Kapitel 6

Stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

6.1 Umkehrfunktionen

Satz 6.1. *(Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann enthält das Bild $f[[a, b]]$ das abgeschlossene Intervall*

$$[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] .$$

Beweis: Wir nehmen an $f(a) < f(b)$, andernfalls ist die Argumentation analog. Sei also $y_0 \in (f(a), f(b))$. Sei $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y_0\}$. Weil $a \in A$ ist A eine nicht leere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Außerdem ist A abgeschlossen. Also ist A kompakt und besitzt ein Maximum $x_0 = \max A$ mit $f(x_0) \leq y_0$. Weil $y_0 \neq f(b)$ ist $x_0 < b$ und es gilt für alle $x > x_0$ auch $f(x) > y_0$. Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in $(x_0, b]$, die gegen x_0 konvergiert. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ und damit auch $f(x_0) \geq y_0$ und $f(x_0) = y_0$. Also ist $f(x_0) = y_0$ und das Bild von f enthält $[f(a), f(b)]$. **q.e.d.**

Mit diesem Satz läßt sich von vielen stetigen Funktionen zeigen, dass sie surjektiv sind, bzw. ihr Bild bestimmen. Die Injektivität von stetigen Funktionen auf Intervallen ist dagegen äquivalent zu ihrer Monotonie.

Definition 6.2. *(Monotonie) Eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ auf einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$ heißt*
monoton wachsend, *wenn aus $x, x' \in X, x \leq x'$ folgt $f(x) \leq f(x')$*
streng monoton wachsend, *wenn aus $x, x' \in X, x < x'$ folgt $f(x) < f(x')$.*
monoton fallend, *wenn aus $x, x' \in X, x \leq x'$ folgt $f(x) \geq f(x')$.*
streng monoton fallend, *wenn aus $x, x' \in X, x < x'$ folgt $f(x) > f(x')$.*

Satz 6.3. *Eine stetige reelle Funktion f auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst dass jede injektive stetige reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ das Bild $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ hat. Wenn es andernfalls ein

$y_0 \in f[[a,b]]$ gibt, dass nicht zu dieser Menge gehört, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass jeder Wert in $(\min\{y_0, f(a)\}, \max\{y_0, f(a)\}) \cap (\min\{y_0, f(b)\}, \max\{y_0, f(b)\})$ einmal auf (a, y_0) und einmal auf (y_0, b) angenommen wird, was der Injektivität widerspricht. Falls $f(a) < f(b)$ sind also für alle $x \in (a,b)$ die Bilder $f[(a,x)]$ gleich $(f(a), f(x))$ und falls $f(a) > f(b)$ gleich $(f(x), f(a))$. Im ersten Fall ist f streng monoton wachsend und im zweiten Fall streng monoton fallend. Weil aber alle Paare von Punkten eines beliebigen Intervalles (das mehr als einen Punkt enthält) in einem abgeschlossenen Intervall enthalten sind, das zwei Referenzpunkte enthält, die dann festlegen ob f streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist, folgt, dass jede injektive stetige Funktion auf einem Intervall entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Umgekehrt ist jede streng monotone Funktion auf einem Intervall auch injektiv. **q.e.d.**

Korollar 6.4. *Die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Funktion von einem Intervall auf ein Intervall ist stetig.*

Beweis: Offenbar besitzt jeder Punkt x eines Intervalls, das mehr als einen Punkt enthält, eine Umgebung in diesem Intervall, die ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist. Das Bild solcher kompakten Intervalle ist wieder kompakt und wegen dem vorangehenden Satz wieder eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist f^{-1} wegen Korollar 5.17 bei $y = f(x)$ stetig. Weil f surjetiv ist, ist damit f^{-1} stetig. **q.e.d.**

Satz 6.5.* *Sei f eine monoton wachsende (fallende) Funktion von einem Interval I nach $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge aller Unstetigkeitstellen von f höchstens abzählbar.*

