Kapitel 7

Differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

7.1 Definition der Ableitung

Definition 7.1. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$, die eine Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ enthält. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, wenn es ein $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die reelle Funktion*

$$X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

stetig bei $x = x_0$ ist. Wenn X offen ist und f in jedem Punkt differenzierbar ist, heißt die Funktion $f' : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f.

Wir bezeichnen $f'(x)$ auch durch $\frac{df}{dx}(x)$.

Satz 7.2. *Sei f im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f im Punkt x_0 auch stetig.*

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Also folgt die Aussage aus den Rechenregeln für Folgen und daraus, dass $x \mapsto (x - x_0)$ stetig ist. Hierbei benutzen wir das Kriterium (iii) aus Satz 5.13 **q.e.d.**

Definition 7.3. *Das Differential von f im Punkt x_0 ist die lineare Abbildung $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto f'(x_0)h$. Die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)\}$ heißt Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.*

$$\mathit{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Die Sekante durch zwei Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ des Graphen ist gegeben durch

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0))\}.$$

Im Grenzwert $x_1 \to x_0$ konvergiert die Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ gegen die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0.f(x_0))$.

Beispiel 7.4. **(i)** $f(x) = |x|$. *Für* $x_0 = 0$ *ist* $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0. \end{cases}$ *Also ist f im Punkt $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.*

(ii) $f(x) = c \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ *für alle* $x \neq x_0$ *also ist f differenzierbar und es gilt* $f'(x) = 0$.

(iii) $f(x) = x \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$ *für alle* $x \neq x_0$ *also ist f differenzierbear und es gilt* $f'(x) = 1$.

(iv) $f(x) = x^n$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1} \text{ für alle } x \neq x_0$$

also ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

(v) $f(x) = \exp(x)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{\exp(x - x_0) - 1}{x - x_0}\right)\exp(x_0).$$

Aufgrund der Definition der Exponentialfunktion gilt: $\frac{\exp(x-x_0)-1}{x-x_0} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(n+1)!}$. *Diese Potenzreihenfunktion ist stetig und bei* $x - x_0 = 0$ *gleich* 1. *Also folgt*

$$f'(x) = \exp(x)$$

(vi) $f(x) = \sin(x)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2} + \frac{x+x_0}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-x_0}{2} - \frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

Und wegen der Potenzreihe von $\sin$ *gilt* $\dfrac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})}{x - x_0} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (\frac{x-x_0}{2})^{2k}}{(2k+1)!}$.

Diese Potenzreihenfunktion ist stetig und bei $x - x_0 = 0$ *gleich* 1. *Also folgt*

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x + x}{2}\right) = \cos(x).$$

(vii) $f(x) = \cos(x)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x_0+x}{2} - \frac{x_0-x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_0+x}{2} + \frac{x_0-x}{2}\right)}{x - x_0} = \frac{2\sin\left(\frac{x_0+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0-x}{2}\right)}{x - x_0}.$$

Wegen $\dfrac{2\sin\left(\frac{x_0-x}{2}\right)}{x - x_0} = -\dfrac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}$ *folgt* $f'(x) = -\sin(x)$.

7.2 Rechenregeln der Ableitung

Satz 7.5. *(Leibnizregel) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $\lambda f, f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \qquad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Wenn $f(x) \neq 0$ für $x \in I$, dann ist auch $\dfrac{1}{f} : I \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{1}{f(x)}$ in x_0 differenzierbar und es gilt $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{und}$$
$$\frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x_0 - x_0} \qquad \text{und}$$
$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \qquad \text{und}$$
$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)}.$$

Also folgt die Aussage aus Beispiel 5.18.

Satz 7.6. *(Kettenregel) Seien f und g reelle Funktionen und der Definitionsbereich von f eine Umgebung von x_0 und der Definitionsbereich von g eine Umgebung von $y_0 = f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist und g in y_0, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis: $\dfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\dfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Der ertse Faktor ist aber die Komposition von $x\mapsto f(x)$ mit $y\mapsto\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ also wegen Satz 5.15 und wegen Satz 7.2 stetig. Also folgt die Behauptung aus Beispiel 5.18.

Satz 7.7. *(Ableitung der Umkehrfunktion) Sei f eine bijektive Funktion von $X\to Y$ mit $X,Y\subset\mathbb{R}$ und X eine Umgebung von x_0 und Y eine Umgebung von $y_0=f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0)\neq 0$ und f^{-1} in y_0 stetig ist, dann ist auch f^{-1} in y_0 differenzierbar und es gilt $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Beweis: $\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$ für $y=f(x)$ und $y_0=f(x_0)$. Die Funktion $y\mapsto\begin{cases}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y\neq y_0\\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } y=y_0\end{cases}$ ist die Komposition der Funktion $y\to f^{-1}(y)$ mit der Funktion $x\mapsto\begin{cases}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} & \text{für } x\neq x_0\iff f(x)\neq f(x_0)\\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } x=x_0\end{cases}$. Also folgt der Satz aus Satz 5.15. **q.e.d.**

