

Funktionentheorie

FS 07

Martin U. Schmidt



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Holomorphe Funktionen</b>	<b>5</b>
1.1	Komplex differenzierbare Funktionen . . . . .	5
1.2	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen . . . . .	9
1.3	Konforme Abbildungen . . . . .	12
1.4	Möbiustransformationen . . . . .	14
1.5	Der Cauchysche Integralsatz . . . . .	17
1.6	Erste Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Lokales Verhalten holomorpher Funktionen</b>	<b>29</b>
2.1	Nullstellen von holomorphen Funktionen . . . . .	29
2.2	Holomorphe Abbildungen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Singularitäten von holomorphen Funktionen</b>	<b>35</b>
3.1	Isolierte Singularitäten . . . . .	35
3.2	Dirichletproblem . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Analytische Fortsetzung</b>	<b>45</b>
4.1	Analytische Fortsetzung längs Kreisketten . . . . .	45
4.2	Homotopie . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Umlaufzahl und Homologie</b>	<b>57</b>
5.1	Geschlossene 1-Zykel . . . . .	57
5.2	Homologie . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Das Residuum</b>	<b>65</b>
6.1	Der Residuensatz . . . . .	65
6.2	Anwendungen des Residuensatzes . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Folgen holomorpher Funktionen</b>	<b>73</b>

<b>8</b>	<b>Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung</b>	<b>77</b>
8.1	Partialbruchzerlegung des Cotangens . . . . .	77
8.2	Produktdarstellung des Sinus . . . . .	79
8.3	Die Gammafunktion . . . . .	81
8.4	Der Satz von Mittag-Leffler . . . . .	83
8.5	Der Weierstraßsche Produktsatz . . . . .	85
<b>9</b>	<b>Der Riemannsche Abbildungssatz</b>	<b>87</b>
<b>10</b>	<b>Elliptische Funktionen</b>	<b>91</b>
10.1	Periodische Funktionen und Periodengitter . . . . .	91
10.2	Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion . . . . .	94
10.3	Der Körper der elliptischen Funktionen . . . . .	99
10.4	Elliptische Integrale . . . . .	101
10.5	$\wp$ -Funktion und der Riemannsche Abbildungssatz . . . . .	101

# Kapitel 1

## Holomorphe Funktionen

### 1.1 Komplex differenzierbare Funktionen

Inhalt der Funktionentheorie, oder der Funktionen in einer komplexen Variablen, sind Abbildungen von offenen Gebieten  $U \subset \mathbb{C}$  in die komplexen Zahlen, die über den komplexen Zahlen differenzierbar sind (genaue Definition folgt). Es wird sich herausstellen, dass diese Forderung der Differenzierbarkeit im Komplexen wesentlich weitreichendere Konsequenzen hat als im Reellen. Weil sehr viele Funktionen, die in den Anwendungen vorkommen, diese Eigenschaften haben, sind die Anwendungen der Funktionentheorie auch sehr vielfältig. Wir werden die wichtigsten Schlussfolgerungen aus der komplexen Differenzierbarkeit in dieser Vorlesung entwickeln. In diesem Abschnitt definieren wir zunächst die holomorphen, also komplex differenzierbaren Funktionen und übertragen dann einige Aussagen aus der reellen Analysis auf die komplexe Analysis.

**Definition 1.1.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $U$  der komplexen Zahlen in die komplexen Zahlen. Dann heißt  $f$  im Punkt  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar, wenn es eine komplexe Zahl  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  gibt, so dass die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

stetig im Punkt  $z_0$  ist. Die Funktion  $f$  heißt holomorph, wenn sie für alle  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar ist.

Die komplexe Ableitung einer komplex differenzierbaren Funktion bezeichnen wir genau wie die reelle Ableitung mit  $f'$ . Umgekehrt nennen wir  $f$  eine Stammfunktion von  $f'$ , wenn  $f$  holomorph ist. Weil der Absolutbetrag im Komplexen die analogen Eigenschaften wie im Reellen hat, übertragen sich die Beweise aus der reellen Analysis und zeigen folgende Eigenschaften:

Wenn  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  zwei komplexe Funktionen sind, die beide im Punkt  $z_0$  komplex differenzierbar sind, dann sind auch die Funktionen  $f + g$ ,  $f \cdot g$ , und falls  $g$  in  $z_0$  keine Nullstelle hat,  $f/g$  komplex differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} (f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0) \\ (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \end{aligned}$$

Genauso gilt auch die Kettenregel. Seien  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  komplexe Funktionen auf offenen Gebieten  $U, V \subset \mathbb{C}$ . Wenn  $f$  in  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar ist und  $g$  in  $f(z_0) \in V$ , dann ist auch  $g \circ f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

**Beispiel 1.2.** (i) Jede auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$  definierte konstante komplexe Funktion  $f$  ist dort holomorph und es gilt  $f' = 0$ .

(ii) Die identische komplexe Funktion  $\mathbb{1}_U : U \rightarrow U, z \mapsto z$  ist holomorph und es gilt  $\mathbb{1}'_U = 1$ .

(iii) Alle Polynome sind holomorphe Funktionen und die Ableitungen erfüllen wieder  $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(iv) Alle gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich holomorph mit den üblichen Ableitungen.

**Satz 1.3.** Sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine komplexe Potenzreihe.

(i) Sei  $\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  (der größte Häufungspunkt der reellen Folge  $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ ). Dann hat  $f(z)$  den Konvergenzradius  $\varrho = \frac{1}{\alpha}$ . Hierbei ist  $\varrho = \infty$  für  $\alpha = 0$  und  $\varrho = 0$  für  $\alpha = \infty$ . Also konvergiert  $f(z)$  für  $|z| < \varrho$  absolut und divergiert für  $|z| > \varrho$ .

(ii) Die komplexe Potenzreihe  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  hat den gleichen Konvergenzradius  $\varrho$  wie  $f$ . Wenn  $\varrho > 0$  ist, dann ist  $f$  auf  $B(0, \varrho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varrho\}$  holomorph und es gilt dort  $f' = g$ .

**Beweis (i):** Es genügt offenbar zu zeigen, dass für  $\alpha < 1$  die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut konvergiert und für  $\alpha > 1$  divergiert. Wenn  $\alpha < 1$ , Dann gibt es für jedes  $\alpha < \beta < 1$

ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \Leftrightarrow |a_n| \leq \beta^n$ . Weil aber  $(\sum \beta^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  konvergiert ist dann auch  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut konvergent. Wenn  $\alpha > 1$ , Dann gibt es unendlich viele  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ . Also kann die Folge  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}_0}$  nicht gegen Null konvergieren. Dann ist aber die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  keine Cauchyfolge, also divergent.

(ii) Sei  $y_n = \sqrt[n]{n-1} \geq 0$ . Dann gilt  $n = (1 + y_n)^n$ . Also folgt aus der Binomischen Formel  $y_n^2 \leq \frac{2}{n}$  oder auch  $y_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$ . Also konvergiert  $\sqrt[n]{n}$  gegen 1. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Deshalb haben  $f$  und  $g$  den gleichen Konvergenzradius. Jetzt zeigen wir, dass  $g$  die Ableitung von  $f$  ist. Zunächst schätzen wir die einzelnen Summanden ab:

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} = h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(z+h)^n - z^n}{n} - nz^{n-1} \right| &\leq |h| \cdot \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^{k-2} |z|^{n-k} \\ &= |h| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{n(n-1)}{(k+2)(k+1)} |h|^k |z|^{n-2-k} \\ &\leq |h| n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{n-2-k} \\ &= |h| n(n-1) (|h| + |z|)^{n-2}. \end{aligned}$$

Also gilt für die Potenzreihen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right) \right| \\ &\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|z| + |h|)^{n-2} \end{aligned}$$

Wenn  $|z| < \varrho$ , dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass  $|z| + \delta < \varrho$ . Die Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| r^{n-2}$$

hat wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n-1)} = (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}) (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n-1}) = 1$  wieder den Konvergenzradius  $\varrho$ . Also ist sie für  $0 \leq r < |z| + \delta$  uniform beschränkt. Dann folgt für  $|h| < \delta$  die Abschätzung

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|z| + \delta)^{n-2}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Insbesondere definieren also alle konvergenten reellen Potenzreihen auch auf den entsprechenden komplexen Konvergenzgebieten holomorphe Funktionen. Damit lassen sich auch sehr viele Funktionen aus der klassischen reellen Analysis zu komplexen holomorphen Funktionen fortsetzen.

**Beispiel 1.4. (i)**

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**(ii)**

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**(iii)**

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$$

**(iv)**

$$\ln : B(z_0, |z_0|) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \ln(z) = \ln(z_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_0 - z)^n}{n z_0^n}$$

**(v)**

$$\arcsin : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

**(vi)**

$$\arctan : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

Wir werden sehen, dass sich lokal sogar alle holomorphen Funktionen als konvergente Potenzreihen schreiben lassen.



## 1.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Wenn wir die komplexen Zahlen als zweidimensionalen reellen Vektorraum auffassen, wobei wir  $z = x + iy$  durch das geordnete reelle Zahlenpaar  $(x, y)$  darstellen, dann bilden die Multiplikationsoperatoren einen Untervektorraum der linearen Abbildungen  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  von  $\mathbb{R}^2$  auf sich selber. Wir identifizieren die reellen Zahlenpaare mit den Spaltenvektoren  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , so dass die linearen Abbildungen  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  mit den reellen  $2 \times 2$  Matrizen identifiziert werden. Dann entspricht wegen  $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(yu + xv)$  die Multiplikation mit der komplexen Zahl  $z = x + iy$  der  $2 \times 2$  Matrix:

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv \\ yu + xv \end{pmatrix}.$$

Offenbar entspricht eine  $2 \times 2$  Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  genau dann der Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wenn sie komplex linear ist, also mit der Multiplikation mit  $i$  vertauscht, was bedeutet, dass die  $2 \times 2$  Matrix mit der der Multiplikation mit  $i$  entsprechenden  $2 \times 2$  Matrix vertauscht:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \\ \iff b = -c \text{ und } a = d.$$

Eine komplexe Funktion  $f$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  entspricht dann einer Abbildung

$$F : \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in U\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow (\Re(f(x, y)), \Im(f(x, y)))$$

oder auch zwei Abbildungen:

$$u, v : \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in U\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

$F$  ist genau dann im Punkt  $(x_0, y_0)$  differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung  $F'(x_0, y_0) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  gibt, so dass die Abbildung

$$(x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{\|F(x, y) - F(x_0, y_0) - F'(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\|}{\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|} & \text{für } (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

im Punkt  $(x_0, y_0)$  stetig ist. Offenbar ist die Abbildung

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

genau dann im Punkt  $z_0$  stetig, wenn die Abbildung

$$z \rightarrow \begin{cases} \frac{|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|}{|z-z_0|} & \text{für } z \neq z_0 \\ 0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

im Punkt  $z_0$  stetig ist. Also ist  $f$  genau dann im Punkt  $z_0 = x_0 + iy_0$  komplex differenzierbar, wenn die entsprechende Abbildung  $F$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  differenzierbar ist und die Ableitung  $F'(x_0, y_0)$  der Multiplikation mit der komplexen Zahl  $f'(z_0)$  entspricht.

**Satz 1.5.** (*Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen*) Eine komplexe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  ist genau dann im Punkt  $z_0$  komplex differenzierbar, wenn die entsprechende Funktion

$$\begin{aligned} F : \quad & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in U\} \rightarrow \mathbb{R}^2, & (x, y) &\mapsto F(x, y) \\ \text{mit} \quad & F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) & &= (\Re(f(x + iy)), \Im(f(x + iy))) \end{aligned}$$

im Punkt  $(x_0, y_0)$  differenzierbar ist und die Ableitung  $F'(x_0, y_0)$  der Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht. Das ist äquivalent dazu, dass  $F$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  differenzierbar ist und  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Beweis:** Offenbar entspricht die Ableitung  $F'(x_0, y_0)$  der  $2 \times 2$  Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix entspricht genau dann der Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wenn die entsprechenden partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. **q.e.d.**

**Korollar 1.6.** Eine holomorphe Funktion, deren Ableitung verschwindet, ist auf allen zusammenhängenden Gebieten konstant.

**Beweis:** Jede holomorphe Funktion ist im reellen differenzierbar, und die reelle Ableitung verschwindet genau dann, wenn die komplexe Ableitung verschwindet. **q.e.d.**

Im Fall von komplexen Funktionen ist es hilfreich anstatt der beiden unabhängigen reellen Koordinaten  $x$  und  $y$  die beiden komplexen unabhängigen Koordinaten  $z$  und  $\bar{z}$  zu benutzen. Das können wir machen, indem wir den  $\mathbb{R}^2$  komplexifizieren. Die linearen

Abbildungen  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  sind offenbar ein Unterraum der linearen Abbildungen  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ . Der Basiswechsel

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

hat die Umkehrabbildung

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Also entspricht die lineare Abbildung  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  bezüglich der Vektoren  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + ic & b + id \\ a - ic & b - id \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + d + i(c - b) & a - d + i(c + b) \\ a - d - i(c + b) & a + d - i(c - b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bezüglich der Vektoren  $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ . Also folgt mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial(u - iv)}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial(u - iv)}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial(u - iv)}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial(u - iv)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Das ergibt dann

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

**Korollar 1.7.** Eine komplexwertige Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann im Punkt  $z_0$  komplex differenzierbar wenn sie als Abbildung von  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in U\}$  nach  $\mathbb{R}^2$

im Punkt  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 + iy_0 = z_0$  differenzierbar ist und die Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  erfüllt. Wenn  $f$  holomorph ist und im Punkt  $z_0$  zweimal differenzierbar ist, dann gilt auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Insbesondere ist jede zweimal differenzierbare holomorphe Funktion harmonisch.

**Beweis:** Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind offenbar äquivalent zu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \right) = 0.$$

Wenn  $f$  im Punkt  $z_0$  zweimal differenzierbar ist, dann vertauschen die zweiten partiellen Ableitungen. Also folgt aus  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  auch

$$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = 0.$$

**q.e.d.**

Umgekehrt kann man die Frage stellen, wann es zu einer reellen Funktion  $u : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in U\}$  eine ebensolche reelle Funktion  $v$  gibt, so dass  $f = u + iv$  holomorph ist. Wir werden bald sehen, dass jede holomorphe Funktion glatt und sogar analytisch ist. Deshalb sind sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonisch. Also muss  $u$  bzw.  $v$  harmonisch sein. Wenn  $u$  bzw.  $v$  harmonisch ist, dann ist  $u + iv$  genau dann holomorph, wenn es eine differenzierbare Funktion  $v$  bzw.  $u$  gibt mit

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Wenn  $u$  bzw.  $v$  harmonisch sind, dann gilt auch

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Wir werden sehen, dass es in diesem Fall auf einfach zusammenhängenden Gebieten auch eine Lösung dieser Differentialgleichungen gibt.

### 1.3 Konforme Abbildungen

**Definition 1.8.** Eine invertierbare lineare Abbildung des euklidischen Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$  auf sich selber wird konform genannt, wenn sie die Winkel erhält, also das transformierte euklidische Skalarprodukt proportional zum euklidischen Skalarprodukt ist.

Der Proportionalitätsfaktor darf nicht verschwinden und heißt konformer Faktor. Eine solche Abbildung heißt orientierungserhaltend, wenn sie positive Determinante hat. Eine differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  auf eine offene Teilmenge heißt konform, wenn die Ableitung in allen Punkten konform ist. Sie heißt orientierungserhaltend, wenn die Determinante der Jacobimatrix überall positiv ist.

**Lemma 1.9.** Eine Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist genau dann konform und orientierungserhaltend, wenn sie der Multiplikation mit einer komplexen Zahl in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  entspricht.

**Beweis:** Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ . Dann transformiert diese lineare Abbildung das euklidische Skalarprodukt in die Bilinearform

$$(x, y) \rightarrow (Ax)^t Ay = x^t A^t Ay.$$

Hierbei haben wir die Vektoren mit Spaltenvektoren identifiziert und das euklidische Skalarprodukt als das Matrixprodukt

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = x^t \cdot y$$

geschrieben. Also ist  $A$  genau dann konform, wenn

$$A^t A = \lambda \cdot \mathbf{1} \text{ gilt } \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die drei Gleichungen

$$ab + cd = 0 \quad \text{und} \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad \text{und} \quad ad - bc > 0$$

sind äquivalent dazu, dass die beiden Vektoren  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  zueinander orthogonal sind, die gleiche Länge haben und drittens der Vektor  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  positives Skalarprodukt mit dem Vektor  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  hat. Das ist aber offenbar äquivalent dazu, dass

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

gilt. Im zweiten Abschnitt haben wir gesehen, dass das dazu äquivalent ist, dass  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  der Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht. **q.e.d.**

Orientierungserhaltende konforme Abbildungen müssen also mit den Drehungen um  $90^\circ$  vertauschen, die der Multiplikation mit  $i$  entspricht. Analog können wir antilineare Abbildungen als orientierungumdrehende konforme Abbildungen charakterisieren.

**Korollar 1.10.** Eine differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  ist genau dann orientierungserhaltend und konform, wenn sie einer holomorphen Abbildung entspricht, deren Ableitung keine Nullstellen hat. **q.e.d.**

Analog können wir antiholomorphe komplexe Funktionen durch die Differentialgleichung  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  definieren. Sie sind einfach die komplex konjugierten von holomorphen Abbildungen, haben also analoge Eigenschaften. An den Stellen, wo die Ableitung nicht verschwindet, entsprechen sie orientierungumkehrenden konformen Abbildungen.

## 1.4 Möbiustransformationen

**Definition 1.11.** Sei  $\mathbb{P}^1$  der eindimensionale projektive komplexe Raum, d.h. die Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen in  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$  bezüglich der Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (\lambda x, \lambda y) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Wenn  $x \neq 0$ , dann ist offenbar  $(x, y)$  äquivalent zu  $(1, \frac{y}{x})$  und wenn  $y \neq 0$ , dann ist  $(x, y)$  äquivalent zu  $(\frac{x}{y}, 1)$ . Wir bezeichnen mit  $z = \frac{x}{y}$ . Dann entspricht die Teilmenge  $\{[(x, y)] \in \mathbb{P}^1 \mid y \neq 0\}$  allen Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  und die Teilmenge  $\{[(x, y)] \in \mathbb{P}^1 \mid x \neq 0\}$  allen Zahlen  $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ . Die Schnittmenge entspricht offenbar allen Zahlen  $z \in \mathbb{C}^*$ . Wir können also  $\mathbb{P}^1$  auch mit der Einpunktkompaktifizierung  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  von  $\mathbb{C}$  identifizieren. Diese Einpunktkompaktifizierung ist die Menge  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  zusammen mit der Topologie, deren offene Menge aus den offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}$  und den Komplementen in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  von kompakten Teilmengen von  $\mathbb{C}$  besteht.

**Definition 1.12.** Die Möbiusgruppe ist die Gruppe aller bijektiven Abbildungen von  $\mathbb{P}^1$  auf sich selber, für die es eine invertierbare  $2 \times 2$  Matrix in

$$GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0 \right\}$$

gibt mit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

In dieser Definition wird implizit vorausgesetzt, dass alle Elemente  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$  äquivalente Elemente von  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$  auf äquivalente abbilden. Das folgt aus der Linearität. Dann folgt aus der Definition, dass das Produkt zweier Matrizen der Hintereinanderausführung der beiden entsprechenden Möbiustransformationen entspricht, und alle Vielfachen der Einheitsmatrix der identischen Abbildung von  $\mathbb{P}^1$  entsprechen. Also bestehen die Möbiustransformation sogar aus bijektiven Abbildungen von  $\mathbb{P}^1$  und bilden eine Untergruppe aller bijektiven Abbildungen von  $\mathbb{P}^1$ . Wenn wir wieder die

Koordinaten  $z = \frac{x}{y}$  benutzen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} z' &= \frac{ax + by}{cx + dy} = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } y \neq 0 \text{ und } ax + by \neq 0 \\ \frac{a+bz^{-1}}{c+dz^{-1}} & \text{für } x \neq 0 \text{ und } ax + by \neq 0 \end{cases} \\ \frac{1}{z'} &= \frac{cx + dy}{ax + by} = \begin{cases} \frac{cz+d}{az+b} & \text{für } y \neq 0 \text{ und } cx + dy \neq 0 \\ \frac{c+dz^{-1}}{a+bz^{-1}} & \text{für } x \neq 0 \text{ und } cx + dy \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wenn  $ax + by = 0 = cx + dy$  und entweder  $y \neq 0$  oder  $x \neq 0$  dann folgt  $a\frac{x}{y} = -b$  und  $c\frac{x}{y} = -d$ , also  $(ad - bc) = 0$  oder  $b\frac{y}{x} = -a$  und  $d\frac{y}{x} = -c$ , also auch  $ad - bc = 0$ . Deshalb bilden die Elemente  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$  tatsächlich  $\mathbb{P}^1$  biholomorph auf sich selber ab, d.h. holomorph mit holomorpher Umkehrabbildung.

**Lemma 1.13.** *Die Gruppe der Möbiustransformationen ist isomorph zu der Quotientengruppe von  $GL(2, \mathbb{C})$  dividiert durch das Zentrum, das aus allen Vielfachen der Einheitsmatrix besteht. Sie ist auch isomorph zu der Quotientengruppe von  $SL(2, \mathbb{C})$  durch die Untergruppe  $\{\pm \mathbb{1}\}$ . Die Inverse der Möbiustransformation, die der Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  entspricht, entspricht der Matrix  $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ .*

**Beweis:** Wir haben schon gesehen, dass die Abbildung, die jedem Element in  $GL(2, \mathbb{C})$  die entsprechende Möbiustransformation zuordnet, ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von  $GL(2, \mathbb{C})$  in die Gruppe der biholomorphen Abbildungen von  $\mathbb{P}^1$  ist. Deshalb ist die Gruppe der Möbiustransformationen isomorph zu der Quotientengruppe  $GL(2, \mathbb{C})$  modulo dem Kern dieses Gruppenhomomorphismus. Der Punkt  $z = 0$  wird genau dann auf  $z = 0$  abgebildet, wenn  $b = 0$  und  $d \neq 0$ . Der Punkt  $\frac{1}{z} = 0$  wird genau dann auf  $\frac{1}{z} = 0$  abgebildet, wenn  $c = 0$  und  $a \neq 0$ . Wenn beides erfüllt ist und  $z = 1$  auf  $z = 1$  abgebildet wird muss  $a$  gleich  $d$  sein. Also besteht der Kern dieses Gruppenhomomorphismus aus allen komplexen Vielfachen der Einheitsmatrix in  $GL(2, \mathbb{C})$ . Jede Matrix in  $GL(2, \mathbb{C})$  ist offenbar das Produkt eines Vielfachen der Einheitsmatrix und einer Matrix mit Determinante Eins in  $SL(2, \mathbb{C})$ . Deshalb gibt es im Urbild jeder Möbiustransformation unter diesem Gruppenhomomorphismus ein Element in der Untergruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Dann ist die Gruppe der Möbiustransformationen also auch isomorph zu der Quotientengruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  modulo dem Kern der Einschränkung des obigen Gruppenhomomorphismus auf die Untergruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Weil die einzigen komplexen Vielfachen der Einheitsmatrix in  $SL(2, \mathbb{C})$   $\pm \mathbb{1}$  sind, besteht die Schnittmenge des Urbildes von  $\mathbb{1}_{\mathbb{P}^1}$  mit  $SL(2, \mathbb{C})$  genau aus  $\pm \mathbb{1}$ . Das inverse eines Elementes  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$  ist offenbar  $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . **q.e.d.**

**Satz 1.14.** *Sind  $(z_1, z_2, z_3)$  und  $(w_1, w_2, w_3)$  zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte in  $\mathbb{P}^1$ , dann gibt es genau eine Möbiustransformation, die  $z_i$  auf  $w_i$  abbildet für  $i =$*

1, 2, 3. Diese erhält man durch Auflösen der 6 Punkte Formel:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}$$

**Beweis:** Die rechte Seite ist in  $z$  eine Möbiustransformation  $R$ , die  $z_1$  auf Null abbildet,  $z_2$  auf 1 und  $z_3$  auf  $\infty$ . Weil  $(z_1, z_2, z_3)$  paarweise verschieden sind ist sie wohldefiniert. Analoges gilt für die linke Seite mit einer Möbiustransformation  $L$ , die  $w_1$  auf 0,  $w_2$  auf 1 und  $w_3$  auf  $\infty$  abbildet. Also ist  $L^{-1} \circ R$  die gesuchte Möbiustransformation. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, zeigen wir, dass eine Möbiustransformation, die 0 auf 0, 1 auf 1 und  $\infty$  auf  $\infty$  abbildet die Identität ist. Das folgt aus dem Beweis des vorangehenden Lemmas. **q.e.d.**

**Lemma 1.15.** Jede Möbiustransformation ist eine Komposition von

$$\begin{array}{ll} z \rightarrow z + b & \text{Translationen} \\ z \rightarrow a^2 z & \text{Drehstreckungen} \\ z \rightarrow z^{-1} & \text{Inversion.} \end{array}$$

**Beweis:** Die entsprechenden Elemente von  $SL(2, \mathbb{C})$  sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Die kleinste Untergruppe von  $SL(2, \mathbb{C})$ , die alle diese Matrizen enthält, enthält die oberen Dreiecksmatrizen und wegen der Inversion dann auch die unteren Dreiecksmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Jedes Element  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  in  $SL(2, \mathbb{C})$  mit  $a \neq 0$  oder  $d \neq 0$  lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & (cb + 1)a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \\ \begin{pmatrix} 1 & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1}(1 + bc) & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Die Elemente mit  $a = 0 = d$  lassen sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} -ib & 0 \\ 0 & ib^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{q.e.d.}$$



**Satz 1.16.** *Möbiustransformationen bilden Kreise auf Kreise ab, aber im Allgemeinen nicht den Mittelpunkt der Kreise auf den Mittelpunkt der abgebildeten Kreise.*

**Beweis:** Wegen dem vorangehenden Lemma genügt es die Aussage für die Inversion zu zeigen.

$$r^2 = |z - a|^2 = (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = z\bar{z} - z\bar{a} - \bar{z}a + a\bar{a}.$$

Die Bildwerte  $w = \frac{1}{z}$  erfüllen

$$r^2 = \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{a}}{w} - \frac{a}{\bar{w}} + a\bar{a}$$

oder auch

$$r^2 - a\bar{a} = \frac{1 - \bar{a}\bar{w} - aw}{w\bar{w}}$$

Wenn  $r^2 - a\bar{a} \neq 0$ , dann folgt

$$w\bar{w} - \bar{b}w - b\bar{w} + b\bar{b} = \frac{r^2}{r^2 - a\bar{a}} \text{ mit } b = \frac{\bar{a}}{a\bar{a} - r^2}.$$

Wenn  $r^2 = |a|^2$ , dann erhält man  $1 - \bar{a}\bar{w} - aw = 0$ . Das ist offenbar eine Gerade, und jede Gerade kann man auf diese Form bringen. Deshalb ist es praktisch auch Geraden als Kreise (durch  $\infty$ ) zu deklarieren. **q.e.d.**

**Korollar 1.17.** *Die vier paarweise verschiedenen Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  liegen genau dann auf einem Kreis, wenn das Doppelverhältnis*

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}$$

*reell ist. Dieses Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.*

**Beweis:** Aus der 6-Punkte-Formel folgt die Invarianz des Doppelverhältnisses. Außerdem folgt aus der 6-Punkte-Formel, dass die 4 Punkte genau durch eine Möbiustransformation auf eine Gerade durch  $0, 1, \infty$  abgebildet werden können, wenn das Doppelverhältnis reell ist. Dann folgt die Aussage aus dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

## 1.5 Der Cauchysche Integralsatz

Ziel dieses Abschnittes ist aus der komplexen Differenzierbarkeit zu folgern, dass die Kurvenintegrale aller holomorphen Funktionen längs geschlossener differenzierbarer Wege verschwinden. Aus dieser Eigenschaft werden wir danach die Cauchyformel ableiten, die uns alle Werte von holomorphen Funktionen innerhalb eines Gebietes allein

aus der Vorgabe der Werte der holomorphen Funktion auf dem Rand des Gebietes berechnet. Daraus werden wir eine ganze Reihe von sehr starken Aussagen über holomorphe Funktionen folgern können. Der Cauchysche Integralsatz ist also die Grundlage für fast alles Folgende und deshalb der erste große Schritt in der Analyse von holomorphen Funktionen. Zunächst definieren wir das Kurvenintegral längs eines differenzierbaren Weges.

