Übungsblatt 4

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. (a) Finden Sie den Mittelwert von $x^2 + y^2 + 2y$ über den Kreis $|z - 5 + 2i| = 3$.

   (b) Berechnen Sie:

   $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\tfrac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}) d\theta.$$

2. Sei $f(z) = (z - 1 - i)^{-2} \sin z$, und sei $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum c_n z^n$.

3. Seien $a > 0$ und $b > 0$ gegeben. Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nichtkonstante Funktion, so dass $f(z + a) = f(z)$ und $f(z + ib) = f(z)$. Beweisen Sie, dass f im Rechteck $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ nicht holomorph ist.

4. Sei $U_0 \subset \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$ und $f_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ analytisch, d.h. überall in U_0 lokal in eine Potenzreihe entwickelbar. Zeigen Sie, dass es eine in $\mathbb{C}$ offene Menge U mit $U \cap \mathbb{R} = U_0$ und eine holomorphe Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f|_{U_0} = f_0$ gibt. (Hinweis: Identitätssatz anwenden!)

5. (a) (Maximumprinzip für holomorphe Funktionen) Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und sei K eine Kreisscheibe mit $\overline{K} \subset G$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $|f|$ auf $\overline{K}$ ihr Maximum auf dem Rand ∂K von K annimmt. (Sei a ein Punkt im Inneren von K, wo die Einschränkung von $|f|$ auf $\overline{K}$ ihr Maximum annimmt. Bekommen Sie durch die Anwendung des Mittelwertsatzes auf f bezüglich des Punkts a einen Widerspruch!)

   (b) (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) Sei $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nichtkonstante harmonische Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und sei K eine Kreisscheibe mit $\overline{K} \subset G$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $|u|$ auf $\overline{K}$ ihr Maximum auf dem Rand ∂K von K annimmt.

Abgabe am Donnerstag, den 22. März in der Übung!