Beweis*: Wir betrachten monoton wachsende Funktionen. Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog. Für jeden inneren Punkt ξ von I sei $f(\xi_-) = \sup\{f(x) \mid x \in I, x < \xi\}$ und $f(\xi_+)\} = \inf\{f(x) \mid x \in I, \xi < x\}$. Wenn $f(\xi_-) = f(\xi_+)$, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ $x_-, x_+ \in I$ mit $x_- < \xi < x_+$ so dass

$$f(x_+) - \epsilon < f(\xi_+) = f(\xi_-) < f(x_-) + \epsilon.$$

Dann gilt für alle $x \in [x_-, x_+]$ auch

$$-\epsilon < f(x_-) - f(\xi_-) \le f(x) - f(\xi_-) = f(x) - f(\xi_+) \le f(x_+) - f(\xi - +) < \epsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt $f(\xi_-) \le f(\xi) \le f(\xi_+)$. Also ist f bei solchen ξ stetig. Die Unstetigkeitsstellen bestehen aus den ξ mit $f(\xi_-) < f(\xi_+)$. In jedem solchen Intervall $(f(\xi_-), f(\xi_+))$ ist eine rationale Zahl enthalten. Also gibt es eine Abbildung von den Unstetigkeitsstellen auf die rationalen Zahlen die injektiv sind, weil alle diese offenen Intervalle wegen der Monotonie disjunkt sind. Damit sind die Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge der rationalen Zahlen also höchstens abzählbar.**q.e.d.**

Beispiel 6.6. $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^k$ *ist streng monoton wachsend, also ist die Umkehrabbildung* $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{1}{k}}$ *stetig und streng monoton wachsend. Dasselbe gilt dann auch für die Abbildungen* $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{p}{q}}$ *mit der Umkehrabbildung* $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \to x^{\frac{q}{p}}, p, q \in \mathbb{N}$.

6.2 Die reellen Funktionen $e^x, \ln x, a^x, \log_a x$.

Satz 6.7. *(Eigenschaften von* exp*)*

(i) $e^0 = \exp(0) = 1$

(ii) $e^x > \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x > 0$

(iii) $x < y \Longrightarrow e^x < e^y$

(iv) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \to e^x$ *ist bijektiv.*

Beweis:(i) und **(ii)** folgen aus der Definition.
(iii) $x < y \Longrightarrow y - x > 0$. Dann gilt wegen (ii) $e^{y-x} > 1$. Wegen Satz 4.19 (i) und (ii) gilt dann $e^y - e^x = (e^{y-x} - 1)e^x > 0$. Also folgt $e^x < e^y$.
(iv) Offenbar ist die Funktion wegen (iii) injektiv. Wegen Satz 3.4 gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ ein $n \in \mathbb{R}$, so dass $e^{-n} < y < e^n$. Wegen dem Zwischenwertsatz gehört dann y zum Bild von $[-n, n] \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$. **q.e.d.**

Definition 6.8. *(des natürlichen Logarithmus). Die Umkehrfunktion von* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ x \mapsto e^x$ *heißt natürlicher Logarithmus:* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$.

Wegen Korollar 6.4 ist der Logarithmus stetig.

Satz 6.9. *(Eigenschaften von* ln*)*

(i) $\ln(1) = 0$

(ii) $\ln(e) = 1$

(iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^+$

(iv) $a^r = e^{\ln(a)\cdot r}$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$ *und* $a \in \mathbb{R}^+$

(v) $\ln\left(e^{ln(a)x}\right) = x\ln(a)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$

(vi) $x, y \in \mathbb{R}^+, x < y \Longrightarrow \ln(x) < \ln(y)$

(vii) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \to \ln(x)$ *ist bijektiv*

Beweis: **(i)** $\Leftrightarrow e^0 = 1$ und **(ii)** $\Leftrightarrow e^1 = e$ und **(iii)** $\Longleftrightarrow e^{\ln x + \ln(y)} = (e^{\ln x})(e^{\ln y})$.
(iv) Für $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $(e^{\ln(a)\frac{p}{q}})^q = e^{\ln(a)p} = a^p$ und $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} > 0$. Wegen der Eindeutigkeit der k-ten Wurzel folgt $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$.
(v) ist offensichtlich.
(vi) folgt aus (iii) des vorhergehenden Satzes.
(vii) folgt aus (iv) des vorhergehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 6.10. *Für alle $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x = e^{x\ln(a)}$*

Satz 6.11. *(Eigenschaften von a^x)*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ *für alle* $a \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) *Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$.*