**Definition 1.18.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe stetige Funktion. Sei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetig differenzierbarer Weg von dem abgeschlossenen Intervall  $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$  mit  $t_0 < t_1$  nach  $\mathbb{C}$ , d.h.  $\gamma$  soll im Inneren  $(t_0, t_1)$  differenzierbar sein und die Ableitung  $\dot{\gamma}$  soll sich stetig auf  $[t_0, t_1]$  fortsetzen lassen. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Das Kurvenintegral von  $f$  längs  $\gamma$ .

Wenn  $t : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$  eine auf  $(s_0, s_1)$  stetig differenzierbare Abbildung ist, deren Ableitung sich auf  $[s_0, s_1]$  stetig fortsetzen läßt, und die  $t(s_0) = t_0$  und  $t(s_1) = t_1$ , erfüllt, dann folgt aus der Substitutionsregel für eindimensionale reelle Integrale

$$\int_{s_0}^{s_1} f(\gamma(t(s))) \dot{\gamma}(t(s)) \dot{t}(s) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Dazu bemerken wir, dass wir Integrale von komplexwertigen Funktionen auf Intervallen komponentenweise, d.h. für den Realteil und den Imaginärteil jeweils getrennt ausrechnen können, so dass solche Integrale einfach ein Paar von zwei Integralen von zwei reellen Funktionen darstellen. Daraus folgt, dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung dann auch in analoger Form für solche komplexe Funktionen auf Intervallen gilt. (Wir werden später sehen, dass es eine komplexe Version des Hauptsatzes gibt, die dann aber nur für holomorphe Funktionen auf offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}$  gilt). Weil aber die Abbildung  $\mathbb{C} \simeq \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  aus dem zweiten Abschnitt, die jeder komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  die lineare Abbildung in  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$  zuordnet, die der Multiplikation mit  $z$  entspricht, ein Algebromorphismus ist (warum?), folgt dann aus dem Hauptsatz für komplexe Funktionen auf Intervallen und der Kettenregel für differenzierbare Abbildungen mehrerer Veränderlicher die Substitutionsregel für komplexe Funktionen auf Intervallen. Wegen dieser Substitutionsregel ist dann das Kurvenintegral also reparametrisierungsinvariant, d.h. es hängt nicht davon ab, wie wir den Weg durch den Parameter  $t$  oder  $s$  in einem reellen Intervall stetig differenzierbar parametrisieren. Es hängt aber im Allgemeinen schon davon ab, wie der Weg in  $U$  verläuft.

Wir werden sehen, dass es für holomorphe Funktionen nicht von der Wahl des Weges abhängt, und dass wir sogar dadurch holomorphe Funktionen charakterisieren können. Wenn es nicht von dem Weg abhängen soll, dann muss offenbar das Kurvenintegral längs geschlossener Wege verschwinden. Das ist genau der Inhalt des Cauchyschen Integralsatzes.

**Satz 1.19.** (*Cauchyscher Integralsatz*). Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f$  eine holomorphe Funktion auf  $U$ . Sei  $\varphi : [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \rightarrow U$  eine stetige, auf  $(s_0, s_1) \times (t_0, t_1)$  differenzierbare Abbildung, deren Ableitung sich stetig auf  $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$  fortsetzen lässt. Dann verschwindet das Kurvenintegral von  $f$  längs des Randes von  $\varphi$ , d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} f(\varphi(s, t_0)) \frac{\partial \varphi(s, t_0)}{\partial s} ds + \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(s_1, t)) \frac{\partial \varphi(s_1, t)}{\partial t} dt + \\ \int_{s_1}^{s_0} f(\varphi(s, t_1)) \frac{\partial \varphi(s, t_1)}{\partial s} ds + \int_{t_1}^{t_0} f(\varphi(s_0, t)) \frac{\partial \varphi(s_0, t)}{\partial t} dt = 0 \end{aligned}$$

**Beweis:** Wir nehmen zunächst an, dass  $f$  eine holomorphe Stammfunktion besitzt, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g' = f$ . Dann folgt aus der Kettenregel, dass für differenzierbare Wege  $\gamma : [t_0, t_1]$  gilt

$$\frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = g'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t).$$

Also folgt dann aus dem Hauptsatz für komplexe Funktionen auf Intervallen für die Integrale von  $f$  längs  $\gamma$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} g'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) dt = g(\gamma(t_1)) - g(\gamma(t_0)). \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Kurvenintegrale von  $f$  also unabhängig von der Wahl der Wege und hängen nur von dem Anfangspunkt und dem Endpunkt ab. Daraus folgt sofort, dass die Kurvenintegrale längs des Randes von  $\varphi$  verschwinden:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \varphi} f(z) dz &= g(\varphi(s_1, t_0)) - g(\varphi(s_0, t_0)) + g(\varphi(s_1, t_1)) - g(\varphi(s_1, t_0)) \\ &+ g(\varphi(s_0, t_1)) - g(\varphi(s_1, t_1)) + g(\varphi(s_0, t_0)) - g(\varphi(s_0, t_1)) = 0. \end{aligned}$$

In einem zweiten Schritt werden wir daraus, dass  $f$  komplex differenzierbar ist folgern, dass wir  $f$  durch eine solche Funktion annähern können. Zunächst müssen wir dafür sorgen, dass  $\varphi$  das komplexe Gebiet nicht zu sehr verzerrt. Weil die Ableitung von  $\varphi$  sich stetig auf  $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$  fortsetzen lässt und  $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$  nach Heine–Borel kompakt ist, gibt es ein  $C > 0$ , so dass die Norm  $\|\varphi'\|$  von der Ableitung  $\varphi'$  von  $\varphi$  durch  $C$  beschränkt ist, d.h. für alle Vektoren  $\begin{pmatrix} \Delta s \\ \Delta t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  und alle  $(s, t) \in [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$  gilt

$$\left\| \varphi'(s, t) \begin{pmatrix} \Delta s \\ \Delta t \end{pmatrix} \right\| \leq C \left\| \begin{pmatrix} \Delta s \\ \Delta t \end{pmatrix} \right\|.$$

Dann folgt aus dem Schrankensatz

$$|\varphi(s, t) - \varphi(s', t')| \leq C \left\| \begin{pmatrix} s - s' \\ t - t' \end{pmatrix} \right\| \quad \text{für alle } (s, t), (s', t') \in [s_0, s_1] \times [t_0, t_1].$$

Wir unterteilen jetzt das Rechteck  $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$  in vier gleichgroße Rechtecke

$$\begin{aligned} & \left[ s_0, \frac{s_0 + s_1}{2} \right] \times \left[ t_0, \frac{t_0 + t_1}{2} \right], & \left[ \frac{s_0 + s_1}{2}, s_1 \right] \times \left[ t_0, \frac{t_0 + t_1}{2} \right], \\ & \left[ s_0, \frac{s_0 + s_1}{2} \right] \times \left[ \frac{t_0 + t_1}{2}, t_1 \right], & \left[ \frac{s_0 + s_1}{2}, s_1 \right] \times \left[ \frac{t_0 + t_1}{2}, t_1 \right]. \end{aligned}$$

Für einen Weg  $\gamma$  sei  $\tilde{\gamma}$  derselbe Weg nur in umgekehrter Richtung durchlaufen. Offenbar verschwindet dann die Summe der Kurvenintegrale einer Funktion  $f$  längs  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$ . Die Summe der Kurvenintegrale längs der Ränder von  $\varphi[R_1], \dots, \varphi[R_4]$  enthält die Wege, die nicht zum Rand von  $\varphi$  gehören zwei mal jeweils in umgekehrter Richtung. Deshalb ist die Summe der Kurvenintegrale längs der Ränder  $\partial\varphi[R_1], \dots, \partial\varphi[R_4]$  aller dieser vier Teilrechtecke gerade gleich dem Kurvenintegral längs des Randes des ursprünglichen Rechteckes. Wir wählen von diesen Rechtecken  $R_1, R_2, R_3, R_4$  dasjenige  $\tilde{R}_1$  aus, so dass das Kurvenintegral längs des Randes  $\partial\varphi[\tilde{R}_1]$  den größten Absolutbetrag hat:

$$\left| \int_{\partial\varphi[R_i]} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\partial\varphi[\tilde{R}_1]} f(z) dz \right| \quad \text{für } i = 1, \dots, 4.$$

Danach wiederholen wir induktiv diese Prozedur und erhalten eine Folge  $(\tilde{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Teilrechtecken, wobei für jedes  $n \in \mathbb{N}$  das Teilrechteck  $\tilde{R}_n$  ein kartesisches Produkt zweier Teilintervalle von den jeweils  $2^n$  gleichgroßen Teilintervallen von  $[s_0, s_1]$  bzw.  $[t_0, t_1]$  ist. Die Folge  $(\varphi[\tilde{R}_n])_{n \in \mathbb{N}}$  ist damit eine Folge von abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von  $U$ , die

(i)  $\varphi[\tilde{R}_{n+1}] \subset \varphi[\tilde{R}_n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllen, und

(ii) deren Durchmesser beschränkt sind durch  $2^{-n}C \left\| \begin{pmatrix} s_1 - s_0 \\ t_1 - t_0 \end{pmatrix} \right\|$ .

Daraus folgt, dass die Schnittmenge  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi[\tilde{R}_n]$  nicht leer ist und Durchmesser Null hat, also aus genau einem Punkt  $z_0 \in U$  besteht. Weil  $f$  im Punkt  $z_0$  komplex differenzierbar ist, folgt, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0| \quad \text{für alle } |z - z_0| < \delta \text{ gilt.}$$

Also gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  folgt  $\varphi[\tilde{R}_n] \subset B(z_0, \delta)$ . Offenbar ist  $f(z_0)(z - z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2}f''(z_0)$  eine komplexe Stammfunktion von  $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ . Also folgt aus dem ersten Schritt für alle  $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \tilde{R}_n} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\partial \tilde{R}_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| + \left| \int_{\partial \tilde{R}_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \\ &\leq \epsilon C 2^{-n} \left\| \begin{pmatrix} s_1 - s_0 \\ t_1 - t_0 \end{pmatrix} \right\| C 2^{-n} 2(|s_1 - s_0| + |t_1 - t_0|) \\ &\leq \epsilon C' 4^{-n} \quad \text{mit} \quad C' = 2C^2 \left\| \begin{pmatrix} s_1 - s_0 \\ t_1 - t_0 \end{pmatrix} \right\| (|s_1 - s_0| + |t_1 - t_0|). \end{aligned}$$

Aufgrund des Auswahlkriteriums der Folge  $\tilde{R}_n$  folgt daraus induktiv für  $l = 1, \dots, N-1$

$$\left| \int_{\partial \tilde{R}_{N-l}} f(z) dz \right| \leq \epsilon 4^{-(N-l)} C' \quad \text{und zuletzt auch} \quad \left| \int_{\partial \varphi} f(z) dz \right| \leq \epsilon C'.$$

Weil das dann für alle  $\epsilon > 0$  gilt folgt der Cauchysche Integralsatz. **q.e.d.**

Es gibt auch eine reelle Variante des Cauchyschen Integralsatzes. Wenn  $g$  und  $h$  zwei differenzierbare reelle Funktionen auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^2$  sind, so dass gilt

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \quad \text{für alle } (x, y) \in U,$$

definieren wir das Kurvenintegral von  $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$  längs eines Weges  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$  als

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \cdot d\gamma = \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} g(\gamma(t)) \\ h(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$

Für zwei beliebige Polynome  $g(x, y) = a + bx + cy$  und  $h(x, y) = d + ex + fy$  ersten Grades, die

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \iff c = e$$

erfüllen gibt es offenbar ein Polynom

$$f(x, y) = ax + \frac{bx^2}{2} + cxy + dy + \frac{fy^2}{2}$$

zweiten Grades, dass

$$g(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ und } h(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

erfüllt. Indem wir die Funktionen  $g$  und  $h$  durch solche Polynome annähern anstatt die holomorphe Funktion  $f$  durch ein komplexes Polynom ersten Grades anzunähern, folgt mit den gleichen Argumenten wie im Beweis des Cauchyschen Integralsatzes

**Korollar 1.20.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Teilmenge und  $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$  zwei differenzierbare reelle Funktionen mit  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$  für alle  $(x, y) \in U$ . Sei  $\varphi : [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \rightarrow U$  eine stetige auf  $(s_0, s_1) \times (t_0, t_1)$  differenzierbare Abbildung, deren Ableitung sich stetig auf  $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$  fortsetzen läßt. Dann verschwindet das Integral von  $\binom{g}{h}$  längs des Randes von  $\varphi$ . **q.e.d.***

Wenn die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes bzw. des vorangehenden Korollars erfüllt sind, dann gibt es für jeden Quader  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \subset U$  offenbar eine stetige Funktion

$$g : [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \rightarrow \mathbb{C}$$

bzw.

$$f : [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert als das Kurvenintegral von  $f$  bzw.  $\binom{g}{h}$  längs eines Weges von  $(x_0, y_0)$  zu  $(x, y)$ . Dabei wählen wir den Weg so, dass er zusammengesetzt ist aus endlich vielen Wegen, die parallel zur  $x$ -Achse oder nur  $y$ -Achse in  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$  verlaufen. Wegen dem Cauchyschen Integralsatz hängt der Wert dieser Kurvenintegrale nicht von der Wahl der Kurvenintegrale ab. Dann ist die Funktion  $g$  bzw.  $f$  stetig partiell differenzierbar und erfüllt  $\frac{\partial g}{\partial x} = f$  und  $\frac{\partial g}{\partial y} = if$  bzw.  $\frac{\partial f}{\partial x} = g$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} = h$ . Dann ist  $g$  holomorph mit  $g' = f$  bzw.  $f$  stetig differenzierbar mit  $\frac{\partial f}{\partial x} = g$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} = h$ . Also besitzt dann  $f$  auf jedem Quader in  $U$  eine komplexe Stammfunktion bzw. die beiden reellen Funktionen  $g$  und  $h$  eine reelle Stammfunktion.

Bevor wir eine komplexe Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung herleiten, hier einige Beispiele für die Abbildung  $\varphi$ :

**Beispiel 1.21. (i)** Seien  $a, b, c, d$  vier Punkte in einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$ , die auch die komplexe Hülle dieser 4 Punkte enthält. Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow U(s, t) \mapsto a + s(b - a) + t[d + s(c - d) - a - s(b - a)] \\ &= a + s(b - a) + t(d - a) + ts(a - b + c - d).\end{aligned}$$

eine Abbildung von  $[0, 1] \times [0, 1]$  auf die konvexe Hülle von  $a, b, c, d$ . Der Rand von  $\varphi$  besteht dann aus den 4 Geraden  $(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)$ . Wenn zwei Punkte von einem dieser 4 Paare von Punkten übereinstimmen, dann erhalten wir ein Dreieck.

(ii) Sei  $\overline{B(a, R)} \setminus B(a, r) \subset U$  mit  $0 \leq r < R$ . Dann ist

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [r, R], (s, t) \rightarrow a + te^{is}$$

eine Abbildung von  $[0, 2\pi] \times [r, R]$  auf  $\overline{B(a, R)} \setminus B(a, r)$ . Der Rand von  $\varphi$  enthält zweimal die Gerade  $[a + r, a + R]$  jeweils in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen. Die Kanten  $[0, 2\pi] \times \{r\}$  und  $[0, 2\pi] \times \{R\}$  durchlaufen die beiden Kreise  $\partial B(a, r)$  und  $\partial B(a, R)$  im Gegenuhrzeigersinn bzw. im Uhrzeigersinn. Deshalb bleiben beim Kurvenintegral über dem Rand von  $\varphi$  nur diese Kreise übrig. Wenn  $r = 0$ , dann besteht das Bild der ersten Kante nur aus dem Punkt  $a$  und das Kurvenintegral längs dieser Kante verschwindet. In dieser Parametrisierung wird der Rand  $\partial B(a, R)$  dann im Uhrzeigersinn durchlaufen. Es ist aber üblich den Rand eines Balles im Gegenuhrzeigersinn zu durchlaufen. Das können wir dadurch erreichen, dass wir den Rand von  $\varphi$  in umgekehrter Richtung durchlaufen.

**Korollar 1.22.** Sei  $U$  eine konvexe Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f$  eine holomorphe Funktion auf  $U$ . Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $g$  auf  $U$ , die  $g' = f$  erfüllt. Entsprechend sind alle Kurvenintegrale  $\int_{\gamma} f(z)dz$  in  $U$  wegunabhängig und es gilt

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{t_0}^t f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = g(\gamma(t_1)) - g(\gamma(t_0)).$$

**Beweis:** Weil  $U$  konvex ist, definiert für alle Paare  $(z_0, z) \in U \times U$

$$\gamma_{(z_0, z)} : [0, 1] \rightarrow U, \quad t \mapsto z_0 + t(z - z_0)$$

einen stetig differenzierbaren Weg in  $U$  von  $z_0$  nach  $z$ . Für ein festes  $z_0$  sei  $g$  folgende Funktion auf  $U$ :

$$g : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_{\gamma_{(z_0, z)}} f(u)du = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt.$$

Im Punkt  $z = z_0$  existieren offenbar die Richtungsableitungen von  $g$  in beliebige Richtungen  $v \in \mathbb{C}$  und sind gleich  $f(z_0)v$ :

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} g(z_0 + sv) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_0^1 f(z_0 + tsv) s v dt = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_0^s f(z_0 + tv) v dt = f(z_0)v.$$

Insbesondere existieren die beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g(z_0)}{\partial x} = f(z_0) \qquad \frac{\partial g(z_0)}{\partial y} = i f(z_0)$$

Sei nun  $\tilde{z}_0$  ein anderer Punkt von  $U$  und  $\tilde{g}$  die entsprechende Funktion

$$\tilde{g}(z) = \int_{\gamma(\tilde{z}_0, z)} f(z) dz.$$

Wegen dem Beispiel (i) gilt der Cauchysche Integralsatz für das Dreieck mit den drei Kanten  $(z_0, z)$ ,  $(z, \tilde{z}_0)$  und  $(\tilde{z}_0, z_0)$ . Daraus folgt  $g(z) - \tilde{g}(z) + \tilde{g}(z_0) = 0$ , oder auch dass sich  $g$  und  $\tilde{g}$  nur um eine Konstante unterscheiden:

$$g(z) = \tilde{g}(z) - \tilde{g}(z_0) \text{ bzw. } \tilde{g}(z) = g(z) - g(\tilde{z}_0).$$

Weil das für alle  $\tilde{z}_0 \in U$  gilt, ist also  $g$  partiell differenzierbar und hat für alle  $z \in U$  die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g(z)}{\partial x} = f(z) \qquad \frac{\partial g(z)}{\partial y} = i f(z).$$

Weil  $f$  differenzierbar ist, ist  $f$  stetig und damit  $g$  auch stetig differenzierbar. Offenbar ist dann  $g$  holomorph und es gilt  $g' = f$ . **q.e.d.**

Übertragen wir dieses Korollar auf die reelle Version des Cauchyschen Integralsatzes, so erhalten wir:

**Korollar 1.23.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene konvexe Teilmenge und  $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$  zwei reelle differenzierbare Funktionen, die  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$  für alle  $(x, y) \in U$  erfüllen. Dann gibt es eine zweimal differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in U.$$

$f$  ist bis auf eine Konstante eindeutig.

**q.e.d.**



**Korollar 1.24.** *Sei  $u$  eine auf einer offenen konvexen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  zweimal differenzierbare reelle harmonische Funktion. Dann gibt es eine bis auf eine Konstante eindeutig definierte zweimal differenzierbare reelle Funktion  $v$  auf  $U$ , so dass  $f = u + iv$  holomorph ist. Dasselbe gilt auch, wenn wir die Rolle von  $u$  und  $v$  vertauschen.*

**Beweis:** Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung muss  $v$  bzw.  $u$  folgendes erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} & \text{und} & & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \text{und} & & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Dann sind die Voraussetzungen des vorangehenden Lemmas genau dann erfüllt, wenn  $u$  bzw.  $v$  harmonisch sind. q.e.d.