Beispiel 7.8. (i) $\ln\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, x\mapsto\ln(x)$

$$\ln'(x)=\frac{1}{\exp'(y)}=\frac{1}{\exp(y)}=\frac{1}{x}\ \textit{mit}\ \exp(y)=x.$$

(ii) $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], x\mapsto\arcsin(x)$

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\cos(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \textit{mit}\ \sin(y)=x\ \textit{und}\ x^2\neq 1.$$

(iii) $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi],\quad x\mapsto\arccos(x)$

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sin(y)}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \textit{mit}\ \cos(y)=x\ \textit{und}\ x^2\neq 1.$$

(iv) $\cdot^{\alpha}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}.$

$$(\cdot^{\alpha})'(x)=\exp(\alpha\ln(x))'=\exp(\alpha\ln(x))\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

(v) $a^{\cdot}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto a^x,a\in\mathbb{R}^+.$

$$(a^{\cdot})'(x)=\exp(x\cdot\ln(a))'=\exp(x\ln(a))\cdot\ln(a)=\ln(a)\cdot a^x.$$

(vi) Quotientenregel. *Seien f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0))}g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(vii) $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(viii) $x \mapsto \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

(ix) $\arctan : \mathbb{R} \to \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \textit{ mit } \tan(y) = x.$$

(x) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \quad x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2(g)} = \frac{-1}{1 + x^2} \textit{ mit } \cot(y) = x.$$

(xi) $\log_a \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) \quad \log_a'(x) = \left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \dfrac{1}{x\ln(a)}.$

(xii) $x^x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^x$

$$(x^x)' = \exp(x \cdot \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x))\left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

(xiii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für } x \neq 0 \\ 0 & \textit{für } x = 0. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0\pm} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x \to 0\pm} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \textit{für } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für } x \neq 0. \end{cases}.$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, aber f' ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

7.3 Mittelwertsatz und Monotonie

Wenn $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion positiv ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass aus $|x - x_0| < \epsilon$ folgt $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Dann gilt für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ auch $f(x) < f(x_0)$ und für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ auch $f(x) > f(x_0)$. Analoges gilt für negatives $f'(x_0)$.

Definition 7.9. *(relative Maxima und Minima) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ hat bei $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum (Minimum), falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass aus $|x - x_0| < \epsilon$ folgt $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$.*

Eine differenzierbare Funktion kann also nur an den Nullstellen der Ableitung relative Extremwerte besitzen.

Definition 7.10. *(kritischer Punkt und kritischer Wert) Eine Nullstelle der Ableitung einer differenzierbaren Funktion heißt kritischer Punkt. Der entsprechende Funktionswert heißt kritischer Wert.*

Kanditaten für die Minima und Maxima einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind

(i) Kritische Punkte

(ii) Randpunkte

(iii) Punkte an denen f nicht differenzierbar ist.

Satz 7.11. *(Satz von Rolle) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: Wegen Korollar 5.16 gibt es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$. Wenn x_1 und x_2 beide am Rand liegen $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ dann muss f konstant gleich $f(a) = f(b)$ sein. Also gilt dann $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Andernfalls muss es einen lokalen Extremwert in (a, b) geben, an dem die Ableitung verschwindet. **q.e.d.**

Satz 7.12. *(Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ für } g(b) \neq g(a).$$

Die Tangente an den (f, g)-Graphen in $(f(x_0), g(x_0))$ verläuft also parallel zu der Verbindungsgeraden der Endpunkte $(f(a), g(a))$ und $(f(b), g(b))$.

Beweis: Wende Satz 7.11 auf die Funktion $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ an. Sie erfüllt die Vorraussetzungen und ihre Ableitung ist $x \mapsto (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$. **q.e.d.**

Satz 7.13. *(Mittelwertsatz) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Beweis: Wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf f und $\mathbb{1}_{[a,b]}$ an. **q.e.d.**

Satz 7.14. *(Schrankensatz) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Wenn $|f'(x)| \le L$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante L.*

Beweis: Seien $x < y \in [a,b]$. Dann erfüllt $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Also gibt es $x_0 \in (x,y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y-x)$. Dann folgt aber $|f(y) - f(x)| = |f'(x_0)||y-x| \le L|y-x|$. **q.e.d.**

Satz 7.15. *(Ableitung und Monotonie) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt*

(i) *$f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist konstant.*

(ii) *$f'(x) \ge 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist monoton steigend.*

(iii) *$f'(x) \le 0$ für alle $x \in (a,b) \iff f$ ist monoton fallend.*

(iv) *$f'(x) \ge 0$ für alle $x \in (a,b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a,b) \mid f'(x) > 0\}$ ist $[a,b] \iff f$ ist streng monoton steigend.*