(iv) *Für $a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x < y \Longrightarrow a^x > a^y$.*

(v) *Für $a \neq 1$ ist $a^\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto a^x$ bijektiv und stetig.*

Beweis:(i) $a^{x+y} = e^{x\ln a + y\ln(a)} = e^{x\ln a}e^{y\cdot\ln a} = a^x a^y$.
(ii) $(a^x)^y = e^{y\ln(e^{x\ln a})} = e^{y\cdot x\ln a} = a^{xy}$.
(iii) Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$. Also folgt aus $x < y$ auch $x\ln a < y\ln a$ und $a^x < a^y$.
(iv) Für $a < 1$ ist $\ln(a) < 0$. Also folgt aus $x < y$ auch $x\ln(a) > y\ln(a)$ und $a^x > a^y$.
(v) Für $x \neq 1$ ist $\ln(a) \neq 0$. Also ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(a)x$ bijektiv und stetig, also auch $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \exp(\ln(a)x)$. **q.e.d.**

Definition 6.12. *(des Logarithmus zur Basis a) Für alle $a \neq 1$ sei $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ die Umkehrfunktion von $a^\cdot$.*

Satz 6.13. *(Eigenschaften des Logarithmus zur Basis a)*

(i) $\log_a(1) = 0$

(ii) $\log_a(a) = 1$

(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iv) *Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $x < y$ auch $\log_a(x) < \log_a(y)$*

(v) *Für $a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $x < y$ auch $\log_a(x) > \log_a(y)$*

(vi) $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x)$ *ist bijektiv und stetig.*

Beweis analog zum Beweis der Eigenschaften von ln. **q.e.d.**

6.3 Die reellen Funktionen $\sin, \cos, \arcsin, \arccos$

Satz 6.14. **(i)** *Für $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$ gilt* $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

(ii) *Für alle $x \in [-4,4]$ gilt* $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. *Gleichheit gilt nur für $x = 0$.*

(iii) $\cos : [0, \sqrt{6}] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ *ist streng monoton fallend.*

(iv) $\cos$ *hat auf* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle, die wir mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnen.*

(v) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \exp\left(\imath\frac{\pi}{2}\right) = \imath.$

(vi) $\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \sin(n\pi) = 0$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(vii) $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \quad \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(viii) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x) \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

(ix) $\cos\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \sin(x) \quad \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \cos(x).$

(x) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin(x)$ *ist streng monoton steigend und bijektiv.*

(xi) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos(x)$ *ist streng monton fallend und bijektiv.*

Beweis:(i) Für $x \in [-5,5]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1$. Also ist für alle $x \in [-5,5]$ die Folge $(\frac{x^{2k}}{2k!})_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}}$ monoton fallend und für $x \neq 0$ sogar streng monoton fallend und konvergiert gegen Null (Beispiel (i) im Abschnitt 3.4). Dann folgt aus dem Beweis zu Satz 4.13, dass $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \leq 1$ für alle $x \in [-5,5]$ und Gleichheit nur für $x = 0$ gilt.
(ii) Für $x \in [-4,4]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $\frac{x^2}{2k(2k+1)} < 1$. Also ist für alle $x \in [-4,4]$ die Folge $(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!})_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ streng monoton fallend und konvergiert gegen Null (Beispiel (i) in Abschnitt 3.4). Wieder folgt aus dem Beweis von Satz 4.13, dass für alle $x \in [-4,4]$ gilt $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \leq 1$ und Gleichheit nur für $x = 0$ gilt.
(iii) Wegen den Additionstheorem gilt: $\cos(x) - \cos(y) = \cos(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}) - \cos(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2}) > 0$ wegen (ii) für $x, y \in [0, \sqrt{6}]$ und $x < y$.
(iv) sin und cos sind wegen Beispiel (ii) aus dem Abschnitt über stetige Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen (i) ist $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle in $[0,2]$ gibt. Wegen (iii) kann es höchstens eine Nullstelle geben.
(v) Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt aus (iv) $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ und aus (ii) $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$. Also gilt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Dann folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(\imath\frac{\pi}{2}) = \imath$.
(vi) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(n\imath\pi) = (-1)^n$, also $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\sin(n\pi) = 0$.