## 1.6 Erste Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Wir können jetzt sofort sehr weitreichende Folgerungen aus diesem harmlos aussehenden Cauchyschen Integralsatz herleiten:

**Satz 1.25.** *(Cauchysche Formel) Sei  $f$  eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  und  $\overline{B(z_0, r)} \subset U$ . Dann gilt für alle  $a \in B(z_0, r)$ .*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a).$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass wir den Rand von  $\partial B(z_0, r)$  im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

**Beweis:** Zuerst folgern wir aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r')} \frac{f(z)}{z - a} dz \quad \text{für alle} \quad B(a, r') \subset B(z_0, r).$$

Dazu nehmen wir zunächst an, dass  $z_0 \in B(a, r')$  liegt. Dann können wir wie im Beispiel 1.21 (ii) einerseits das Gebiet  $\overline{B(z_0, r)}$  durch  $[0, 2\pi] \times [0, r]$  parametrisieren und andererseits das Gebiet  $\overline{B(a, r')}$  durch  $[0, 2\pi] \times [0, r']$ . Die Kante  $[0, 2\pi] \times \{r'\}$  der zweiten Parametrisierung wird auf  $\partial B(a, r') \subset \overline{B(z_0, r)}$  abgebildet. Deshalb entspricht sie

einer glatten Kurve in dem Parameterbereich der ersten Parametrisierung, die einen Punkt auf  $\{0\} \times [0, r]$  mit dem entsprechenden Punkt auf  $\{2\pi\} \times [0, r]$  verbindet. Indem wir alle Punkte dieser Kurve durch vertikale konvexe Verbindungsgeraden mit den entsprechenden Punkten der Gerade  $[0, 2\pi] \times \{r\}$  verbinden erhalten wir eine glatte Parametrisierung  $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \overline{B(z_0, r)} \setminus B(a, r')$ . Dabei soll der Rand  $\partial B(z_0, r)$  der Kante  $[0, 2\pi] \times \{1\}$  entsprechen, und der Rand  $\partial B(a, r')$  der Kante  $[0, 2\pi] \times \{0\}$ . Die beiden anderen Kanten durchlaufen dabei den gleichen Weg in umgekehrter Richtung, so dass sich die Summe ihrer Beiträge zum Randintegral wegekürzt. Die beiden verbleibenden Ränder von  $B(z_0, r)$  und  $B(a, r')$  werden dann einmal im Uhrzeigersinn und einmal im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

Wenn  $z_0 \notin B(a, r')$ , dann wählen wir endlich viele Bälle  $B(a, r') = B(z_n, r_n) \subset \dots \subset B(z_0, r_0) = B(z_0, r)$ , deren Mittelpunkte  $a = z_n, \dots, z_0$  auf der Verbindungsgeraden von  $a$  mit  $z_0$  liegen und jeweils im nächstkleineren Ball enthalten sind. Also folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz tatsächlich, dass das Randintegral in der Cauchyschen Formel weder vom Zentrum noch vom Radius des umlaufenen Kreises  $B(z_0, r) \subset U$  abhängt, solange nur der Punkt  $a$  einmal im Gegenuhrzeigersinn umrundet wird. Deshalb können wir  $z_0 = a$  annehmen. Wenn wir den Rand  $\partial B(a, r)$  durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U, \quad t \mapsto a + re^{it}$$

parametrisieren, erhalten wir für das Randintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r)} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Das ist offenbar der Mittelwert von  $f$  auf dem Rand von  $B(a, r)$ . Weil  $f$  holomorph ist, ist  $f$  auch stetig. Also gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $r < \delta$

$$\text{und für alle } z \in \overline{B(a, r)} \quad \text{gilt} \quad |f(z) - f(a)| < \epsilon.$$

Daraus folgt

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r)} \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) \right| < \epsilon.$$

Weil das Integral unabhängig von  $r$  ist, gilt dies für alle  $\epsilon > 0$ . Daraus folgt die Cauchysche Integralformel. **q.e.d.**

**Korollar 1.26.** (Mittelwertsatz) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\overline{B(z_0, r)} \subset U$ . Dann ist  $f(z_0)$  gleich der Mittelwert von  $f$  über dem Rand von  $B(z_0, r)$ . **q.e.d.**

**Korollar 1.27.** (*Mittelwertsatz für harmonische Funktionen*) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch und  $\overline{B(z_0, r)} \subset U$ . Dann ist  $u(z_0)$  gleich dem Mittelwert von  $u$  über dem Rand von  $B(z_0, r)$ .

**Beweis:** Wegen Korollar 1.24 gibt es eine Funktion  $v$  auf  $B(z_0, r)$ , so dass  $f = u + iv$  holomorph ist. Wegen der expliziten Konstruktion im Korollar 1.23 läßt sich  $v$  auf  $\overline{B(z_0, r)}$  stetig fortsetzen. Die Aussage folgt aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

**Satz 1.28.** (*Potenzreihenentwicklungssatz*) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf der offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  und  $z_0 \in U$ . Dann gibt es genau eine Potenzreihe  $(\sum c_n(z-z_0)^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , die in einer Umgebung von  $z_0$  die Funktion  $f$  darstellt. Der Konvergenzradius ist größer als die Radien aller abgeschlossenen Bälle um  $z_0$ , die in  $U$  enthalten sind. Für die Koeffizienten  $c_n$  gilt die Cauchysche Koeffizientenformel:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, t)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

**Beweis:** Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $z_0 = 0$  annehmen. Sei also  $\overline{B(0, r)} \subset U$ . Dann gilt wegen der Cauchyschen Formel für  $z \in B(0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} d\zeta.$$

Für  $|\frac{z}{\zeta}| \leq 1 - \epsilon$  konvergiert  $\sum (\frac{z}{\zeta})^n$  gleichmäßig gegen  $\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}$ . Weil  $f$  stetig auf  $\overline{B(0, r)}$  und damit auch beschränkt ist, konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta} (\frac{z}{\zeta})^n$  für  $|z| \leq (1 - \epsilon)|\zeta|$  gleichmäßig gegen  $\frac{f(\zeta)}{z - \zeta}$ . Dann folgt für alle  $z \in B(0, r(1 - \epsilon))$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, t)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n.$$

Daraus folgt die Cauchy'sche Formel. Wegen Satz 1.3 ist der Konvergenzradius größer als die Radien aller abgeschlossenen Bälle um  $z_0$  in  $U$ . Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass für konvergente Potenzreihen, wegen Satz 1.3 die Potenzreihe mit der Taylorreihe übereinstimmt. **q.e.d.**

**Korollar 1.29.** (*Satz von Goursat*) Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar. **q.e.d.**

**Korollar 1.30.** (Cauchysche Abschätzung für die Taylorkoeffizienten) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Wenn  $f$  auf dem Rand des Balles  $\overline{B}(z_0, r) \subset U$  um  $z_0$  mit Radius  $r$  durch  $M$  beschränkt ist, dann folgt für die Taylorkoeffizienten von  $f$  bei  $z_0$ :

$$|f^{(n)}(z_0)| = n!|c_n| \leq n! \frac{M}{r^n}.$$

**Beweis:** Wegen der Cauchyschen Koeffizientenformel gilt

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^{n+1}e^{int}} ire^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{it})|}{r^n} dt \leq \frac{M}{r^n}.$$

Wegen Satz 1.3 stimmt die Taylorreihe von der Potenzreihe  $(\sum c_n(z - z_0)^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit dieser Potenzreihe überein. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

**Satz 1.31.** (Satz von Liouville) Jede beschränkte holomorphe Funktion  $f$  auf  $\mathbb{C}$  ist konstant.

**Beweis:** Wegen dem vorangehenden Korollar ist die Ableitung  $f'$  in jedem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  beliebig klein, also gleich Null. Dann muss  $f$  konstant sein. **q.e.d.**

**Korollar 1.32.** Sei  $f$  eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ . Wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $M > 0$  gibt, so dass für alle  $z \in \mathbb{C}$  auch  $|f(z)| \leq M|z|^n$  gilt, dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$ .

**Beweis:** Wegen der Cauchyschen Koeffizientenformel sind alle Taylorkoeffizienten von  $f$  bei  $z = 0$  der Ordnung größer als  $n$  beliebig klein, also gleich Null. Also ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$ . **q.e.d.**

**Satz 1.33.** (Satz von Morera, Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes) Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f$  eine komplexe stetige Funktion auf  $U$ . Wenn das Kurvenintegral von  $f$  längs des Randes von allen Dreiecken in  $U$  verschwindet, dann ist  $f$  holomorph.

**Beweis:** Sei  $z_0 \in U$  und  $B(z_0, r) \subset U$ . Offenbar reichen die Voraussetzungen an  $f$  aus um die Funktion  $g$

$$g : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt$$

aus dem Beweis von Korollar 1.22 zu definieren. Es überträgt sich sogar der ganze Beweis und zeigt, dass  $g$  holomorph ist und auf  $B(z_0, r)$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Dann folgt aus dem Potenzreihenentwicklungssatz und Satz 1.3, dass auch  $g' = f$  holomorph auf  $B(z_0, r)$  ist. **q.e.d.**

# Kapitel 2

## Lokales Verhalten holomorpher Funktionen

### 2.1 Nullstellen von holomorphen Funktionen

**Definition 2.1.** (Nullstellenordnung) Ist  $z_0 \in U$  eine Nullstelle einer holomorphen Funktion  $f$  auf einer offenen Menge  $U$ . Dann heißt

$$\text{ord}_{z_0}(f) = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

die Ordnung oder Vielfachheit der Nullstelle.

Die Ordnung ist offenbar entweder eine natürliche Zahl oder  $\infty$ . Wir können auch Punkte, an denen  $f$  nicht verschwindet, als Nullstellen der Ordnung 0 bezeichnen. Wenn die Ordnung einer Nullstelle unendlich ist, verschwindet wegen dem Potenzreihenentwicklungssatz  $f$  auf einer Umgebung von  $z_0$ . Dann ist die Menge aller Nullstellen unendlicher Ordnung offen und als Schnittmenge der abgeschlossenen Mengen, an denen die  $n$ -ten Ableitungen verschwinden, auch abgeschlossen. Sie besteht also für zusammenhängende Gebiete  $U$  entweder aus ganz  $U$  oder ist leer.

**Definition 2.2.** Ein Gebiet  $G$  ist eine offene zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

**Satz 2.3.** (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes komplexe Polynom vom Grad größer oder gleich Eins besitzt eine komplexe Nullstelle.

**Beweis:** Sei  $p_n(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  ein komplexes Polynom vom Grad  $n > 0$ , also  $a_n \neq 0$ . Für  $z \neq 0$  schreiben wir  $p_n(z) = a_n z^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n})$ . Also gilt

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|z||a_n|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z||a_n|} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } |z| \geq 1 + \frac{2|a_{n-1}|}{|a_n|} + \dots + \frac{2|a_0|}{|a_n|}.$$

Dann ist  $\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{1}{|a_n||z|^n(1 - \frac{1}{2})} \leq \frac{2}{|a_n|}$  für  $|z| \geq 1 + \frac{2|a_{n-1}|}{|a_n|} + \dots + \frac{2|a_0|}{|a_n|}$ .

Wenn  $p_n(z)$  keine Nullstelle hätte, wäre also  $\frac{1}{p_n(z)}$  eine holomorphe beschränkte Funktion auf  $\mathbb{C}$ . Aus dem Satz von Liouville folgt, dass  $\frac{1}{p_n(z)}$  und damit auch  $p_n(z)$  konstant ist, im Widerspruch zu den Voraussetzungen an  $p_n$ . **q.e.d.**

**Satz 2.4.** (Nullstellensatz) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet  $U$ . Wenn  $z_0 \in U$  eine Nullstelle endlicher Ordnung  $n$  von  $f$  ist, dann gibt es eine biholomorphe Abbildung  $h : V \rightarrow W$  von einer offenen Umgebung  $V \subset U$  auf eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , so dass für alle  $z \in W$  gilt  $f(h^{-1}(y)) = y^n$ .

**Beweis:** Wegen dem Potenzreihenentwicklungssatz folgt aus der Definition der Ordnung  $n$  der Nullstelle  $z_0$ , dass in einer Umgebung von  $z_0$   $f$  geschrieben werden kann als

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

mit einer konvergenten Potenzreihe  $g(z)$ , die  $g(z_0) \neq 0$  erfüllt. Insbesondere ist  $g(z)$  holomorph. Wegen der Polardarstellung  $z = re^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + ri \sin(\varphi)$  ist die Exponentialfunktion  $\exp$  eine surjektive Abbildung nach  $\mathbb{C}^*$ . Dann gibt es für jedes  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  einen Wert  $\ln(z_0) \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(\ln(z_0)) = z_0$ . Diese Zahl ist nur bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi i$  definiert. Wir haben im Beispiel (iv) für konvergente Potenzreihen schon gesehen, dass die Funktion  $\ln$  um alle Punkte  $g(z_0) \in \mathbb{C}^*$  herum auf  $B(g(z_0), |g(z_0)|)$  holomorph ist. Deshalb ist auch für alle  $g(z_0) \in \mathbb{C}^*$  die  $n$ -te Wurzel eine holomorphe Funktion auf  $B(g(z_0), |g(z_0)|)$ :

$$\sqrt[n]{g} : B(g(z_0), |g(z_0)|) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \exp\left(\frac{1}{n} \ln(g)\right).$$

Dann gibt es auch eine holomorphe Funktion  $\sqrt[n]{g}$  in einer Umgebung von  $z_0$ , die bei  $z_0$  gleich einer  $n$ -ten Wurzel von  $g(z_0)$  ist. Sei  $h(z) = (z - z_0) \sqrt[n]{g(z)}$ . Dann ist  $h'(z_0) = \sqrt[n]{g(z_0)} \neq 0$ . Insbesondere ist  $h$  als  $\mathbb{R}^2$ -wertige Funktion auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  stetig differenzierbar und hat in  $z_0$  eine invertierbare Ableitung. Wegen dem Satz der inversen Funktion ist  $h$  auf einer Umgebung von  $z_0$  bijektiv mit differenzierbarer Umkehrabbildung  $h^{-1}$ . Weil die inverse einer lineare Abbildung in  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ , die der Multiplikation mit einer komplexen Zahl in  $\mathbb{C}^*$  entspricht, der Multiplikation mit der reziproken komplexen Zahl entspricht, ist mit  $h$  auch  $h^{-1}$  holomorph und es gilt  $f(h^{-1}(z)) = z^n$ . **q.e.d.**

Offenbar hat die Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^n$  die Eigenschaft, dass die Urbilder aller Elemente von  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  aus genau  $n$  Elementen

$$z, qz, q^2z, \dots, q^{n-1}z \quad \text{bestehen mit} \quad q = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Dann gilt für jede holomorphe Funktion  $F$  in einer Umgebung einer  $n$ -fachen Nullstelle, dass jeder Wert von  $B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$  genau  $n$  mal angenommen wird. Man spricht dann von  $n$  Blättern der Abbildung  $z \mapsto f(z)$ . Geometrisch kann man sich das veranschaulichen, indem man ein Blatt längs einer Linie zum Ursprung aufschneidet, dann  $n$ -mal umherdreht und dann wieder zusammenklebt. Im Fall von  $n = 1$  folgt außerdem, dass in einer Umgebung von der einfachen Nullstelle  $f$  eine Umkehrabbildung besitzt, die ebenfalls holomorph ist. Also ist  $f$  in einer Umgebung einer einfachen Nullstelle biholomorph. Indem wir von einer holomorphen Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  die Konstante  $f(z_0)$  subtrahieren erhalten wir

**Korollar 2.5.** *Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$ . Die Abbildung  $f$  ist genau dann in einer Umgebung von  $z_0 \in U$  biholomorph, also bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung, wenn  $f'(z_0) \neq 0$ . q.e.d.*

**Korollar 2.6.** *(Gebietstreue) Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe nicht konstante Funktion auf einem Gebiet  $G$ . Dann ist das Bild jeder offenen Menge offen und  $f[G]$  ein Gebiet.*

**Beweis:** Weil die Menge aller Punkte, an denen  $f'$  zu unendlicher Ordnung verschwindet, sowohl offen als auch abgeschlossen ist, ist es gleich es leer. Weil die Abbildung  $z \mapsto z^n$  alle Bälle  $B(0, \epsilon)$  surjektiv auf  $B(0, \epsilon^n)$  abbildet, ist das Bild einer Umgebung einer Nullstelle von  $f$  wegen dem Nullstellensatz wieder eine Umgebung von 0. Dann ist auch die Umgebung eines Punktes  $z_0 \in G$  eine Umgebung von  $f(z_0)$ . Also ist das Bild jeder offenen Menge offen. Das Urbild einer sowohl offenen als auch abgeschlossenen Menge ist unter einer stetigen Abbildung immer sowohl offen als auch abgeschlossen. Also ist das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend. q.e.d.

**Korollar 2.7.** *(Identitätssatz) Seien  $f_1$  und  $f_2$  zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet  $G$ . Wenn die Menge aller Punkte von  $G$ , auf denen  $f_1$  und  $f_2$  übereinstimmen, einen Häufungspunkt in  $G$  hat, d.h. einen Punkt in  $G$  der in jeder Umgebung unendlich viele Punkte der Menge enthält, dann stimmen  $f_1$  und  $f_2$  auf  $G$  überein.*

**Beweis:** Die Differenz  $f_1 - f_2$  ist holomorph. Also sind entweder alle Nullstellen isoliert, besitzen also eine Umgebung ohne eine weitere Nullstelle, oder  $f_1$  und  $f_2$  stimmen überein. Also folgt daraus, dass die Nullstellen einen Häufungspunkt in  $G$  besitzen, der dann auch eine Nullstelle sein muss, dass  $f_1$  und  $f_2$  übereinstimmen. q.e.d.

**Korollar 2.8.** *(Maximumprinzip) Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einem Gebiet  $G$ .*

- (i) *Wenn  $|f|$  auf  $G$  sein Maximum annimmt, dann ist  $f$  konstant.*
- (ii) *Sei  $K \subset G$  kompakt. Dann nimmt  $|f|$  das Maximum auf dem Rand von  $K$  an.*

**Beweis:** Für nicht konstantes  $f$  ist das Bild von  $f$  wegen der Gebietstreue offen. Offenbar ist für alle  $f(z_0) \in \mathbb{C}$  die Menge  $\{f \in \mathbb{C} \mid |f| \leq |f(z_0)|\}$  keine Umgebung von  $f(z_0)$ . Daraus folgt (i). Jede stetige reelle Funktion nimmt auf einer kompakten Menge das Supremum an. Deshalb folgt (ii) aus (i). **q.e.d.**

**Satz 2.9.** (Schwarzes Spiegelungsprinzip) Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$  und  $f$  eine stetige komplexe Funktion auf  $U$ , die im Inneren  $U^\circ = \{z \in U \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  holomorph ist und auf  $\{z \in U \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$  nur reelle Werte annimmt. Sei  $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in U\}$ . Dann ist die Funktion

$$g : U \cup \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in U \\ \bar{f}(\bar{z}) & \text{für } z \in \bar{U} \end{cases} \quad \text{holomorph.}$$

**Beweis:** Zunächst bemerken wir, dass aus  $z \in U \cap \bar{U}$  folgt  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , oder  $\bar{z} = z$ , also auch  $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$ . Deshalb ist  $g$  eindeutig definiert. Offenbar ist die Teilmenge  $U \cup \bar{U}$  in  $\mathbb{C}$  offen. Wir zeigen, dass  $f$  die Bedingung des Satzes von Morera erfüllt. Weil  $f$  im Inneren  $U^\circ = \{z \in U \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  von  $U$  holomorph ist, ist das Kurvenintegral längs aller Ränder von Dreiecken oder Vierecken in  $U^\circ$  gleich Null. Wenn wir ein Dreieck oder Viereck in  $U$  um  $i\epsilon$  verschieben, liegt es in  $U^\circ$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$ , ist  $f$  auf einer kompakten Umgebung eines Dreieckes oder Viereckes in  $U$  auch gleichmäßig stetig. Dann ist die Abbildung, die jedem  $t \in [0, \epsilon]$  das Kurvenintegral längs des um  $it$  verschobenen Rechtecks bzw. Quadrats zuordnet in  $t = 0$  stetig. Also ist das Kurvenintegral längs aller Ränder von Dreiecken bzw. Vierecken in  $U$  auch gleich Null. Weil  $z \mapsto \bar{f}(\bar{z})$  auch holomorph ist, gilt dasselbe auch für die Kurvenintegrale längs der Ränder von Dreiecken bzw. Vierecken in  $\bar{U}$ . Jedes Dreieck in  $U \cup \bar{U}$  können wir zerlegen in ein Viereck und ein Dreieck jeweils in  $U$  bzw. in  $\bar{U}$ . Das Kurvenintegral längs des Randes von beiden verschwindet. Dann verschwindet auch das Kurvenintegral längs des Randes aller Dreiecke in  $U \cup \bar{U}$ . **q.e.d.**

## 2.2 Holomorphe Abbildungen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$

**Satz 2.10.** (Lemma von Schwarz) Sei  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  und  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt:

- (i)  $|f'(0)| \leq 1$ ; Gleichheit nur für  $f(z) = e^{i\varphi}z$  mit  $\varphi \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $|f(z)| \leq |z|$  für  $z \in \mathbb{D}$ ; Für  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  Gleichheit nur für  $f(z) = e^{i\varphi}z$  mit  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Wegen dem Nullstellensatz gibt es eine holomorphe Funktion  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = zg(z)$  für alle  $z \in \mathbb{D}$ . Weil  $f$   $\mathbb{D}$  auf  $\mathbb{D}$  abbildet, bildet auch  $g$   $\mathbb{D}$  auf  $\mathbb{D}$  ab. Aus



dem Maximumprinzip folgt für alle  $z \in \mathbb{D}$  auch  $|g(z)| \leq 1$ . Wegen  $f'(0) = g(0)$  folgt  $|f'(0)| \leq 1$  und Gleichheit nur für konstante  $g$  mit  $|g| = 1$ . Genauso folgt  $|f(z)| \leq |z|$ . Gleichheit gilt für  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  wieder nur für konstante  $g$  mit  $|g| = 1$ . **q.e.d.**

Wir wollen jetzt die Untergruppe der Möbiustransformationen bestimmen, die  $\mathbb{D}$  auf sich selber abbilden. Weil alle Möbiustransformationen  $\mathbb{P}^1$  biholomorph auf sich selber abbilden, müssen alle Möbiustransformationen, die  $\mathbb{D}$  auf sich selber abbilden, den Rand  $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  auf sich selber abbilden. Wegen Satz 1.14 ist die Möbiustransformation, die die drei Punkte  $z = 0$ ,  $z = 1$  und  $z = \infty$  auf  $z = 1$ ,  $z = i$ , und  $z = -1$  abbildet gegeben durch  $z \mapsto \frac{i+z}{i-z}$ . Weil  $\partial\mathbb{D}$  der eindeutig bestimmte Kreis durch die drei Punkte  $z = 1$ ,  $z = i$ , und  $z = -1$  ist, bildet wegen Satz 1.16 diese Möbiustransformation alle reellen Zahlen (einschließlich  $\infty$ ) auf  $\partial\mathbb{D}$  ab. Die inverse Möbiustransformation

$$x = \frac{i+z}{i-z} \iff ix - i = z(1+x) \iff x \mapsto z = i \frac{x-1}{x+1}$$

bildet dann  $\partial\mathbb{D}$  auf alle reellen Zahlen (einschließlich  $\infty$ ) ab. Deshalb bildet die Möbiustransformation zu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$  höchstens dann  $\mathbb{D}$  auf sich selber ab, wenn

$$z \rightarrow i \frac{\frac{a(i+z)+b(i-z)}{c(i+z)+d(i-z)} - 1}{\frac{a(i+z)+b(i-z)}{c(i+z)+d(i-z)} + 1} = i \frac{(a-b-c+d)z + i(a+b-c-d)}{(a-b+c-d)z + i(a+b+c+d)}$$

alle reellen Zahlen auf reelle Zahlen abbildet. Wegen Lemma 1.13 sind durch die Möbiustransformation die Zahlen  $a, b, c$  und  $d$  nur bis auf Multiplikation mit einer komplexen Zahl festgelegt. Deshalb bildet die Möbiustransformation zu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$  genau dann  $\partial\mathbb{D}$  auf sich selber ab, wenn folgendes gilt

$$(a-b-c+d) \in i\mathbb{R}, \quad (a+b-c-d) \in \mathbb{R} \quad (a-b+c-d) \in \mathbb{R}, \quad (a+b+c+d) \in i\mathbb{R}$$

oder auch wenn folgendes gilt (alle Koeffizienten werden mit  $i$  multipliziert):

$$(a-b-c+d) \in \mathbb{R}, \quad (a+b-c-d) \in i\mathbb{R} \quad (a-b+c-d) \in i\mathbb{R}, \quad (a+b+c+d) \in \mathbb{R}$$

Im ersten Fall folgt aus der ersten und dritten Bedingung  $c-d = \bar{a} - \bar{b}$  und den beiden anderen  $c+d = -\bar{a} - \bar{b}$ . Also ist der erste Fall äquivalent zu  $c = -\bar{b}$  und  $d = -\bar{a}$ . Analog ist der zweite Fall äquivalent zu  $c = \bar{b}$  und  $d = \bar{a}$ . Offenbar ist in beiden Fällen die Determinante von  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  reell. Weil aber die Koeffizienten des zweiten Falles mit  $i$  multipliziert die Koeffizienten des ersten Falles ergeben, entspricht der eine Fall positiver Determinante und der andere Fall negativer Determinante. Die Einsmatrix erfüllt die zweite Bedingung. Also können wir im zweiten Fall die Matrizen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  in

$SL(2, \mathbb{C})$  wählen. Dann ist  $ad - bc = a\bar{a} - b\bar{b} = 1$ . Offenbar können wir diese Zahlen parametrisieren durch  $z_0 \in \mathbb{D}$  und  $e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in \mathbb{R}$ :

$$b = -z_0 a \quad a = \frac{e^{i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{a - |z_0|^2}}$$

Dann erhalten wir

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} = \frac{e^{i\varphi}(z - z_0)}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Diese Möbiustransformationen bilden offenbar  $z_0 \in \mathbb{D}$  auf  $0 \in \mathbb{D}$  ab, deshalb nicht nur  $\partial\mathbb{D}$  sondern auch  $\mathbb{D}$  auf sich selber.

