Elementare Eigenschaften holomorpher Funktionen in mehreren Variablen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 02.10.2007

Jan Suess

In diesem Vortrag werden elementare Eigenschaften holomorpher Funktionen in mehreren Variablen und erste Folgerungen daraus vorgestellt. Grundlage dieses Seminarvortrags ist das Buch „Robert C. Cunning - Introduction to holomorphic functions in several variables“.

§1 Einleitung

Der Körper der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ und der Körper der komplexen Zahlen mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Beide sind topologische Körper mit wohlbekannten Eigenschaften. Beim Studium der Funktionen in mehreren komplexen Variablen gilt unser primäres Interesse dem n-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{C}^n$, der als das Kartesisches Produkt $\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ n komplexer Ebenen oder als $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $2n$ identifiziert werden kann. Einen Punkt in $\mathbb{C}^n$ schreiben wir in der Form $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, wobei $z_j = x_j + iy_j$ mit $x_j\ y_j \in \mathbb{R}$ und i die imaginäre Einheit ist. Wenn man die Topologie von $\mathbb{C}^n$ betrachtet, sind zwei Grundformen offener Teilmengen besonders nützlich

(1.1) Definition
Ein *offener Polyzylinder* ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ der Form

$$\begin{aligned}\Delta(A;R) &= \Delta(a_1, \ldots, a_n; r_1, \ldots, r_n) \\ &= \left\{Z \in \mathbb{C}^n : \left|z_j - a_j\right| < r_j \;\; für\ 1 \leq j \leq n\right\},\end{aligned}$$

das Kartesische Produkt n offener Kreisscheiben. Der Punkt $A \in C^n$ heißt $Mittelpunkt$ des Polyzylinders, und der Punkt $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt *Polyradius*. ◇

Wenn $r_1 = \cdots = r_n$ gilt, nennt man r auch den *Radius* des *Polyzylinders* und man schreibt kurz $\Delta\,(A;r)$. Für $offene\ Polyzylinder$ im erweiterten Sinne ist es für manche Zwecke sinnvoll zuzulassen, dass $r_j = \infty$ sein darf; ansonsten gilt $0 < r_j < \infty \;\; für\ 1 \leq j \leq n$. Wie gewohnt bezeichnen wir mit $|z|$ den Betrag der komplexen Zahl z.

(1.2) Definition
Ein *offener Ball* ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ der Form

$$\begin{aligned} B\left(A;r\right) &= B\left(a_1,\cdots,a_n;r\right) \\ &= \left\{Z \in \mathbb{C}^n : \sum_j \left|z_j - a_j\right|^2 < r^2\right\} \end{aligned}$$

Der Punkt $A \in C^n$ heißt *Mittelpunkt* des Balls, und die positive reelle Zahl r heißt *Radius*. Selbstverständlich liegt dieser Menge die gewöhnliche euklidische Metrik zu Grunde $\|Z - A\| = (\sum_j \left|z_j - a_j\right|^2)^{1/2}$. ◇

Den Abschluss dieser Mengen schreiben wir als den *abgeschlossenen Polyzylinder* $\overline{\Delta}(A,R)$ und den *abgeschlossenen Ball* $\overline{B}\left(A;r\right)$, genauer:

$$\begin{aligned} &\overline{\Delta}\left(A;R\right) = \left\{Z \in \mathbb{C}^n : \left|z_j - a_j\right| \leq r_j \;\; f\ddot{u}r\ 1 \leq j \leq n\right\} \\ &und \\ &\overline{B}\left(A;r\right) \;\; = \left\{Z \in \mathbb{C}^n : \|Z - A\| \leq r\right\} \end{aligned}$$

Für manche Zwecke ist es nützlich für den *abgeschlossenen Polyzylinder* oder den *abgeschlossenen Ball im erweiterten Sinne* $r_j = 0$ für gewisse r_j oder $r = 0$ zuzulassen. Ansonsten gilt $0 < r_j < \infty$ und $0 < r < \infty$. Für $n = 1$ stimmen *Polyzylinder* und *Ball* überein.

Eine komplexwertige Funktion f auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ist eine Funktion in die komplexe Zahlenebene. Der Wert der Funktion f eines Punktes $Z \in D$ wird wie gewöhnlich mit $f\left(Z\right)$ bezeichnet. Indem man nun auf die Defintion holomorpher Funktionen in einer Variablen zurückgeht, kann man auf natürliche Weise eine Erweiterung dieser Definition für Funktionen in mehreren Variablen ableiten.