(vii) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel: $\exp((n+\frac{1}{2})\imath\pi) = (-1)^n\imath$ also $\cos((n+\frac{1}{2})\pi) = 0$ und $\sin((n+\frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$.
(viii) Aus dem Additionstheorem und (vi) folgt (viii).
(ix) Aus dem Additionstheorem und (vii) folgt (ix).
(x) Aus (ix) folgt $\sin(x) = \begin{cases} -\cos(x+\frac{\pi}{2}) & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -\sin(-x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$
Dann folgt (x) aus (iii).
(xi) Aus (viii) folgt $\cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos(-x) = -\cos(\pi - x) & \text{für } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$
Dann folgt (xi) aus (iii). **q.e.d.**

Die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos(x)$ heißt

$$\text{Arcuscosinus} \quad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos(x).$$

Sie ist wegen (xi) streng monoton fallend und wegen Korollar 6.4 stetig. Die Umkehrfunktion von $\sin : \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin(x)$ heißt

$$\text{Arcussinus} \quad \arcsin : [-1,1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big], \quad x \mapsto \arcsin(x).$$

Sie ist wegen (x) streng monoton steigend und wegen Korollar 6.4 stetig.

Satz 6.15. *(Polardasrstellung von $z \in \mathbb{C}$) Jede komplexe Zahl hat die Darstellung:*

$$z = r \cdot e^{\imath q} \quad r = |z| \text{ und } q \in \mathbb{R}.$$

Für $z \neq 0$ ist q bis auf Addition von $2\pi n$ eindeutig und heißt Argument von z.

Beweis: Sei $z = x + \imath y$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wenn $y \geq 0$ sei $q = \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) \in [0,\pi]$ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann gilt offenbar $x = r \cdot \cos(q)$ und $r\sin(q) \geq 0$. Außerdem gilt $\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1 \Longrightarrow y = r\sin(q)$. Wegen der Eulerschen Formel gilt dann

$$z = r \cdot e^{\imath q} = r\cos(q) + \imath r \sin q = x + \imath y.$$

Wenn $y < 0$ sei $q = \arccos(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}) + \pi$ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann folgt wieder

$$z = re^{\imath q} = r\cos q + \imath r \sin q = x + \imath y.$$

Seien (r,q) und (r',q') mit $re^{\imath q} = r'e^{\imath q'} \Rightarrow r = |re^{\imath q}| = |r'e^{\imath q}| = r'$ und für
$z \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r \neq 0$ auch $e^{\imath q}e^{-\imath q'} = e^{\imath(q-q')} = 1 \Rightarrow q - q' = 2\pi n.$ **q.e.d.**

Korollar 6.16. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ist surjektiv und* $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi\imath\mathbb{Z}$.

Beweis: Seien $z = x + iy$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $e^z = e^x e^{iy}$. Also folgt das Korollar aus dem Satz 6.15 und weil $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv ist. **q.e.d.**

Korollar 6.17. *Für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.*

Beweis: Seien (r, q) die Polarkoordinaten von z. Dann müssen die Polarkoordinaten (s, p) der Lösungen von $w^n = z$ Die Gleichungen $np = q + 2\pi m$ für $m \in \mathbb{Z}$ erfüllen und $s^n = r$. Also sind die Lösungen gegeben durch $s = \sqrt[n]{r}$ und $p_m = \frac{q}{n} + \frac{2\pi m}{n}$, wobei zwei Lösungen (s, p_m) und $(s, p_{m'})$ genau dann übereinstimmen, wenn $\frac{m-m'}{n} \in \mathbb{Z}$. Also ergeben $m = 0, \ldots, n-1$ alle Lösungen. **q.e.d.**

Satz 6.18. *(Fundamentalsatz der Algebra) Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat mindestens eine Nullstelle auf $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Für $|z| \geq R = 1 + 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + 2\left|\frac{a_0}{a_n}\right| \geq 1$ gilt

$$\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|\frac{p(z)}{z^n}\right| + \left|-\frac{a_{n-1}}{z} - \ldots - \frac{a_0}{z^n}\right| - \left|-a_n\left(\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)\right|$$

$$\geq |a_n| - |a_n|\left|\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \geq |a_n|\left(1 - \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|}{|z|}\right) > |a_n|\frac{1}{2}.$$