**Lemma 2.11.** *Alle Möbiustransformationen, die  $\mathbb{D}$  auf  $\mathbb{D}$  abbilden sind von der Form*

$$z \rightarrow e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}. \quad \text{q.e.d.}$$

**Satz 2.12.** *(Lemma von Schwarz Pick) Sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph, dann gilt für alle  $z \in \mathbb{D}$*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn  $f$  eine Möbiustransformation ist.*

**Beweis:** Wir definieren zwei Möbiustransformationen von  $\mathbb{D}$  nach  $\mathbb{D}$

$$\Phi_1(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z} \quad \text{und} \quad \Phi_2(z) = \frac{z - f(z_0)}{1 - \bar{f}(z_0)z}$$

und betrachten die Abbildung  $F = \Phi_2 \circ f \circ \Phi_1$ . Offenbar ist  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  und  $F(0) = 0$ . Mit dem Lemma von Schwarz folgt

$$1 \geq |F'(0)| = |\Phi_2'(f(z_0))f'(z_0)\Phi_1'(0)| = \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |f(z_0)|^2} |f'(z_0)|.$$

Dann folgt die Ungleichung aus dem Lemma von Schwarz. Gleichheit gilt genau dann, wenn  $F$  eine Drehung ist, also  $f$  eine Möbiustransformation von  $\mathbb{D}$  auf  $\mathbb{D}$ , die  $z_0$  auf  $f(z_0)$  abbildet. q.e.d.

Wir können auf  $\mathbb{D}$  folgende Länge von Kurven definieren:

$$c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2|\dot{c}(t)|}{1 - |c(t)|^2} dt.$$

Dann besagt das Lemma von Schwarz Pick, dass diese Länge kontrahiert wird. Und Gleichheit nur für Möbiustransformationen  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  gilt. Diese Metrik hat konstante negative Krümmung, so dass  $\mathbb{D}$  mit dieser Metrik ein Modell für den hyperbolischen Raum ist. Insbesondere sind die Isometrien des zweidimensionalen hyperbolischen Raumes gerade die Möbiustransformationen von  $\mathbb{D}$  nach  $\mathbb{D}$ .

# Kapitel 3

## Singularitäten von holomorphen Funktionen

### 3.1 Isolierte Singularitäten

**Definition 3.1.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann heißt  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$  *isolierte Singularität* von  $f$ , wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$  gilt. Die *isolierte Singularität* heißt *hebbbar*, wenn es eine holomorphe Funktion auf  $U \cup \{z_0\} = U \cup B(z_0, \epsilon)$  gibt, die auf  $U$  mit  $f$  übereinstimmt. Eine *isolierte Singularität* heißt *Pol*, wenn sie nicht hebbbar ist, aber es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $(z - z_0)^m f(z)$  eine hebbare Singularität besitzt. Zuletzt heißt sie *wesentliche Singularität*, wenn sie weder hebbbar noch ein Pol ist. Allgemein definieren wir für *isolierte Singularitäten*

$$\text{ord}_{z_0}(f) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid (z - z_0)^{-n} f(z) \text{ hat hebbare Singularität}\}$$

Die Ordnung ist entweder eine ganze Zahl oder  $+\infty$  oder  $-\infty$ . Wenn die Ordnung nicht negativ ist, dann hat  $f$  eine hebbare Singularität und die eindeutige stetige Fortsetzung von  $f$  hat bei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $\text{ord}_{z_0}(f)$ . Wenn die Ordnung negativ aber endlich ist, dann hat  $f$  bei  $z_0$  einen Pol und wir bezeichnen  $-\text{ord}_{z_0}(f)$  als die Ordnung des Poles von  $f$  bei  $z_0$ . Wenn  $\text{ord}_{z_0}(f) = \infty$  ist, dann ist  $f$  auf einer Umgebung von  $z_0$  identisch gleich Null. Zuletzt, wenn  $\text{ord}_{z_0}(f) = -\infty$ , dann hat  $f$  bei  $z_0$  eine wesentliche Singularität. Wir bemerken noch, dass wegen dem Satz von Morera die beiden folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- (i)  $f$  hat hebbare Singularität bei  $z_0$
- (ii)  $f$  lässt sich stetig auf eine Umgebung von  $z_0$  fortsetzen.

**Beispiel 3.2. (i)** Sei  $f$  holomorph auf  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $z_0 \in U$ . Dann hat  $f|_{U \setminus \{z_0\}}$  trivialerweise eine hebbare Singularität bei  $z_0$ .

**(ii)** Sei  $g$  holomorph auf  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $z_0 \in U$ . Dann hat  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$  höchstens einen Pol bei  $z_0$ . Wenn  $g$  keine Nullstelle bei  $z_0$  hat ist die Ordnung der Polstelle gleich  $n$ . Wenn  $g$  eine Nullstelle der Ordnung  $k < n$  hat, dann hat  $f$  bei  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $n - k$ . Wenn  $k \geq n$  dann hat  $f$  sogar eine hebbare Singularität bei  $z_0$  und keinen Pol.

**(iii)** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $g$  und  $h$  holomorph auf  $U$ . Sei  $z_0 \in U$  eine Nullstelle von  $h$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}_0$  und eine Nullstelle von  $g$  der Ordnung  $k \in \mathbb{N}_0$ . Wenn  $k < n$  ist, dann hat

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

bei  $z_0$  eine Polstelle der Ordnung  $n - k$ . Wenn  $n \leq k$  ist, dann hat  $f$  bei  $z_0$  eine hebbare Singularität und die holomorphe Fortsetzung hat bei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $k - n$ .

**(iv)** Sei  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto \exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ . Dann hat  $f$  bei  $z = 0$  eine wesentliche Singularität.

**(v)** Sei  $f : \mathbb{C}^* \setminus \left\{ \frac{1}{2k\pi i} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto \frac{1}{\exp(z^{-1}) - 1}$ . Dann hat  $f$  in jeder Umgebung von  $z = 0$  unendlich viele Polstellen. Deshalb ist  $z = 0$  keine isolierte Singularität von  $f$ . Dennoch wird  $z = 0$  auch eine wesentliche Singularität von  $f$  genannt.

**Definition 3.3.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen, dann ist  $f$  eine auf  $U$  bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion, wenn es eine Teilmenge  $S \subset U$  gibt, so dass

**(i)**  $S$  ist abgeschlossen.

**(ii)**  $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph.

**(iii)** Alle Punkte von  $S$  sind isolierte Singularitäten von  $f$ .

$f$  heißt meromorph, wenn  $f$  bis auf isolierte Singularitäten holomorph ist und  $f$  keine wesentlichen Singularitäten besitzt.

**Lemma 3.4.** Sei  $G$  ein Gebiet  $g, h : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Wenn  $h$  nicht identisch Null ist, dann ist  $f = \frac{g}{h}$  meromorph auf  $U$ .

**Beweis:** Weil  $h$  nicht identisch Null ist, kann  $h$  keine Nullstellen der Ordnung  $\infty$  haben. An allen Nullstellen endlicher Ordnung hat  $f$  entweder einen Pol oder eine hebbare Singularität. Außerhalb der Nullstellen von  $h$  ist  $f$  holomorph. **q.e.d.**

**Satz 3.5.** Seien  $0 \leq r < R \leq \infty$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $f$  holomorph auf  $B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$ . Für  $r = 0$  setzen wir hierbei  $\overline{B(z_0, r)} = \{z_0\}$ . Dann gilt für alle  $z \in B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$  und alle  $0 \leq r < r' < |z - z_0| < R' < R \leq \infty$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Hierbei werden die beiden Ränder jeweils im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

**Beweis:** Sei  $z \in B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$ . Wir wählen  $\epsilon > 0$ , so dass  $\overline{B(z, \epsilon)} \subset B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$  und  $R' = |z - z_0| + \epsilon$  und  $r' = |z - z_0| - \epsilon$ . Dann zeigen wir mit einem geeigneten  $\varphi$  und dem Cauchyschen Integralsatz, dass gilt

$$\int_{\partial B(z, \epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial B(z_0, R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial B(z_0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

Bezüglich folgender Polarkoordinaten

$$[0, 2\pi] \times [r', R'] \rightarrow \overline{B(z_0, R')} \setminus B(z_0, r), \quad (\varphi, t) \mapsto z_0 + te^{i\varphi}$$

zerfällt der Kreis  $\partial B(z, \epsilon)$  in zwei halbkreisförmige glatte Kurven von den Punkten

$$(0, r') \text{ bzw. } (2\pi, r') \mapsto z_0 + r' \frac{(z - z_0)}{|z - z_0|} = z_0 + \left(1 - \frac{\epsilon}{|z - z_0|}\right) (z - z_0)$$

zu dem Punkt

$$(0, R') \text{ bzw. } (2\pi, R') \mapsto (z_0 + R' \frac{z - z_0}{|z - z_0|} = z_0 + \left(1 + \frac{\epsilon}{|z - z_0|}\right) (z - z_0).$$

Diese beiden halbkreisförmigen Kurven in den Polarkoordinaten verbinden wir durch die konvexen horizontalen Verbindungsgeraden. Sie entsprechen in  $B(z_0, R)$  jeweils den Teilen der konzentrischen Kreise um  $z_0$ , die außerhalb von  $B(z, \epsilon)$  von einem Schnittpunkt mit dem Rand von  $B(z, \epsilon)$  zu dem anderen Schnittpunkt verlaufen. Dadurch erhalten wir eine glatte Abbildung  $\varphi$  von  $[0, 2\pi] \times [r', R']$  auf  $\overline{B(z_0, R')} \setminus (B(z_0, r') \cup B(z, \epsilon))$ . Der Rand von  $\varphi$  besteht aus den Kreisen  $\partial B(z_0, R')$ ,  $\partial B(z_0, r')$

und  $\partial B(z, \epsilon)$ . Dabei wird der erste im Uhrzeigersinn umlaufen und die beiden anderen im Gegenuhrzeigersinn. Also folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$- \int_{\partial B(z_0, R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial B(z_0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial B(z, \epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Dann folgt aus der Cauchyschen Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, \epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Indem wir den Cauchyschen Integralsatz nochmal auf Kreisinge anwenden, erhalten wir die gleiche Aussage für alle  $R'$  und  $r'$  mit  $0 \leq r < r' < |z - z_0| < R' < R$ . **q.e.d.**

**Satz 3.6.** (Laurententwicklungssatz) Sei  $f$  auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$  mit  $0 \leq r < R \leq \infty$  holomorph. Dann ist dort

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{für} \quad r < \varrho < R.$$

**Bemerkung 3.7.** Wir zerlegen die Summe  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  in zwei Potenzreihen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^{-n}$$

und zeigen dann, dass beide auf dem angegebenen Konvergenzbereich konvergieren. Die erste heißt Nebenteil und die zweite Hauptteil. Wegen Satz 1.3 konvergiert der Nebenteil dann für alle  $|z - z_0| < R$  und der Hauptteil für alle  $|z - z_0|^{-1} < r^{-1} \iff |z - z_0| > r$ .

**Beweis:** Im Folgenden setzen wir wieder  $z_0 = 0$ , was wir wegen der Translationsinvarianz immer tun können. Für ein  $z \in B(0, R) \setminus \overline{B(0, r)}$  wählen wir  $r'$  und  $R'$  mit  $0 \leq r < r' < |z| < R' < R \leq \infty$ . Wir betrachten jetzt die Integrale über die beiden Kreise  $\partial B(0, R')$  und  $\partial B(0, r')$  getrennt. Im Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz$$

ist  $|z| < |\zeta|$ , deshalb konvergiert die Reihe  $\frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$  gleichmäßig gegen  $\frac{1}{\zeta-z}$ . Also erhalten wir

$$\int_{\partial B(0,R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} dz \right)$$

Im Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz$$

ist  $|z| > |\zeta|$ , deshalb konvergiert die Reihe

$$-\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n-1}}{z^n}$$

gleichmäßig gegen  $\frac{1}{\zeta-z}$ . Also erhalten wir

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \left( \int_{\partial B(0,r')} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{1-n}} dz \right).$$

Weil aber die Funktion von  $\frac{f(\zeta)}{\zeta^n}$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$  auf  $B(0, R) \setminus \overline{B(0, r)}$  holomorph ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz für Kreisinge auch, dass die Integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\varrho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n} d\zeta$$

unabhängig von  $\varrho$  sind, solange  $0 \leq r < \varrho < R$  gilt. Weil Haupt- und Nebenteil jeweils Potenzreihen in  $z$  bzw.  $\frac{1}{z}$  sind, folgt dann aus Satz 1.3, dass ihre Konvergenzbereiche jeweils das Äußere von  $B(0, r)$  bzw. das Innere von  $B(0, R)$  enthalten. Also gilt für alle  $z \in B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\varrho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} dz \quad \text{für alle} \quad r < \varrho < R.$$

Der Konvergenzradius vom Nebenteil ist nicht kleiner als  $R$  und der Konvergenzradius vom Hauptteil ist nicht kleiner als  $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r} \Leftrightarrow |z-z_0| > r$ . **q.e.d.**

**Beispiel 3.8.** Die Funktion  $e^z - 1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$  hat bei  $z = 0$  eine einfache Nullstelle. Deshalb hat die Funktion  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  bei  $z = 0$  einen einfachen Pol. Dann hat die Laurentreihe folgende Form

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k \text{ mit } a_{-1} = 1.$$

Aus der Gleichung  $(e^z - 1)f(z) = 1$  folgt

$$1 = \left( \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l!} \right) \left( \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{m-1} \frac{a_k}{(m-k)!} z^m.$$

Daraus erhält man die Rekursionsformel

$$a_{-1} = 1, \quad \sum_{k=0}^m \frac{a_{k-1}}{(m-k+1)!} = 0.$$

Sie liefert  $a_0 = -\frac{1}{2}$ . Die Zahlen  $B_k = k!a_{k-1}$  heißen Bernoullizahlen. Mit ihnen gilt also

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1}.$$

Zeigen Sie, dass  $f(z) - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$  eine ungerade Funktion ist. Daraus folgt  $B_{2n+1} = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Rekursionsformel schreibt sich für  $B_k$  als

$$0 = \sum_{k=0}^m \frac{B_k}{k!(m-k+1)!} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k.$$

Damit gilt auch

$$\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k = 0, \quad B_0 = 1.$$

**Korollar 3.9.** Sei  $f$  auf  $B(z_0, R) \setminus \overline{B(z_0, r)}$  holomorph und  $0 \leq r < \varrho < R$ . Wenn  $|f|$  auf  $\partial B(z_0, \varrho)$  durch  $M$  beschränkt ist, dann gilt für die Koeffizienten der Laurentreihe

$$|c_k| \leq \frac{M}{\varrho^k} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

**Satz 3.10.** (Riemannscher Hebbarkeitssatz) Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion  $f$ . Wenn  $f$  für ein  $\epsilon > 0$  auf  $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$  beschränkt ist, dann hat  $f$  bei  $z_0$  eine hebbare Singularität.



**Beweis:** Aus dem vorangehenden Korollar folgt, dass alle Koeffizienten vom Hauptteil beliebig klein sein müssen, also verschwinden. **q.e.d.**

**Satz 3.11.** (Casorati-Weierstraß) *Eine holomorphe Funktion kommt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jedem Wert aus  $\mathbb{C}$  beliebig nahe: Ist  $z_0$  eine wesentliche Singularität von der auf  $U \subset \mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $f$ . Dann ist für jedes  $\epsilon > 0$  das Bild von  $f[U \cap B(z_0, \epsilon)]$  dicht in  $\mathbb{C}$ .*

**Beweis:** Andernfalls gibt es ein  $\epsilon > 0$ , ein  $w \in \mathbb{C}$  und ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|f(z) - w| > \delta \quad \text{für alle } z \in B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} \quad \text{gilt.}$$

Dann hat die Funktion  $\frac{1}{f(z)-w_0}$  wegen dem Riemannschen Hebbarkeitssatz eine hebbare Singularität bei  $z_0$  und verschwindet nicht identisch. Also hat  $f(z) = (\frac{1}{f(z)-w})^{-1} + w$  bei  $z_0$  entweder einen Pol oder eine hebbare Singularität. **q.e.d.**

**Beispiel 3.12.** *Die Funktion  $z \mapsto \exp(z^{-1})$  hat bei  $z = 0$  eine wesentliche Singularität. Weil die reelle Funktion  $x \mapsto \exp(x)$  eine bijektive Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $(0, \infty)$  ist, und die Abbildung  $\varphi \mapsto \exp(i\varphi)$  eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , ist die Abbildung  $z \mapsto \exp(z)$  auch eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}^*$ . Die Urbilder eines Elementes in  $\mathbb{C}^*$  bestehen aus Mengen von der Form  $\{z + 2\pi in \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Für alle  $\epsilon > 0$  enthält offenbar jedes Urbild unendlich viele Elemente in  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \epsilon^{-1}\}$ . Also ist für alle  $\epsilon > 0$  die Abbildung  $B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto \exp(z^{-1})$  surjektiv. Deshalb bestehen die Bilder aller Umgebungen von  $z = 0$  unter  $z \mapsto \exp(z^{-1})$  sogar aus  $\mathbb{C}^*$ . Allgemein kann man sogar zeigen, dass die Bilder jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität einer holomorphen Funktion aus  $\mathbb{C}$  mit der Ausnahme von höchstens einem Punkt bestehen.*

Weil  $1/f$  für eine meromorphe Funktion  $f$  an den Polstellen holomorph ist, kann man die meromorphen Funktionen als holomorphe Abbildungen nach  $\mathbb{P}^1$  auffassen.

Alle rationalen Funktionen sind wegen Lemma 3.4 meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . Man kann sie sogar als meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{P}^1$  auffassen. Es gilt sogar, dass die meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{P}^1$  genau die rationalen Funktionen sind (warum?). Also sind die rationalen Funktionen genau die holomorphen Abbildungen von  $\mathbb{P}^1$  auf sich selber.

## 3.2 Dirichletproblem

Im Dirichletproblem wird nach einer Funktion gesucht, die innerhalb eines beschränkten Gebietes harmonisch ist und auf dem Rand gleich einer gegebenen Funktion ist. Wir wollen uns hier auf Kreise  $B(z_0, r)$  beschränken.

**Definition 3.13.** Sei  $g : \partial B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Die Suche nach einer stetigen reellen Funktion  $f$  auf  $\overline{B(z_0, r)}$ , die

- (i) auf  $B(z_0, r)$  harmonisch ist, und
- (ii) deren Einschränkung auf  $\partial B(z_0, r)$  gleich  $g$  ist,

heißt Dirichletproblem.

Die Differenz zweier Lösungen des Dirichletproblems ist eine harmonische Funktion auf  $B(z_0, r)$ , die auf dem Rand verschwindet. Wenn alle solchen Funktionen identisch verschwinden, ist also die Lösung des Dirichletproblems, soweit sie existiert, eindeutig. Das folgt aus dem Maximumprinzip:

**Satz 3.14.** (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) Sei  $f$  eine harmonische reelle Funktion auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ .

- (i) Wenn  $z_0 \in G$  ein lokales Maximum oder Minimum von  $f$  ist, dann ist  $f$  konstant.
- (ii) Auf einer kompakten Menge  $K \subset G$  nimmt  $f$  das Maximum und das Minimum auf dem Rand von  $K$  an.

**Beweis:** Wenn  $z_0$  ein Maximum bzw. Minimum von  $f$  ist, dann ist wegen dem Mittelwertsatz der Mittelwert von der nicht positiven bzw. negativen Funktion  $f(z) - f(z_0)$  über kleine Kreise  $\partial B(z_0, \epsilon)$  gleich Null. Also ist diese Funktion auf den kleinen Kreisen gleich Null. Dann ist das Urbild von  $\{f(z_0)\}$  unter  $f$  sowohl offen als auch abgeschlossen, also gleich  $G$ . Daraus folgt (i). (ii) folgt sofort aus (i). **q.e.d.**

Wegen Korollar 1.24 ist die Verkettung einer holomorphen Funktion mit einer harmonischen Funktion lokal wieder der Realteil einer holomorphen Funktion und damit harmonisch. Das wollen wir jetzt ausnutzen, um den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen ähnlich wie die Cauchysche Formel auf harmonische Funktionen zu verallgemeinern. Weil wir jeden Ball  $B(z_0, r)$  durch die biholomorphe Abbildung  $z \rightarrow \frac{z-z_0}{r}$  auf den Ball  $B(0, 1)$  abbilden, genügt es diesen Ball  $\mathbb{D}$  zu betrachten. Weil die Möbiustransformation  $\Phi$  mit  $\Phi(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$  den Ball  $\mathbb{D}$  auf sich selber abbildet und 0 nach  $z_0$  abbildet, ist für jede harmonische Funktion auf  $\mathbb{D}$ , die sich stetig auf  $\bar{\mathbb{D}}$  fortsetzen läßt,  $f \circ \Phi$  eine harmonische Funktion auf  $\mathbb{D}$ , die sich stetig auf  $\bar{\mathbb{D}}$  fortsetzen läßt. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz

$$(f \circ \Phi)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \circ \Phi)(e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Damit erhalten wir

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\varphi} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\varphi}}\right) d\varphi$$

Wir substituieren jetzt

$$e^{i\psi} = \frac{e^{i\varphi} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\varphi}}$$

und erhalten

$$e^{i\varphi} = \frac{e^{i\psi} - z_0}{1 - \bar{z}_0 e^{i\psi}}$$

bzw.

$$ie^{i\varphi} d\varphi = \frac{ie^{i\psi}(1 - \bar{z}_0 e^{i\psi}) - \bar{z}_0 ie^{i\psi}(e^{i\psi} - z_0)}{(1 - \bar{z}_0 e^{i\psi})^2} d\psi$$

$$d\varphi = \frac{(1 - z_0 \bar{z}_0)e^{i\psi}}{(1 - \bar{z}_0 e^{i\psi})^2} \frac{1 - \bar{z}_0 e^{i\psi}}{(e^{i\psi} - z_0)} d\psi = \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{(e^{-i\psi} - \bar{z}_0)(e^{i\psi} + z_0)} d\psi$$

Insgesamt folgt dann

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\psi}) \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{|e^{i\psi} - z_0|^2} d\psi$$

Allgemein gilt dann

**Satz 3.15.** (Poissonsche Darstellungsformel) Sei  $f$  eine stetige Funktion auf  $\overline{B(z_0, r)}$ , die auf  $B(z_0, r)$  harmonisch ist. Dann gilt für alle  $z \in B(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\psi}) \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\psi} - z|^2} d\psi. \quad \text{q.e.d.}$$

**Satz 3.16.** Umgekehrt sei  $g$  eine gegebene stetige reelle Funktion auf  $\partial B(z_0, r)$ . Dann ist die eindeutige Lösung des Dirichletproblems mit dem Randwert  $g$  gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\psi}) \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\psi} - z|^2} d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\psi}) \Re \left( \frac{z_0 + re^{i\varphi} + z}{z_0 + re^{i\varphi} - z} \right) d\psi.$$

**Beweis:** Für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $z \mapsto \frac{z_0 + re^{i\varphi} + z}{z_0 + re^{i\varphi} - z}$  offenbar auf  $z \in B(z_0, r)$  eine konvergente Potenzreihe, die für alle  $\epsilon > 0$  auf  $z \in B(z_0, r - \epsilon)$  sogar gleichmäßig konvergiert. Also ist auch die Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\psi}) \frac{z_0 + re^{i\varphi} + z}{z_0 + re^{i\varphi} - z} d\psi$$

auf  $B(z_0, r)$  eine konvergente Potenzreihe und damit holomorph. Dann ist  $f$  im Inneren von  $B(z_0, r)$  der Realteil einer holomorphen Funktion und damit harmonisch.

Wir müssen noch zeigen, dass sich  $f$  stetig auf  $\overline{B(z_0, r)}$  fortsetzen läßt und dort gleich  $g$  ist. Dazu bemerken wir, dass die Funktion  $\varphi \mapsto \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\varphi} - z|^2}$  für alle  $z \in B(z_0, r)$  auf  $\varphi \in [0, 2\pi]$  positiv ist und wegen dem Poissenschen Darstellungssatz für  $f = 1$  den Mittelwert 1 besitzt. Außerdem folgt für alle  $0 < \epsilon < r$  und  $\delta > 0$  aus  $|z_0 + re^{i\varphi} - z| > \delta$  und  $r - \epsilon < |z - z_0| < r$

$$\frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + re^{i\varphi} - z|^2} \leq \frac{r^2 - (r - \epsilon)^2}{\delta^2} = \frac{\epsilon(2r - \epsilon)}{\delta^2}$$

Wegen der Stetigkeit von  $g$  gibt es für jedes  $0 < \epsilon < \sqrt[3]{\frac{r}{2}}$  ein  $0 < \delta \leq \epsilon$ , so dass für alle  $z_1 \in \partial B(z_0, r)$  und alle  $z_2 \in \partial B(z_0, r) \cap B(z_1, \delta)$  auch  $|g(z_2) - g(z_1)| < \epsilon$  gilt. Dann folgt für alle  $z \in B(z_0, r) \setminus \overline{B(z_0, r - \delta^3)}$

$$\begin{aligned} & \left| f(z) - g\left(z_0 + \frac{z - z_0}{|z - z_0|}r\right) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g\left(z_0 + \frac{z - z_0}{|z - z_0|}r\right) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\left| re^{i\psi} - \frac{z - z_0}{|z - z_0|}r \right| < \delta} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g\left(z_0 + \frac{z - z_0}{|z - z_0|}r\right) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\left| re^{i\psi} - \frac{z - z_0}{|z - z_0|}r \right| \geq \delta} \left| g(z_0 + re^{i\psi}) - g\left(z_0 + \frac{z - z_0}{|z - z_0|}r\right) \right| \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|re^{i\psi} - z|^2} d\psi \\ & \leq \epsilon + \frac{\delta^3(2r - \delta^3)}{\delta^2} 2\|g\|_\infty \\ & \leq \epsilon(1 + 4r\|g\|_\infty) \quad \text{mit} \quad \|g\|_\infty = \sup_{\psi \in [0, 2\pi]} |g(z_0 + re^{i\psi})|. \end{aligned}$$

Also läßt sich  $f$  stetig auf  $\overline{B(z_0, r)}$  fortsetzen und auf  $\partial B(z_0, r)$  gilt  $f = g$ . **q.e.d.**

# Kapitel 4

## Analytische Fortsetzung

### 4.1 Analytische Fortsetzung längs Kreisketten

**Definition 4.1.** Eine endliche Folge  $B_0, \dots, B_n$  von offenen Bällen in  $\mathbb{C}$ , so dass für  $i = 1, \dots, n$  die Mittelpunkte zweier aufeinander folgender Bälle  $B_{i-1}$  und  $B_i$  in  $B_{i-1} \cap B_i$  enthalten sind, heißt Kreiskette. Wenn  $f_0, \dots, f_n$  holomorphe Funktionen sind auf  $B_0, \dots, B_n$ , so dass für alle  $i = 1, \dots, n$   $f_{i-1}$  und  $f_i$  auf  $B_{i-1} \cap B_i$  übereinstimmen, dann heißt die Folge  $f_0, \dots, f_n$  eine analytische Fortsetzung von  $f_0$  längs der Kreiskette  $B_0, \dots, B_n$ .

