Übungsblatt 2

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Finden Sie eine Möbius Transformation, die die Punkte $i,\ -i$ und 1 in $0,\ 1$ bzw. ∞ transformiert.

2. Seien a und b Fixpunkte einer Möbius Transformation $w = T(z)$, d.h. $T(a) = a$ und $T(b) = b$. Zeigen Sie:

   (a) Wenn $a \neq b$, dann gilt
   $$\tfrac{w-a}{w-b} = K\left(\tfrac{z-a}{z-b}\right),$$
   wobei K eine Konstante ist.

   (b) Wenn $a = b$, dann gilt
   $$\tfrac{1}{w-a} = \tfrac{1}{z-a} + k,$$
   wobei k eine Konstante ist.

3. Bestimmen Sie folgende Kurvenintegrale:

   (a) $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ von $z = 0$ nach $z = 4 + 2i$ längs der Kurve $\gamma:\ z(t) = t^2 + it,\ t \in \mathbb{R}$.

   (b) $\int_C \bar{z}^2\, dz$ längs dem Kreis $C:\ |z-1| = 1$.

   (c) $\int_\gamma |z|^2\, dz$ längs der Randkurve γ des Rechtecks mit Eckpunkten $(0,0),\ (1,0),\ (1,1),\ (0,1)$.

4. Sei $z = x + iy$ ein beliebiger Punkt in $\mathbb{C}$. Durch eine rein geometrische Argumentation zeigen Sie:
   $$|z-1| \leq ||z|-1| + |z| \cdot |\theta|,$$
   wobei $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

Abgabe am Donnerstag, den 8. März in der Übung!