Übungsblatt 8

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum und $x_0,\ x_1 \in X$. Zeigen Sie, dass alle Wege von x_0 nach x_1 zueinander homotop sind.

2. Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{1}{z}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $f(z)$ in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion hat.

   (b) Sei F eine Stammfunktion von f im Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $e^{F(z)} = az$ für eine Konstante $a \in \mathbb{C}$.

3. Welche Werte kann das Integral

   $$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$$

   für geschlossene Kurven γ in $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ annehmen?

4. Für gegebene $n,\ k \in \mathbb{Z}$ und $0 < r \neq 1$ bestimmen Sie die Umlaufszahl der durch $\gamma(t) = e^{int} + re^{ikt}$ definierten geschlossenen Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ um den Nullpunkt.

5. Zeigen Sie mit Hilfe vom Monodromiesatz, dass die Wege

   $$\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_0(t) = e^{\pi i t}$$

   und

   $$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = e^{-\pi i t}$$

   in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht homotop sind.

Abgabe am Donnerstag, den 3. Mai in der Übung!