# Übungsblatt 3

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Mit Hilfe der Gleichung $e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ berechnen Sie die Integrale $\int e^{ax} \sin bx \; dx$ und $\int e^{ax} \cos bx \; dx$.

2. Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\{z \in \mathbb{C} | \; |z - a| \leq 1\} \subset U$. Zeigen Sie:

   (a) $f'(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(a + e^{i\theta}) \; d\theta$.

   (b) $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(a + e^{i\theta}) \; d\theta$.

3. Bestimmen Sie folgende Integrale:

   (a) $\int_C \frac{dz}{z-2}$ längs des Kreises $C : \; |z + 2| = 2$.

   (b) $\int_C (12z^2 - 4iz)dz$ längs der Kurve $C : \; y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$, die die Punkte $(1, 1)$ und $(2, 3)$ miteinander verbindet.

   (c) $\int_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2) \; dz}{(z-1)(z-3)}$ längs des Kreises $C : \; |z| = 5$.

   (d) $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2} \; dz$ längs des Kreises $C : \; |z| = 3$, wenn $t > 0$.

   (e) $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} \; d\theta$.

   (f) $\int_0^{2\pi} e^{(e^{i\theta} - i\theta)} \; d\theta$.

4. Sei $f(z) = u(z) + iv(z)$ auf dem Kreis $|z| < 1$ holomorph, und gelte $u^2(0) = v^2(0)$. Zeigen Sie:

   $$\int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta}) \; d\theta = \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\theta}) \; d\theta, \text{ für } 0 < r < 1.$$

5. Zeigen Sie, dass $f(z) = \frac{1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion hat.

**Abgabe am Donnerstag, den 15. März in der Übung!**