Übungsblatt 1

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. (a) Zeigen Sie, dass folgende Funktionen auf $\mathbb{C}$ holomorph sind, und finden Sie deren Ableitung in angegebenen Punkten:
   - $f(z) = \cos^2(2z + 3i), \qquad z = 0.$
   - $g(z) = \frac{(z+2i)(i-z)}{2z-1}, \qquad z = i.$

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \bar{z}$ nirgendwo holomorph ist.

2. (a) Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $u(x, y) = 2x(1 - y)$ harmonisch ist.

   (b) Finden Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = u(z) + iv(z)$ holomorph ist.

   (c) Formulieren Sie die Funktion $f(z)$ bezüglich der Variable z.

3. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $p(x, y) = x^2 + 2axy + by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$? Bestimmen Sie für jedes solche (a, b) alle diese holomorphen Funktionen.

4. Zeigen Sie:

   (a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ gilt für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. (Stichwort: Multiplikation absolut konvergenter Reihen.)

   (b) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (c) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

   (d) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, und $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (e) Sinus und Cosinus haben nur reelle Nullstellen.

5. (a) Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph. Zeigen Sie:
   - $f(z) = 2u(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2})+$ Konstante.
   - $f(z) = 2iv(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2})+$ Konstante.

   (b) Finden Sie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, wenn $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

Abgabe am Donnerstag, den 1. März in der Übung!