**Lemma 4.2.** Sei  $(B_0, \dots, B_n)$  eine Kreiskette in  $\mathbb{C}$  und  $f_0$  holomorph auf  $B_0$ . Wenn sich  $f'_0$  längs  $B_0, \dots, B_n$  holomorph fortsetzen läßt, dann auch  $f_0$ .

**Beweis:** Sei  $g_0, \dots, g_n$  eine Fortsetzung von  $g_0 = f'_0$  längs  $(B_0, \dots, B_n)$ . Dann besitzt wegen Korollar 1.22 jedes  $g_i$  für  $i = 1, \dots, n$  eine Stammfunktion  $f_i$  auf  $B_i$ . Die Stammfunktion ist induktiv eindeutig dadurch bestimmt, dass  $f_i$  auf  $B_{i-1} \cap B_i$  mit  $f_{i-1}$  übereinstimmt. **q.e.d.**

**Definition 4.3.** Sei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetiger Weg und  $f$  eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von  $\gamma(t_0)$ . Wir sagen eine Kreiskette verläuft längs des Weges  $\gamma$ , wenn die Mittelpunkte der Kreise der Kreiskette auf dem Weg  $\gamma$  liegen und die Wegabschnitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Mittelpunkten ganz in der Schnittmenge der beiden entsprechenden Kreise verlaufen. Eine analytische Fortsetzung von  $f$  längs einer Kreiskette längs des Weges  $\gamma$  heißt nur eine analytische Fortsetzung längs des Weges  $\gamma$ .

**Lemma 4.4.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge,  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$  ein stetiger Weg und  $B(\gamma(t_0), r_0) \subset U$  ein offener Ball um  $\gamma(t_0)$ . Dann gibt es eine Kreiskette in  $U$  längs  $\gamma$  mit Anfangsball  $B(\gamma(t_0), r_0)$ .

**Beweis:** Für jedes  $t \in [t_0, t_1]$  gibt es offenbar ein  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ , so dass der Abstand  $|\gamma(t) - z_0|$  minimal ist unter allen Abständen  $\{|\gamma(t) - z| \mid z \in \mathbb{C} \setminus U\}$ . Deshalb ist die Funktion, die jedem  $t \in [t_0, t_1]$ , den Abstand nach  $\mathbb{C} \setminus U$  zuordnet stetig und besitzt ein positives Minimum. Sei  $r > 0$  das Minimum von  $r_0$  und diesem Minimum. Wir überdecken  $[t_0, t_1]$  durch offene Intervalle  $(a(t), b(t))_{t \in [t_0, t_1]}$ , so dass für alle  $s \in (a(t), b(t)) \cap [t_0, t_1]$  der Weg  $\gamma(s)$  in  $B(\gamma(t), r/2)$  liegt. Diese Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung, deren Kreise mit Radius  $r$  die gewünschte Kreiskette liefern. Den ersten Kreis können wir auch durch  $B(\gamma(t_0), r_0)$  ersetzen. **q.e.d.**

**Lemma 4.5.** *Zwei analytische Fortsetzungen einer holomorphen Funktion  $f$  auf einer Umgebung von  $\gamma(t_0)$  längs eines stetigen Weges  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  stimmen auf einer Umgebung von  $\gamma(t_1)$  überein.*

**Beweis:** Für eine Kreiskette längs des Weges  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ , gibt es für jeden Punkt  $t \in [t_0, t_1]$  einen offenen Ball um  $\gamma(t)$ , der in den beiden Kreisen enthalten ist, deren Mittelpunkte das entsprechende Wegstück beranden. Wenn  $\gamma(t)$  selber ein Mittelpunkt einer der Kreisketten ist, wählen wir einen offenen Ball in der Schnittmenge des Kreises um  $\gamma(t)$  mit beiden benachbarten Kreisen. Für zwei Kreisketten längs des Weges  $\gamma$  erfüllt dann für jeden Punkt  $t \in [t_0, t_1]$  die Schnittmenge der beiden offenen Bälle um  $\gamma(t)$  dieselbe Bedingung für beide Kreisketten. Deshalb ist die Menge aller Punkte  $t \in [t_0, t_1]$ , so dass die beiden analytischen Fortsetzungen auf einer Umgebung von  $\gamma(t)$  übereinstimmen sowohl offen als auch abgeschlossen und nicht leer. Weil alle Intervalle zusammenhängend sind, besteht sie aus  $t \in [t_0, t_1]$ . **q.e.d.**

Aus diesem Lemma und Lemma 4.2 folgt

**Korollar 4.6.** *Sei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetiger Weg und  $f$  eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von  $\gamma(t_0)$ . Dann läßt sich  $f$  genau dann längs des Weges  $\gamma$  analytisch fortsetzen, wenn sich  $f'$  längs des Weges  $\gamma$  analytisch fortsetzen läßt.* **q.e.d.**

**Definition 4.7.** *Für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  definiert folgende Relation offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Paare  $(f, D)$ , wobei  $D$  eine offene Umgebung von  $z_0$  ist und  $f$  eine holomorphe Funktion auf  $D$ :*

$$(f, D) \sim (\tilde{f}, \tilde{D}) \iff f = \tilde{f} \text{ auf einer Umgebung von } z_0.$$

Die Äquivalenzklassen nennen wir Funktionskeime bei  $z_0$ .

Das Lemma besagt also, dass analytische Fortsetzungen längs von Wegen  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  allen solchen Funktionskeimen in  $\gamma(t_0)$  einen eindeutig definierten Funktionskeim in  $\gamma(t_1)$  zuordnen, von denen sich ein Repräsentant längs  $\gamma$  analytisch fortsetzen läßt. Im Allgemeinen lassen sich nicht alle Funktionskeime in  $\gamma(t_0)$  längs des

Weges  $\gamma$  analytisch fortsetzen. Besitzt ein Funktionskeim in  $\gamma(t_0)$  einen Repräsentanten, dessen Definitionsbereich den ganzen Weg  $\gamma$  enthält, dann ist dieser Repräsentant offenbar auch ein Repräsentant des Funktionskeimes der analytischen Fortsetzung in  $\gamma(t_1)$ . Es gibt aber auch Fälle, in denen kein solcher gemeinsamer Repräsentant sowohl des Funktionskeimes in  $\gamma(t_0)$  als auch des Funktionskeimes in  $\gamma(t_1)$  einer analytischen Fortsetzung existiert.

**Beispiel 4.8.** Sei

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{it}$$

und

$$f = \ln : B(1, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \ln(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}.$$

Dann gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

Also besitzt  $f'$  einen Repräsentanten

$$f' : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Aus der Cauchyschen Formel folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f'(z) dz = 1.$$

Wenn der Logarithmus einen Repräsentanten hätte, der auf  $\mathbb{C}^*$  definiert ist, dann würde das Kurvenintegral längs aller stetig differenzierbaren geschlossenen Wege in  $\mathbb{C}^*$  verschwinden. Insbesondere müsste das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dt$  verschwinden, damit  $\ln(z)$  einen Repräsentanten für den Funktionskeim bei  $\gamma(0)$  und den Funktionskeim bei  $\gamma(2\pi) = 1 = \gamma(0)$  besitzt.

Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie die analytische Fortsetzung von Funktionskeimen längs eines Weges  $\gamma$  von diesem Weg abhängt. Offenbar können wir den Weg lokal etwas ändern, ohne dass sich die analytische Fortsetzung ändert. Zunächst bemerken wir, dass die analytische Fortsetzung sich durch monotone Reparametrisierung nicht ändert.

**Lemma 4.9.** Sei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\varphi : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$  stetig und monoton mit  $\varphi(s_0) = t_0$  und  $\varphi(s_1) = t_1$ . Dann kann man einen Funktionskeim in  $\gamma(t_0) = \gamma(\varphi(s_0))$  genau dann längs  $\gamma \circ \varphi$  fortsetzen, wenn man ihn längs  $\gamma$  fortsetzen kann. Außerdem stimmen die beiden analytischen Fortsetzungen längs  $\gamma$  und längs  $\gamma \circ \varphi$ , sofern sie existieren, auf einer Umgebung von  $\gamma(t_1) = \gamma(\varphi(s_1))$  überein.

**Beweis:** Kreisketten längs  $\gamma \circ \varphi$  sind auch Kreisketten längs  $\gamma$  und umgekehrt. **q.e.d.**

Wir können jetzt die Kurvenintegrale von holomorphen Funktionen auf stetige Wege ausdehnen.

**Definition 4.10.** Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f$  holomorph auf  $U$ . Sei  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$  ein stetiger Weg. Wegen Korollar 1.22 besitzt  $f$  auf einem Ball  $B(\gamma(t_0), r_0) \subset U$  eine Stammfunktion  $g$ . Offenbar besitzt  $f$  eine analytische Fortsetzung längs von  $\gamma$ . Also besitzt wegen Korollar 4.6 auch  $g$  eine analytische Fortsetzung längs von  $\gamma$ . Sei  $\tilde{g}$  ein Repräsentant des entsprechenden Funktionskeims bei  $\gamma(t_1)$ . Dann definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \tilde{g}(\gamma(t_1)) - g(\gamma(t_0)).$$

Im Beweis von dem Cauchyschen Integralsatz haben wir schon benutzt, dass wenn  $f$  eine Stammfunktion  $g$  auf  $U$  besitzt, das Wegintegral längs aller Wege in  $U$  gegeben ist durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(\gamma(t_1)) - g(\gamma(t_0)).$$

Indem wir einen stetig differenzierbaren Weg in  $U$  in die Abschnitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Mittelpunkte einer Kreiskette längs der Wege in  $U$  unterteilen, sehen wir, dass für stetig differenzierbare Wege, diese Definition mit der ursprünglichen Definition übereinstimmt. Wir werden später sehen, dass wir auch den Cauchyschen Integralsatz auf stetige Abbildungen  $\varphi$  verallgemeinern können.

**Beispiel 4.11. (i)**  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}$ . Die Stammfunktion von der entsprechenden reellen Funktion ist der Logarithmus. Wir wollen jetzt diese Stammfunktion zu einer holomorphen Funktion auf ein Gebiet in  $\mathbb{C}^*$  fortsetzen. Wir wissen bereits, dass ein solches Gebiet keinen Kreisring  $B(0, R) \setminus \overline{B(0, r)}$  enthalten kann, also auch nicht die Schnittmenge einer Umgebung der  $0 \in \mathbb{C}$  mit  $\mathbb{C}^*$ . Andererseits folgt aus Korollar 1.22, dass auf allen konvexen Teilmengen von  $\mathbb{C}^*$   $f$  eine Stammfunktion besitzt. Also ist insbesondere auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$  der Logarithmus eine wohldefinierte holomorphe Funktion. Dasselbe gilt auch für die Gebiete  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$  und  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}$ . Außerdem können wir diese drei holomorphen Funktionen so wählen, dass sie auf den Schnittmengen in  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$  mit der ersten Funktion übereinstimmen. Indem wir  $\ln(1) = 0$  fordern erhalten wir eine eindeutige analytische Fortsetzung des reellen Logarithmus auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0 \text{ oder } \Im(z) \neq 0\}$ . Zu diesem Definitionsbereich können wir allerdings keinen Punkt mehr hinzufügen, weil er sonst einen geschlossenen Kreis um  $z = 0$  enthalten würde. Mit dieser Fortsetzung können wir dann die



Wegintegrale von  $f$  längs aller Wege in  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0 \text{ oder } \Im(z) \neq 0\}$  berechnen. Wir werden später auch noch allgemeinere Wege betrachten.

- (ii) Die Funktion  $z \mapsto z^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \ln(z))$  wird durch die analytische Fortsetzung von  $\ln(z)$  auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0 \text{ oder } \Im(z) \neq 0\}$  auch zu einer holomorphen Funktion auf diesem Definitionsbereich. Allerdings gibt es für ein  $z \in \mathbb{C}$  nur  $n$  verschiedene Werte  $y$ , die  $y^n = z$  erfüllen. Deshalb kann man versuchen diese  $n$  verschiedenen Werte zu einem einzigen Definitionsbereich zu verkleben, der die komplexe Zahlenebene für alle Werte in  $\mathbb{C}^*$   $n$  mal durchläuft. Ein solcher Definitionsbereich existiert tatsächlich und bildet eine sogenannte  $n$ -fache Überlagerung über der komplexen Zahlenebene. Solche Definitionsbereiche sind Beispiele für Riemannsche Flächen, also komplex eindimensionale Mannigfaltigkeiten, die in weiterführenden Veranstaltungen untersucht werden.
- (iii) Die Funktion  $z \mapsto \sqrt{(z - a_1) \dots (z - a_{2n})}$  mit  $a_1, \dots, a_{2n} \in \mathbb{C}$ . Wenn wir  $n$  Wege wählen, die jeweils  $a_{2i-1}$  mit  $a_{2i}$  verbinden für  $i = 1, \dots, n$  und an der komplexen Zahlenebene alle Werte dieser  $n$  Wege herausnehmen erhalten wir eine holomorphe Funktion  $z \mapsto \sqrt{(z - a_1) \dots (z - a_{2n})}$  auf diesem Definitionsbereich. Weil nämlich jeder geschlossene Weg in diesem Definitionsbereich immer eine gerade Anzahl an Nullstellen von  $(z - a_1) \dots (z - a_{2n})$  umrundet, ist das Vorzeichen der analytischen Fortsetzung von  $z \mapsto \sqrt{(z - a_1) \dots (z - a_{2n})}$  längs geschlossener Wege in diesem Definitionsbereich eindeutig definiert. Wir werden in diesem Abschnitt Methoden entwickeln, um diesen Sachverhalt zu verstehen. Dazu führen wir zunächst einige wichtige Konzepte aus der Topologie ein.

## 4.2 Homotopie

In diesem Abschnitt sei  $X$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Die meisten Begriffe und Aussagen übertragen sich aber auch auf allgemeine topologische Räume  $X$ .

**Definition 4.12.** Ein Weg eines topologischen Raumes  $X$  oder in  $X$  ist eine stetige Abbildung von einem Intervall (im Allgemeinen  $[0, 1]$ ) nach  $X$ .

**Definition 4.13.** Eine Homotopie zwischen zwei Wegen

$$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } \alpha(0) = x_0 = \beta(0) \text{ und } \alpha(1) = x_1 = \beta(1)$$

ist eine stetige Abbildung  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  mit

$$h|_{\{0\} \times [0, 1]} = x_0 \quad h|_{\{1\} \times [0, 1]} = x_1 \quad \text{und} \quad h|_{[0, 1] \times \{0\}} = \alpha \quad h|_{[0, 1] \times \{1\}} = \beta.$$

**Lemma 4.14.** *Die Homotopie von Wegen ist eine Äquivalenzrelation.*

**Beweis:** Offenbar ist

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (t, \tau) \mapsto \alpha(t)$$

eine Homotopie zwischen  $\alpha$  und  $\alpha$ . Wenn  $h$  eine Homotopie zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  ist, dann ist

$$[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (t, \tau) \mapsto h(1 - t, \tau)$$

eine Homotopie zwischen  $\beta$  und  $\alpha$ . Also ist die Homotopie sowohl reflexiv als auch symmetrisch. Seien  $\alpha, \beta, \gamma : [0, 1] \rightarrow X$  drei Wege mit  $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = x_0$  und  $\alpha(1) = \beta(1) = \gamma(1) = x_1$ . Wenn  $h$  eine Homotopie zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  und  $g$  eine Homotopie zwischen  $\beta$  und  $\gamma$  ist, dann ist

$$[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (t, \tau) \mapsto \begin{cases} h(t, 2\tau) & \text{für } 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ g(t, 2\tau - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1 \end{cases}.$$

eine Homotopie von  $\alpha$  und  $\gamma$ . Weil  $h$  und  $g$  als stetige Abbildungen auf der kompakten Menge  $[0, 1] \times [0, 1]$  sogar gleichmäßig stetig sind, ist diese Abbildung auch gleichmäßig stetig. **q.e.d.**

**Definition 4.15.** *Ein topologischer Raum  $X$  heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle  $x_0, x_1 \in X$  einen stetigen Weg von  $x_0$  nach  $x_1$  gibt.*

Für einen topologischen Raum definiert

$$x \sim y \iff \text{es gibt einen stetigen Weg von } x \text{ nach } y$$

eine Äquivalenzrelation, weil

- (i) der konstante Weg  $[0, 1] \rightarrow x$  ein Weg von  $x$  nach  $x$  ist .
- (ii) für jeden Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  von  $x$  nach  $y$  der Weg  $[0, 1] \rightarrow X, t \mapsto \alpha(1 - t)$  ein Weg von  $y$  nach  $x$  ist, und
- (iii) für zwei Wege  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  von  $x$  nach  $y$  und von  $y$  nach  $z$  der Weg

$$\alpha\beta : [0, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg von  $x$  nach  $z$  ist.

**Definition 4.16.** Für einen topologischen Raum  $X$  heißen die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ .

**Lemma 4.17.** Für eine offene Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  sind die Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  offene und abgeschlossene Teilmengen von  $X$ . Wenn also  $X$  zusammenhängend ist, d.h. die einzigen Teilmengen von  $X$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, sind  $X$  und die leere Menge, dann ist  $X$  auch wegzusammenhängend.

**Beweis:** Offenbar sind alle konvexen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  wegzusammenhängend, also sind auch alle offenen Bälle wegzusammenhängend. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten einer offenen Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  auch offen. Weil das Komplement einer Wegzusammenhangskomponente die Vereinigung aller anderen Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  ist, ist jede Wegzusammenhangskomponente damit auch abgeschlossen. **q.e.d.**

Daraus folgt, dass eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist:

**Lemma 4.18.** Eine offene Teilmenge  $X$  des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist. Für allgemeine topologische Räume  $X$  folgt nur daraus, dass sie wegzusammenhängend sind, dass sie auch zusammenhängend sind.

**Beweis:** Das Urbild einer abgeschlossenen und offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist wieder abgeschlossen und offen. Deshalb können zwei Punkte in disjunkten abgeschlossenen und offenen Mengen eines topologischen Raumes  $X$  nicht durch einen stetigen Weg verbunden werden. Also folgt aus nicht zusammenhängend auch nicht wegzusammenhängend. Wegen dem letzten Lemma folgt für offene Mengen  $X$  des  $\mathbb{R}^n$  aus nicht wegzusammenhängend auch nicht zusammenhängend. **q.e.d.**

Für offene Mengen des  $\mathbb{R}^n$  ist also wegzusammenhängend äquivalent zu zusammenhängend. Es gibt aber Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  die zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend sind.

**Beispiel 4.19.** Die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ oder } x > 0 \text{ und } y = \sin(\frac{1}{x})\}$  hat offenbar höchstens zwei Wegzusammenhangskomponenten, nämlich die beiden offensichtlich wegzusammenhängenden Teilmengen  $\{0\} \times \mathbb{R}$  und  $\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ . Das Bild der Komposition eines stetigen Weges von einem Punkt  $(x_0, \sin(1/x_0))$  der zweiten Menge zu einem Punkt  $(0, y_1)$  in der ersten Menge mit der Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x$  muss wegen dem Zwischenwertsatz das Intervall  $[0, x_0]$  enthalten. Dann muss es auch die Teilmenge  $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0, x_0]\}$  der zweiten Menge enthalten. Weil die erste Menge eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  ist, muss der Weg an einem Parameterwert die erste Menge zum ersten Mal erreichen. Weil jeder Punkt in  $\{0\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$  Häufungspunkt einer solchen Teilmenge  $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0, x_0]\}$

der zweiten Menge ist, kann es keinen stetigen Weg von der zweiten in die erste Menge geben. Also sind diese beiden Teilmengen die Wegzusammenhangskomponenten der Menge. Dann folgt aus dem vorangehenden Lemma, dass die Schnittmenge einer offenen und abgeschlossenen Teilmenge der Menge mit diesen beiden Teilmengen entweder leer oder gleich der entsprechenden Teilmenge sind. Weil jede offene Umgebung von  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  Punkte von beiden Wegzusammenhangskomponenten enthält, ist die Menge also zusammenhängend.

**Definition 4.20.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$ . Dann heißt die Menge aller Homotopieklassen von Wegen in  $X$  von  $x_0$  nach  $x_0$  Fundamentalgruppe von  $X$  mit Anfangspunkt  $x_0$ . Sie wird mit  $\pi_1(X, x_0)$  bezeichnet. Diese Menge von Äquivalenzklassen besitzt eine Verknüpfung, die zwei Repräsentanten  $\alpha$  und  $\beta$  von Äquivalenzklassen  $[\alpha]$  und  $[\beta]$  die Äquivalenzklasse von

$$\alpha\beta : [0, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

zuordnet.

Wir zeigen gleich in (i) vom folgenden Satz, dass diese Verknüpfung von Repräsentanten von Elementen der Fundamentalgruppe tatsächlich eine Verknüpfung der Elemente der Fundamentalgruppe induziert.

Offenbar sind zwei Wege, die durch nicht notwendigerweise monotone Reparametrisierungen auseinander hervorgehen homotop.

**Lemma 4.21.** Sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg in den topologischen Raum  $X$  von  $x_0$  nach  $x_1$  und  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine stetige Abbildung mit  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi(1) = 1$ . Dann sind  $\alpha$  und  $\alpha \circ \varphi$  homotop.

**Beweis:**

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, (t, \tau) \mapsto \alpha((1 - \tau) \cdot t + \tau\varphi(t))$$

ist eine Homotopie von  $\alpha$  nach  $\alpha \circ \varphi$ .

**q.e.d.**

**Satz 4.22.** Sei  $X \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$  zwei Wege in  $X$  von  $x_0$  nach  $x_1$  bzw.  $\beta$  und  $\tilde{\beta}$  zwei Wege in  $X$  von  $x_1$  nach  $x_2$ . Zuletzt sei  $\gamma$  ein Weg in  $X$  von  $x_2$  nach  $x_3$ .

(i) Wenn  $\alpha$  homotop zu  $\tilde{\alpha}$  und  $\beta$  homotop zu  $\tilde{\beta}$  ist, dann ist  $\alpha\beta$  homotop zu  $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ .

(ii) Wir bezeichnen mit  $x_0$  und  $x_1$  auch die beiden entsprechenden konstanten Wege. Dann sind die beiden Wege  $x_0\alpha$  und  $\alpha x_1$  homotop zu  $\alpha$ .

(iii) Der Weg  $\alpha^-$  sei definiert als der Weg  $\alpha$  in umgekehrter Richtung durchlaufen:

$$\alpha^- : [0, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \alpha(1 - t).$$

Dann ist  $\alpha\alpha^-$  homotop zum konstanten Weg  $x_0$  und  $\alpha^-\alpha$  homotop zum konstanten Weg  $x_1$ .

(iv) Die beiden Wege  $(\alpha\beta)\gamma$  und  $\alpha(\beta\gamma)$  von  $x_0$  nach  $x_3$  sind homotop.

(v)  $\pi_1(X, x_0)$  ist eine Gruppe, wobei die Homotopieklasse von dem konstanten Weg  $x_0$  die Eins ist.

(vi) Wenn  $x_0$  und  $x_1$  in derselben Wegzusammenhangskomponente von  $X$  liegen, dann ist  $\pi(X, x_0)$  isomorph zu  $\pi(X, x_1)$ .

**Beweis:**

(i) Sei  $h$  eine Homotopie von  $\alpha$  nach  $\tilde{\alpha}$  und  $g$  eine Homotopie von  $\beta$  nach  $\tilde{\beta}$ . Dann ist

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (t, \tau) \mapsto \begin{cases} h(t, 2\tau) & \text{für } 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ g(t, 2\tau - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von  $\alpha\beta$  nach  $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ . Weil sowohl  $h$  als auch  $g$  auf  $[0, 1] \times [0, 1]$  gleichmäßig stetig sind ist auch  $f$  auf  $[0, 1] \times [0, 1]$  gleichmäßig stetig.

