Kapitel 4

Reihen

4.1 Konvergenzkriterien

Definition 4.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörende Reihe. Diese Folge bezeichnen wir mit $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Wenn die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann bezeichnen wir den Grenzwert mit $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Analog definieren wir $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=m}^{n} a_j$.

Beispiel 4.2. **(i)** *Geometrische Reihe $(\sum q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Für $q \neq 1$ hatten wir berechnet: $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Dann folgt aus dem letzten Abschnitt*

$$\text{Für } |q| < 1 \text{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ konvergent:} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

$$\text{Für } |q| \geq 1 \text{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ divergent.}$$

$$\text{Für reelles } q \geq 1 \text{ ist } \left(\sum q^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ divergent:} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty.$$

(ii) *Die ζ-Funktion ist definiert als $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist der Grenzwert (wenn er existiert) der Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Zunächst ist diese Reihe nur für alle rationalen Zahlen $s \in \mathbb{Q}$ definiert. Für $s = 1$ ist $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.*

Beweis: Diese Reihe ist monoton wachsend. Also ist nur die Frage, ob sie beschränkt ist oder nicht. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n} \geq \dfrac{n}{2n} \geq \dfrac{1}{2}$. Also sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ jeweils die Summen $\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n}{2}$. **q.e.d.**

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k\cdot k!}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{k} \frac{n+k-n}{n(n+1)\cdots(n+k)} \\
&= \frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n\cdots(n+k-1)} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n\cdots(n+k-1)}\right) \\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(m+1)\cdots(m+k)}\right)
\end{aligned}$$

Die Folge $\frac{1}{(m+1)\cdots(m+k)} \leq \frac{1}{m^k}$ konvergiert aber gegen Null. **q.e.d.**

Wenn wir das Cauchykriterium und das Monotonieprinzip auf Reihen anwenden, so erhalten wir:

Satz 4.3. *(Cauchykriterium für Reihen) Die Reihe $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\left|\sum\limits_{j=n}^{m} a_j\right| < \epsilon$ für alle $m \geq n \geq N$ gilt.* **q.e.d.**

Satz 4.4. *(Monotonieprinzip für Reihen) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht negativen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn sie beschränkt ist. Für den Grenzwert gilt dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$.* **q.e.d.**

Definition 4.5. *(absolut konvergent) Die Reihe $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\left(\sum |a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Satz 4.6. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Und es gilt $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*

Beweis: Aus der Dreiecksungleichung folgt $\left|\sum\limits_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum\limits_{j=n}^{m} |a_j|$ für alle $m \geq n$. Also ist die Reihe einer absolut konvergenten Reihe eine Cauchyfolge und konvergiert. Insbesondere gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $\left|\sum_{n=1}^{m} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|$. Dann erfüllen auch die Grenzwerte $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. **q.e.d.**

Aus dem Monotonie-Prinzip und Satz 3.5 folgt das

Satz 4.7. *(Majoranten Kriterium) Die Folgen von nicht negativen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllen $b_n \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Wenn außerdem $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

(ii) *Wenn außerdem $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.* **q.e.d.**

Beispiel 4.8. *Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{(n+k)^{k+1}} \leq \frac{1}{n\cdots(n+k)}$. Also folgt aus der Konvergenz von $(\sum \frac{1}{n\cdots(n+k)})$ auch die Konvergenz von $(\sum \frac{1}{n^{k+1}})_{n\in\mathbb{N}}$.*

Satz 4.9. *(Wurzeltest) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und sei $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.*

(i) *Falls $\alpha < 1$, dann konvergiert $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut.*

(ii) *Falls $\alpha > 1$, dann divergieren $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Im Fall $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ kann die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl konvergent als auch divergent sein. So ist z.B. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$. Aber die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, während die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Beweis: (i) Sei $\alpha < 1$. Dann gibt es für jedes $\alpha < \beta < 1$ aufgrund von Satz 3.20 (i) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \iff |a_n| \leq \beta^n$. Weil aber $(\sum \beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist auch $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent.

