Übungsblatt 5

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Finden Sie die Laurententwicklung folgender Funktionen um die jeweils angegebenen Singularitäten. Bestimmen Sie außerdem die Art dieser Singularitäten:
   (a) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z}, \quad z = 0.$
   (b) $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}, \quad z = 0.$
   (c) $h(z) = e^{z/(z-2)}, \quad z = 2.$

2. Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{\bar{z}}) = f(z)$, so dass $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle z auf dem Einheitskreis $|z| = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe vom Schwarzschen Spiegelungsprinzip:
   $$f(z) \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Sei $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die die Ungleichung $|f(\frac{1}{n})| \leq e^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

4. Zeigen Sie, dass es keine injektive holomorphe Funktion von der Menge $G = \{z \in \mathbb{C} | \ 0 < |z| < 1\}$ auf $A = \{z \in \mathbb{C} | \ 1 < |z| < 2\}$ gibt. (Nehmen Sie an, es gäbe eine solche Funktion, und bekommen Sie wegen der Gebietstreue einen Widerspruch!)

5. (a) Finden Sie eine Möbius Transformation $T : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \overline{\mathbb{D}}$ mit $T(0) = -\log 2$.
   (b) Sei $f : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass $f(-\log 2) = 0$ und $|f(z)| = |e^z|$ für alle z mit $|z| = 1$, und sei $g = f \circ T$. Finden Sie eine obere Schranke für $|g|$ auf der abgeschlossenen Einheitsscheibe $\overline{\mathbb{D}}$.
   (c) Zeigen Sie, dass $h : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $h(z) = e^{-T(z)}g(z)$ die Voraussetzungen vom Schwarzschen Lemma erfüllt. Erhalten Sie dadurch eine obere Schranke für $|f(\log 2)|$.

Abgabe am Donnerstag, den 29. März in der Übung!