(ii) ergibt sich aus dem Lemma 4.21 mit den beiden Abbildungen  $\varphi$

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(iii) Sei

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (t, \tau) \mapsto \begin{cases} \alpha((1 - \tau)2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((1 - \tau)(2t - 1)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann folgt wieder aus der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\alpha$  auf  $[0, 1]$  die gleichmäßige Stetigkeit von  $h$  auf  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Also ist  $h$  eine Homotopie von  $\alpha\alpha^-$  nach  $x_0$ . Weil  $(\alpha^-)^-$  gleich  $\alpha$  ist, ist dann auch  $\alpha^-\alpha$  homotop zu  $x_1$ .

(iv) ergibt sich aus dem Lemma 4.21 mit der Abbildung

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- (v) Wegen (i) ist die Verknüpfung  $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$  wohldefiniert und wegen (iv) assoziativ. Wegen (ii) ist die Klasse des konstanten Weges  $[x_0]$  das neutrale Element und wegen (iii) ist  $[\alpha^-]$  das inverse Element zu  $[\alpha]$ .
- (iv) Seien  $x_0$  und  $x_1$  in einer Wegzusammenhangskomponente von  $X$ . Dann gibt es einen Weg  $\gamma$  von  $x_0$  nach  $x_1$ .  $\gamma^- : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \gamma(1-t)$  ist dann offenbar ein Weg von  $x_1$  nach  $x_0$ . Also ist für alle Wege  $\alpha$  von  $x_0$  nach  $x_0$   $\gamma^- \alpha \gamma$  ein Weg von  $x_1$  nach  $x_1$ . Wegen (i) werden homotope Wege auf homotope Wege abgebildet und wegen (ii) und (iv) sind für zwei Wege  $\alpha$  und  $\beta$  von  $x_0$  nach  $x_0$ , die Wege  $\gamma^- \alpha \beta \gamma$  und  $\gamma^- \alpha \gamma \gamma^- \beta \gamma$  homotop, und der Weg  $\gamma \gamma^- \alpha \gamma \gamma^-$  homotop zu  $\alpha$ . Also induzieren die Abbildungen

$$\alpha \mapsto \gamma^- \alpha \gamma \quad \text{und} \quad \alpha \mapsto \gamma \alpha \gamma^-$$

einen Gruppenisomorphismen von  $\pi_1(X, x_0)$  nach  $\pi_1(X, x_1)$ .

**q.e.d.**

**Definition 4.23.** Ein wegzusammenhängender topologischer Raum  $X$  heißt einfach zusammenhängend, wenn für ein  $x_0 \in X$  gilt  $\pi_1(X, x_0) \simeq \{1\}$ .

- Beispiel 4.24.** (i) Konvexe Teilmengen  $X \subset \mathbb{R}^n$  sind einfach zusammenhängend, weil für jeden Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  von  $x_0$  nach  $x_0$   $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ ,  $(t, \tau) \mapsto x_0 + (1 - \tau)\alpha(t)$  eine Homotopie von  $\alpha$  zu dem konstanten Weg  $x_0$  ist.
- (ii) Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  heißt sternförmig, wenn es ein  $x_0 \in X$  gibt, so dass für alle  $x \in X$  die konvexe Verbindungsgerade zwischen  $x_0$  und  $x$  in  $X$  liegt. Solche Mengen sind offenbar wegzusammenhängend und wieder ist für jeden Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  von  $x_0$  nach  $x_0$

$$h : [0, 1] \times [0, 1], (t, \tau) \mapsto x_0 + (1 - \tau)\alpha(t)$$

eine Homotopie von  $\alpha$  zu dem konstanten Weg  $x_0$ .

Wir haben das Konzept der Homotopie eingeführt, weil die analytische Fortsetzung längs homotoper Wege gleich ist.

**Satz 4.25.** (Monodromiesatz) Seien  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow U$  zwei homotope Wege in einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$ . Wenn ein Funktionskeim  $f$  im Punkt  $\alpha(0) = \beta(0)$  sich längs aller Wege in  $U$  analytisch fortsetzen läßt, dann sind die analytischen Fortsetzungen längs der Wege  $\alpha$  und  $\beta$  als Funktionskeime im Punkt  $\alpha(1) = \beta(1)$  gleich.

**Beweis:** Sei  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  eine Homotopie von  $\alpha$  nach  $\beta$ . Für jedes  $\tau \in [0, 1]$  ist dann  $h_\tau : [0, 1] \rightarrow U$ ,  $t \mapsto h(t, \tau)$  ein Weg von  $z_0 = \alpha(0) = \beta(0)$  nach  $z_1 = \alpha(1) = \beta(1)$  in  $U$ . Längs aller dieser Wege gibt es also eine Kreiskette in  $U$ . Sei zunächst

$\tau \in [0, 1]$  beliebig aber fest gewählt und  $D_0, \dots, D_n$  eine Kreiskette längs  $h_\tau$ . Seien  $0 = t_0, \dots, t_n = 1$  die Parameter der entsprechenden Mittelpunkte. Weil  $h$  als stetige Abbildung auf einer kompakten Menge sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es dann ein  $\epsilon_\tau > 0$ , so dass für alle  $i = 1, \dots, n$  die Homotopie  $h$  die Mengen

$$[t_{i-1}, t_i] \times ((\tau - \epsilon_\tau, \tau + \epsilon_\tau) \cap [0, 1])$$

in die offenen Bälle  $D_{i-1} \cap D_i$  abbildet. Dann gibt es auch für alle

$$\tau' \in (\tau - \epsilon_\tau, \tau + \epsilon_\tau) \cap [0, 1]$$

eine Kreiskette  $D'_0, \dots, D'_m$  des Weges  $h_{\tau'}$  mit Parametern  $t'_0, \dots, t'_m$  der Mittelpunkt, so dass für alle  $j = 0, \dots, m$  der Kreis  $D'_j$  in den Kreisen  $D_{i-1} \cap D_i$  enthalten ist, für die  $t'_j \in [t_{i-1}, t_i]$  gilt. Wenn also ein  $t'_j$  gleich ein  $t_i$  ist, dann muss  $D'_j$  sogar in  $D_{i-1} \cap D_i \cap D_{i+1}$  enthalten sein. Offenbar können wir dann die analytische Fortsetzung längs dieser  $h_{\tau'}$  mit  $\tau' \in (\tau - \epsilon_\tau, \tau + \epsilon_\tau) \cap [0, 1]$  so wählen, dass wir die entsprechenden Funktionen auf  $D_{i-1} \cap D_i$  der analytischen Fortsetzung von  $h_\tau$  auf  $D'_j$  einschränken. Also stimmen die analytischen Fortsetzungen von  $f$  längs aller Wege  $h_{\tau'}$  mit  $\tau' \in (\tau - \epsilon_\tau, \tau + \epsilon_\tau) \cap [0, 1]$  bei  $z_1$  überein. Weil  $[0, 1]$  kompakt ist, gibt es endlich viele  $0 = \tau_0 < \dots < \tau_K = 1$  in  $[0, 1]$ , so dass die entsprechenden Intervalle  $(\tau_0 - \epsilon_{\tau_0}, \tau_0 + \epsilon_{\tau_0}) \cup \dots \cup (\tau_K - \epsilon_{\tau_K}, \tau_K + \epsilon_{\tau_K})$  das ganze Intervall  $[0, 1]$  überdecken. Dann folgt induktiv für alle  $k = 0, \dots, K$ , dass die analytischen Fortsetzungen längs aller Wege  $h_\tau$  mit  $\tau \in ((\tau_0 - \epsilon_{\tau_0}, \tau_0 + \epsilon_{\tau_0}) \cup \dots \cup (\tau_k - \epsilon_{\tau_k}, \tau_k + \epsilon_{\tau_k})) \cap [0, 1]$  jeweils in  $z_1$  übereinstimmen, also auch die analytischen Fortsetzungen längs der Wege  $\alpha$  und  $\beta$  in  $z_1$ . **q.e.d.**

**Korollar 4.26.** *Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen, wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Dann besitzt jede holomorphe Funktion  $f$  auf  $U$  eine Stammfunktion.*

**Beweis:** Wegen Korollar 1.22 besitzt jeder Funktionskeim einen Repräsentanten mit einer Stammfunktion. Wegen Korollar 4.6 ist der Funktionskeim einer Stammfunktion von  $f$  längs aller Wege in  $U$  analytisch fortsetzbar. Offenbar genügt es zu zeigen, dass die analytischen Fortsetzungen längs aller Wege von einem Punkt  $z_0$  zu einem anderen Punkt  $z_1$  unabhängig von den Wegen sind. Seien  $\alpha, \beta$  zwei Wege in  $U$  von  $z_0$  nach  $z_1$  und  $g_1$  und  $\tilde{g}_1$  die entsprechenden analytischen Fortsetzungen einer Stammfunktion  $g_0$  von  $f$  in einer konvexen Umgebung von  $z_0$ . Dann ist  $\alpha^{-1}\beta$  ein Weg von  $z_1$  nach  $z_1$  und  $\tilde{g}_1$  offenbar analytische Fortsetzung von  $g_1$  längs  $\alpha^{-1}\beta$ . Weil  $U$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\alpha^{-1}\beta$  homotop zu dem konstanten Weg  $z_1$ . Also folgt aus dem Monodromiesatz, dass die Funktionskeime  $g_1$  und  $\tilde{g}_1$  übereinstimmen. **q.e.d.**

Aus der Definition des Kurvenintegrals längs stetiger Wege folgt:

**Korollar 4.27.** *Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f$  holomorph auf  $U$ . Dann stimmt das Kurvenintegral von  $f$  längs zweier homotoper Wege in  $U$  überein.* **q.e.d.**

Aus Lemma 4.21 und dem Monodromiesatz folgt, dass die analytische Fortsetzung Reparametrisierungsinvariant ist. Wir wollen zum Abschluss dieses Abschnittes noch den Cauchyschen Integralsatz auf stetige Abbildungen

$$\varphi : [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$$

verallgemeinern. Zunächst bemerken wir, dass für jede solche stetige Abbildung  $\varphi$  der Rand von  $\varphi$  ein geschlossener Weg von  $\varphi(s_0, t_0)$  nach  $\varphi(s_0, t_0)$  ist.

$$\partial\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} \varphi(s_0, t_0 + 4t(t_1 - t_0)) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \varphi(s_0 + (4t - 1)(s_1 - s_0), t_1) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(s_1, t_1 + (4t - 2)(t_0 - t_1)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \varphi(s_1 + (4t - 3)(s_0 - s_1), t_0) & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Offenbar ist  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$(t, \tau) \mapsto \begin{cases} \varphi(s_0, t_0 + 4(1 - \tau)t(t_1 - t_0)) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \varphi(s_0 + (1 - \tau)(4t - 1)(s_1 - s_0), (1 - \tau)t_1 + \tau t_0) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi((1 - \tau)s_1 + \tau s_0, (1 - \tau)(t_1 + (4t - 2)(t_0 - t_1)) + \tau t_0) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \varphi((1 - \tau)(s_1 + (4t - 3)(s_0 - s_1)) + \tau s_0, t_0) & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von  $\partial\varphi$  zu dem konstanten Weg  $\varphi(s_0, t_0)$ . Also folgt aus dem vorangehenden Korollar der Cauchysche Integralsatz für solche stetige  $\varphi$ . Wir werden im nächsten Kapitel den Cauchyschen Integralsatz noch weiter verallgemeinern. Weil nämlich das Kurvenintegral längs der Komposition von Wegen additiv ist, sollte es in gewisser Weise auf dem Kommutator von zwei Elementen der Fundamentalgruppe verschwinden. In der Topologie gibt es jetzt ein weiteres Konzept, die sogenannte Homologie von Wegen, die die Kommutatoren  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$  der Fundamentalgruppe gleich Null setzt



# Kapitel 5

## Umlaufszahl und Homologie

### 5.1 Geschlossene 1-Zykel

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Cauchyschen Integralsatz auf sogenannte nullhomologe 1-Zykel. Grob gesprochen handelt es sich dabei um solche geschlossene Wege, die in dem Quotienten der Fundamentalgruppe modulo der Kommutatoren verschwinden.

**Definition 5.1.** Für jeden topologischen Raum  $X$  sei  $C_1(X)$  die von allen Wegen in  $X$  erzeugte freie abelsche Gruppe und  $C_0(X)$  die von allen Punkten in  $X$  erzeugte freie abelsche Gruppe. Für jeden Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  definieren wir

$$\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0) \in C_0(X).$$

Dann lässt sich  $\partial$  zu einem eindeutigen Gruppenhomomorphismus von  $C_1(X)$  nach  $C_0(X)$  fortsetzen. Der Kern von  $\partial : C_1(X) \rightarrow C_0(X)$  wird mit  $Z_1(X)$  bezeichnet und die Elemente von  $Z_1(X)$  heißen 1-Zykel. Die Elemente von  $C_1(X)$  bzw.  $C_0(X)$  heißen 1-Ketten bzw. 0-Ketten.

1-Zykel sind also Verallgemeinerungen von geschlossenen Wegen, die  $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen von Wegen sind, in denen jeder Anfangspunkt bzw. Endpunkt eines Weges genauso oft als Anfangspunkt wie als Endpunkt auftaucht. Offenbar können wir das Kurvenintegral von holomorphen Funktionen auf 1-Ketten verallgemeinern.

**Definition 5.2.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f$  eine holomorphe Funktion, dann besitzt die Abbildung, die jeden Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  in  $U$  das Kurvenintegral von  $f$  längs  $\gamma$  zuordnet, eine eindeutige  $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung von  $C_1(U)$  nach  $\mathbb{C}$ . Für jede 1-Kette  $c \in C_1(U)$  bezeichnen wir das Kurvenintegral von  $f$  längs  $c$  mit

$$\int_c f(z)dz$$

Ziel dieses Abschnittes ist es alle die 1-Zykel in  $Z_1(U)$  zu bestimmen, längs derer die Kurvenintegrale von allen holomorphen Funktionen auf  $U$  verschwinden. Auf einfach zusammenhängenden Gebieten besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion. Deshalb sind auf einfach zusammenhängenden Gebieten  $U \subset \mathbb{C}$  alle 1-Zykel nullhomolog, d.h. auf einfach zusammenhängenden Gebieten  $U$  gilt für alle  $c \in Z_1(U)$ , und alle holomorphen Funktionen  $f$  auf  $U$

$$\int_c f(z) dz = 0.$$

Für allgemeinere Gebiete ist die Menge aller solcher 1-Ketten eine Untergruppe von den 1-Zykeln. Aus dem Beispiel des Logarithmus wissen wir schon, dass für Gebiete  $U$ , die einen Punkt  $a \in \mathbb{C}$  nicht enthalten, aber einen geschlossenen Weg enthalten, der in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  homotop ist zu einem Kreis  $\partial B(a, r)$ , nicht alle Zykel diese Eigenschaft haben, weil für alle  $r > 0$  gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r)} \frac{1}{z - a} dz = 1.$$

Dann gilt dasselbe auch für alle Wege, die in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  zu  $\partial B(a, r)$  homotop sind. Wir werden sehen, dass für ein beliebiges Gebiet  $U \subset \mathbb{C}$  die Kurvenintegrale aller holomorphen Funktionen auf  $U$  längs eines Zyklus  $c \in Z_1(U)$  genau dann verschwinden, wenn für alle  $a \in \mathbb{C} \setminus U$  gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z - a} dz = 0.$$

Dazu interpretieren wir zunächst für jedes  $a \in \mathbb{C} \setminus U$  und jedes  $c \in Z_1(U)$  das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z - a} dz$$

neu als Umlaufszahl. Die Umlaufszahl misst, wie oft ein 1-Zykel  $c \in Z_1(U)$  einen Punkt  $a \in \mathbb{C} \setminus U$  umrundet. Um zu zählen, wie oft ein Zykel  $c \in Z_1(U)$  einen Punkt  $a \in U$  umrundet, zerlegen wir den Zykel in kleine Wegstücke und bestimmen dann, wie sich der Winkel der Verbindungsgeraden von  $a$  zu dem Weg längs des Weges ändert. Unter Halbebenen an dem Punkt  $a$  wollen wir alle Teilmengen von der Form  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(e^{i\varphi}(z - a)) > 0\}$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$  verstehen. Weil das Bild jedes Weges kompakt ist und alle Halbebenen an dem Punkt  $a$  offen sind, können wir jeden Weg in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  in solche Wegabschnitte unterteilen, die jeweils nur in einer Halbebene an dem Punkt  $a$  enthalten sind. Die Winkel zwischen zwei Halbgeraden durch  $a$ , die beide in einer Halbebene an dem Punkt  $a$  liegen, sind als Elemente von  $(-\pi, \pi)$  eindeutig

bestimmt. Dasselbe gilt sogar für die Winkel zwischen zwei Halbgeraden durch  $a$ , die im Komplement einer Halbgeraden durch  $a$  liegen. Dann ist auch die Winkeldifferenz zwischen der Verbindungsgeraden von  $a$  mit dem Anfangspunkt eines Wegstückes in einer Halbebene an dem Punkt  $a$  und der Verbindungsgeraden von  $a$  mit dem Endpunkt eindeutig definiert als Element von  $(-\pi, \pi)$ . Indem wir die Winkeldifferenzen aller Wegstücke eines Weges, die jeweils in einer Halbebene am Punkt  $a$  liegen aufsummieren erhalten wir die Winkeldifferenz eines Weges in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  von der Verbindungsgeraden von  $a$  mit dem Endpunkt und der Verbindungsgeraden von  $a$  mit dem Anfangspunkt.

**Definition 5.3.** Für jeden Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus a$  mit  $a \in \mathbb{C}$  ist die Umlaufszahl  $\nu(\gamma, a)$  definiert als  $\frac{1}{2\pi}$  mal der Winkeldifferenz zwischen der Verbindungsgeraden von  $a$  mit dem Endpunkt und der Verbindungsgeraden von  $a$  mit dem Anfangspunkt. Diese Umlaufszahl besitzt eindeutige  $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung auf  $C_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ , die wir auch Umlaufszahl nennen und für alle  $c \in C_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$  mit  $\nu(c, a)$  bezeichnen.

**Lemma 5.4.** Sei  $a \in \mathbb{C}$ . Dann ist für alle  $c \in Z_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$  die Umlaufszahl  $\nu(c, a)$  gleich dem Kurvenintegral

$$\nu(c, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z-a} dz.$$

**Beweis:** Auf den konvexen Halbebenen im Punkt  $a$  besitzt  $\frac{1}{z-a}$  eine Stammfunktion, nämlich einen Zweig von  $\ln(z-a)$ . Indem wir die Wege wie in der Definition der Umlaufszahl in Teilstücke zerlegen, die jeweil in einer Halbebene verlaufen, müssen wir verschiedene Blätter von  $\ln(z-a)$  benutzen. Die verschiedenen Blätter von  $\ln(z-a)$  unterscheiden sich aber nur um ganzzahlige Vielfache von  $2\pi i$ . Dann folgt die Aussage aus der Definition eines Zyklus. **q.e.d.**

**Lemma 5.5.** Sei  $a \in \mathbb{C}$ . Dann ist für alle  $c \in Z_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$  die Umlaufszahl  $\nu(c, a)$  eine ganze Zahl. Für zwei homotope Wege  $\alpha$  und  $\beta$  in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  von  $z_0$  nach  $z_0$  mit  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$  ist die Umlaufszahl gleich:

$$\nu(\alpha, a) = \nu(\beta, a).$$

**Beweis:** Weil die Umlaufszahl die Summe der Winkeldifferenzen am Endpunkt minus Anfangspunkt ist, und weil in jedem Zykel  $c \in Z_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$  jeder Endpunkt bzw. Anfangspunkt genauso oft als Endpunkt wie als Anfangspunkt auftaucht, sind die Gesamtwinkeldifferenzen für Zykel  $c \in Z_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$  Vielfache von  $2\pi$ . Also ist die Umlaufszahl eine ganze Zahl. Aus dem vorangehenden Lemma und Korollar 4.27 folgt, dass die Umlaufszahl nur von der Homotopieklasse eines Weges abhängt. **q.e.d.**

Für einen gegebenen Zykel  $c \in Z_1(\mathbb{C})$  ist die Vereinigung aller Bilder der entsprechenden Wege eine kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{C}$ . Dann ist für alle  $a \in \mathbb{C} \setminus K$  die Umlaufszahl  $\nu(c, a)$  wohldefiniert und ebenfalls lokal konstant. Weil  $\mathbb{C} \setminus K$  offen ist, ist es eine Vereinigung von endlich vielen Wegzusammenhangskomponenten. Auf jeder dieser Wegzusammenhangskomponenten ist  $a \rightarrow \nu(c, a)$  also konstant. Um diese Zahl zu bestimmen, können wir ausrechnen, wie sie sich ändert, wenn  $a$  Wegabschnitte von  $c$  überspringt. Wenn der Wechsel von einer Wegzusammenhangskomponente zu einer anderen Wegzusammenhangskomponente einen Weg kreuzt, der dabei von Links nach Rechts verläuft, können wir den Weg auch um  $a$  umleiten, um die Differenz der beiden Umlaufszahlen zu berechnen. Also ist die Differenz der Umlaufszahl für das übersprungene  $a$  und das anfängliche  $a$  die Umlaufszahl eines Weges, der  $a$  einmal umrundet also gleich der Vielfachheit des Weges. Deshalb erhöht sich die Umlaufszahl um die entsprechende Vielfachheit dieses Weges. Wenn sie einen Weg kreuzt, der dabei von Rechts nach Links verläuft, erniedrigt sich die Umlaufszahl um die entsprechende Vielfachheit dieses Weges. Dadurch kann man die Umlaufszahl eines gegebenen Weges leicht auf allen Komponenten von  $\mathbb{C} \setminus K$  berechnen. Zu beachten ist noch, dass die Umlaufszahl auf der unbeschränkten Komponente von  $\mathbb{C} \setminus K$  verschwinden muss.

## 5.2 Homologie

**Definition 5.6.** Für jede offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  sei  $C_2(U)$  die von allen stetigen Abbildungen  $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  erzeugte abelsche Gruppe. Der Rand  $\partial\varphi$  einer stetigen Abbildung  $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  wird definiert als die Summe der Wege

$$\partial\varphi = \varphi|_{[0,1] \times \{0\}} + \varphi|_{\{1\} \times [0,1]} - \varphi|_{[0,1] \times \{1\}} - \varphi|_{\{0\} \times [0,1]}.$$

Dann gibt es eine eindeutige  $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung  $\partial : C_2(U) \rightarrow C_1(U)$ . Weil für jede stetige Abbildung  $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  der Rand von  $\partial\varphi$  als Element von  $C_0(U)$  Null ist, liegt das Bild dieser Abbildung sogar in  $Z_1(U)$ . Die Untergruppe aller Zykel  $c \in Z_1(U)$ , die von dem Bild von  $\partial : C_2(U) \rightarrow Z_1(U)$  und den konstanten Wegen in  $U$  erzeugt werden heißen nullhomolog. Zwei Zykel, die sich nur um einen nullhomologen Zykel unterscheiden heißen homolog.

Die Quotientengruppe aller Zykel modulo aller nullhomologen Zykel heißt erste Homologiegruppe und wir mit  $H_1(X, \mathbb{Z})$  bezeichnen. Jedem Element der Fundamentalgruppe kann man offenbar ein Element in  $H_1(X, \mathbb{Z})$  zuordnen. Wir werden sehen, dass diese Abbildung sogar ein Gruppenhomomorphismus ist und der Kern alle Kommutatoren enthält. Deshalb kann man die erste Homologiegruppe als den abelschen Anteil der Fundamentalgruppe ansehen.

Wir haben schon gesehen, dass für alle auf einer offenen Menge  $U$  holomorphen Funktionen  $f$  die Kurvenintegrale von  $f$  längs des Randes von stetigen Abbildungen  $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  verschwinden.

**Satz 5.7.** (*Cauchyscher Integralsatz für stetige 2-Ketten*) Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $c \in Z_1(U)$  nullhomolog. Dann verschwindet für alle holomorphen Funktionen  $f$  auf  $U$  das Kurvenintegral von  $f$  längs  $c$ .

**Beweis:** Weil für jedes stetige  $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  der Rand  $\partial\varphi$  homotop ist zum konstanten Weg, folgt aus dem Monodromiesatz, dass für solche geschlossenen Wege auch der Cauchysche Integralsatz gilt. Dann folgt aus der  $\mathbb{Z}$ -Linearität, dass längs aller nullhomologen  $c \in Z_1(U)$  das Kurvenintegral von auf  $U$  holomorphen Funktionen verschwindet. q.e.d.

**Satz 5.8.** (*Artinsches Kriterium für Nullhomologie*) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann ist ein Zykel  $c \in Z_1(G)$  genau dann nullhomolog, wenn für alle  $a \in \mathbb{C} \setminus G$  gilt

$$\nu(c, a) = 0.$$

Zur Vorbereitung von diesem Satz zeigen wir zunächst, einige Aussagen über nullhomologe Zyklen.