(v) *$f'(x) \le 0$ für alle $x \in (a,b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a,b) \mid f'(x) < 0\}$ ist $[a,b] \iff f$ ist streng monoton fallend.*

Beweis: Weil eine Funktion genau dann konstant ist, wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist, folgt (i) aus (ii) und (iii). Wir beweisen nun (ii) und (iv). Seien $x < y \in [a,b]$. Dann erfüllt $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Wenn $f'(x_0) \ge 0$ für alle $x_0 \in (a,b)$, dann folgt also $f(y) - f(x) \ge 0$ und f ist monoton wachsend. Umgekehrt folgt aus $f'(x_0) < 0$, dass für ein $\epsilon > 0$ gilt $f(x_0 - \epsilon) > f(x_0 + \epsilon)$, f also nicht monoton steigend sein kann. Das zeigt (ii). Wenn f monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend ist, dann gibt es $x < y \in [a,b]$ mit $f(x) = f(y)$. Dann ist f aber auf $[x,y]$ konstant und f' verschwindet auf (x,y). Weil jede offene Menge ein offenes Intervall enthält folgt damit (iv). **q.e.d.**

Korollar 7.16. *(isolierte kritische Punkte) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und x_0 ein kritischer Punkt.*

(i) *Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, dann ist x_0 ein lokales Minimum.*

(ii) *Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, dann ist x_0 ein lokales Maximum.*

(iii) *Wenn f' bei x_0 differenzierbar ist und $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein lokales Minimum.*

(iv) *Wenn f' bei x_0 differenzierbar ist und $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum.* **q.e.d.**

Beispiel 7.17. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x+1)e^{-x}$ hat die Ableitung $f'(x) = (1-(x+1))e^{-x} = -xe^{-x}$. Also ist sie auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0, \infty)$ streng monoton fallend. Insbesondere ist $f(0) = 1$ ein globales Maximum. Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ auch $e^x \geq (1+x)$.*

7.4 Regel von de L'Hopital

Definition 7.18. *(Grenzwerte von Funktionswerten) Für eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ genau dann, wenn es eine Zahl $f(a)$ gibt, so dass auf $[a,b)$ die Funktion $x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ für } x \in (a,b) \\ f(a) \text{ für } x = a \end{cases}$ stetig bei $x = a$ ist. Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.*

Der analoge Grenzwert $x \to b$ wird mit $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$ bezeichnet. Aufgrund der Definition der Stetigkeit existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ also genau dann, wenn es eine Zahl $f(a)$ gibt, so dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit den aus $|x - a| < \delta$ folgt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Wegen Satz 5.13 ist das äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a,b), die gegen a konvergiert, die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Satz 7.19. *(1. Regel von de L'Hopital) Seien $\infty < a < b < \infty$ und f und g auf (a,b) differenzierbare Funktionen, so dass $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a+} g(x)$. Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existsiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Bemerkung 7.20. *Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$ und $\lim\limits_{x \to a+} g'(x)$ existieren und der zweite nicht verschwindet, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mit $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim_{x \to a+} f'(x)}{\lim_{x \to a+} g'(x)}$.*

Beweis: Die auf $[a,b)$ stetig fortgesetzten Funktionen f und g erfüllen die Voraussetzungen des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Deshalb gibt es für jedes $x \in (a,b)$ ein $x_0 \in (a,x)$ so dass gilt $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Wenn also der Grenzwert $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. **q.e.d.**

Satz 7.21. *(2. Regel von de L'Hopital) Unter derselben Voraussetzung wie bei der 1.Regel von de L'Hopital, nur gelte $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = \infty$ statt $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$, gilt dieselbe Schlußfolgerung.*

Beweis: Für jedes $a < x < y < b$ gibt es wegen dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x, y)$ so dass gilt $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Wenn f und g die Vorraussetzungen der 2. Regel von de L'Hopital erfüllen, dann gibt es also für jedes $\epsilon > 0$ ein $y \in (a, b)$, so dass es für alle $x_0 \in (a, y)$ gilt $|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ mit $\alpha = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann folgt $\alpha - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in (a, y)$. Wegen $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ gibt es ein $y_0 \in (a, y)$ so dass für alle $x \in (a, y_0)$ gilt $g(x) > \min\{(g(y), 0\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(y) \quad &< f(x) < \quad \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(x) \quad \text{oder} \\ \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)} \quad &< \frac{f(x)}{g(x)} < \quad \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ gibt es dann auch ein $y_1 \in (a, y_0)$, so dass für alle $x \in (a, y_1)$ gilt $\alpha - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \epsilon$. Also gilt $\lim_{x_0\to a+} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim_{x_0\to a+} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. **q.e.d.**

Die analogen Aussagen für die Grenzwerte $\lim_{x\to b-}$ gelten natürlich auch. Grenzwerte der Form $\lim_{x\to-\infty+} f(x)$ bzw. $\lim_{x\to\infty-} f(x)$ definieren wir als die Grenzwerte $\lim_{x\to 0-} f(1/x)$ bzw. $\lim_{x\to 0+} f(1/x)$. Wegen der Kettenregel gilt dann

$$\frac{\frac{df(\frac{1}{x})}{dx}}{\frac{dg(\frac{1}{x})}{dx}} = \frac{\frac{-1}{x^2} f'(\frac{1}{x})}{\frac{-1}{x^2} g'(\frac{1}{x})} = \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})}.$$

Deshalb gelten die analogen Aussagen auch für diese Grenzwerte.

