) = \exp(e^z)$. Dann gilt $|f(z)| = \exp(Re\, e^z) = \exp(e^r \cos\theta)$ für $z = re^{i\theta}$. Damit ist $M(r) = \exp(e^r)$ und

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} = \frac{r}{\log r}$$

und f hat unendliche Ordnung. Andererseits gilt für $g(z) = \exp(z^n)$ mit $n \geq 1$ dann auch $|g(z)| = \exp(Re\, z^n) = \exp(r^n \cos m\theta)$. Somit ist $M(r) = \exp(r^n)$ und

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} = n$$

und g hat Ordnung n.
Mit diesen Begriffen können wir Theorem 3.3 umschreiben in das folgende Korollar.

Korollar 3.7. *Ist f eine ganze Funktion von endlichem Geschlecht μ, dann hat f endliche Ordnung $\lambda \leq \mu + 1$.*

Dass auch die Umkehrung dieses Korollars gilt, wird der Faktorisierungssatz von Hadamard zeigen. Da eine Funktion endlichen Geschlechts aufgrund des Faktorisierungssatzes von Weierstraß gut faktorisiert werden kann ist dies ein Faktorisierungssatz.

Lemma 3.8. *Es sei f eine nichtkonstante ganze Funktion der Ordnung λ mit $f(0) = 1$ und seien $\{a_n\}$ die Nullstellen von f mit Vielfachheiten gezählt und betragsmäßig so angeordnet, dass $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ gilt. Ist $p > \lambda - 1$ eine ganze Zahl, dann gilt*

$$\frac{d^p}{dz^p}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}}$$

für $z \neq a_1, a_2, \dots$.

Dieses Lemma nimmt an, dass f unendlich viele Nullstellen besitzt. Hat f nur endlich viele Nullstellen, so wird die Reihe endlich und das Lemma bleibt gültig.

Theorem 3.9 (Faktorisierungssatz von Hadamard)**.** *Ist f eine ganze Funktion mit endlicher Ordnung λ, dann hat f auch endliches Geschlecht $\mu \leq \lambda$.*

Beweis. Sei p die größte ganze Zahl kleiner oder gleich λ, $p \leq \lambda < p + 1$. Wir zeigen zunächst dass f endlichen Rang besitzt, der nicht größer als p ist. Seien $\{a_1, a_2, \dots\}$ die Nullstellen von f mit Vielfachheit und so angeordnet, dass $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. Wir müssen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p-1} < \infty$$

zeigen. Wir können $f(0) = 1$ annehmen.Wenn f eine Nullstelle der Ordnung m in Null besitzt und $M(r) = \max\{|f(z)| \mid |z| = r\}$ ist, dann gilt für $\varepsilon > 0$ und $|z| = r$

$$\begin{aligned} \log|f(z)z^{-m}| &\leq \log(M(r)r^{-m}) \\ &\leq r^{\lambda+\varepsilon} - m\log r \\ &\leq r^{\lambda+2\varepsilon} \end{aligned}$$

wenn r groß genug ist. Somit $f(z)z^{-m}$ eine ganze Funktion mit Ordnung λ mit keiner Nullstelle im Ursprung. Da die Multiplikation mit einem Skalar die Ordnung nicht ändert, können wir $f(0) = 1$ annehmen.

Sei $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen innerhalb von $B(0;r)$. Dann gilt $(\log 2)n(r) \leq \log M(2r)$. Da f Ordnung λ besitzt, gilt $\log M(2r) \leq r^{\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$, so dass $\lim_{r\to\infty} n(r)r^{-(\lambda+\varepsilon)} = 0$ gilt. Also ist $n(r) < r^{\lambda+\varepsilon}$ für r groß genug. Da die Nullstellen betragsmäßig angeordnet sind, gilt $k \leq n(|a_k|) \leq |a_k|^{\lambda+\varepsilon}$ für alle $k \geq k_0$. Somit ist

$$|a_k|^{-(p+1)} \leq k^{-(p+1)/(\lambda+\varepsilon)}$$

für $k \geq k_0$. Wählen wir nun ε so, dass $\lambda + \varepsilon < p + 1$ gilt ($\lambda < p + 1$ war vorausgesetzt), dann wird die Reihe $\sum |a_k|^{-(p+1)}$ von einer konvergenten Reihe majorisiert, somit folgt, dass der Rang von f kleiner gleich p ist.

Nun ist noch zu zeigen, dass auch das Geschlecht von f kleiner gleich p ist, dazu sei $f(z) = P(z)\exp(g(z))$, wobei P ein kanonisches Produkt in Standardform ist. Somit gilt für $z \neq a_k$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \frac{P'(z)}{P(z)}.$$

Benutzen wir nun Lemma 3.8, so erhalten wir

$$-p!\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - z)^{-(p+1)} = g^{(p+1)}(z) + \frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{P'z)}{P(z)}\right)$$

Es ist einfach zu zeigen, dass für $z \neq a_1, a_2, \ldots$ auch

$$\frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{P'z)}{P(z)}\right) = -p!\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - z)^{-(p+1)}$$

gilt. Damit folgt $g^{(p+1)} \equiv 0$ und g ist somit ein Polynom vom Grad $\leq p$. Also ist das Geschlecht von f kleiner gleich $p \leq \lambda$. □

Theorem 3.10. *Sei f eine ganze Funktion mit endlicher Ordnung, dann nimmt f als Wert jede komplexe Zahl an, mit einer möglichen Ausnahme.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es zwei komplexe Zahlen $\alpha \neq \beta$ gibt, so dass $f(z) \neq \alpha$ und $f(z) \neq \beta$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Somit ist $f - \alpha$ eine ganze Funktion, die nirgendwo verschwindet, also existiert eine ganze Funktion $g(z)$ mit $f(z) - \alpha = \exp(g(z))$. Da f endliche Ordnung besitzt, hat auch $f - \alpha$ endliche Ordnung und somit ist g nach Hadamards Theorem ein Polynom. Aber $\exp(g(z))$ nimmt nie den Wert $\beta - \alpha$ an und dies bedeutet, dass $g(z)$ nie den Wert $\log(\beta - \alpha)$ annimmt, dies ist ein Widerspruch zum Fundamentaltheorem der Algebra. □

Nun erhalten wir hieraus auch die Tatsache, dass eine ganze Funktion der Ordnung $1/2$ unendlich viele Nullstellen hat, der folgende Satz zeigt dies noch allgemeiner.

Satz 3.11. *Sei f eine ganze Funktion mit endlicher Ordnung λ, wobei λ keine ganze Zahl ist. Dann hat f unendlich viele Nullstellen.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f nur endlich viele Nullstellen $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ besitzt, diese seien mit Vielfachheiten gezählt. Dann gilt $f(z) = e^{g(z)}(z - a_1)\ldots(z - a_n)$ für eine ganze Funktion g. Wegen dem Faktorisierungssatz ist g ein Polynom vom Grad $\leq \lambda$. Aber f und $e^{g(z)}$ müssen die gleiche Ordnung haben. Da die Ordnung von $e^{g(z)}$ der Grad von g ist, muss λ eine ganze Zahl sein. Somit ist die Behauptung bewiesen. □