Übungsblatt 12

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Beweisen Sie:
   (a) $sech\ z = \pi \left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2+z^2} - \frac{3}{(\frac{3\pi}{2})^2+z^2} + \frac{5}{(\frac{5\pi}{2})^2+z^2} - \cdots \right)$.
   (b) $tan\ z = 2z \left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2-z^2} + \frac{1}{(\frac{3\pi}{2})^2-z^2} + \frac{1}{(\frac{5\pi}{2})^2-z^2} + \cdots \right)$.
   (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+4k^2\pi^2} = \frac{1}{2z}(\frac{1}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{e^z-1})$.
   (d) $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$.
2. Entwickeln Sie $e^{2\pi z} - 1$ in ein unendliches Produkt.
3. Sei $G \neq \mathbb{C}$ ein (nicht leeres) einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in G$. Zeigen Sie, dass es genau eine biholomorphe Abbildung $f : G \longrightarrow \mathbb{D}$ gibt mit $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$.($\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$)
4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz ist der Kreissektor

   $$S_n := \{re^{i\theta} | \ 0 < \theta < \tfrac{\pi}{n},\ 0 \leq r < 1\}$$

   biholomorph auf $\mathbb{D}$ abbildbar. Geben Sie eine solche Abbildung explizit an!

Abgabe am Donnerstag, den 31. Mai in der Übung!