(ii) Sei $\alpha > 1$. Dann gibt es wieder aufgrund von Satz 3.20 (i) unendlich viele $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Also kann die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergieren. Dann sind Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolgen, also divergent. **q.e.d.**

Satz 4.10. *(Exponentialfunktion:) Für alle $x \in \mathbb{K}$ definieren wir*

$$\exp(x) : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aufgrund des Beispiels (v) im letzten Kapitel ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Deshalb konvergiert die Reihe $\left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut.

Satz 4.11. *(Quotiententest) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und sei $\alpha = \overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.*

(i) *Falls $\alpha < 1$, dann konvergiert $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut.*

(ii) *Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle $n \geq N$ auch $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ erfüllen, dann divergieren $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis: (i) Wegen $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}\left|\dfrac{a_n+1}{a_n}\right|$ (Satz 3.24) folgt (i) aus dem Wurzeltest.

(ii) Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ folgt $|a_{n+1}| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdots \left|\dfrac{a_{N+1}}{a_N}\right| \cdot |a_N| \geq |a_N| > 0$. Also ist $|a_n|$ keine Nullfolge und die Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. **q.e.d.**

Satz 4.12.* *(Cauchy's Verdichtungssatz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht negative monoton fallende Folge. Dann konvergiert die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn die Reihe $(\sum 2^n a_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Beweis*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ und $t_n = \sum\limits_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j}$. Wegen der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$a_{2^j} + a_{2^j+1} + \ldots + a_{2^{j+1}-1} \leq 2^j a_{2^j} \leq 2(a_{2^{j-1}+1} + a_{2^{j-1}+2} + \ldots + a_{2^j})$$

und für $j = 0$ gilt: $a_1 \leq a_1 \leq 2a_1$. Deshalb gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2^{n+1}-1} \leq t_n \leq 2s_{2^n}.$$

Also ist die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann nach oben beschränkt, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. **q.e.d.**

Die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ genau dann konvergent, wenn die Reihe

$$\left(\sum \frac{2^n}{(2^n)^s}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum 2^{(1-s)\cdot n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergent ist, also genau dann, wenn $s > 1$. $\Longrightarrow$ Für alle $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > 1$ ist $\zeta(s)$ wohl definiert.

Satz 4.13. *(Alternierende Reihe von Leibniz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $(\sum(-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*

Beweis: Wegen dem Monotonieprinzip sind alle a_n einer monoton fallenden Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht negativ. Sei für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $s_n = \sum\limits_{m=0}^{n}(-1)^m a_m$. Dann folgt aus der Monotonie:

$$s_1 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_2 \leq s_0.$$

Also ist die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und beschränkt und $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und beschränkt. Dann konvergieren aber beide Folgen und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = -\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

Also konvergiert die Reihe $(\sum(-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **q.e.d.**

Damit ist also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergent, während sie nicht absolut konvergiert, weil $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$.

4.2 Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen

Als Ziffern wählen wir $Z = \{0,1,\dots,9\}$ (bzw. $\{0,1,\dots,p-1\}$). Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in Z. Definiere die entsprechende Zahlenfolge $(\sum x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{z_n}{p^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\sum x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent, weil $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{p-1}{p^n}} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p-1}\right)\cdot\frac{1}{p} = \frac{1}{p}$. Also definiert $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ eine reelle Zahl. Sei jetzt M die Menge aller Folgen $M = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} | (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $p-1\}$. Dann ist die Abbildung $M \to [0,1), (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z_n}{p^n}$ surjektiv und injektiv.

Bemerkung 4.14. *Wir hätten auch fordern können, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert, so haben nämlich alle reellen Zahlen, deren Ziffernfolge gegen* 0 *konvergiert auch eine Dezimalbruchdarstellung, deren Ziffernfolge gegen* 9 *konvergiert, z.B.* $\frac{1}{2} = 0,5000\ldots = 0,4999\ldots$.

