Übungsblatt 10

Funktionentheorie FS 2007
Martin Schmidt/Ghazaleh Arghanoun

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes folgende Integrale:

   (a) $\int_0^\infty \frac{x \sin x \ dx}{x^2+a^2}, \ a > 0.$

   (b) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \ dx}{1+x^2}.$

   (c) $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1) \ dx}{x^2+1}.$

   (d) $\int_C \frac{e^z \ dz}{\cosh z}$, wobei $C = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 5\}$.

2. Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ ein komplexes Polynom mit komplexen Koeffizienten $a_i, \ i = 0, \cdots, n-1$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt: $|P(z)| \leq 1$. Zeigen Sie dann mit Hilfe des Satzes von Rouché:

$$P(z) = z^n.$$

3. Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ die Darstellung einer holomorphen Funktion f in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, so dass $\varepsilon = |a_2| + |a_3| + \cdots < 1$. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion f^{-1} von f in $B(0, 1-\varepsilon)$ definiert wird. (Hinweis: Satz von Rouché!)

4. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen definiert durch $f_1(z) = z + z^2$ und $f_n = f_1 \circ f_{n-1}$, für $n \geq 2$. Beweisen Sie, dass $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in keiner Umgebung von 0 normal ist. (Hinweis: Satz von Weierstrass!)

5. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine normale Familie von holomorphen Funktionen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Sei außerdem $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die in $\cup_{n \in \mathbb{N}} f_n[G]$ holomorph ist. Beweisen Sie, dass die Familie $\{F \circ f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ also in G normal ist.

Abgabe am Mittwoch, den 23. Mai in der Übung!