7.5 Konvexität und Ableitungen

Definition 7.22. *Eine reelle Funktion auf einem Intervall heißt (streng) konvex, wenn für alle a, b im Definitionsbereich und alle $t \in (0, 1)$ gilt*

$$f((1-t)a + tb) \le (1-t)f(a) + tf(b) \quad \text{bzw.} \quad f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

Satz 7.23. *Für eine reelle Funktion f auf einem Intervall I ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist konvex*

(ii) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $f(x) \le f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

(iii) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

(iv) *Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt* $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

Außerdem gelten die analogen Äquivalenzen zu streng konvex, wenn für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ die Ungleichungen $\le$ durch $<$ ersetzt werden.

Beweis:(i)⇒(ii) Sei also $a < x < b$ im Definitionsbereich. Definiere $t = \frac{x-a}{b-a}$ dann ist $t \in (0,1)$ und $(1-t)a + tb = x$. Also folgt aus (i)

$$f(x) \leq \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b) \qquad = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

(ii)⇒(iii) Die erste Ungleichung in (iii) folgt sofort aus (ii). Außerdem folgt aus (ii)

$$f(b) - f(x) \geq f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

und damit folgt auch die zweite Ungleichung in (iii) aus (ii).
(iii)⇒(iv) ist offensichtlich.
(iv)⇒(i) Wir können wegen der Symmetrie $(a,b,t) \leftrightarrow (b,a,1-t)$ in (i) $a < b$ annehmen. Dann sei $x = (1-t)a + tb \in (a,b)$. Wegen (iv) gilt

$$(b-x)(f(x)-f(a)) \leq (x-a)(f(b)-f(x)) \quad \text{also auch}$$
$$(b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b) = ((b-a)-(x-a))f(a) + (x-a)f(b).$$

Es gilt aber $x - a = t(b-a)$. Also folgt $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

Die analogen Aussagen für streng konvex lassen sich genauso beweisen, wenn wir alle Ungleichungen $\leq$ durch $<$ ersetzen. **q.e.d.**

Korollar 7.24. *Für eine stetige relle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren des Intervalls differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist (streng) konvex*

(ii) *f' ist (streng) monoton wachsend*

Beweis: (i)⇒(ii): Seien $a < b < c$ und $x < b < y$ im Definitionsbereich. Wegen Satz 7.23 (iii) folgt $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(y)-f(c)}{y-c}$. Aus dem Grenzwert $x \to a$ und $y \to c$ folgt dann $f'(a) \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq f'(c)$ und damit (ii). Umgekehrt folgt aus (ii) wegen dem Mittelwertsatz die Bedingung (iv) von Satz 7.23. **q.e.d.**

Korollar 7.25. *Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren zweimal differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent*

(i) *f ist (streng) konvex.*

(ii) *$f''(x) \geq 0$ im Inneren des Intervalls (der Abschluss der Menge $\{x \mid f''(x) > 0\}$ ist das ganze Intervall).*

Dieses Korollar folgt sofort aus Korollar 7.24 und Satz 7.15. **q.e.d.**

Wenn wir die Ungleichungen alle umdrehen, so erhalten wir die analogen Aussagen für konkave Funktionen. Also ist eine Funktion f genau dann (streng) konkav, wenn die negative Funktion $-f$ (streng) konvex ist.

Übungsaufgabe 7.26. *Zeige, dass die Umkehrfunktion einer konvexen bijektiven monoton wachsenden Funktion konkav ist.*

Beispiel 7.27. (i) $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'' = 2$. *Also ist f streng konvex.*

(ii) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \sqrt{x} \Longrightarrow f'' = \frac{-1}{4x^{3/2}}$. *Also ist f streng konkav.*

(iii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \to \exp(x) \Longrightarrow \exp'' = \exp$. *Also ist* $\exp$ *streng konvex.*

(iv) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \to \ln(x) \Longrightarrow \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. *Also ist* $\ln$ *streng konkav.*

7.6 Konvexität und Ungleichungen

Satz 7.28.* *(Ungleichung von Jensen) Sei f eine reelle konvexe Funktion auf einem Intervall. Seien $x_1, \ldots, x_n$ im Definitionsbereich und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen, die $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ erfüllen. Dann gilt*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Beweis*: durch vollständige Induktion:

(i) Für $n = 1$ muss $\lambda_1 = 1$ sein, so dass die Aussage klar ist.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ wie gefordert. Dann definieren wir $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ und $x = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$. Also gilt $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$ und $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = 1$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung $f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n)$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichhheit nur für $x_1 = \ldots = x_n$. Weil f konvex ist folgt aber $f(\lambda x + (1 - \lambda) x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit wieder nur für $x_{n+1} = x = x_1 = \ldots = x_n$. **q.e.d.**

Korollar 7.29. *(Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 1$. Dann gilt für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$*

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Insbesondere gilt $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$. Gleichheit gilt nun für $x_1 = x_2 \ldots = x_n$.