Surjektiv: Sei $x \in [0,1)$. Dann definieren wir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z_n}{p^n} \le x - \sum_{m=1}^{n-1}\frac{z_m}{p^m} < \frac{z_n+1}{p^n} \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \left[\frac{z_n}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{z_m}{p^m}, \frac{z_n+1}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{z_m}{p^m}\right)$$

gilt. Dann folgt aber auch $0 \le x - \sum\limits_{m=1}^{n}\frac{z_m}{p^m} < \frac{1}{p^n}$. Also gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z_n}{p^n} = x$. Weil aber für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}\frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{p^n}$, gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq p-1$.

Injektiv: Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Ziffernfolgen, mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z_n}{p^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{p^n}$. Sei also $n \in \mathbb{N}$ der kleinste Index, so dass $z_n \neq w_n$. Weil aber gilt

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|z_m - w_m|}{p^m} \le \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n},$$

muss auch $|z_n - w_n| \leq 1$ gelten. Sei also $z_n = w_n + 1$, dann muss für alle $m > n$ gelten $w_m - z_m = p - 1 \Longrightarrow z_m = 0$ und $w_m = p - 1 \Longrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} w_m = p - 1$. Also gehört $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht zu M. **q.e.d.**

4.3 Addition, Multiplikation, Umordnung

Aus dem Satz 3.5 folgt

Satz 4.15. *(Rechenregeln für Reihen) Die Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent, dann konvergieren auch die Reihen*

$$\left(\sum (a_n + b_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{und} \quad \left(\sum \lambda a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ für alle } \lambda \in \mathbb{K}.$$ **q.e.d.**

Definition 4.16. *Gegeben seien die Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann heißt die Reihe $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ das (Cauchy-)Produkt der beiden Reihen.*

Diese Definition kommt von den Potenzreihen, die wir später kennenlernen werden. Das Produkt der beiden Potenzreihen $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist dann nämlich die Potenzreihe $(\sum c_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, d.h. wir haben alle Summanden des Produktes mit gleichen Potenzen zusammengefasst.

Satz 4.17. *(Konvergenz des Produktes) Wenn die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut konvergiert und die Reihe $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, dann konvergiert auch das Produkt $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der beiden Reihen. Wenn auch $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut.*

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ und $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$. Es gilt

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + \ldots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0 \\ &= a_0(B - \beta_n) + a_1(B - \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B - \beta_0) \end{aligned}$$

Hierbei ist $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\beta_n = B - B_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k$. Daraus ergibt sich

$$C_n = A_n \cdot B - (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0).$$

Also genügt es zu zeigen, dass $a_0\beta_n + \ldots + a_n\beta_0$ im Grenzwert $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Aufgrund der Voraussetzungen gibt es positive Zahlen $\alpha, \beta > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$|\beta_n| \leq \beta \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \alpha$$

gilt, und für alle $\epsilon > 0$ natürliche Zahlen N, M, so dass $|\beta_n| < \frac{\epsilon}{2\alpha}$ für alle $n \geq N$ gilt und $|a_n| < \frac{\epsilon}{2N\beta}$ für alle $n \geq M$. Dann gilt für alle $n \geq N + M - 1$:

$$\begin{aligned} |a_0\beta_n + \ldots + a_n\beta_0| &\leq |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_{N-1}a_{n-N+1}| + |\beta_N a_{n-N} + \ldots + \beta_n a_0| \\ &< N\beta \cdot \frac{\epsilon}{2N\beta} + \frac{\epsilon}{2\alpha} \sum_{k=0}^{n-N} |a_k| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Produkt der Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wenn beide konvergieren und eine absolut konvergiert. Wenn beide Reihen absolut konvergieren, dann konvergiert auch das Produkt der Reihen $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum |b_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und ist eine Majorante von $(\sum |c_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Also ist dann auch das Produkt absolut konvergent.**q.e.d.**

Beispiel 4.18. *Das Quadrat der Reihe* $\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist nicht konvergent, obwohl die Reihe als Beispiel einer alternierenden Reihe nach Leibniz konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Die Koeffizienten des Quadrates sind gegeben durch:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

Es gilt aber $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1$. *Also ist das Quadrat der Reihe keine Cauchyfolge.* **q.e.d.**

Satz 4.19. *(Eigenschaften der Exponentialfunktion)*

(i) *für alle* $x, y \in \mathbb{K}$ *gilt* $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

(ii) *Für alle* $x \in \mathbb{K}$ *ist* $\exp(x) \neq 0$ *und für alle* $x \in \mathbb{R}$ *sogar* $\exp(x) > 0$.

