Kapitel 8

Das Riemannintegral

8.1 Riemann–integrable Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur beschränkte Funktionen $f \in B_{\mathbb{R}}([a,b])$ auf einem beschränkten abeschlossenen Intervall. Das Ziel ist für solche Funktionen den Flächeninhalt zwischen den Graphen der Funktion und der x-Achse zu definieren. Dabei werden wir diese Fläche durch eine disjunkte Vereinigung von Rechtecken annähern.

Definition 8.1. *(Partition) Eine Partition p von $[a,b]$ ist eine endliche geordnete Menge $\{x_0, \ldots, x_n\}$ von Punkten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in $[a,b]$. Die Feinheit der Partition p ist dann $\|p\| = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$ mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. $\mathcal{P}[a,b]$ bezeichnet die Menge aller Partitionen von $[a,b]$.*

Für eine Funktion $f \in B_{\mathbb{R}}([a,b])$ und eine Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$ seien

$$\begin{aligned} m &= \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \\ M &= \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \\ m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \\ M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Definition 8.2. *(Untersummen und Obersummen) Dann heißen*

$$s(p,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \text{ und } S(p,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

die Untersumme und Obersumme von f bezüglich der Partition p.

Offenbar gilt $$m(b-a) \le s(p,f) \le S(p,f) \le M(b-a).$$

Definition 8.3. *(Verfeinerung) $p' \in \mathcal{P}[a,b]$ heißt Verfeinerung von $p \in \mathcal{P}[a,b]$, wenn $p' \supset p$. Offenbar gibt es für endlich viele Partitionen $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}[a,b]$ eine gemeinsame Verfeinerung $p' = p_1 \cup \ldots \cup p_n \in \mathcal{P}[a,b]$.*

Lemma 8.4. **(i)** *Wenn $p \subset p'$ gilt $s(p,f) \leq s(p',f)$ und $S(p',f) \leq S(p,f)$.*

(ii) *Für $p, p' \in \mathcal{P}[a,b]$ gilt $s(p,f) \leq S(p',f)$.*

Beweis:(i) Die Verfeinerung p' von p besteht aus einer Partition jedes Teilintervalles $[x_{i-1}, x_i]$ von p. Dann folgt (i) aus den Ungleichungen

$$m(b-a) \leq s(p,f) \quad \text{und} \quad S(p,f) \leq M(b-a).$$

(ii) Sei $p'' = p \cup p'$. Dann folgen aus (i) die Ungleichungen

$$s(p,f) \leq s(p'',f) \leq S(p'',f) \leq S(p,f) \quad s(p',f) \leq s(p'',f) \leq S(p'',f) \leq S(p',f).$$

Daraus folgt dann (ii). **q.e.d.**

Definition 8.5. *(Unterintegral und Oberintegral) Für $f \in B_{\mathbb{R}}([a,b])$ heißt $\underline{\int} f = \sup_{p \in \mathcal{P}[a,b]} s(p,f)$ Unterintegral und $\overline{\int} f = \inf_{p \in \mathcal{P}[a,b]} S(p,f)$ Oberintegral von f.*

Offenbar gilt $$\underline{\int} f \leq \overline{\int} f.$$

Definition 8.6. *Eine Funktion $f \in B_{\mathbb{R}}([a,b])$ heißt Riemann–integrabel, wenn gilt $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. Diese Zahl heißt dann das Riemannintegral von f über $[a,b]$: $\int_a^b f dx$. Die Menge aller Riemann–integrablen Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}[a,b]$.*

Aufgrund der Definition von $s(p,f)$ und $S(p,f)$ liegt der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse in dem Intervall $[s(p,f), S(p,f)]$. Deshalb interpretieren wir für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ das Riemannintegral $\int_a^b f(x)dx$ als diesen Flächeninhalt.