Also ist $|p(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n \geq \frac{|a_n|}{2}|z| > \frac{|a_n|}{2} 2\frac{|a_0|}{|a_n|} = |a_0|$. Auf der kompakten Menge $\overline{B(0, R)}$ nimmt $z \mapsto |p(z)|$ wegen Satz 5.25 das Minimum bei einem z_0 an. Dieses liegt in $B(0, R)$ und ist das Minimum auf ganz $z \in \mathbb{C}$, weil außerhalb von $z \in B(0, R)$ gilt $|(p(z)| > |a_0| = |p(0)|$. Wir schreiben jetzt $p(y + z_0) = b_n y^n + \ldots + b_0$ als Polynom in $y = z - z_0$. Dann gilt $b_n = a_n \neq 0$. Wenn $b_0 \neq 0$ gilt $|p(z_0)| = |b_0| > 0$. Dann sei m das kleinste $m \in \mathbb{N}$ mit $b_m \neq 0$. Für $0 < |y| \leq r = \dfrac{1}{1 + 2\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right| + \ldots + 2\left|\frac{b_n}{b_m}\right|} \leq 1$ gilt dann

$$\left|b_{m+1}y^{m+1} + \ldots + b_n y^n\right| \leq |b_m||y|^m\left(\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right||y| + \ldots + \left|\frac{b_n}{b_m}\right||y|\right) < \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$

Also gilt $$|p(z_0 + y)| < |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$
Sei w eine Lösung der Gleichung $w^m b_m = -b_0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $0 < |tw| \leq r$

$$|p(z_0 + tw)| < |b_0||1 - t^m| + \frac{|b_0|}{2}|t|^m.$$

Insbesondere gilt $|p(z_0 + tw)| < |b_0|\left(1 - \frac{t^m}{2}\right) < |b_0|$ für alle $0 < t < \min\left\{1, \frac{r}{|w|}\right\}$.
Dann ist z_0 nicht das Minimum von $|p(z)|$, im Widerspruch zu $p(z_0) = b_0 \neq 0$. **q.e.d.**

Korollar 6.19. *Jedes komplexe Polynom vom Grade $n \in \mathbb{N}$ zerfällt in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.*

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) für $n = 1$ ist die Aussage trivial.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Sei p ein beliebiges Polynom $(n+1)$-ten Grades. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra hat p eine Nullstelle bei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wenn wir p als Polynom in $z - z_0$ schreiben, erhalten wir p als Produkt von $(z - z_0)$ mit einem Polynom n-ten Grades. Wegen der Induktionsvoraussetzung zerfällt dieses in ein Produkt von Polynomen ersten Grades, also auch p. **q.e.d.**

Definition 6.20. *(von Tangens und Cotangens)*

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \to \mathbb{C}, \quad x \to \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi) \to \mathbb{C}, \quad x \to \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Beachte $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$ und $\cot(x+\pi) = \cot(x)$.

Satz 6.21. (i) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend, stetig und bijektiv.*

(ii) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot(x)$ *ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.*

Beweis: (i) auf $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist sin streng monoton steigend und cos streng monoton fallend. Also ist tan streng monoton steigend. Wegen $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt dann auch, dass tan auf $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ streng monoton steigend ist.
(ii) $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ also ist cot auf $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallen und analog auf $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ sind tan und cot auf $(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ positiv auf $(n-\frac{1}{2})\pi, n\pi)$ negativ. Sie sind beide wegen Beispiel 5.18 (iii) stetig. Außerdem ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ $\tan(n\pi) = 0$ und $\cot((n+\frac{1}{2})\pi) = 0$. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = -\infty \quad \lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \cot\left(\frac{1}{n}\right) = \infty \quad \lim_{n\to\infty} \cot\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = -\infty$$

Also sind $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ wegen Satz 6.1 surjektiv. **q.e.d.**

Die Umkehrfunktion von $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ heißt

$$\text{ArcusTangens} \quad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x).$$

Die Umkehrfunktion von $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ heißt

$$\text{Arcuscotangens} \quad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \quad x \mapsto \operatorname{arccot}(x).$$

Diese beiden Umkehrfunktionen sind wegen Satz 6.21 streng monoton und wegen Korollar 6.4 stetig.