(iii) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und alle* $r \in \mathbb{Q}$ *ist* $\exp(rx) = (\exp(x)^r)$.

(iv) *Für alle* $x \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(\bar{x}) = \overline{\exp(x)}$.

(v) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $|\exp(\imath x)| = 1$.

Die Zahl $\exp(1)$ *wird Eulersche Zahl genannt und mit e bezeichnet. Wegen (iii) gilt dann für alle* $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(r) = \exp(r \cdot 1) = e^r$. *Deshalb schreiben wir auch* e^x *für* $\exp(x)$.

Beweis: **(i)** Wir hatten schon gesehen, dass die Reihe $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut konvergiert. Dann ist das Produkt von $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$. Wegen der Binomischen Formel gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Dann folgt $\exp(x)\exp(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$.
(ii) Wegen (i) gilt $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Also besitzt $\exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ ein Inverses und ist ungleich Null. Wegen (i) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$.
(iii) Offenbar ist für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ $(\exp(\frac{x \cdot m}{n}))^n = \exp(x \cdot m) = (\exp(x))^m$. Also gilt auch wegen (ii) $\exp\left(\frac{xm}{n}\right) = (\exp(x))^{\frac{m}{n}}$.
(iv) $\exp(\bar{x}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^n}{n!} = \overline{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \overline{\exp(x)}$.
(v) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(\imath x)\overline{\exp(\imath x)} = \exp(\imath x)\exp(-\imath x) = 1$. **q.e.d.**

Wir können jetzt für jede Zahl $y > 0$, für die es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $y = \exp(x)$ gilt, und für jedes $z \in \mathbb{R}$ die Zahl $y^z = \exp(zx)$ definieren. Wir werden später sehen, dass wir so für alle $y > 0$ und alle $z \in \mathbb{R}$ y^z definieren können.

Definition 4.20. *(Umordnen von Reihen) Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung von den natürlichen Zahlen auf sich selber. Dann heißt die Reihe $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung der Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Analog könnten wir auch die Umordnung von Folgen bilden. Letztere sind aber weniger interessant, weil jede Umordnung einer konvergenten Folge wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergiert (Übungsaufgabe). Dagegen gilt dies bei Reihen nicht.

Satz 4.21. *Konvergiert eine Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut, so konvergiert auch jede Umordnung $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut. In diesem Fall gilt dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$.*

Beweis: Sei also τ eine gegebene bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wenn $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $N \le n \le m$ gilt: $\sum\limits_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon$. Dann gibt es auch ein $M = \max \tau^{-1}[\{1, \ldots, N\}] \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \ge M$ gilt $\tau(m) \ge N$. Dann folgt für alle $m \ge n \ge M$

$$\sum_{k=n}^{m} \left|a_{\tau(k)}\right| \le \sum_{k=\min \tau[\{n,n+1,\ldots,m\}]}^{\max \tau[\{n,n+1,\ldots,m\}]} |a_k| < \epsilon.$$

Also ist $\left(\sum |a_{\tau(n)}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und die Umordnung konvergiert absolut. Dann konvergiert auch $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mit denselben N und M in Abhängigkeit von $\epsilon > 0$ gilt für alle $n \geq N$ and $m \geq M$

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k\in\tau[\{1,\ldots,m\}]\setminus\{1,\ldots,N\}} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k|$$
$$\leq \sum_{k=\min\tau[\{1,\ldots,m\}]\setminus\{1,\ldots,N\}}^{k=\max\tau[\{1,\ldots,m\}]\setminus\{1,\ldots,N\}} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| < 2\epsilon.$$