8.2 Kriterien von Darboux und Riemann

Satz 8.7. *(Darboux) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}[a,b]$ gibt mit $S(p,f) - s(p,f) < \epsilon$.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Partitionen $p', p'' \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx - s(p',f) < \frac{\epsilon}{2}$ und $S(p'',f) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\epsilon}{2}$. Dann folgt für $p = p' \cup p''$

$$S(p,f) - s(p,f) \leq S(p'',f) - \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx - s(p',f) < \epsilon.$$

Wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ gibt mit $S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) < \epsilon$ dann folgt

$$0 \leq \inf_{p \in \mathcal{P}[a,b]} S(p,f) - \sup_{p \in \mathcal{P}[a,b]} s(p,f) \leq S(p_\epsilon, p) - s(p_\epsilon, f) < \epsilon \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Also gilt dann auch $$\underline{\int} f = \overline{\int} f.$$ **q.e.d.**

Beispiel 8.8. *Sei* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [a,b] \text{ und } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
Dann gilt für alle $p \in \mathcal{P}[a,b]$

$$S(p,f) - s(p,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a > 0.$$

Also ist $\underline{\int} f = 0$ *und* $\overline{\int} f = b - a$ *und* $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

Definition 8.9. *(Riemannsummen) Für* $p \in \mathcal{P}[a,b]$ *sei* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *eine Wahl von Zwischenpunkten* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$. *Dann heißt*

$$R(p,f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Riemannsumme von f *bezüglich der Partition* p *und der Zwischenpunkte* ξ.

Satz 8.10. *(Kriterium von Riemann) Eine beschränkte Funktion* f *auf einem kompakten Intervall* $[a,b]$ *ist genau dann Riemann–integrabel, wenn es ein* $A \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass für jedes* $\epsilon > 0$ *es ein* $\delta > 0$ *gibt mit der Eigenschaft: Für alle* $p \in \mathcal{P}[a,b]$ *mit* $\|p\| < \delta$ *und alle entsprechenden Zwischenpunkte* ξ *gilt*

$$|R(p,f,\xi) - A| < \epsilon. \quad \textit{Wenn das Krierium erfüllt ist, dann gilt } A = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis: Offenbar erfüllt jede Funktion, die das Kriterium von Riemann erfüllt auch das Kriterium von Darboux. Also genügt es zu zeigen, dass auch jede Funktion das Kriterium von Riemann erfüllt, die das von Darboux erfüllt. Sei also f eine Funktion, die das Kriterium von Darboux erfüllt. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $p \in \mathcal{P}[a,b]$, so dass gilt $S(p,f) - s(p,f) < \frac{\epsilon}{2}$. Sei n die Anzahl der Teilintervalle von p und $\|f\|_\infty$ das Supremum von $|f(x)|$ auf $x \in [a,b]$, und

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{4n\|f\|_\infty + 1}, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\right\}.$$

Jedes Teilintervall einer Partition $p' \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|p'\| < \delta$ ist entweder in einem Teilintervall von p enthalten, oder in der Vereinigung von zwei benachbarten Teilintervallen von p. Also gibt es höchstens n Teilintervalle von p', die nicht in einem Teilintervall von p enthalten sind. Dann folgt aber

$$S(p',f) - s(p',f) \leq S(p,f) - s(p,f) + 2\|f\|_\infty \cdot n \cdot \delta < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dann gilt aber auch für alle Zwischenpunkte ξ

$$\left| R(p', f, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq S(p', f) - s(p', f) < \epsilon. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Korollar 8.11. *Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i-t}{n}(b-a)\right).$$

Beweis: Die Partitionen $p_n \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $p_n = \left\{x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \mid i = 0, \ldots, n\right\}$ mit den Zwischenpunkten $\xi_i = a + \frac{i-t}{n}(b-a)$ für $i = 1, \ldots, n$ erfüllt $\|p_n\| = \frac{b-a}{n}$. Also folgt die Aussage aus dem Kriterium von Riemann. **q.e.d.**

Korollar 8.12*. *Seien $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Wenn f und g auf einer dichten Teilmenge von $[a,b]$ (z.B. $\mathbb{Q} \cap [a,b]$) übereinstimmen, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.*

Beweis*: Weil jedes Teilintervall einer beliebigen Partition $p \in \mathcal{P}[a,b]$ immer Elemente einer dichten Teilmenge von $[a,b]$ enthält, können die Zwischenpunkte immer aus einer dichten Teilmenge gewählt werden. **q.e.d.**

Satz 8.13. *(Eigenschaften des Riemannintegrals)*

(i) *$\mathcal{R}[a,b]$ ist eine Unteralgebra von $B_\mathbb{R}([a,b])$ die $C_\mathbb{R}([a,b])$ enthält. Die Abbildung*
$\mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ *ist $\mathbb{R}$-linear.*

