Übungsblatt 7

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die in $\mathbb{D}$ holomorph ist, und sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ deren Taylorentwicklung im Punkt 0, so dass $a_k \geq 0$, für alle $k = 0,\ 1,\ \cdots$.

   (a) Finden Sie $f^{(n)}(z)$ im Punkt $z = \frac{1}{2}$, für $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Zeigen Sie, dass f einen Pol in $z = 1$ hat, wenn f einen Pol z_0 mit $|z_0| = 1$ besitzt. (Nehmen Sie an, f ist holomorph in $z = 1$, und bekommen Sie mit Hilfe vom Teil (a) und der analytischen Fortsetzung einen Widerspruch!)

2. Sei X der Raum $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass folgende Wege zu einander homotop sind:

$$f : [0,1] \longrightarrow X, \text{ mit } f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s),$$
$$g : [0,1] \longrightarrow X, \text{ mit } g(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s).$$

3. Seien X, Y topologische Räume. Sei $[X, Y]$ die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X in Y. Sei I das Intervall $[0, 1]$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge $[X, I]$ nur ein Element hat.

   (b) Sei Y wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass die Menge $[I, Y]$ nur ein Element hat.

4. Seien x_0, x_1 Punkte eines wegzusammenhängenden topologischen Raums X und sei $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ ein Weg von x_0 nach x_1. Die Abbildung $\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ wird definiert durch $\alpha_*([\gamma]) = [\alpha^- \gamma \alpha]$. Beweisen Sie, dass $\pi_1(X, x_0)$ genau dann eine Abelsche Gruppe bildet, wenn zu je zwei Wegen α und β von x_0 nach x_1 gilt: $\alpha_* = \beta_*$.

Abgabe am Donnerstag, den 26. April in der Übung!