Also konvergiert $(\sum a_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert wie $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **q.e.d.**

Satz 4.22. *(Riemann) Sei $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert, und $\alpha \leq \beta$ zwei reelle Zahlen. Dann gibt es eine Umordnung $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, die als Reihe beschränkt ist und für die α der Limes inferior der Reihe ist und β der Limes superior. Wenn $\alpha \neq \beta$ konvergiert die Reihe also nicht.*

Beweisskizze: Weil $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir betrachten im folgenden die beiden Teilfolgen aller nichtnegativen Elemente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und aller negativen Elemente $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
1. Schritt: Weil $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, divergieren $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -\infty$.
2. Schritt: Wir setzen die umgeordnete Folge abwechselnd jeweils der Reihe nach aus den Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen. Immer wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder größer ist als β, dann fahren wir fort mit Folgengliedern aus c_n, und wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder kleiner ist als α, dann fahren wir fort mit Folgengliedern aus b_n. Wenn $0 \in [\alpha, \beta]$ starten wir mit Folgengliedern aus b_n.
3. Schritt: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle Summen $\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}$ für alle $n \geq N$ in $(\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon)$ liegen. Die Reihe $\left(\sum a_{\tau(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dieser Umordnung hat als Limes inferior α und als Limes superior β. Die Menge der Häufungspunkte dieser Reihe ist sogar gleich $[\alpha, \beta]$. **q.e.d.**

Definition 4.23. *Sei $(a_n)_{\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, dann heißt $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die entsprechende Potenzreihe mit Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Aus dem Wurzeltest folgt sofort

Satz 4.24. *(Konvergenzradius von Potenzreihen) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Koeffizienten der Potenzreihe $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und sei $\alpha = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ und $R = \frac{1}{\alpha}$ ($R = 0$ für $\alpha = \infty$ und $R = \infty$ für $\alpha = 0$).*

(i) *Für $|x| < R$ konvergiert $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut.*

(ii) *Für $|x| > R$ divergiert $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Wenn $\alpha < \infty$ definiert folgende Reihe also eine Potenzreihenfunktion

$$f: \quad \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < R\} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Beispiel 4.25. **(i)** $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}} = 0 \Longrightarrow R = \infty$.

(ii) $\left(\sum x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{1} = 1 \Longrightarrow R = 1$. *Für* $|x| < 1$ *gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

(iii) $\left(\sum \frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \Longrightarrow R = 1$.

Für $|x| < 1$ *ist die Potenzreihe also konvergent, aber für* $x = 1$ *divergent und für* $x = -1$ *konvergent (alternierende Reihe von Leibniz).*

(iv) $\left(\sum \frac{x^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *also* $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1 \Longrightarrow R = 1$.

Für $|x| \leq 1$ *also konvergent und für* $|x| > 1$ *divergent.*

Satz 4.26. *(Eigenschaften von Potenzreihenfunktionen)*

(i) *Seien* $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und* $\left(\sum b_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *Potenzreihen mit Konvergenzradius* R_1 *bzw.* R_2. *Dann konvergieren für* $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ *die Summe* $\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und das Cauchy-Produkt* $\left(\sum c_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *der beiden Potenzreihen und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

(ii) *Für* $r < R_1$ *gibt es ein* $M(r) \in \mathbb{R}^+$, *so dass* $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq M(r)$ *für alle* $|x| \leq r$ *gilt.*

(iii) *Für* $r < R_1$ *und für alle* $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $|x| \leq r$ *gilt*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| < \epsilon.$$

(iv) *Für* $r < R_1$ *gibt es ein* $L(r) \in \mathbb{R}^+$, *so dass für alle* x, y *mit* $|x| \leq r$ *und* $|y| \leq r$ *gilt*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq L(r)|x - y|.$$

Beweis: **(i)** Folgt aus den Rechenregeln für Reihen und der Konvergenz des Cauchy Produktes.