(ii) *$\mathcal{R}[a,b]$ enthält die monotonen Funktionen, und mit $f \in \mathcal{R}[a,b]$ auch $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.*

(iii) *Monotonie: Für $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ folgt aus $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$) $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Insbesondere gilt $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\|f\|_\infty$.*

(iv) *Normierung: $\int_a^b 1dx = b - a$.*

(v) *Stetigkeit: $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und $g \in C_\mathbb{R}(\mathbb{R})$, dann ist $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

(vi) *Intervall Additivität: Für jedes $c \in (a,b)$ gilt:*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c] \cap \mathcal{R}[c,b] \text{ und } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(vii) *Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann konvergiert $(\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_a^b f(x)dx$.*

(viii) *Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit des Riemannintegrals: Der Grenzwert f einer gleichmäßig konvergenten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}[a,b]$ liegt auch in $\mathcal{R}[a,b]$ und die Folge $(\int_a^b f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen $\int_a^b f(x)dx$.*

Beweis:(i) Für $f,g \in B_{\mathbb{R}}([a,b])$ und $p \in [a,b]$ gilt

$$S(p,f+g) \le S(p,f) + S(p,g) \text{ und } \qquad -s(p,f+g) \le -s(p,f) - s(p,g)$$

Daraus und aus $f(x)g(x) - f(y)g(y) = g(x)(f(x)-f(y)) + f(y)(g(x)-g(y))$ folgt

$$\begin{aligned} S(p,f+g) - s(p,f+g) &\le S(p,f) - s(p,f) + S(p,g) - s(p,g) \\ S(p,fg) - s(p,fg) &\le \|g\|_\infty(S(p,f) - s(p,f)) + \|f\|_\infty(S(p,g) - s(p,g)) \end{aligned}$$

Aus $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$ folgt also wegen dem Darbouxkriterium $f+g, fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

Wegen Satz 5.21 ist jede Funktion $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ gleichmäßig stetig, d.h. es gibt für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $|x - x'| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Dann gilt für alle $p \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|p\| < \delta$ auch $S(p,f) - s(p,f) < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}\Delta x_i = \epsilon$. Also folgt aus dem Kriterium von Darboux $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Die Linearität des Riemannintegrals folgt aus der Linearität der Riemannsummen und den Rechenregeln für Folgen.

(ii) Sei f monoton steigend ist. Dann gilt $S(p,f) - s(p,f) =$

$$= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \le \|p\| \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \|p\|(f(b) - f(a)).$$

Wenn also $\|p\| < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)+1}$ folgt $S(p,f) - s(p,f) < \epsilon$. Wegen dem Kriterium von Darboux gehört dann f zu $\mathcal{R}[a,b]$. Analoges gilt für monoton fallende f.

Für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ seien $f^+ = \max\{f,0\}$ und $f^- = \max\{-f,0\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\le \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f^+(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f^+(x) &&\le \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \\ 0 &\le \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f^-(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f^-(x) &&\le \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \end{aligned}$$

Also gilt für alle $p \in \mathcal{P}[a,b]$ auch $S(p,f^\pm) - s(p,f^\pm) \le S(p,f) - s(p,f)$. Dann folgt $f^\pm \in \mathcal{R}[a,b]$ und damit auch $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{R}[a,b]$ aus dem Kriterium von Darboux.

(iii) Aus $f \le g$ folgt $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} s(p,f) \le \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} s(p,g) = \int_a^b g(x)dx.$

(iv) Für $f = 1$(konstant) gilt $S(p,1) = s(p,1) = b - a$ für alle $p \in \mathcal{P}[a,b]$.

(v) Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und $g \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. Dann ist g auf $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ gleichmäßig stetig. Also gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $|x-x'| < \delta$ mit $x, x' \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ folgt $|g(x) - g(x')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Sei $\|g\|_\infty$ die Supremumsnorm der Funktion

