Übungsblatt 9

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Welche der folgenden Abbildungen haben ein nullhomologes Bild?

   (a) $\phi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$,
   $\phi(s,t) = z_0 + \epsilon\left((2s-1) + i(2t-1)\right)$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$.

   (b) $\psi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$,
   $\psi(s,t) = (r + s(R-r))e^{2\pi i t}$ für gegebene $0 \leq r < R$.

2. Sei $r > 1$. Seien c, c_0, c_1 drei Kurven in $\mathbb{C}$ definiert durch:

   $c : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $c(t) = re^{it}$,
   $c_0 : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $c_0(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{it}$,
   $c_1 : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $c_1(t) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{it}$.

   Zeigen Sie , dass $c - c_0$ in $\mathbb{C} \setminus \{\frac{3}{4}\}$ zu c_1 homolog ist.

3. Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, und $c \in G$. Sei $\overline{K} \subset G$ eine abgeschlossene Kreisscheibe, deren Rand $\gamma = \partial K$ in $G \setminus \{c\}$ liegt. Beweisen Sie, dass für jede biholomorphe Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ (d.h. eine holomorphe Funktion mit holomorpher Umkehrfunktion $f^{-1} : f[G] \longrightarrow G$) gilt:

   $$\nu(f \circ \gamma, f(c)) = \nu(\gamma, c).$$

   (Hilfsfunktion: $h(z) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } z = c, \\ f'(z)\frac{z-c}{f(z)-f(c)}, & \text{wenn } z \in G \setminus \{c\}. \end{cases}$)

4. Sei $P \in \mathbb{R}$ ein einfacher Pol einer rationalen Funktion $R(z)$, und sei $I_P \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall um P, wo R keine weiteren Pole hat. Falls der Grenzwert

   $$\lim_{\delta \to +0}\left[\int_{P-\epsilon}^{P-\delta} f(x)dx + \int_{P+\delta}^{P+\epsilon} f(x)dx\right] \;:=\; \mathcal{P}\left(\int_{P-\epsilon}^{P+\epsilon} f(x)dx\right)$$

   für ein genügend kleines $\epsilon > 0$ existiert, so heißt

   $$\mathcal{P}\left(\int_{I_P} f(x)dx\right) = \int_{I_P \setminus (P-\epsilon, P+\epsilon)} f(x)dx \; + \mathcal{P}\left(\int_{P-\epsilon}^{P+\epsilon} f(x)dx\right)$$

   der Hauptwert des Integrals von R über das Intervall I_P. Sei nun R eine rationale Funktion, die bei ∞ eine Nullstelle hat und außer einfachen Polen bei $P_1 < P_2 < \cdots < P_n$ keine weiteren Pole auf der reellen Achse besitzt. Außerdem sei $f(z)$ entweder $R(z)$, wenn R eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung bei ∞ hat, oder $f(z) = R(z)e^{iz}$. Zeigen Sie:

   $$\mathcal{P}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\right)dx = 2\pi i \sum_{\mathcal{I}m\ a > 0} Res_a f(z) + \pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{P_k} f(z).$$

Abgabe am Donnerstag, den 10. Mai in der Übung!