(ii) Für $|x| \leq r$ gilt $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = M(r) < \infty$.

(iii) Weil die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ absolut konvergiert gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon$ gilt. Dann folgt für $|x| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon.$$

(iv) $(x^n - y^n) = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$. Für $|x| \leq r$ und $|y| \leq r$ folgt also $|x^n - y^n| \leq |x-y| n r^{n-1}$. Weil aber gilt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

haben die Reihen $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\left(\sum n \cdot a_n x^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ den gleichen Konvergenzradius. Also gilt für $|x| \leq r$ und $|y| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x^n - y^n| \leq |x-y| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n r^{n-1}.$$

Wähle also $L(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} < \infty$. **q.e.d.**

Satz 4.27. *(Identitässatz für Potenzreihenfunktionen)*

(i) *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, die nicht identisch verschwindet, dann gibt es ein $0 < r < R$, so dass die Potenzreihenfunktion in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| < r\}$ höchstens endlich viele Nullstellen $x_1, \ldots, x_N$ hat.*

(ii) *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Für alle x_0 mit $|x_0| < R$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist dann $b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} x_0^k < \infty$. Außerdem ist der Konvergenzradius der Potenzreihenfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ nicht kleiner als $R - |x_0|$ und für alle $|x| < R - |x|_0$ gilt auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + x_0)^n$.*

(iii) *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihenfunktionen, deren Konvergenzradien größer sind als $r > 0$. Falls $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$ unendliche viele verschiedene Elemente enthält, an denen die beiden Potenzreihenfunktionen übereinstimmen, dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. sie stimmen als Potenzreihen überein.*

Beweis: **(i)** Sei $N \in \mathbb{N}_0$ der kleinste Index, so dass $a_N \neq 0$. Wenn alle anderen Koeffizienten $(a_n)_{n>N}$ verschwinden, hat die Potenzreihe nur Nullstellen bei $x = 0$. Andernfalls gilt für ein $0 < r < R$ und alle $|x| \leq r$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_N x^N\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \leq |x|^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n\right).$$

Also gilt für alle Nullstellen x_m der Potenzreihenfunktionen

$$|a_N| \cdot |x_m|^N \leq |x_m|^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n\right).$$

Wenn $|x_m| \neq 0$ ist folgt daraus $0 < |a_N| \leq |x_m| (\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n)$. Also hat die Potenzreihenfunktion keine Nullstelle auf

$$\left\{ x \in \mathbb{K} \;\middle|\; 0 < |x| < \min\left\{ r, |a_N| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n\right)^{-1} \right\} \right\}.$$

(ii) Für $x_0 = 0$ trivial. Sei $0 < |x_0| = r < R$. Dann ist für alle $0 < s < R - r$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+s)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty$$

absolut summierbar. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$ auch:

$$s^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} r^{n-k} s^k < \infty.$$

Also konvergiert $b_m = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Und es gilt

$$\sum_{m=0}^{M} s^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} r^{n-k} s^k < \infty$$

für alle $M \in \mathbb{N}_0$. Also ist auch $\qquad \sum\limits_{m=0}^{\infty} |b_m| s^m \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| (r+s)^n < \infty.$

Also ist $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ für alle $|x| < R - r$ konvergent, und der Konvergenzradius nicht kleiner als $R - r = R - |x_0|$. Für $|x| < R - |x_0|$ und alle $M, K \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\left|\sum_{m=0}^{M} x^m \sum_{k=0}^{K} a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^k - \sum_{n=0}^{M+K} a_n (x+x_0)^n\right| \leq \sum_{n=\min\{M,K\}}^{M+K} |a_n| (|x| + |x_0|)^n.$$

Also folgt im Grenzwert $K \to \infty$

$$\left|\sum_{m=0}^{M} b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n\right| \leq \sum_{n=M}^{\infty} |a_n|(|x|+|x_0|)^n < \infty.$$

und im Grenzwert $M \to \infty$ auch $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n = 0.$