**Lemma 5.9.** Sei  $X$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Wege in  $X$ . Dann gilt

- (i) Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  homotop sind, dann ist der Zykel  $\alpha - \beta$  nullhomolog.
- (ii) Wenn der Anfangspunkt von  $\beta$  gleich dem Endpunkt von  $\alpha$  ist, dann ist  $\alpha\beta - \alpha - \beta$  nullhomolog.
- (iii) Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  geschlossene Wege sind, dann ist  $\alpha\beta\alpha^{-}\beta^{-}$  nullhomolog.

**Beweis:** (i): der Rand der Homotopie ergibt direkt die gewünschte Aussage.

(ii): Sei  $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  folgende Abbildung:

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} \alpha\left(t\frac{1}{1-\frac{s}{2}}\right) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \beta\left(2t\left(1 - \frac{s}{2}\right)\right) & \text{für } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Der Rand von  $\varphi$  ist gleich  $x_0 + \alpha\beta - \alpha - \beta$ , wobei  $x_0$  der konstante Weg am Anfangspunkt von  $\alpha$  ist. Weil die konstanten Wege nullhomolog sind, folgt die gewünschte Aussage.

(iii): Aus (i) und (ii) folgt, dass  $\alpha\beta\alpha^{-}\beta^{-} - \alpha - \beta - \alpha^{-} - \beta^{-}$  nullhomolog ist. Weil der konstante Weg nullhomolog ist, folgt aus (i) und (ii), dass die Zyklen  $\alpha + \alpha^{-}$  und  $\beta + \beta^{-}$  nullhomolog sind. Also ist auch  $\alpha\beta\alpha^{-}\beta^{-}$  nullhomolog. q.e.d.

**Bemerkung 5.10.** Für jeden Weg  $\alpha$  in  $X$  von  $x_0$  nach  $x_1$  ist der Rand  $\partial\varphi$  der Abbildung

$$\varphi : [0, 1] \times [0, t] \rightarrow X, \quad (s, t) \mapsto \alpha(s)$$

gleich die Differenz der konstanten Wege  $x_1 - x_0$ . Deshalb werden die nullhomologen Zykkel eines Gebietes  $G$  von dem Bild von  $\partial : C_2(G) \rightarrow C_1(G)$  und einem konstanten Weg  $x_0$  erzeugt. Das Bild dieser Abbildung kann aber keinen konstanten Weg enthalten, weil die Summe aller nichtverschwindenden Koeffizienten eines Zyklus im Bild verschwindet. In der sogenannten singulären Homologie definiert man dagegen die 2-Ketten als von den stetigen Abbildungen

$$\psi : \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x + y + z = 1\} \rightarrow X$$

erzeugte abelsche Gruppe, und definiert den Rand einer solchen Abbildung  $\psi$  als

$$\partial\psi = \psi|_{\{(t, 1-t, 0) \mid t \in [0, 1]\}} - \psi|_{\{(t, 0, 1-t) \mid t \in [0, 1]\}} + \psi|_{\{(0, t, 1-t) \mid t \in [0, 1]\}}.$$

Für die konstanten  $\varphi$  erhält man dann sofort, dass auch die konstanten Wege im Bild der entsprechenden Abbildung  $\partial$  liegen. Für jede solche Abbildung  $\psi$  ist

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (s, t) \mapsto \begin{cases} \psi(s, t, 1-s-t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1-s \\ \psi(s, 1-s, 0) & \text{für } 1-s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

eine stetige Abbildung. Deshalb definieren die singulären 2-Ketten auch 2-Ketten im Sinne unserer Definition. Dann gilt  $\partial\varphi = -\partial\psi$  plus den konstanten Weg  $\psi(1, 0, 0)$ . Deshalb sind die Ränder homolog. Umgekehrt definiert jede Abbildung

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad (s, t) \mapsto \varphi(s, t)$$

auch zwei Abbildungen

$$\psi : \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x+y+z=1\} \rightarrow X, \quad (x, y, z) \mapsto \varphi(x, y) \quad \text{bzw.} \quad \varphi(1-y, 1-x).$$

Der Rand der Differenz dieser beiden Abbildungen ist homolog zum Rand von  $\varphi$ . Deshalb stimmen die beiden Definitionen überein.

**Beweis vom Artinschen Kriterium für Nullhomologie:** Wegen Satz 5.7 ist das Artinsche Kriterium für jeden nullhomologen Zykel erfüllt.

Sei jetzt umgekehrt  $c \in Z_1(G)$  ein Zykel, der

$$\nu(c, a) = 0 \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{C} \setminus G$$

erfüllt. Wir zeigen jetzt in 4 Schritten, dass dann  $c$  nullhomolog ist.

**1.Schritt:** Wir zeigen, dass es genügt die Aussage für geschlossene Wege von  $z_0$  nach  $z_0$  zu zeigen, mit einem geeigneten  $z_0 \in G$ .

Weil  $G$  ein Gebiet ist, ist  $G$  offen und wegzusammenhängend. Also gibt es für jedes  $z_0 \in G$  und jeden Weg in  $G$  einen Weg von  $z_0$  zum Anfangspunkt und einen Weg von  $z_0$  zum Endpunkt. Indem wir also für jeden Anfangspunkt und Endpunkt aller Wege eines Zyklus  $c \in Z_1(G)$  jeweils einen Weg von  $z_0$  zu diesem Punkt wählen, können wir jedem Zykel  $c \in Z_1(G)$  einen geschlossenen Weg von  $z_0$  nach  $z_0$  zuordnen. Dabei ordnen wir jedem Weg, der in dem Zykel  $c$  mit der Vielfachheit  $m$  vorkommt, den entsprechenden geschlossenen  $m$ -mal durchlaufenen Weg zu und ordnen alle diese Wege in beliebiger Reihenfolge an. Wegen Lemma 5.7 und der  $\mathbb{Z}$ -Linearität des Kurvenintegrals, ist sowohl die Nullhomologie als auch das Artinsche Kriterium für den ursprünglichen Zykel äquivalent zu der entsprechenden Aussage für den entsprechenden geschlossenen Weg.

**2.Schritt:** Jeder geschlossene Weg von  $z_0$  nach  $z_0$  ist homolog zu einem sogenannten Kantenweg.

Sei nämlich  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  ein geschlossener Weg von  $z_0$  nach  $z_0$ . Das Bild  $\gamma[[0, 1]]$  ist eine kompakte Teilmenge von  $G$ . Deshalb gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass alle Punkte von  $\mathbb{C} \setminus G$  mindestens den Abstand  $3\epsilon$  zu allen Punkten von  $\gamma[[0, 1]]$  haben. Wir betrachten jetzt alle Geraden in  $\mathbb{C}$ , die parallel zur  $x$ -Achse bzw.  $y$ -Achse sind, und von  $z_0$  den Abstand  $l\epsilon$  haben mit  $l \in \mathbb{Z}$ . Wir unterteilen den Weg  $\gamma$  in solche Wegabschnitte, dessen Endpunkte jeweils auf einer dieser Geraden liegen, und die jeweils innerhalb eines von solchen Geraden berandeten Quadrates mit Kantenlänge  $\epsilon$  liegen. Alle diese Quadrate, in denen ein solches Wegstück verläuft liegen dann ganz innerhalb von  $G$ . Deshalb sind alle diese Wegstücke jeweils homotop zu einem Wegstück auf den Geraden längs des Randes des entsprechenden Quadrates. Weil alle diese Quadrate konvex sind, können wir die Homotopie einfach durch die konvexe Verbindungsgeraden zwischen dem Wegstück von  $\gamma$  und einem beliebig parametrisierten Weg auf dem Rand des Quadrates von dem Anfangspunkt zu dem Endpunkt des entsprechenden Wegstückes definieren. Indem wir den Kantenweg zusätzlich jeweils an den Ecken unterteilen erhalten wir mit Satz 4.22 (i) einen homotopen Weg, der nur aus Wegabschnitten längs von einzelnen Kanten besteht. Jeder dieser einzelnen Kantenwege ist wegen Lemma 4.21 homotop zu dem entsprechend linear parametrisierten Kantenweg. Also ist der geschlossene Weg  $\gamma$  von  $z_0$  nach  $z_0$  homotop zu einer Verkettung  $\tilde{\gamma}$  von linear parametrisierten Kantenwegen.

**3.Schritt:** Der Kantenweg  $\tilde{\gamma}$  in  $G$  ist homolog zu einem Kantenweg  $\tilde{\tilde{\gamma}}$  in  $G$ , der keine Punkte umläuft, für den also für alle  $a$  im Komplement von  $\tilde{\tilde{\gamma}}[[0, 1]]$  gilt  $\nu(\tilde{\tilde{\gamma}}, a) = 0$ .

Weil die Umlaufszahl auf allen Wegzusammenhangskomponenten vom Komplement von  $\tilde{\gamma}[[0, 1]]$  konstant ist, kann sie nur auf solchen Quadraten des oben eingeführten Gitters nicht verschwinden, die ganz in  $G$  liegen. Dann subtrahieren wir von dem Weg  $\tilde{\gamma}$  den Rand der 2-Kette in  $C_2(G)$ , die durch die Umlaufszahl des Kantenwegs  $\tilde{\gamma}$  gegeben

ist. Weil der Rand jedes Quadrates nur auf dem Quadrat selber Umlaufszahl Eins hat, und auf allen anderen Quadraten Umlaufszahl Null, hat der neue Kantenweg  $\tilde{\gamma}$  auf allen Quadraten des Gitters in  $G$  Umlaufszahl Null.

**4.Schritt:** Der Kantenweg  $\tilde{\gamma}$ , der keinen Punkt umläuft, durchläuft jede Kante genauso oft in der einen Richtung, wie in der anderen Richtung, so dass er wegen Lemma 5.9 nullhomolog ist.

Indem wir für eine horizontale Kante, alle von Links nach Rechts verlaufenden Wege um ein Quadrat nach unten umleiten und alle von Rechts nach Links verlaufenden Kanten um ein Quadrat nach oben umleiten, wird die Umlaufszahl auf den Quadraten der Umleitung jeweils um die Anzahl der von Rechts nach Links bzw. von Links nach Rechts erhöht. Weil die Umlaufszahl lokal konstant ist und nach der Umleitung der Weg nicht mehr zwischen den beiden Quadraten verläuft, sind beide Anzahlen gleich.  
**q.e.d.**

**Korollar 5.11.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $c \in Z_1(G)$  ein Zykel in  $G$ . Das Kurvenintegral  $\int_c f(z)dz$  längs  $c$  verschwindet genau dann für alle holomorphen Funktionen auf  $G$ , wenn

$$\nu(c, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{z-a} dz = 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C} \setminus G \text{ gilt.}$$

**q.e.d.**

**Korollar 5.12.** (Umlaufszahlenversion der Cauchyschen Integralformel) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $c \in Z_1(G)$  ein Zykel in  $G$ , der nullhomolog ist. Dann gilt für alle  $a \in G$ , die im Komplement des Bildes von  $c$  liegen:

$$\nu(c, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

**Beweis:** Indem wir zu dem Weg  $c$  das  $-\nu(c, a)$ -fache des Weges  $\partial B(a, \epsilon)$  für genügend kleines  $\epsilon$  addieren, erhalten wir einen Weg in  $G \setminus \{a\}$ , der wegen dem Artinschen Kriterium in  $G \setminus \{a\}$  nullhomolog ist. Dann folgt die Aussage aus der Cauchyschen Integralformel.  
**q.e.d.**



# Kapitel 6

## Das Residuum

### 6.1 Der Residuensatz

**Definition 6.1.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f$  holomorph auf  $U$ . Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$  eine isolierte Singularität. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$  in  $U$  liegt. Wegen dem Laurententwicklungssatz hat  $f$  auf  $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$  eine Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \epsilon)} (z - z_0)^{-n-1} f(z) dz.$$

Das Residuum  $\text{Res}_{z_0}(f)$  bei der isolierten Singularität  $z_0$  von  $f$  ist dann definiert als der erste Laurentkoeffizienten  $c_{-1}$  der Hauptreihe.

Aus dem Laurententwicklungssatz folgt sofort:

**Korollar 6.2.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f$  holomorph auf  $U$ . Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$  eine isolierte Singularität. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$  in  $U$  liegt. Dann gilt

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \epsilon)} f(z) dz \quad \text{q.e.d..}$$

**Satz 6.3.** (Residuensatz) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f$  eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion auf  $G$ . Sei  $c \in Z_1(G)$  ein nullhomologer Zykel, der keine isolierten Singularitäten von  $f$  trifft. Dann werden nur endlich viele isolierte Singularitäten von  $c$  umlaufen und es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz = \sum_{a \in S} \nu(c, a) \text{Res}_a(f).$$

Hierbei bezeichnet  $S$  die Menge der isolierten Singularitäten von  $f$ .

**Beweis:** Die Vereinigung der Bilder von allen Wegen von  $c$  ist eine kompakte Teilmenge  $K$  von  $G$ . Die Abbildung  $a \mapsto \nu(c, a)$  ist nur auf endlich vielen beschränkten Wegzusammenhangskomponenten von  $\mathbb{C} \setminus K$  ungleich Null. Wegen Lemma 4.17 ist jede dieser Wegzusammenhangskomponenten eine abgeschlossene und offene Teilmenge von  $\mathbb{C} \setminus K$ . Also ist der Rand der offenen und beschränkten Teilmenge  $O = \{z \in \mathbb{C} \setminus K \mid \nu(c, z) \neq 0\}$  in  $K$  enthalten. Die Menge  $S$  aller isolierten Singularitäten von  $f$  ist eine diskrete Teilmenge von  $G$ , und wegen dem Artinschen Kriterium ist  $O$  eine Teilmenge von  $G$ . Weil der Abschluss von  $O$  dann eine kompakte Teilmenge von  $G$  ist, enthält  $O$  nur endlich viele Elemente von  $S$ . Also umläuft  $c$  nur endlich viele isolierte Singularitäten von  $f$ .

Wenn wir für alle diese isolierten Singularitäten in  $O$  von dem Zykel  $c$  den Zykel

$$-\sum_{a \in S} \nu(c, a) \partial B(a, \epsilon)$$

mit hinreichend kleinem  $\epsilon$  subtrahieren, erhalten wir einen Zykel in  $G \setminus S$ , der wegen dem Artinschen Kriterium in  $G \setminus S$  nullhomolog ist. Dann folgt die Aussage aus dem Korollar und der Definition des Residuums. **q.e.d.**

**Beispiel 6.4. (i)** Seien  $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$ . Wenn  $h$  bei  $z_0 \in U$  eine einfache Nullstelle hat, dann hat  $z \mapsto \frac{g(z)}{h(z)}$  bei  $z = z_0$  eine einfache Pol oder eine hebbare Singularität und es gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

**(ii)** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine meromorphe Funktion und  $z_0 \in U$  entweder eine Polstelle von  $f$  oder eine Nullstelle. Wenn  $f$  nicht verschwindet, dann ist auch  $\frac{f'}{f}$  eine meromorphe Funktion auf  $U$ . Wenn  $f$  bei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $n$  hat, dann hat  $\frac{f'}{f}$  bei  $z_0$  einen Pol erster Ordnung und es gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{f'}{f} \right) = n.$$

Wenn  $f$  bei  $z_0$  eine Polstelle der Ordnung  $n$  hat, dann hat  $\frac{f'}{f}$  bei  $z_0$  einen Pol erster Ordnung und es gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{f'}{f} \right) = -n.$$

$\frac{f'}{f}$  kann also nur dann Polstellen höherer als erster Ordnung bei  $z_0$  haben, wenn  $f$  bei  $z_0$  eine wesentliche Singularität hätte. Wenn z.B.  $f = \exp(\frac{1}{z-z_0})$  ist, dann folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\frac{1}{(z-z_0)^2} \exp(\frac{1}{z-z_0})}{\exp(\frac{1}{z-z_0})} = -\frac{1}{(z-z_0)^2}.$$

Allerdings kann eine Funktion mit einer wesentlichen Singularität bei  $z_0$  in jeder Umgebung von  $z_0$  auch unendlich viele Nullstellen haben. In diesem Fall hat dann  $\frac{f'}{f}$  bei  $z_0$  keine isolierte Singularität mehr. In diesem Fall kann man das Residuum von  $\frac{f'}{f}$  bei  $z_0$  nicht mehr so einfach definieren.

**Satz 6.5.** (Anzahl der Nullstellen und Polstellen) Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf einem Gebiet  $G$  meromorphe Funktion mit Nullstellenmenge  $S_0 \subset G$  und Polstellenmenge  $S_\infty \subset G$ . Sei  $c = \sum_k m_k c_k \in Z_1(G)$  ein nullhomologer Zykel in  $G$ , dessen Wege  $c_k$  die Mengen  $S_0$  und  $S_\infty$  nicht treffen. Wir definieren den Zykel  $f(c) \in z_1(\mathbb{C})$  als  $f(c) = \sum_k m_k (f \circ c_k)$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in S_0} \nu(c, z) \operatorname{ord}_z(f) + \sum_{z \in S_\infty} \nu(c, z) \operatorname{ord}_z(f) = \nu(f(c), 0).$$

Das Integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  heißt auch das Null- und Polstellen zählende Integral. Wenn nämlich der Zykel  $c$  eine offene Teilmenge von  $G$  einfach umrundet, also die Umlaufszahl  $z \mapsto \nu(c, z)$  auf einer Wegzusammenhangskomponente des Komplementes des Bildes von  $c$  in  $G$  gleich 1 ist und auf allen anderen verschwindet, dann ist das Integral gleich der Anzahl der Nullstellen von  $f$  gezählt mit Vielfachheit in der umrundeten Wegzusammenhangskomponente minus Anzahl der entsprechenden Polstellen.

**Beweis:** Das erste Gleichheitszeichen folgt aus dem Residuensatz und dem Beispiel (ii). Für das zweite Gleichheitszeichen bemerken wir, dass für jeden Weg  $c_k : [0, 1] \rightarrow G \setminus (S_0 \cup S_\infty)$  von  $c$  gilt

$$\begin{aligned} \nu(f(c_k), 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f(c_k)} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\frac{d}{dt}(f \circ c_k)(t) dt}{(f \circ c_k)(t)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(c_k(t)) \dot{c}_k(t) dt}{f(c_k(t))} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

Dann folgt das zweite Gleichheitszeichen aus der  $\mathbb{Z}$ -Linearität des Kurvenintegrals. **q.e.d.**

**Satz 6.6.** (Rouché) Seien  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  meromorph und  $c \in Z_1(G)$  ein nullhomologer Zykel, der keine Nullstellen und Polstellen von  $f$  und  $g$  trifft. Wenn für alle  $z$  aus dem Bild von  $c$  gilt  $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)|$ , dann folgt

$$\sum_{z \in G} \nu(c, z) \operatorname{ord}_z(f) = \sum_{z \in G} \nu(c, z) \operatorname{ord}_z(g).$$

**Beweis:** Sei  $c_k$  ein Weg von  $c$ . Aus  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  folgt für alle  $\tau \in [0, 1]$

$$(1 - \tau)|f(z)| \leq |f(z)| - \tau|f(z) - g(z)| \leq |f(z) + \tau(g(z) - f(z))| \leq (1 + \tau)|f(z)|.$$

Also ist

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*, (t, \tau) \mapsto \tau g(c_k(t)) + (1 - \tau)f(c_k(t))$$

eine Homotopie von dem Weg  $f(c_k)$  nach dem Weg  $g(c_k)$  in  $\mathbb{C}^*$ . Also sind die Zyklen  $f(c)$  und  $g(c)$  in  $\mathbb{C}^*$  homolog. Die Behauptung folgt aus dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

## 6.2 Anwendungen des Residuensatzes

**Beispiel 6.7.** Die Bernoullizahlen  $B_k$  sind definiert durch  $\frac{1}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1}$ .

Wir wollen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  zeigen.

Mit den früher berechneten Bernoullizahlen ergibt sich insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Wir betrachten neben der Funktion  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  die Funktionen  $f_m(z) = z^{-2m} f(z)$ . Die isolierten Singularitäten dieser Funktion sind die Punkte  $z_k = 2k\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Das Residuum in 0 läßt sich direkt aus der Laurentreihe ablesen.

$$\text{Res}_0(f_m) = \frac{B_{2m}}{(2m)!}$$

Für die anderen Residuen erhalten wir

$$\text{Res}_{2k\pi i}(f_m) = \frac{1}{e^{2k\pi i} (2k\pi i)^{2m}} = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m} k^{2m}}.$$

Wir zeigen mit dem Residuensatz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \text{Res}_{2k\pi i}(f_m) = 0$ .

Daraus folgt dann für alle  $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{B_{2m}}{(2m)!} = \text{Res}_0(f_m) = - \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}_{2k\pi i}(f_m) + \text{Res}_{-2k\pi i}(f_m) = (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2\pi)^{2m} k^{2m}}$$

$$\text{oder auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}.$$

Weil die Exponentialfunktion periodisch ist, ist auch  $f$  periodisch mit Periode  $2\pi i$ .

$$\begin{aligned} \text{Für } \Re(z) \geq 1 \quad & \text{gilt} \quad |e^z| \geq |e^z| - 1 = e^{\Re(z)} - 1 \geq e - 1 \\ \text{Für } \Re(z) \leq -1 \quad & \text{gilt} \quad |e^z - 1| \geq 1 - |e^z| = 1 - e^{\Re(z)} - 1 \geq 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $f$  auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| \geq 1\}$  beschränkt. Auf der kompakten Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| \leq 1, |z| \geq 1, |z - 2\pi i| \geq 1 \text{ und } 0 \leq \Im(z) \leq 2\pi\}$$

ist  $f$  offenbar holomorph und damit auch beschränkt. Also gibt es ein  $M > 0$ , so dass die Funktion  $|f|$  auf dem Komplement aller offenen Bälle  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B(2\pi i k, 1)$  mit Radius 1 um die Singularitäten von  $f$  beschränkt ist durch  $M$ . Sei  $c_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto (2n+1)\pi e^{2\pi i t}$ . Diese Wege verbleiben offenbar für alle  $n \in \mathbb{N}$  in diesem Komplement der Bälle  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B(2\pi i k, 1)$ . Also folgt aus dem Residuensatz:

$$\left| \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res}_{2k\pi i}(f) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{c_n} f_m(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{((2n+1)\pi)^{2m}} 2\pi(2n+1)\pi.$$

Für  $m \in \mathbb{N}$  konvergiert die rechte Seite im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Deshalb gilt tatsächlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res}_{2k\pi i}(f_m) = 0.$$

Mit dem Residuensatz lassen sich auch viele reelle uneigentliche Integrale berechnen, indem sie zu Integralen längs geschlossener Wege in der komplexen Zahlenebene ergänzt werden und dann der Residuensatz angewendet wird.

**Beispiel 6.8.** Um das Integral

$$\int_{-R}^R \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt$$

zu einem geschlossenen Weg zu ergänzen können wir es entweder auf einen Halbkreis

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \Im(z) \geq 0\} \quad \text{oder auf den Halbkreis} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \Im(z) \leq 0\}$$

jeweils zum Startpunkt zurückführen. Im Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  soll dann das Integral über einen dieser beiden Halbkreise verschwinden. Indem wir

$$\frac{\cos(t)}{1+t^2} \quad \text{zerlegen in} \quad \frac{\cos(t)}{1+t^2} = \frac{e^{it}}{2(1+t^2)} + \frac{e^{-it}}{2(1+t^2)}$$

ist das Integral des ersten Summanden über dem ersten Halbkreis beschränkt durch  $\frac{\pi R}{2(1+R^2)}$  und das Integral des zweiten Summanden über dem zweiten Halbkreis auch beschränkt durch  $\frac{\pi R}{2(1+R^2)}$ . Wir können aber auch die Symmetrie  $t \rightarrow -t$  benutzen und zunächst umformen zu

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt &= \int_{-R}^R \frac{e^{it} + e^{-it}}{2(1+t^2)} dt = \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{2(1+t^2)} dt + \int_{-R}^R \frac{e^{-it}}{2(1+t^2)} dt \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{2(1+t^2)} dt - \int_R^{-R} \frac{e^{it}}{2(1+t^2)} dt = \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Dieses Integral können wir also im Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  durch den ersten Halbkreis ergänzen. Die Funktion  $z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$  ist auf  $\mathbb{C}$  meromorph und hat nur zwei Polstellen bei  $z = \pm i$  mit den Residuen:

$$\operatorname{Res}_i\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) = \frac{e^{-1}}{2i} \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}_{-i}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) = \frac{e}{-2i}.$$

Also folgt aus dem Residuumsatz für  $R > 1$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{it}}{1+t^2} dt + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\varphi}}}{1+R^2 e^{2i\varphi}} i e^{i\varphi} d\varphi = \frac{2\pi i}{e2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Der Betrag des zweiten Integrals ist beschränkt durch  $\frac{\pi R}{1+R^2}$  und konvergiert im Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  gegen Null. Also folgt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{e}.$$

Zum Abschluss wollen wir eine Anwendung des nullstellenzählenden Integrals aus der Ingenieursmathematik darstellen. Betrachtet man eine Linearkombination

$$c_1 e^{a_1 t} + \dots + c_n e^{a_n t}$$

von harmonischen Schwingungen, dann entscheiden die Realteile der Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  darüber, ob diese Schwingungen für sehr große Zeiten  $t \rightarrow \infty$  abklingen oder nicht. In der Ingenieursmathematik kommt es öfter vor, dass diese Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  als die Nullstellen eines Polynoms  $p(z)$  vom Grad  $n$  mit reellen Koeffizienten

gegeben sind. Ein solches Polynom vom Grad  $n$  mit reellen Koeffizienten wird deshalb stabil genannt, wenn die Realteile der Nullstellen  $a_1, \dots, a_n$  alle negativ sind.