$$g : [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x).$$

Weil $f \in \mathcal{R}[a,b]$ gibt es nach dem Darbouxkriterium ein $p \in \mathcal{P}[a,b]$, so dass gilt $S(p,f) - s(p,f) < \frac{\epsilon \cdot \delta}{4\|g\|_\infty}$. Wir zerlegen die Summe $S(p, g\circ f) - s(p, g \circ f)$ in die Summe über alle Teilintervalle, auf denen $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) < \delta$ gilt und die Summe über alle Teilintervalle, auf denen $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \geq \delta$ gilt. Aufgrund der Wahl von δ folgt dann, dass die erste Summe kleiner ist als $\frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\epsilon}{2}$ und die zweite Summe nicht größer als $(S(p,f) - s(p,f))\frac{2\|g\|_\infty}{\delta} < \frac{\epsilon}{2}$. Also gilt $S(p, g\circ f) - s(p, g\circ f) < \epsilon$ und $g \circ f$ erfüllt das Darbouxkriterium.
(vi) Jede Partition von $[a,b]$ besitzt eine Verfeinerung, die aus zwei Partitionen von $[a,c]$ und $[c,b]$ besteht. Dann folgt (v) aus dem Darbouxkriterium.
(vii) folgt aus (vi) und (iii).
(viii) Aus dem Beweis von (i) folgt für $f, f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ und $p \in \mathcal{P}[a,b]$

$$|S(p,f) - s(p,f) - (S(p,f_n) - s(p,f_n))| \leq S(p, f-f_n) - s(p, f-f_n) \leq 2(b-a)\|f-f_n\|_\infty.$$

Für ein $\epsilon > 0$ wählen wir zuerst n so groß, dass $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ gilt, und dann p so dass $S(p, f_n) - s(p, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Dann erfüllt f das Kriterium von Darboux.

Andererseits folgt für $f, f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ aus der Monotonie $\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty$. Also konvergiert die Folge von Integralen $(\int_a^b f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_a^b f(x)dx$. **q.e.d.**

8.3 Differentation und Integration

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 8.14. *Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ und F eine stetige Funktion auf $[a,b]$, die auf (a,b) differenzierbar ist mit $F' = f$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Sei $p \in \mathcal{P}[a,b]$, dann gibt es wegen dem Mittelwertsatz eine Wahl von Zwischenpunkten ξ, so dass gilt $R(p,f,\xi) = F(b) - F(a)$. Wegen $s(p,f) \leq R(p,f,\xi) \leq S(p,f)$ folgt dann $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. **q.e.d.**

Beispiel 8.15. (i) *Sei $F \in C^1[a,b]$. Dann ist F' Riemann–integrabel und es gilt für alle $x \in [a,b]$*

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a).$$

(ii) *Sei $1 < \alpha < 2$ und $F(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$ Dann ist F für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und*

$$F'(x) = \alpha\frac{|x|^\alpha}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{|x|^\alpha}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wegen $\frac{F(x)-F(0)}{|x|} = |x|^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist f auch bei $x = 0$ differenzierbar und dort gilt $F'(0) = 0$. Also gibt es differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen auf einer kompakten Teilmenge nicht beschränkt sind, also dort auch nicht Riemann–integrabel sind.

(iii) *Sei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$ Dann ist f auf allen kompakten Intervallen Riemann–integrabel. Offenbar gilt $F(x) = \int_0^x f(t)dt = |x|$. Also sind nicht alle Integrale von Riemann–integrablen Funktionen differenzierbar.*

Satz 8.16. *Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$ im Punkt $x_0 \in (a,b)$ stetig. Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Beweis:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt$$

Weil f im Punkt stetig ist folgt aus den Eigenschaften des Integrals (iii), dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \epsilon.$$ **q.e.d.**

Also sind die Integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ aller stetigen Funktionen $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

Satz 8.17*. *Sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante $L = \|f\|_\infty$.*

Beweis*: $$|F(x)-F(y)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq |y-x|\|f\|_\infty.$$ **q.e.d.**

Definition 8.18. *(Stammfunktion) Eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ heißt Stammfunktion von f. Die Differenz zweier Stammfunktionen von f ist eine konstante Funktion. Wir bezeichnen eine Stammfunktion von f als $\int f(x)dx$.*

Beispiel 8.19. (i) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ *für* $\alpha \neq -1$ *und entweder* $\alpha \in \mathbb{N}$ *oder* $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ *für* $x \neq 0$.

(iii) $\int e^x dx = e^x + C$.

(iv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$ *für* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

(v) $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$.

(vi) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$.

(vii) $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C$ *für* $x \notin \{(n+\frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(viii) $\int \cot(x)dx = \ln|\sin(x)| + C$ *für* $x \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ix) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$.