Beweis*: $-\ln$ ist streng konvex. Also folgt aus Jensen's Ungleichung

$$\begin{aligned} &-\ln(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq -\lambda_1 \ln x_1 - \ldots - \lambda_n \ln x_n \\ \Longleftrightarrow\ &\lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von exp folgt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \ldots + \lambda_n \ln x_n) \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Ersetzen wir $x_1, \ldots, x_n$ durch $y_1^{1/\lambda_1}, \ldots, y_n^{1/\lambda_n}$ so erhalten wir

Korollar 7.30.* *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ und $y_1, \ldots, y_n$ positive Zahlen. Dann gilt*

$$y_1 \ldots y_n \leq \lambda_1 y_1^{1/\lambda_1} + \ldots + \lambda_n y^{1/\lambda_n}.$$

Gleichheit gilt nur für $y_1^{1/\lambda_1} = y_2^{1/\lambda_2} = \ldots = y_n^{1/\lambda_n}$. **q.e.d.**

Korollar 7.31.* *(Young'sche Ungleichung) Seien $p > 0, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x > 0$ und $y > 0$*

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q.$$

Gleichheit gilt nur für $x^p = y^q$. **q.e.d.**

7.7 Taylorreihen

Auf offenen Intervallen I (Teilmenge von $\mathbb{R}$) ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder eine Funktion auf I. Die Bildung der Ableitung ist also ein linearer Operater $\frac{d}{dx}$, der differenzierbaren Funktionen auf I, Funktionen auf I zuordnet. Wenn die Ableitung wieder differenzierbar ist, können wir diesen Operator nochmal anwenden und erhalten $(\frac{d}{dx})^2 f = f''$ die zweite Ableitung von f. Durch n–faches Anwenden erhalten wir gegebenenfalls dann die n-te Ableitung $f^{(n)}$.

Definition 7.32. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $C^n_{\mathbb{R}}(I)$ die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf I, und $C^\infty_{\mathbb{R}}(I)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf I.*

$$C_{\mathbb{R}}(I) = C^0_{\mathbb{R}}(I) \supset C^1_{\mathbb{R}}(I) \supset \ldots \supset C^n_{\mathbb{R}}(I) \supset \ldots \supset C^\infty_{\mathbb{R}}(I)$$

Beispiel 7.33. **(i)** $\exp \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, *weil* $\exp^{(n)} = \exp$.

(ii) *für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $x \mapsto x^n \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, weil $(x^n)^{(n)} = n!$ und $(x^n)^{(m)} = 0$ für $m > n$.*

(iii) *für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^{-n} \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, weil $(x \mapsto x^{-n})^{(m)} =$*

$$x \mapsto \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-m+1)}{x^{n+m}} = (-1)^m \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots n}{x^{n+m}}.$$

(iv) $\ln \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^+)$ *weil* $\ln^{(m)}(x) = \dfrac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}$ *für $m \geq 1$ und mit $0! = 1$.*

Satz 7.34. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

(i) $\displaystyle\frac{d^n}{dx^n} f \cdot g = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ *für alle $f, g \in C^n_{\mathbb{R}}(I)$.*

(ii) *$C^n_{\mathbb{R}}(I)$ ist eine Unteralgebra von $C_{\mathbb{R}}(I)$.*

Beweis durch vollständige Induktion:

(i) Für $n = 1$ folgen (i) und (ii) aus den Rechenregeln für differenzierbare Funktionen.

(ii) Wir nehmen an, dass (i) und (ii) für $n \in \mathbb{N}$ gelten. Für $f, g \in C^{n+1}_{\mathbb{R}}(I)$ folgt dann aus Satz 7.5

$$\frac{d}{dx}\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$\text{weil} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!}(k + n + 1 - k) = \binom{n+1}{k}.$$

Also gilt (i) und (ii) auch für $(n + 1)$. **q.e.d.**

Aus der Rechenregel und der Kettenregel folgt auch

Korollar 7.35. **(i)** *Die Komposition von n-mal stetig differenzierbaren Funktionen ist wieder n-mal stetig differenzierbar.*

(ii) *Die Umkehrfunktion einer n-mal stetig differenzierbaren bijektiven Funktion ist n-mal stetig differenzierbar, wenn die Ableitung keine Nullstellen hat.* **q.e.d.**

Definition 7.36. *(Taylor-Polynom) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 n-mal differenzierbar, d.h. es gibt eine offene Umgebung $O \subset I$ von x_0, so dass die Einschränkung von f auf O in $C^{n-1}(O)$ liegt, und $f^{(n-1)}$ in x_0 differenrzierbar ist. Dann heißt*

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

das Taylorpolynom von f der Ordnung n in x_0.