(1.3) Definition
Eine komplexe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *holomorph* auf D, wenn sie differenzierbar auf D und ihre Ableitung an jeder Stelle eine komplexlineare Abbildung von $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist. ◇

Wir werden sehen, dass Osgood's Lemma uns den Beweis für eine äquivalente Definition liefert, nämlich f heißt holomorph, wenn es zu jedem Punkt in D eine Umgebung gibt, in der f als konvergente Potenzreihe darstellbar ist. Diese Potenzreihe hat dann die Form

$$f(Z) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} c_{i_1,\ldots,i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \ldots (z_n - a_n)^{i_n} \tag{1}$$

und konvergiert für alle $Z \in U$. Die Menge aller holomorphen Funktionen auf D ist $\mathcal{O}_D$.

Zur Vereinfachung ist es üblich eine Multi-Index Notation für Formeln von Potenzreihen in mehreren Variablen einzuführen. Sei $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ und somit $Z^I = z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$, dann kann man (1) schreiben als

$$f(Z) = \sum_I c_I (Z - A)^I \tag{1'}$$

Ein bekanntes Resultat der Analysis besagt, dass, wenn die Potenzreihe (1) in einem Punkt $B \in C^n$ konvergiert, konvergiert sie absolut und gleichmäßig in jedem offen Polyzylinder $\Delta(A; R)$ mit einem $r_j < \left|b_j - a_j\right|$. Die gängigen Beweise dieser Behauptung über Potenzreihen in einer Variablen lassen sich einfach erweitern für den Fall mehrerer Variablen. Eine erste Folgerung aus dieser Beobachtung ist, dass die Funktion f stetig auf jedem solchen Polyzylinder ist, genau wie der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen. Also ist *jede auf D holomorphe Funktion notwendigerweise stetig auf D*. Eine zweite Folgerung ist, dass die Potenzreihe (1) beliebig umgeordnet werden kann. Sind folglich die Koordinaten $z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n$ fest gewählt durch $b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n$, kann die Potenzreihe (1) als Potenzreihe in $z_j - a_j$ geschrieben werden. Das heißt aber, *eine Funktion $f \in \mathcal{O}_D$ ist in jeder Variable für sich holomorph in ganz D*, und zwar in dem Sinne, dass $f\left(b_1, \ldots, b_{j-1}, z_j, b_{j+1}, \ldots, b_n\right)$ eine holomorphe Funktion in z_j ist für alle Werte b_i solange $\left(b_1, \ldots, b_{j-1}, z_j, b_{j+1}, \ldots, b_n\right) \in D$. Die Umkehrung ist ebenfalls richtig aber nicht trivial und wird im folgenden Lemma bewiesen.

§2 Osgood's Lemma

(2.1) Lemma (Osgood's Lemma)
Ist eine komplex-wertige Funktion stetig auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}^n$ und holomorph in jeder einzelnen Variable, dann ist sie holomorph auf D.

Beweis
Wähle einen beliebigen Punkt $A \in D$ und einen abgeschlossenen Polyzylinder $\overline{\Delta}(A;R) \subseteq D$. Weil f holomorph in jeder Variablen einzeln auf einer offenen Umgebung von $\overline{\Delta}(A;R)$ ist, führt die iterative Anwendung der Cauchy'schen Integralformel für holomorphe Funktionen in einer Variablen zu der Formel

$$f(Z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|\zeta_1-a_1|=r_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \int\limits_{|\zeta_2-a_2|=r_2} \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \cdots \int\limits_{|\zeta_n-a_n|=r_n} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n} \tag{2}$$

für alle $Z \in \Delta(A;R)$. Für einen beliebig fest gewählten Punkt Z ist der Integrand stetig auf dem kompakten Integrationsbereich, weswegen das iterierte Integral in (2) durch ein mehrfaches Integral

$$f(Z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|\zeta_j-a_j|=r_j} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \tag{3}$$

ersetzt werden kann.
Für einen beliebigen fest gewählten Punkt $Z \in \Delta(A;R)$ ist die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} = \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - a_1)^{i_1} \cdots (z_n - a_n)^{i_n}}{(\zeta_1 - a_1)^{i_1+1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{i_n+1}}$$

absolut und gleichmäßig konvergent für alle Punkte ζ im Integrationsbereich. Setzt man diese Reihenentwicklung nun in (3) ein und vertauscht Addition und Integration, dann folgt, dass $f(Z)$ eine konvergente Potenzreihenentwicklung der Form (1) in $\Delta(A;R)$ hat, wobei

$$c_{i_1 \cdots i_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|\zeta_j - a_j| = r_j} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - a_1)^{i_1+1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{i_n+1}} \tag{4}$$

□

Wie zuvor bemerkt zeigt das Lemma von Osgood, dass eine holomorphe Funktion in mehreren Variablen als Potenzreihe der Form (1) dargestellt werden kann. Somit sind beide Definitionen der Holomorphie äquivalent.