(x) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$ *für* $x \in [-1,1]$.

8.4 Technik des Integrierens

Substitutionsregel 8.20. *Sei $f \in C_\mathbb{R}([a,b])$ und $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine differenzierbare Funktion, so dass $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$. Dann gilt*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Für die Stammfunktionen gilt $$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right) \circ \phi + C.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist F wegen Satz 8.16 stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$. Also ist $(F \circ \phi)' = (F' \circ \phi) \cdot \phi'$. Wegen den Eigenschaften des Riemannintegrals (i) und (iv) ist $(F' \circ \phi) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \cdot \phi' \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann folgt die Aussage aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. **q.e.d.**

Die Voraussetzung, dass das Bild von ϕ gleich $[a,b]$ sein muss kann abgeschwächt werden zu der Voraussetzung, dass f auf dem Bild von ϕ definiert und stetig sein muss.

Korollar 8.21. *(Transformation der Variabeln) Sei $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine differenzierbare bijektive Funktion mit $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ und $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Also gilt
$$\int f(x)dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)dt\right) \circ \phi^{-1} + C.$$
q.e.d.

Beispiel 8.22. (i)

$$\int_a^b f(\alpha t+\beta)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)dx$$

(ii)

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{n}{a}t^{n-1}dt + C$$

für $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und einer rationale Funktion $R(\cdot,\cdot)$ in zwei Variablen. Wir substituieren $t = \sqrt[n]{ax+b} \Longrightarrow ax+b = t^n \Longrightarrow x = \frac{t^n-b}{a}$ und $dx = \frac{nt^{n-1}}{a}dt$.

(iii)

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)dx = \int R(\sinh t, \cosh t)\cosh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \sinh t, \sqrt{x^2+1} = \cosh t$ und $dx = \cosh t dt$.

(iv)

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)dx = \pm\int R(\pm\cosh t, \sinh t)\sinh t dt + C$$

mit der Substitution $x = \pm\cosh t$, je nachdem ob $x \in \mathbb{R}^{\pm}$. Dann gilt $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$ und $dx = \pm\sinh t dt$.

(v)

$$\int R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)dx = \mp\int R(\pm\cos t, \sin t)\sin t dt + C.$$

mit der Substitution $x = \pm\cos t, \sqrt{1-x^2} = \sin t$ und $dx = \mp\sin t dt$.

(vi)

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} + C$$

mit der Substition $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), x = 2\arctan(t)$ *und* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$*, so dass gilt*

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos(x) \text{ und } \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(x).$$

(vii)

$$\int R(\cosh x, \sinh x)dx = \int R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right)\frac{dt}{t} + C$$

mit der Substition $t = e^x, x = \ln(t)$ *und* $dx = \frac{dt}{t}$.

Partielle Integration 8.23. *Seien* $f, g \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$ *differenzierbar mit* $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Also gilt

$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

Beweis folgt aus dem Hauptsatz der Differentialrechnung und der Leibnizregel. **q.e.d.**

Beispiel 8.24. **(i)** $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x(\ln(x)-1) + C$.

(ii) $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + C$
$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + C$
$\Longrightarrow \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C$ *also* $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

(iii) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

(iv) $\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx$.

(v) $\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx$.

Partialbruchzerlegung 8.25. *(Integration von rationalen Funktionen)*
1. Faktorisierung des Nenners. *In* $\mathbb{C}$ *lässt sich wegen dem Fundamentalsatz der Algebra das Nennerpolynom* Q *einer rationalen Funktion in ein Produkt von Polynome ersten Grades zerlegen. Wenn das Polynom reelle Koeffizienten hat, dann sind die Nullstellen entweder reell oder sie treten in Paaren von komplex konjugierten Nullstellen auf. Indem wir die Paare zu Polynomen zweiten Grades zusammenfassen zerlegen wir Polynome mit reellen Koeffizienten in ein Produkt von Polynomen ersten und zweiten Grades mit reellen Koeffizienten.*
2. Polynomdivision. *Zerlege eine komplexe, rationale Funktion in eine Summe eines Polynoms und Summanden von der Form* $\frac{c}{(x-x_0)^l}$.