(iii) Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Nullstellen der Potenzreihenfunktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$ in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$. Dann hat die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x_0 mit $|x_0| \leq r$, und in jeder ϵ-Umgebung von x_0 gibt es unendlich viele verschiedene Folgenglieder. Sei R das Minimum der Konvergenzradien von $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann hat aufgrund der Voraussetzung und wegen (ii) die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)(y + x_0)^n$, als Potenzreihe in y mindestens den Konvergenzradius $R - r > 0$, und für alle $0 < \epsilon \leq R - r$ unendlich viele Nullstellen auf $\{y \in \mathbb{C} \mid |y| < \epsilon\}$. Also verschwindet wegen (i) diese Potenzreihe in y identisch. Dann stimmen wegen (ii) die beiden Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ auf dem Gebiet $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R - r\}$ überein. Also gibt es eine Folge $(\tilde{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Nullstellen von $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$, die gegen ein $\tilde{x}_0$ mit $|\tilde{x}_0| \leq \max\{r-(R-r), 0\} < r$ konvergiert. Dabei ist $R-|\tilde{x}_0| > R-r$. Sei $\frac{R}{R-r} < N \in \mathbb{N}$. Indem wir die beiden Potenzreihe immerwieder an einer Stelle mit minimalem Radius in dem Bereich entwickeln, in dem wir schon die Gleichheit beider Potenzreihen gezeigt haben, erhalten wir also nach höchstens N Schritten, dass beide Potenzreihen auf einer Nullfoge übereinstimmen. Wegen (i) sind dann die beiden Potenzreihen $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ identisch. **q.e.d.**

4.4 Sinus und Cosinus

Definition 4.28. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ sei*

$$\cos(x) = \frac{\exp(\imath x) + \exp(-\imath x)}{2} \qquad \sin(x) = \frac{\exp(\imath x) - \exp(-\imath x)}{2i}$$

Also gilt für reelle x $\quad \cos(x) = \Re(\exp(\imath x)) \quad \sin(x) = \Im(\exp(\imath x))$
und für alle $x \in \mathbb{K}$ die **Eulersche Formel**: $\quad \exp(\imath x) = \cos(x) + \imath \sin(x)$.
Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{\exp(2\imath x) + 2 + \exp(-2\imath x)}{4} - \frac{\exp(2\imath x) - 2 + \exp(-2\imath x)}{4} = 1,$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Satz 4.29. *(Additionstheorem) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{aligned}$$

Beweis: $\exp(\imath(x+y)) = \exp(\imath x)\exp(\imath y)$.

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+\imath\sin(x+y) &= (\cos(x)+\imath\sin(x))(\cos(y)+\imath\sin(y))\\ &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)+\imath(\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)).\end{aligned}$$

Ersetzen wir x und y durch $-x$ und $-y$ und benutzen $\cos(-x)=\cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$, dann erhalten wir

$$\cos(x+y)-\imath\sin(x+y) = \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin y-\imath(\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)).$$

Die Summe und die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

q.e.d.

Durch Einsetzen von (x,y) und $(x,-y)$ erhalten wir für alle $x,y\in\mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+\cos(x-y) &= 2\cos(x)\cos(y)\\ \cos(x-y)-\cos(x+y) &= 2\sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y)+\sin(x-y) &= 2\sin(x)\cos(y)\end{aligned}$$

Satz 4.30. *(Potenzreihen von Sinus und Cosinus)*

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Beweis: Weil $\imath^2=-1$ gilt für alle $k\in\mathbb{N}_0$ $\imath^{2k}=(-1)^k$ und $\imath^{2k+1}=\imath(-1)^k$. Also gilt auch für alle $x\in\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{\exp(\imath x)+\exp(-\imath x)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{(\imath x)^n}{n!}+\frac{(-\imath x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\ \sin(x) &= \frac{\exp(\imath x)-\exp(-\imath x)}{2\imath} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\imath}\left(\frac{(\imath x)^n}{n!}-\frac{(-\imath x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

q.e.d.