Offenbar hat das Taylorpolynom der Ordnung n in x_0 die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie f an dem Punkt x_0. Es ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad n, das an der Stelle x_0 die Ableitungen $f(x_0), f^{(1)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ besitzt:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n \Longrightarrow p(x_0) = c_0, p^{(1)}(x_0) = c_1, \ldots, p^{(n)}(x_0) = n! c_n.$$

Satz 7.37. *(Taylor-Formel) Sei $f \in C^n_{\mathbb{R}}((a,b))$. Wenn $f^{(n+1)}(x)$ für alle $x \in (a,b)$ existiert, dann gibt es für jedes $x_0 \neq x \in (a,b)$ ein $\xi \in (x_0,x)$ bzw. $\xi \in (x,x_0)$, so dass*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \textit{gilt.}$$

Beweis: Sei $x \in (a,b)$ und definiere $g(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ für $t \in (a,b)$. Dann gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Außerdem sei $h(t) = (x-t)^{n+1}$ und $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass es ein $\xi \in (x_0,x)$ bzw. $\xi \in (x_0,x)$ gibt mit

$$(g(x)-g(x_0))h'(\xi) = (h(x)-h(x_0))g'(\xi).$$

Es gilt aber $g(x)-g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$ und $h(x)-h(x_0) = -(x-x_0)^{n+1}$. Also folgt $f(x) - T_{n,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)^{n+1}}{n!(n+1)(x-\xi)^n} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. **q.e.d.**

Definition 7.38. *(Taylorreihe) Für $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$ heißt die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ Taylorreihe von f in x_0.*

Für $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0, x \in (a,b)$ gibt es drei Möglichkeiten:

(i) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x gegen $f(x)$.

(ii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x, aber nicht gegen $f(x)$.

(iii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x nicht.

Korollar 7.39. *Sei $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f in x_0 an dem Punkt $x \in (a,b)$ gegen $f(x)$, wenn auf $\xi \in (x_0,x)$ bzw. (x,x_0) die Folge $\left(\dfrac{|f^n(\xi)|}{n!}|x-x_0|^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.* **q.e.d.**

Beispiel 7.40.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \textit{Polynom vom Grad } 3n \textit{ von } \frac{1}{x} & \textit{für } x > 0 \\ 0 & \textit{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt $1 + x \leq e^x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Dann folgt für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$|x| \leq e^{|x|-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|^n} \leq \exp\left(\frac{n}{|x|} - n\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{|x|^n} \leq \exp\left(\frac{-1 + n|x| - nx^2}{x^2}\right).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist dann* $x \to \begin{cases} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ *stetig, und* $f \in C^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R})$. *Und alle Ableitungen von* f *verschwinden bei* $x_0 = 0$. *Also verschwindet die Taylorreihe von* f *bei* $x_0 = 0$ *identisch.*

Satz 7.41. *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Funktionen in* $C^1_\mathbb{R}((a,b))$ *eines beschränkten Intervalles* (a,b)*, die für ein* $x_0 \in (a,b)$ *punktweise konvergiert. Wenn die Folge* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *außerdem gleichmäßig gegen* g *konvergiert, dann konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* $f \in C^1_\mathbb{R}((a,b))$ *und es gilt* $f' = g$.

Beweis: Wegen dem Mittelwertsatz gilt für alle $x, x_0 \in (a,b)$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0| \sup_{y\in(a,b)} |f'_n(y) - f'_m(y)|.$$

Wegen Satz 5.26 konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C_\mathbb{R}((a,b))$. Wegen dem Mittelwertsatz gibt es für alle $x, y \in (a,b)$ eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (x,y)$ bzw. (y,x), so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(x) - f_n(y) = (x-y)f'_n(\xi_n)$. Wegen dem Auswahlprinzipien von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge von $(\xi_n)_{n\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\xi \in [x,y]$ bzw. $[y,x]$. Wegen

$$|f'_n(\xi_n) - g(\xi)| \leq |f_n(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(\xi)|,$$

und weil g wegen Satz 5.26 stetig ist, konvergiert die Folge $(f'_n(\xi_n))_{n\mathbb{N}}$ gegen $g(\xi)$. Also konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x) = f(y) + (x-y)g(\xi)$. Aus der Stetigkeit von g folgt, dass f bei y differentzierbar ist und $g(y)$ die Ableitung $f'(y)$ ist. **q.e.d.**