Lemma 8.26. *(Abspaltung des Hauptteiles) Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion mit komplexen Koeffizienten, dessen Zählerpolynom P und Nennerpolynom Q keine gemeinsamen Nullstellen haben. Wenn das Nennerpolynom $Q(x)$ an der Stelle x_0 eine Nullstelle der Ordnung n hat, d.h. $Q(x) = (x - x_0)^n q(x)$ mit $q(x_0) \neq 0$, dann gibt es komplexe Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ und ein Polynom $p(x)$, so dass gilt*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - x_0} + \ldots + \frac{c_n}{(x - x_0)^n} + \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Beweis: *Weil jedes komplexe Polynom für jede komplexe Zahl x_0 auch ein Polynom in $x - x_0$ ist, können wir annehmen, dass $x_0 = 0$ ist. Seien*

$$c_l = \frac{1}{(n-l)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l} \frac{P(x)}{q(x)}\Bigg|_{x=x_0} \qquad \text{für } l = 1, \ldots, n.$$

Weil $q(x_0) \neq 0$ sind diese Ableitungen wohl definiert. Dann verschwinden die 0–te bis zur $(n-1)$–ten Ableitungen der rationalen Funktion

$$x \mapsto \frac{P(x)}{q(x)} - c_n - c_{n-1}(x - x_0) - \ldots - c_1(x - x_0)^{n-1}.$$

Deshalb läß sich diese rationale Funktion schreiben als

$$\frac{P(x)}{q(x)} - c_n - c_{n-1}(x - x_0) - \ldots - c_1(x - x_0)^{n-1} = (x - x_0)^n \frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit einem Polynom } p.$$

Daraus folgt $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{c_1}{x - x_0} + \ldots + \frac{c_n}{(x - x_0)^n}.$$ **q.e.d.**

Im Fall von Paaren von komplex konjugierten Nullstellen des Nennerpolynoms einer reellen rationalen Funktion können wir das Verfahren so modifizieren, dass wir keine komplexen Zahlen benötigen. Seien also x_0 und $\bar{x}_0$ zwei komplex konjugierte Nullstellen von dem Polynom Q mit reellen Koeffizienten, die wieder jeweils n–fach auftreten, d.h. $Q(x) = (x - x_0)^n (x - \bar{x}_0)^n q(x)$ mit einem Polynom q mit reellen Koeffizienten, das keine Nullstellen bei x_0 und $\bar{x}_0$ hat. Dann hat

$$x \mapsto \frac{P(x)}{q(x)} - (a_n + b_n(x - x_0)) - \ldots - (a_1 + b_1(x - x_0))(x - x_0)^{n-1}(x - \bar{x}_0)^{n-1}$$

mit den Koeffizienten

$$a_l = \frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l} \frac{P(x)}{q(x)}\Big|_{x=x_0}}{(n-l)!(x_0 - \bar{x}_0)^{n-l}} \qquad b_l = \frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l} \frac{P(x)}{q(x)}\Big|_{x=\bar{x}_0}}{(n-l)!(\bar{x}_0 - x_0)^{n+1-l}} \qquad \text{für } l = 1, \ldots, n$$

eine n–fache Nullstelle sowohl bei x_0 als auch bei $\bar{x}_0$. Diese Funktion ist also das Produkt von $(x-x_0)^n(x-\bar{x}_0)^n$ mal einer rationalen Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$. Weil $\frac{P(x)}{Q(x)}$ bei komplex konjugierten Variablen komplex konjugierte Werte annimmt, gilt das auch für $\frac{p(x)}{q(x)}$, das dann wieder eine rationale, reelle Funktion ist. Das ergibt folgende Relation von rationalen reellen Funktionen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{a_1 - b_1x_0 + b_1x}{(x-x_0)(x-\bar{x}_0)} + \ldots + \frac{a_n - b_nx_0 + b_nx}{(x-x_0)^n(x-\bar{x}_0)^n}.$$

Deshalb lässt sich jede rational Funktion mit reellen Koffizienten zerlegen in ein Summe eines Polynoms mit rellen Koeffizienten und Summanden von der Form $\frac{c}{(x-x_0)^l}$ und $\frac{a+bx}{(x^2+px+q)^l}$ mit $a,b,c,p,q,x_0 \in \mathbb{R}$ und $l \in \mathbb{N}$ und $4q-p^2>0$.

