Übungsblatt 6

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Finden Sie die isolierten Singularitäten folgender Funktionen. Bestimmen Sie außerdem den Typ dieser Singularitäten:
   (a) $f(z) = \frac{1}{(2\sin z - 1)^2}$,
   (b) $g(z) = \frac{z}{e^{(1/z)} - 1}$.

2. Berechnen Sie die Laurententwicklung von $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ im Kreisring $\{z | \ r < |z| < R\}$ für
   (a) $r = 0$ und $R = 1$,
   (b) $r = 1$ und $R = 2$,
   (c) $r = 2$ und $R = \infty$.

3. Bestimmen Sie die Maxima und Minima folgender Funktionen auf $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| \leq 1\}$:
   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$,
   (b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

4. Zeigen Sie:
   (a) $\int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\phi}\cos(\sin\phi)}{5 - 4\cos(\theta - \phi)}\ d\phi = \frac{2\pi}{3} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$,
   (b) $\int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\phi}\sin(\sin\phi)}{5 - 4\cos(\theta - \phi)}\ d\phi = \frac{2\pi}{3} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$.
   (c) $\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2}\ d\phi = 2\pi$.

5. Sei $T > 0$. Finden Sie eine innerhalb des Kreises $|z| = 1$ harmonische Funktion , die auf dessen Rand gleich der folgenden Funktion ist:
$$F(\theta) = \begin{cases} T, & \text{wenn } 0 < \theta < \pi, \\ -T, & \text{wenn } \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

6. Zeigen Sie, dass $f_2(z) = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n$ eine analytische Fortsetzung von $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist. Bestimmen Sie die Konvergenzgebiete von beiden Reihen.

7. Sei $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{3^n}$. Finden Sie eine analytische Fortsetzung f_2 von f_1, die in $z = 3 - 4i$ konvergent ist. Bestimmen Sie den Wert von f_2 im Punkt $z = 3 - 4i$.

8. Sei $\mathcal{S}$ die Kollektion aller holomorphen injektiven Funktionen $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften (a) $f(0) = 0$, und (b) $f'(0) = 1$. Zeigen Sie, dass es keine unterschiedlichen Funktionen $g,\ h \in \mathcal{S}$ gibt, so dass $g[\mathbb{D}] \subset h[\mathbb{D}]$. (Hinweis: Schwarzsches Lemma!)

Abgabe am Donnerstag, den 19. April in der Übung!