Korollar 7.42. *Sei* $(\sum f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine gleichmäßig konvergente Reihe in* $C_\mathbb{R}(I)$ *auf einem beschränktem Intervall* I *und* $(\sum f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit* $x_0 \in I$. *Dann konvergiert* $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* $f \in C^1_\mathbb{R}(I)$ *und* $(\sum f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* f'. **q.e.d.**

Korollar 7.43. *(Satz von Borel) Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine beliebige Folge in* $\mathbb{R}$. *Dann gibt es eine Funktion* $f \in C^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R})$ *mit kompaktem Träger in* $(-2,2)$*, deren Taylorreihe bei* $x_0 = 0$ *gleich* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ *ist. Im Allgemeinen konvergiert die Taylorreihe für* $x \neq 0$ *nicht.*

Beweis*:**

$$\text{Sei} \quad h(x) = \begin{cases} \exp\left(\exp\left(\frac{-1}{(|x|-1)^2}\right) \cdot \frac{-1}{(|x|-2)^2}\right) & \text{für } 1 < |x| < 2 \\ 1 & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } 2 < |x| \end{cases}$$

Dann ist $h \in C^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R})$ eine 'Hutfunktion', also eine Funktion mit kompaktem Träger in $[-2, 2]$, die auf $[-1, 1]$ identisch gleich 1 ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Konstante $M_n > 0$

$$M_n = \max\{\|h_n\|_\infty, \|h_n'\|_\infty, \ldots, \|h_n^{(n-1)}\|_\infty\}$$

mit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n \cdot h(x)$. Dann sei für eine beliebige reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$C_n = |a_n|M_n + 1 \quad \text{und} \qquad f_n(x) = \frac{a_n}{n!C_n^n} h_n(C_n \cdot x) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $f_n^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ a_n & \text{für } m = n. \end{cases}$ Außerdem gilt

$$\|f_n^{(m)}\|_\infty = \frac{|a_n|C_n^m}{n!C_n^n}\|h_n^{(m)}\|_\infty \leq \frac{|a_n|M_nC_n^m}{n!C_n^n} < \frac{C_n^{m+1}}{n!C_n^n} \leq \frac{1}{n!} \qquad \text{für alle } n > m \in \mathbb{N}_0.$$

Also konvergiert für alle $m \in \mathbb{N}_0$ $(\Sigma f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig. Wegen Korollar 7.42 konvergieren also für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Reihen $(\Sigma f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\Sigma f_n')_{n\in\mathbb{N}_0}, \ldots, (\Sigma f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen $f, f', \ldots, f^{(m)}$. Also ist der Grenzwert $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$ eine Funktion in $C^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R})$ und es gilt $f^{(m)}(0) = a_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. **q.e.d.**

Korollar 7.44. *Für jede Potenzreihenfunktion* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *mit Konvergenzradius* $R > 0$ *und jedes* $|x_0| < R$ *hat die Taylorreihe von* $f(x)$ *in* x_0 *einen Konvergenzradius nicht kleiner als* $R - |x_0|$*, und konvergiert auf dem Bereich* $|x - x_0| < R - |x_0|$ *gegen* f*.*

Beweis: Die Potenzreihenfunktion $(\sum_{n=0}^\infty a_nx^n)' = \sum_{n=0}^\infty (n + 1)a_{n+1}x^n$ hat wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ den gleichen Konvergenzradius wie $(\sum a_nx^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wegen Korollar 7.42 folgt dann, dass f differenzierbar ist und f' gegeben ist durch $\sum_{n=0}^\infty (n+1)a_{n+1}x^n$. Dann folgt die Aussage aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen (ii). **q.e.d.**

Satz 7.45. *(Abelscher Grenzwertsatz) Wenn die Potenzreihe* $(\sum a_nx^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *für ein* $x \in \mathbb{K}$ *konvergiert, dann konvergiert die Potenzreihenfunktion* $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n(tx)^n$ *auf* $t \in [0, 1]$ *gleichmäßig gegen eine stetige Funktion auf* $t \in [0, 1]$*.*

Beweis: Indem wir a_n durch a_nx^n ersetzen können wir x weglassen. Zur Abkürzung setzen wir $S_{m,k} = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$. Wegen dem Cauchykriterium für Reihen gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $|S_{m,k}| < \epsilon$ für alle $m \geq N$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt

$$\sum_{n=m+1}^{m+k} a_nt^n = S_{m,1}t^{m+1} + (S_{m,2} - S_{m,1})t^{m+2} + \ldots + (S_{m,k} - S_{m,k-1})t^{m+k}$$
$$= S_{m,1}(t^{m+1} - t^{m+2}) + S_{m,2}(t^{m+2} - t^{m+3}) + \ldots + S_{m,k-1}(t^{m+k-1} - t^{m+k}) + S_{m,k}t^{m+k}.$$

Für $t \in [0,1]$ sind die hinteren Faktoren $t^{m+1}-t^{m+2}, t^{m+2}-t^{m+3}, \ldots, t^{m+k-1}-t^{m+k}, t^{m+k}$ alle nicht negativ und ihre Summe gleich $t^{m+1} \leq 1$. Aus $|S_{m,k}| < \epsilon$ folgt also