3. Termweise Integration. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x-x_0| + C & \text{für } l=1 \\ \frac{-1}{(l-1)(x-x_0)^{l-1}} + C & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\int \frac{(a+bx)dx}{(x^2+px+q)^l} = \begin{cases} \frac{b}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(a - \frac{bp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} + C & \text{für } l=1 \\ \frac{-b}{2(l-1)(x^2+px+q)^{l-1}} + \left(a-\frac{bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C & l=1 \\ \frac{2x+p}{(l-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{l-1}} + \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q-p^2)}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{l-1}} + C & l \neq 1. \end{cases}$$

Damit können wir alle rationalen Funktionen integrieren.

Satz 8.27. *(Restglied der Taylorformel in Integralform) Sei $f \in C^n_{\mathbb{R}}([a,b])$ und $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + (x-x_0)^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{n+1}(x_0+t(x-x_0)dt$$

Beweis: durch vollständige Induktion und partielle Integration.

(i) für $n=0$ folgt die Aussage aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)\int_0^1 f'(x_0+t(x-x_0))dt = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$, und f sei $(n+1)$ mal differenzierbar mit $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann folgt mit einer partiellen Integration

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + (x-x_0)^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{n+1}(x_0+t(x-x_0))dt$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m - \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x_0+t(x-x_0))\Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$+(x-x_0)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(x_0+t(x-x_0))dt$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + (x-x_0)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} f^{n+2}(x_0+t(x-x_0))dt$$

Also gilt die Aussage für $n+1$. **q.e.d.**

Satz 8.28.* *(Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Dann ist*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \in [\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)]$$

Wenn $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$, dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(x_0)$.

Beweis:* Wegen $\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le f \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ folgt die erste Aussage aus der Monotonie. Wenn f stetig ist folgt aus dem Mittelwertsatz für $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, dass es ein $x_0 \in (a,b)$ gibt mit $f(x_0) = F'(x_0) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. **q.e.d.**

8.5 Uneigentliches Integral

In diesem Abschnitt erweitern wir den Begriff des Riemannintegrals auf offene und unbeschränkte Intervalle.

Definition 8.29. *Eine Funktion f heisst Riemann–integrabel auf dem offenen (nicht notwendigerweise beschränkten) Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$, wenn f Riemann–integrabel ist auf allen kompakten Teilintervallen, und wenn für ein $c \in (a,b)$ beide Grenzwerte $\lim_{x\to a+}\int_x^c f(t)dt$ und $\lim_{x\to b-}\int_c^b f(t)dt$ existieren.*

Beispiel 8.30. **(i)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$. $\displaystyle\int \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$. *Also existiert der Grenzwert $\lim_{x\to\infty-}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt$ nur für $\alpha > 1$. Dann gilt $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}$.*

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$. $\displaystyle\int \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$. *Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ genau dann, wenn $\alpha < 1$. In diesem Fall gilt $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}$. Wegen (i) folgt dann, dass $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ für kein α existiert.*

(iii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$. *Also gilt* $\lim\limits_{x\to-\infty+} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\infty-} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$. *Dann folgt* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$.

Verschiedenen Kriterien helfen zu entscheiden, ob diese Grenzwerte existieren. Hier einige Kriterien für uneigentliche Integrale $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$.

Cauchykriterium: $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass für alle $a < c < d < e < b$ gilt $\left|\int_d^e f(x)dx\right| < \epsilon$.

Monotoniekriterium: Wenn $f \geq 0$, dann existiert $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$ genau dann, wenn $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ auf $x \in (a, b)$ beschränkt ist.

Majorantenkriterium: Wenn $f \geq 0$ und $f \leq g$, dann existiert $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)dt$, wenn $\lim_{x\to b-} \int_a^x g(t)dt$ existiert.

Definition 8.31. *Eine Funktion f auf einem offenen (unbeschränkten) Intervall heißt absolut Riemann–integrabel, wenn $|f|$ Riemann–integrabel ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. Alle absolut Riemann–integrablen Funktionen sind also auch Riemann–integrabel.