Einige der Beobachtungen im vorangegangen Beweis verdienen besondere Aufmersamkeit. Erstens, *für jede Funktion f, die holomorph auf einem abgeschlossenen Polyzylinder $\overline{\Delta}(A; R)$ ist, gilt die* ***Cauchy'sche Integralformel*** *der Form* (3) *innerhalb dieses Polyzylinders.* Diese Erweiterung der Cauchy'schen Integralformel unterscheidet sich jedoch in einigen Punkten von der Formel für den Fall nur einer Variablen. Zum Beispiel, für $n > 1$, wird die Integration in (3) nicht über den kompletten Rand des Polyzylinders $\Delta(A; R)$ geführt - der Rand hat die topologische Dimension $2n - 1$ - sondern nur über einen n-dimensionalen Teil davon. Zweitens, da eine holomorphe Funktion in mehreren Variablen holomorph in jeder Variable einzeln ist, besteht die Möglichkeit die gewöhnliche komplexe Ableitung partiell durchzuführen. Der resultierende Differential Operator wird mit $\frac{\partial}{\partial z_j}$ bezeichnet. Wendet man diese Operatoren auf (3) an, so ergibt sich folgende Formel für die Ableitungen

$$\frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_n} f(Z)}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}} = \frac{(i_1!) \cdots (i_n!)}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\zeta_j - a_j| = r_j} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{i_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{i_n+1}} \tag{5}$$

Vergleicht man (4) und (5) so folgt

$$(i_1!) \cdots (i_n!) c_{i_1 \cdots i_n} = \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_n} f}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}}(A) \tag{6}$$

Die gleiche Beobachung erhält man durch schrittweises Ableiten der Reihe (1). Auch an dieser Stelle ist eine Multi-Index Notation sinnvoll. Wenn $I = (i_1, \ldots, i_n)$ ist, dann sei $|I| = i_1 + \cdots + i_n$ und $I! = (i_1!) \cdots (i_1!)$. Die vorangegangen Gleichungen kann man nun schreiben

$$\frac{\partial^{|I|} f}{\partial Z^I}(Z) = \frac{I!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\zeta_j - a_j| = r_j} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{i_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{i_n+1}} \tag{5'}$$

und

$$I! c_i = \frac{\partial^{|I|} f}{\partial Z^I}(A) \tag{6'}$$

Abschließend kann man als Folgerung aus (6) festellen, dass *die Potenzreihenentwicklung* (1) *eindeutig durch die Beschränkung von f auf eine beliebige offene Umgebung des Punktes A bestimmt ist. Wenn f holomorph auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}^n$ ist, dann konvergiert diese Potenzreihe zwangsläufig auf jedem Polyzylinder $\Delta(A; R) \subseteq D$* durch die Konstruktion aus Osgood's Lemma. *Tatsächlich konvergiert diese Reihe sogar absolut und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Polyzylinder $\overline{\Delta}(A; R) \subseteq D$.*

Passend führt man an dieser Stelle die partiellen Differential Operatoren erster Ordnung ein

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \tag{7}$$

Das Cauchy-Riemann Kriterium besagt, dass die Ableitung $\partial f / \partial \overline{z}_j$ einer holomorphen Funktion im ganzen Definitionsbereich verschwindet. Eine stetig differenzierbare Funktion $f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ ist also nach Osgood's Lemma genau dann holomorph, wenn alle partiellen Ableitungen $\partial f / \partial \overline{z}_1, \ldots, \partial f / \partial \overline{z}_n$ verschwinden. Diese Gleichungen werden gemeinhin **Cauchy-Riemann Gleichungen** für mehrere Variablen genannt.