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^k\right| < \epsilon(t^{m+1}-t^{m+2}+t^{m+2}-\ldots-t^{m+k}+t^{m+k}) = \epsilon t^{m+1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Also konvergiert die Potenzreihe auf $t \in [0,1]$ gleichmäßig, und damit wegen Satz 5.26 gegen eine stetige Funktion. **q.e.d.**

Definition 7.46. *Eine Funktion $f \in C^\infty((a,b))$ heißt reellanalytisch bei x_0, falls die Taylorreihe bei x_0 einen Konvergenzradius größer als Null hat und auf einer Umgebung von x_0 gegen $f(x)$ konvergiert.*

Also sind alle Potenzreihenfunktionen im Inneren ihres Kovergenzbereiches reellanalytisch. Umgekehrt sind alle reellanalytischen Funktionen Potenzreihenfunktionen.

Beispiel 7.47. (i) *Die Funktionen* $\exp, \sin, \cos, x \mapsto a^x$ *und alle Polynome sind reellanalytische Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$.*
(ii) *Wegen Satz 4.26 (iv) gibt es für jede Potenzreihenfunktion f mit Konvergenzradius $R > 0$, die bei $x = 0$ nicht verschwindet, eine Umgebung von 0, auf der $|\frac{f(0)-f(x)}{f(0)}| \leq L < 1$ gilt. Dort konvergiert $\frac{1}{f} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{f(0)}(\frac{f(0)-f}{f(0)})^n$ als Potenzreihenfunktion. Aus dem Identitässatz für Potenzreihenfunktionen folgt, dass der Quotient zweier Potenzreihenfunktionen reellanalytisch ist, solange beide Potenzreihenfunktionen absolut konvergieren und der Nenner nicht verschwindet. Also sind* tan *und* cot *und alle rationalen Funktionen auf dem Definitionsbereich reellanalytisch.*
(iii) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$ (für $\alpha \in \mathbb{Z}$ auch $x_0 \in \mathbb{R}^-$) hat die Potenzreihenfunktion*

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n \quad \textit{mit} \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

wegen dem Quotiententest den Konvergenzradius $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{|x_0|(n+1)}} = |x_0|$. *Die Ableitung ist* $x \mapsto \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} n x_0^{\alpha-n} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n$. *Wegen*

$$\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\alpha-n+n) = \binom{\alpha}{n}$$

ist $(x_0+x)\sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n$. *Dann erfüllt f die Differentialgleichung $(x_0+x)f' = \alpha f$ mit $f(0) = x_0^\alpha$. Also verschwindet die Ableitung der*

Funktion $x \mapsto \ln\left(\frac{f(x)}{(x+x_0)^\alpha}\right)$ *und diese Funktion selber bei* $x = 0$. *Dann folgt aus Satz 7.15, dass für alle* $|x| < x_0$ *gilt* $f(x) = (x+x_0)^\alpha$. *Also sind für* $\alpha \in \mathbb{R}$ *die Funktionen* $x \mapsto x^\alpha$ *auf* $\mathbb{R}^+$ *und für* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *auf* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *reellanalytisch.*

(iv) *Für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *hat die Potenzreihenfunktion* $x \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{nx_0^n}$ *im Konveregemzbereich* $|x| < x_0$ *die Ableitung* $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{x_0^{n+1}} = \frac{1}{x+x_0}$. *Also stimmt sie mit der Funktion* $\ln(x+x_0) - \ln(x_0)$ *überein. Deshalb sind sowohl* $\ln$ *also auch* $\log_a$ *auf* $\mathbb{R}^+$ *reellanalytisch. Insbesondere folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

(v)] *Die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind wegen (iii) im Inneren ihrer Definitionsbereiche alle reellanalytisch. Wegen Satz 7.15 sind sie selber dann auch reellanalytisch. Für alle* $|x| < 1$ *gilt*

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Wegen Beispiel 7.17 gilt für $x > -1$ *auch* $x \geq \ln(1+x)$. *Dann folgt*

$$\ln\left((-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) = \ln\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$\leq -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Dann konvergieren aber die ersten beiden Potenzreihen auch für $x = \pm 1$ *und die letzten beiden wegen der alternierenden Reihe von Leibniz. Wegen dem Abelschen Grenzwertsatz gelten die obigen Gleichungen dann auch für* $x = \pm 1$. *Insbesondere ist*

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(vi) *Die Funktionen* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ *ist reellanalytisch auf* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *aber nicht bei* $x_0 = 0$.

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen folgt nun

Korollar 7.48. *Zwei reellanalytische Funktionen* $f, g \in C^\infty((a,b))$ *stimmen auf* (a,b) *überein, wenn ihre Taylorreihen für ein* $x_0 \in (a,b)$ *übereinstimmen.* **q.e.d.**