Satz 8.32. *(Integralkriterium für Reihen) Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ monoton fallend mit dem Grenzwert $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Dann ist die Folge*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_{1}^{n} f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton fallende konvergente Folge positiver Zahlen. Für alle $m < n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$f(n) - f(m) \leq \sum_{k=m+1}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \leq 0.$$

Die Reihe $(\sum f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)dx < \infty$. Dann gilt:

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

Beweis: Für $m < n \in \mathbb{N}$ sei $p_{m,n} \in \mathcal{P}[m, n]$ die Partition $\{m, m + 1, \ldots, n\}$. Dann ist offenbar $s(p_{m,n}, f) = \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$ und $S(p_{m,n}, f) = \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$. Also gilt

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k).$$

Daraus folgt sofort

$$f(n) - f(m) = \sum_{k=m+1}^{n} f(k) - \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \le \sum_{k=m+1}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \le 0.$$

Also ist die Folge $(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende beschränkte Folge, die wegen dem Monotonieprinzip konvergiert. Mit $m = 1$ folgt

$$\int\limits_{1}^{n} f(x)dx \le \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int\limits_{1}^{n} f(x)dx.$$

Dann folgt die Aussage aus dem Majorantenkriterium. **q.e.d.**

Beispiel 8.33. **(i)** $(\sum \frac{1}{n^s})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn* $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ *existiert. Also für* $s > 1$*. Dann gilt*

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Der Grenzwert heißt Riemannsche ζ*-Funktion.*

(ii) *Die Folge* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ *ist eine monoton fallende konvergente Folge positiver Zahlen. Der Grenzwert* $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$ *wird Eulersche Konstante genannt. Bis heute ist nicht bekannt, ob er rational oder irrational ist.*

(iii) *Wegen (i) ist die Funktion* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ *für* $s \in (1, \infty)$ *konvergent. Die Folge von Funktionen*

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} - \int\limits_{1}^{n} \frac{dx}{x^s}$$

ist wegen dem vorangehenden Satz auf $s \in (0, \infty)$ *eine monoton fallende Folge von Funktionen. Aus dem Beispiel 7.17 folgt für* $0 < s < t$ *und* $x \in [1, \infty)$

$$0 < \frac{1}{x^s} - \frac{1}{x^t} = \frac{1}{x^s}(1 - \exp((s-t)\ln(x))) \le \frac{1}{x^s}(t-s)\ln(x).$$

Deshalb ist das eine Folge von stetigen Funktionen auf $s \in \mathbb{R}^+$*. Wegen dem vorgangehenden Satz und Satz 5.26 konvergiert sie für alle* $\epsilon > 0$ *auf* $[\epsilon, \infty)$ *gleichmäßig gegen eine stetige Funktion auf* $[\epsilon, \infty)$*. Auf* $s \in (1, \infty)$ *ist wegen (i) der Grenzwert gleich*

$$\zeta(s) - \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Und für $s = 1$ ist der Grenzwert gleich

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int\limits_{1}^{n}\frac{dx}{x}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\gamma.$$

Also folgt $$\lim_{s\to 1+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma.$$

(iv) $\left(\sum\frac{1}{(n+1)\ln^s(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn* $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^s(x)}dx = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{x^s}dx$ *existiert, also für* $s > 1$.

(v) *Nach Euler ist die* Γ*-Funktion definiert durch*

$$\Gamma(x)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Dieses Integral ist an beiden Grenznen uneigentlich. Deshalb zerlegen wir es in eine Summe von zwei Integralen $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. *Auf* $t \in (0, 1]$ *ist der Integrand beschränkt durch* $e^{-1}t^{x-1} \le e^{-t}t^{x-1} \le t^{x-1}$. *Deshalb konvergiert das erste Integral für* $x - 1 > -1 \iff x > 0$. *Wegen* $e^{-t}t^{x-1} = \exp(-t + (x-1)\ln(t))$ *und weil für alle* $\epsilon > 0$ *im Grenzwert* $\lim_{t\to\infty}$ *der Ausdruck*$-\epsilon t + x - 1\ln(t)$ *negativ ist, konvergiert das zweite Intgeral für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Also ist* $\Gamma(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^+$ *definiert. Durch eine partielle Integration erhalten wir*

$$\int\limits_{\epsilon}^{R}e^{-t}t^{x}dt=-e^{-t}t^{x}\Big|_{t=\epsilon}^{t=R}+x\int\limits_{\epsilon}^{R}e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ *und* $R \to \infty$ *erhalten wir folgende Funktionalgleichung:*

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

Mit $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ *folgt induktiv* $\Gamma(n) = (n-1)!$.