§3 Holomorphe Abbildungen

Einige weitere Ergebnisse der Funktionentheorie in einer Variablen lassen sich nun mit Lemma 2.1 auf den Fall mehrerer Variablen übertragen. Obwohl manche Ergebnisse recht trivial sind, lohnt es sich doch an dieser Stelle genauer auf diese einzugehen, damit sie später kommentarlos verwendet werden können.

Sei also D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^n$, *dann ist $\mathcal{O}_D$ ein Ring unter der Addition und der Multiplikation von Funktionen; tatsächlich ist $\mathcal{O}_D$ sogar eine Algebra über den komplexen Zahlen.* Das lässt uns vermuten, dass Summe und Produkt zweier holomorpher Funktionen wieder holomorph sind. *Wenn $f \in \mathcal{O}_D$ ist und nirgends verschwindet, dann ist $1/f \in \mathcal{O}_D$.* Also bilden die Funktionen ohne Nullstellen eine multiplikative Gruppe, die wir mit $\mathcal{O}_D^*$ bezeichnen. *Wenn $f \in \mathcal{O}_D$ ist und f nur reelle Werte annimmt oder konstanten Betrag hat, dann ist f lokal konstant*, da f in jeder Variablen für sich lokal kostant ist. *Wenn eine Folge von Funktionen $f \in \mathcal{O}_D$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D konvergiert, dann ist die Grenzfunktion wieder holomorph auf D*, da der Grenzwert stetig und in jeder Variablen holomorph ist. Abschließend bleibt zu sagen, dass holomorphe Funktionen abgeschlossen unter der Komposition sind, was im Folgenden genauer erklärt wird.

Eine Abbildung $F : D^{'} \to D$ von einem offenen Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}^n$ in ein offenes Gebiet $D^{'} \subseteq \mathbb{C}^m$ kann durch ihre m Koordinaten-Funktionen $w_j = f_j(z_1, \ldots, z_n)$ für $1 \leq j \leq m$ beschrieben werden, und sie wird eine **holomorphe Abbildung** genannt, wenn die Koordinaten-Funktionen holomorph auf D sind. *Wenn $g \in \mathcal{O}_{D'}$ und $F : D \to D^{'}$ eine holomorphe Abbildung ist, dann ist die Komposition $g \circ F(Z) = g(F(Z))$ eine holomorphe Funktion auf D.* Die Abbildung $g \to g \circ F$ ist ein Ringhomomorphismus, sogar ein Algebrahomomorphismus

$$F^* : \mathcal{O}_{D'} \to \mathcal{O}_D$$

Um zu beweisen, dass $g \circ F$ holomorph ist, betrachte man zunächst, dass, wenn g und F stetig differenzierbare Funktionen in den reellen Variablen u_j, v_j und x_j, y_j sind, wobei $w_j = u_j + iv_j$ und $z_j = x_j + iy_j$, aus der Kettenregel für die Ableitung sofort folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,(g\circ F)}{\partial \bar{z}_j} &= \sum_k \left[\frac{\partial g}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial g}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial \bar{z}_j}\right] \\
&= \sum_k \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g}{\partial u_k} - i\frac{\partial g}{\partial v_k}\right]\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} + \sum_k \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g}{\partial u_k} + i\frac{\partial g}{\partial v_k}\right]\frac{\partial \overline{f}_k}{\partial \bar{z}_j} \\
&= \sum_k \left[\frac{\partial g}{\partial w_k}\frac{\partial w_k}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}_k}\frac{\partial \overline{w}_k}{\partial \bar{z}_j}\right]
\end{aligned}$$

Dies ist die komplexe Variante der Kettenregel für die Ableitung. Wenn F holomorph ist, dann gilt $\partial w_k/\partial \bar{z}_j = 0$, und wenn g holomorph ist, dann gilt $\partial g/\partial \overline{w}_k = 0$. Sind beide holomorph, dann gilt $\partial\,(g\circ F)/\partial \bar{z}_j = 0$ und $g\circ F$ ist holomorph wie gewünscht.

§4 Identitätssatz und Maximumprinzip

Einige weitere Ergebnisse der Funktionentheorie lassen sich leicht von einer auf mehrere Variablen eweitern und eine Auswahl soll im Folgenden näher betrachtet werden. Folgen werden der Identitätssatz, das Maximumprinzip und die Cauchy'sche Abschätzung.

(4.1) Satz (Indentitätssatz)
Seien f und g holomorphe Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}^n$ und gelte $f(Z) = g(Z)$ für alle Punkte Z in einer nichtleeren offenen Teilmenge $U \subseteq D$, dann folgt $f(Z) = g(Z)$ für alle Punkte in D. ◇

Beweis
Sei $E \subseteq D$ das Innere der Menge aller Punkte Z, auf denen f und g übereinstimmen. Also ist E offen und nichtleer in D, da $U \subseteq E$. Weil D zusammenhängend ist, bleibt zu zeigen, dass E abgeschlossen in D ist. Wenn $A \in D \cap \overline{E}$, wobei $\overline{E}$ der Abschluss von E ist, wähle ein hinreichend kleines r, so dass $\Delta(A; r) \subseteq D$ und wähle einen Punkt $B \in \Delta(A; r/2) \cap E$, und dieser Punkt B existiert auf jeden Fall, da $A \in \overline{E}$; dann ist $A \in \Delta(B; r/2) \subseteq D$. Die Funktion $f - g$ hat eine Potenzreihenentwicklung mit Mittelpunkt B und diese konvergiert in allen Punkten des Polyzylinders $\Delta(B; r/2)$. Weil aber $f - g$ in einer Umgebung von B identisch Null ist, sind alle Koeffizienten dieser Potenzreihe Null wegen (6). Somit gilt $f(Z) - g(Z) = 0$ für alle Punkte $Z \in \Delta(B; r/2)$, und folglich $A \in \Delta(B; r/2) \subseteq E$. Daraus folgt der Satz. □

(4.2) Satz (Maximum Prinzip)
Sei f holomorph auf einer zusammenhängenden Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}^n$. Wenn es einen Punkt $A \in D$ gibt, so dass $|f(Z)| \leq |f(A)|$ für alle Punkte Z in einer offenen Umgebung von A, dann folgt $f(Z) = f(A)$ für alle Punkte $Z \in D$. ◇

Beweis
In den herkömmlichen Beweisen des Maximum Prinzips für Funktionen in einer Variablen betrachte man als Folgerung aus der Cauchy'schen Integralformel (3), dass für jeden beliebigen offenen Polyzylinder $\Delta = \Delta(A; R) \subseteq D$ mit $\overline{\Delta} \subseteq D$ gilt

$$|\Delta| \, f(A) = \int_{\Delta} f(Z) \, dV(Z)$$

wobei $dV(Z)$ das Euklidische Volumen Element in $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ und $|\Delta| = \int_\Delta dV(Z) = \pi^n r_1^2 \cdots r_n^2$ das Euklidische Volumen von Δ ist. Also gilt

$$|\Delta| \cdot |f(A)| \leq \int\limits_\Delta |f(Z)| \, dV(Z)$$

Insbesondere wähle man einen Polyzylinder Δ so, dass $|f(Z)| - |f(A)| \geq 0$ für alle $Z \in \Delta$. Dann gilt

$$0 \leq \int\limits_\Delta (|f(A)| - |f(Z)|) \, dV(Z)$$

$$= |\Delta| \cdot |f(A)| - \int\limits_\Delta |f(Z)| \, dV(Z) \leq 0$$

so dass $|f(A)| - |f(Z)| = 0$ für alle $Z \in \Delta$. Aus Paragraph 3 wissen wir bereits, dass eine holomorphe Funktion von konstantem Betrag lokal konstant ist, so dass $f(Z) = f(A)$ für alle $Z \in \Delta$. Der Indentitätssatz liefert uns zusätzlich, dass $f(Z) = f(A)$ für alle $Z \in D$, und somit ist der Satz bewiesen. □

(4.3) Satz (Cauchy Abschätzung)
Sei f holomorph auf einer offenen Umgebung eines abgeschlossenen Polyzylinders $\overline{\Delta}(A; R) \subseteq \mathbb{C}^n$. Wenn $|f(Z)| \leq M$ für alle $Z \in \overline{\Delta}(A; R)$, dann gilt

$$\left| \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_n} f}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}} (A) \right| \leq M (i_1!) \cdots (i_n!) \, r_1^{-i_1} \cdots r_n^{-i_n}$$

oder in Multi-Index Notation

$$\left| \frac{\partial^{|I|} f}{\partial Z^I} (A) \right| \leq M (I!) \, R^{-I} \qquad \diamond$$

Beweis
Der Satz folgt sofort aus der Cauchy'schen Integralformel (5) genau wie im Falle nur einer komplexen Variable. □