Sei also  $p(z) = c_n z^n + \dots + c_0$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit reellen Koeffizienten  $c_0, \dots, c_n$ , wobei wir  $c_n > 0$  voraussetzen. Die sogenannte Nyquistkurve ist gegeben durch die Abbildung:

$$\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \nu(t) = p(it).$$

Die Umkehrfunktion  $\ln$  der Exponentialfunktion ist im Komplexen nur bis auf die Addition eines ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi i$  definiert, aber für jede Zahl  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  und jede Wahl von  $u = \ln(z_0) \in \mathbb{C}$  gibt es eine eindeutige holomorphe Funktion

$$B(z_0, |z_0|) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \ln(z) \quad \text{mit } \ln(z_0) = u.$$

Weil die Nyquistkurve sogar reellanalytisch ist können wir für jede Wahl von  $\ln(\nu(0))$  den Logarithmus von  $\nu(t)$  zu einer eindeutigen stetigen und damit sogar reellanalytischen Funktion

$$[0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \ln(\nu(t))$$

fortsetzen, solange nur die Nyquistkurve nicht durch die Null geht. Dann können wir nämlich wegen Krollar 4.2 jedes Blatt von  $\ln$  bei  $\nu(0)$  längs einer Kreiskette in  $\mathbb{C}^*$  längs der Nyquistkurve analytisch fortsetzen. In diesem Fall gibt es also für jede Wahl von  $\ln(\nu(0))$  genau eine reellanalytische Funktion

$$\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \nu(t) = |\nu(t)|e^{i\varphi(t)}.$$

Offenbar können wir  $\varphi(0)$  genau dann gleich Null wählen, wenn  $\nu(0)$  positiv ist (weil  $p$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist, muss  $\nu(0)$  in jedem Fall reell sein). Für sehr große  $t$  konvergiert wegen

$$\ln(c_n(it)^n) = \ln(c_n) + n\frac{i\pi}{2} + n\ln(t) \quad \text{mod } 2\pi i\mathbb{Z}$$

$\varphi(t)$  gegen  $\frac{n\pi}{2} \text{ mod } 2\pi\mathbb{Z}$ . Nun können wir folgendes Stabilitätskriterium angeben:

**Satz 6.9.** *Die Nullstellen des Polynoms*

$$p(z) = c_n z^n + \dots + c_0$$

*mit reellen Koeffizienten  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  und  $c_n > 0$  haben genau dann alle negativen Realteil, wenn die Polardarstellung der Nyquistkurve*

$$\nu(t) = p(it) = |\nu(t)|e^{i\varphi(t)}$$

*folgende Bedingung erfüllt:*

- (i) Für alle  $t \in [0, \infty)$  ist  $\nu(t)$  ungleich Null.
- (ii)  $\nu(0) > 0$  und damit  $\varphi(0) = 0$ .
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \frac{n\pi}{2}$ .

**Beweis:** Wenn die Nullstellen von  $p(z)$  alle negativen Realteil haben, dann kann  $p(z)$  für nicht negative reelle  $z$  keine Nullstellen haben und muss reell sein. Aus  $c_n > 0$  folgt, dass  $p(z)$  für sehr große reelle  $z$  positiv ist, also muss dann auch  $\nu(0) = p(0)$  positiv sein. Deshalb sind dann die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Deshalb genügt es unter der Voraussetzung von (i) und (ii) zu zeigen, dass die Bedingung (iii) äquivalent dazu ist, dass  $p(z)$  auf dem Gebiet  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}$  genau  $n$  Nullstellen hat.

Wegen dem nullstellenzählenden Integral ist die Anzahl der Nullstellen von  $p(z)$  auf folgendem Gebiet gegeben durch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(R)} \frac{p'(z)}{p(z)} \quad \text{mit } B(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0 \text{ und } |z| < R\} \text{ für } R > 0.$$

Also genügt es zu zeigen, dass unter der Voraussetzung von (i) und (ii) die Bedingung (iii) äquivalent ist zu

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(R)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = n.$$

Der Rand von  $B(R)$  zerfällt einerseits in das Integral über  $i[-R, R]$  und andererseits das Integral längs des Weges

$$\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto Re^{it}.$$

Für sehr große  $|z| = R$  dominiert der führende Term von  $p(z)$  alle folgenden:

$$p(z) = c_n z^n \left( 1 + \frac{c_{n-1}}{c_n z} + \dots + \frac{c_0}{c_n z^n} \right).$$

Das Polynom  $c_n z^n$  hat bei  $z = 0$  eine  $n$ -fache Nullstelle. Wegen der Rotationssymmetrie des entsprechenden Kurvenintegrals ist der Beitrag des zweiten Weges zum nullstellenzählenden Integral im Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  also gleich  $\frac{n}{2}$ . Weil das Polynom reelle Koeffizienten hat, erfüllt es  $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$ . Daraus folgt  $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ , während der Realteil von  $\ln(\nu(t))$  symmetrisch ist. Damit ergibt sich für das erste Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \ln(\dot{\nu}(t)) dt = \frac{\ln(|\nu(R)|) - \ln(|\nu(-R)|)}{2\pi i} + \frac{i\varphi(R) - i\varphi(-R)}{2\pi i} = \frac{\varphi(R)}{\pi}.$$

Also ist (iii) tatsächlich dazu äquivalent, dass  $p(z)$  in  $B(\infty)$   $n$  Nullstellen hat. **q.e.d.**



# Kapitel 7

## Folgen holomorpher Funktionen

**Definition 7.1.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen auf  $U$  heißt *kompakt konvergent*, wenn die Einschränkungen von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf beliebige kompakte Teilmengen von  $U$  gleichmäßig konvergieren.

**Lemma 7.2.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Dann ist eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen auf  $U$  genau dann kompakt konvergent, wenn sie lokal gleichmäßig konvergiert, d.h. wenn es für jedes  $z \in U$  eine Umgebung von  $z$  in  $U$  gibt, auf der  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergiert.

**Beweis:** Weil  $U$  offen ist, enthält  $U$  um jeden Punkt  $z \in U$  einen abgeschlossenen Ball  $\overline{B}(z, \epsilon)$ . Diese Bälle sind kompakte Umgebungen von  $z$ . Also folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz aus der kompakten. Umgekehrt enthält jede Umgebung eines Punktes  $z \in U$  auch eine offene Umgebung. Die Überdeckung einer kompakten Teilmenge durch offene Umgebungen aller ihrer Punkte besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also ist jede lokal gleichmäßig konvergente Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kompakt konvergent. **q.e.d.**

**Satz 7.3.** (von Weierstraß über kompakte Konvergenz) Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Der Grenzwert  $f$  einer kompakt konvergenten Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von auf  $U$  holomorphen Funktionen ist dann holomorph. Die Folge  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Ableitungen konvergiert kompakt gegen  $f'$ .

**Beweis:** Offenbar ist das Kurvenintegral des Grenzwertes  $f$  einer auf  $U$  kompakt konvergenten Folge längs jeden (kompakten) Dreieckes in  $U$  gleich dem Grenzwert der Kurvenintegrale von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Also folgt die erste Aussage aus dem Satz von Morera.

Für jedes  $z \in U$  gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass auch  $\overline{B}(z, \epsilon)$  in  $U$  enthalten ist. Aus dem Potenzreihenentwicklungssatz und der Cauchyschen Abschätzung für die Taylorkoeffizienten folgt, dass alle Koeffizienten der Taylorreihen von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bei  $z$  konvergieren. Für alle  $z \in U$ , deren Bälle  $\overline{B}(z, \epsilon)$  in einer kompakten Teilmenge von  $U$  enthalten sind, konvergieren diese Koeffizienten jeweils gleichmäßig. Also konvergieren alle Ableitungen  $(f_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig, und die Grenzwerte der Koeffizienten der entsprechenden

Taylorreihen erfüllen die Cauchysche Koeffizientenformel mit dem Grenzwert  $f$ . Weil der Grenzwert von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sogar die Cauchysche Integralformel erfüllt, folgt aus diesem Argument auch die erste Aussage. **q.e.d.**

**Satz 7.4.** (von Hurwitz über die Blätterzahl der Grenzfunktion) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kompakte konvergente Folge von auf  $G$  holomorphen Funktionen. Wenn für ein  $a \in \mathbb{C}$  die Funktionen  $f_n - a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auf  $G$  höchstens  $m$  Nullstellen auf  $G$  haben (mit Vielfachheit gezählt), dann hat auch der Grenzwert  $f - a$  auf  $G$  höchstens  $m$  Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) oder  $f$  ist konstant gleich  $a$ .

**Beweis:** Wir nehmen an, dass  $f - a$  auf  $G$   $m$  Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) hat. Dann gibt es um jede Nullstelle von  $f - a$  einen kleinen Ball  $\bar{B}(a, \epsilon)$  in  $G$ . Weil die Nullstellen von  $f - a$  entweder isoliert sind, oder  $f$  konstant gleich  $a$  ist, erfüllen für große  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f - a$  und  $f_n - a$  auf  $\partial B(a, \epsilon)$  die Voraussetzungen des Satzes von Rouché oder  $f$  ist konstant gleich  $a$ . Also haben für große  $n$  die Funktionen  $f_n - a$  mindestens so viele Nullstellen wie  $f - a$  oder  $f$  ist konstant gleich  $a$ . **q.e.d.**

**Korollar 7.5.** Der Grenzwert einer kompakt konvergenten Folge von holomorphen injektiven Funktionen ist injektiv oder konstant. **q.e.d.**

Holomorphe injektive Funktionen werden in der klassischen Funktionentheorie auch schlichte Funktionen genannt.

**Definition 7.6.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Eine Teilmenge  $\mathcal{F}$  der auf  $U$  holomorphen Funktionen heißt normal, wenn jede Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kompakt konvergente Teilfolge besitzt.

**Satz 7.7.** (von Montel) Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Eine Teilmenge  $\mathcal{F}$  der auf  $U$  holomorphen Funktionen ist genau dann normal, wenn sie lokal gleichmäßig beschränkt ist, d.h. für jedes  $z \in U$  gibt es eine Umgebung von  $z$  in  $U$ , auf der alle Elemente von  $\mathcal{F}$  gleichmäßig beschränkt sind.

Der Beweis dieses Satzes ist eine Folge des Satzes von Arcela Ascoli. Wir zitieren diesen Satz hier in einer für uns hinreichenden Version.

**Definition 7.8.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge der komplexen Zahlen. Dann heißt eine Teilmenge  $\mathcal{F}$  der  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen auf  $U$  gleichgradig stetig, wenn es für jedes  $z \in U$  und jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$|f(z') - f(z)| < \epsilon \quad \text{für alle } z' \in B(z, \delta) \cap U \text{ und alle } f \in \mathcal{F} \text{ gilt.}$$

**Satz 7.9.** (von Arcela Ascoli) Sei  $K \subset \mathbb{C}$  kompakt. Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen auf  $K$  besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i)  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist lokal gleichmäßig beschränkt, d.h. alle  $z \in K$  besitzen eine Umgebung in  $K$ , auf der die Funktionswerte von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig beschränkt sind.
- (ii) An allen Punkten  $z \in K$  ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichgradig stetig.

**Beweis:** Wir nehmen an, dass die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Wir zeigen dann, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in dem Banachraum  $C(K, \mathbb{C})$  mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  eine konvergente Teilfolge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt. Dafür zeigen wir zunächst, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sogar auf  $K$  gleichgradig stetig ist. Für jedes  $\epsilon > 0$  und jedes  $z \in K$  gibt es wegen (ii) ein  $\delta_z > 0$ , so dass auf  $z' \in B(z, 2\delta_z) \cap K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $|f_n(z) - f_n(z')| < \frac{\epsilon}{2}$ . Wegen der Kompaktheit von  $K$  hat die Überdeckung  $\{B(z, \delta_z) | z \in K\}$  eine endliche Teilüberdeckung  $K \subset B(z_1, \delta_1) \cup \dots \cup B(z_N, \delta_N)$ . Sei  $\delta$  das Minimum von  $\delta_1, \dots, \delta_N$ . Dann enthält für alle Paare  $z, z' \in K$  mit  $|z - z'| < \delta$  einer der Bälle  $B(z_1, \delta_1), \dots, B(z_N, \delta_N)$  den einen Punkt  $z$ . Damit sind beide in einem der Bälle  $B(z_1, 2\delta_1), \dots, B(z_N, 2\delta_N)$  enthalten. Daraus folgt  $|f_n(z) - f_n(z')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichgradig gleichmäßig stetig auf ganz  $K$ .

Sei  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge, die in  $K$  dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle  $m \in \mathbb{N}$  der Abschluss  $A_m$  der Menge der Folge  $(f_n(z_m))_{n \in \mathbb{N}}$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Wir definieren jetzt induktiv eine Teilfolge von  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und eine Folge  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$ , so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  und alle  $n \geq m$  gilt  $|g_n(z_m) - a_m| < \frac{1}{n}$ . Dafür wählen wir zunächst einen Häufungspunkt  $a_1$  von  $(f_n(z_1))_{n \in \mathbb{N}}$  und eine Teilfolge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $|g_n(z_1) - a_1| \leq \frac{1}{n}$ . Induktiv wählen wir danach für jedes  $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  einen Häufungspunkt  $a_M$  von  $(g_n(z_M))_{n \in \mathbb{N}}$  und ersetzen alle Folgenglieder von  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Indizes größer als  $M-1$  durch eine Teilfolge von  $(g_n)_{n \geq M}$ , so dass für alle  $n \geq M$  gilt  $|g_n(z_M) - a_M| < \frac{1}{n}$ . Dann gilt für alle  $m = 1, \dots, M$  und alle  $n \geq m$  auch  $|g_n(z_m) - a_m| < \frac{1}{n}$ .

Dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass aus  $z, z' \in K$  mit  $|z - z'| < \delta$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $|g_n(z) - g_n(z')| < \frac{\epsilon}{3}$ . Die Überdeckung  $(B(z_m, \delta))_{m \in \mathbb{N}}$  von  $K$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein  $M \in \mathbb{N}$ , so dass alle  $l, n \geq M$  an den Zentren der Bälle der Teilüberdeckung  $|g_l(z_m) - g_n(z_m)| < \frac{\epsilon}{3}$  erfüllen. Dann folgt für alle  $z \in K$  und alle  $l, n \geq M$

$$|g_l(z) - g_n(z)| \leq |g_l(z) - g_l(z_m)| + |g_l(z_m) - g_n(z_m)| + |g_n(z_m) - g_n(z)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C(K, \mathbb{C})$  eine Cauchyfolge. Weil  $C(K, \mathbb{C})$  mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist, konvergiert sie dann. **q.e.d.**

**Beweis des Satzes von Montel:** Wenn eine Teilmenge  $\mathcal{F}$  der auf  $U$  holomorphen Funktionen normal ist, dann besitzt jede Folge in  $\mathcal{F}$  wegen Lemma 7.2 eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Also ist  $\mathcal{F}$  auch lokal gleichmäßig beschränkt.

Sei umgekehrt  $\mathcal{F}$  lokal gleichmäßig beschränkt. Für jedes  $z \in U$  gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $\overline{B(z, 2\epsilon)}$  in  $U$  enthalten ist. Weil  $\mathcal{F}$  lokal gleichmäßig beschränkt ist, ist  $\mathcal{F}$  auf der kompakten Teilmenge  $\partial B(z, 2\epsilon)$  von  $U$  gleichmäßig beschränkt. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt, dass  $|f'(z')|$  für alle  $f \in \mathcal{F}$  und alle  $z' \in B(z, \epsilon)$  gleichmäßig beschränkt ist, also  $\mathcal{F}$  gleichgradig stetig ist. Also erfüllt für jede kompakte Teilmenge  $K \subset U$  die Menge  $\mathcal{F}$  die Bedingungen (i) und (ii) des Satzes von Arcela Ascoli. Um eine Teilfolge einer Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}$  zu konstruieren, die auf ganz  $G$  kompakt konvergiert, wählen wir eine in  $G$  dichte Folge  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$  und konstruieren dann genau wie im Beweis des Satzes von Arcela Ascoli eine Teilfolge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und eine entsprechende Folge  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von Grenzwerten von  $(g_n(z_m))_{n \in \mathbb{N}}$ . Die Argumente des Beweises des Satzes von Arcela Ascoli zeigen, dass  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C(U, \mathbb{C})$  kompakt konvergiert. Wegen dem Satz von Weierstraß ist der Grenzwert eine holomorphe Funktion auf  $U$ . **q.e.d.**

**Korollar 7.10.** (*Häufungspunktkriterium*) Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorphen lokal gleichmäßig beschränkten Funktionen konvergiert genau dann kompakt, wenn die Menge aller Punkte, an denen sie punktweise konvergiert einen Häufungspunkt in  $G$  hat.

**Beweis:** Wenn  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kompakt konvergiert, dann konvergiert sie auf ganz  $G$  punktweise. In jedem metrischen Raum konvergiert eine Folge genau dann, wenn

- (i) jede Teilfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, und
- (ii) alle Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen übereinstimmen.

Wenn sie konvergiert, sind offenbar (i) und (ii) erfüllt. Wenn umgekehrt (i) und (ii) erfüllt sind, dann ist die reelle Folge der Abstände zu dem einen Häufungspunkt eine reelle beschränkte Folge mit nur einem Häufungspunkt Null, also eine Nullfolge.

Wenn  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergiert, dann hat sie wegen dem Satz von Montel also mindestens zwei verschiedene kompakte Häufungspunkte, also zwei verschiedene Grenzwerte von kompakt konvergenten Teilfolgen. Die Menge aller Punkte, auf denen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise konvergiert, sind Nullstellen der Differenz von zwei kompakten Grenzwerten. Wegen dem Identitätssatz hat diese Menge keinen Häufungspunkt in  $G$ . **q.e.d.**

**Korollar 7.11.** (*Ableitungskriterium*) Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorphen lokal gleichmäßig beschränkten Funktionen konvergiert genau dann kompakt, wenn für ein  $z \in G$  alle Ableitungen der Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise konvergieren.

**Beweis:** Wenn  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kompakt konvergiert, dann konvergieren wegen dem Satz von Weierstraß auch alle Ableitungen auf ganz  $G$  punktweise. Wenn die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht kompakt konvergiert, dann hat sie wegen dem Satz von Montel wieder mindestens zwei verschiedene kompakte Häufungspunkte, die wegen dem Identitätssatz an jeder Stelle  $z \in G$  auch verschiedene Potenzreihen haben. Also kann für kein  $z \in G$  die Folge der Werte aller Ableitungen bei  $z$  punktweise konvergieren. **q.e.d.**

# Kapitel 8

## Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung

### 8.1 Partialbruchzerlegung des Cotangens

Rationale Funktionen lassen sich in eine Summe von einer holomorphen Funktion und endlich vieler Summanden von der Form  $\frac{b}{(z-a)^n}$  zerlegen. Meromorphe Funktionen besitzen auch eine solche Zerlegung, nur benötigt man im Allgemeinen unendlich viele Summanden. Wir wollen zunächst eine solche Partialbruchzerlegung der Funktion

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

herleiten. Weil Zähler und Nenner holomorphe Funktionen sind und der Nenner bei  $z \in \mathbb{Z}$  Nullstellen erster Ordnung besitzt, hat diese Funktion auch nur Polstellen erster Ordnung bei allen Punkten  $z \in \mathbb{Z}$ . Das Residuum ist jeweils gegeben durch

$$\operatorname{Res}_n \left( \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right) = \frac{\pi \cos(\pi n)}{\pi \sin'(\pi n)} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Der Hauptteil in  $z = n$  ist also für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gegeben durch  $\frac{1}{z-n}$ . Die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$  ist aber für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  divergent. Wir können allerdings diese Reihe durch geeignete Korrekturterme konvergent machen. Offenbar gilt

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{z}{n(z-n)} \right| = \frac{|z|}{n^2} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{z}{n} \right|}.$$

Für alle  $r > 0$  genügt es offenbar auf  $\overline{B(0, r)}$  nur die Summanden zu  $|n| \geq 2r$  zu betrachten. Aus  $|z| \leq r$  und  $|n| \geq 2r$  folgt  $\left| \frac{z}{n} \right| \leq \frac{1}{2}$  und  $\left| 1 - \frac{z}{n} \right| \geq \frac{1}{2}$ . Dann folgt

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| \leq \frac{2r}{n^2}.$$

Deshalb ist für alle  $r > 0$  auf  $\overline{B(0, r)}$  die Reihe  $\sum_{|n| \geq 2r} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$  gleichmäßig konvergent und

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  kompakt konvergent. Dann ist

$$g(z) = \pi \cot(\pi z) - f(z)$$

eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ , die wir jetzt bestimmen wollen. Wegen dem Satz von Weierstraß dürfen wir sie gliedweise differenzieren und erhalten:

$$g'(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} + \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Sowohl  $\sin^2(\pi z)$  als auch die Reihe haben Periode 1. Deshalb nimmt die Funktion  $g'(z)$  schon auf dem Streifen  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$  alle ihre Werte an. Aus

$$\begin{aligned} \sin(\pi(x+iy)) &= \sin(\pi x + i\pi y) = \sin(\pi x) \cos(i\pi y) + \sin(i\pi y) \cos(\pi x) \\ &= \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + i \sinh(\pi y) \cos(\pi x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folgt} \quad |\sin(\pi(x+iy))|^2 &= \sin^2(\pi x) \cosh^2(\pi y) + \sinh^2(\pi y) \cos^2(\pi x) \\ &= \cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x)(\cosh^2(\pi y) - \sinh^2(\pi y)) \\ &= \cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x) \geq \cosh^2(\pi y) \end{aligned}$$

Für  $|y| \rightarrow \infty$  geht daher  $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$  gleichmäßig gegen Null. Andererseits ist die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$  auf der Menge  $\{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| \geq 1\}$  gleichmäßig konvergent und es gilt

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+iy-n)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+iy-n)^2} = 0.$$

Deshalb ist die Funktion  $g'(z)$  auf dem Streifen  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$  beschränkt und damit wegen der Periodizität eine holomorphe beschränkte Funktion auf  $z \in \mathbb{C}$ , die im Grenzwert  $|y| \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Aus dem Satz von Liouville folgt

$$g'(z) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Weil für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Funktionen

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} = \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{und} \quad \pi \cot(\pi z)$$

ungerade sind, verschwindet  $g(z)$  bei  $z = 0$ . Also gilt sogar

$$g(z) = 0 \quad \text{und} \quad \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

$$\text{Insbesondere gilt für } z = \frac{1}{2}: \quad \pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$\text{Also gilt auch} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

## 8.2 Produktdarstellung des Sinus

Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra läßt sich jedes komplexe Polynom in ein Produkt von Polynomen ersten Grades zerlegen. Wir wollen solche Zerlegungen auch auf holomorphe Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen verallgemeinern. Dafür müssen wir zuerst das Produkt von unendlich vielen Faktoren definieren. Solche Produkte lassen sich ganz analog zu den Reihen, die ja Summen von unendlich vielen Summanden sind, als Grenzwert von endlichen Produkten darstellen. Der Schlüssel um solche Grenzwerte zu verstehen liegt darin sie mit Hilfe der Logarithmusfunktion in unendliche Summen zu verwandeln.

**Definition 8.1.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von komplexen Zahlen. Dann heißt das unendliche Produkt  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, wenn die Folge von komplexen Zahlen  $(\prod_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Das unendliche Produkt wird dann als der Grenzwert dieser Folge definiert.

Wenn eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von komplexen Zahlen die Null enthält, dann konvergiert nach unserer Definition das unendliche Produkt gegen Null. Deshalb wollen wir im Folgenden nur unendliche Produkte  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  von Zahlenfolgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}^*$  betrachten.

**Lemma 8.2.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}^*$ . Wenn das unendliche Produkt  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  gegen eine Zahl in  $\mathbb{C}^*$  konvergiert, dann konvergiert die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 1.

**Beweis:** Offenbar gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^{n-1} a_k}$$

Dann folgt aus der Konvergenz des Produktes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^{n-1} a_k} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k}{\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{n-1} a_k} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k}{\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n a_k}. \quad \text{q.e.d.}$$

Die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  ist völlig analog zu der Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  für konvergente Reihen, d.h. sie ist notwendig aber nicht hinreichend für die Konvergenz des unendlichen Produktes gegen eine Zahl in  $\mathbb{C}^*$ .

**Satz 8.3.** (Logarithmus Kriterium) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}^*$ . Dann konvergiert das unendliche Produkt genau dann gegen eine Zahl in  $\mathbb{C}^*$ , wenn

- (i) die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 1 konvergiert, und
- (ii) für die Teilfolge aller  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $B(1, 1)$  konvergiert die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(a_n)$ .

**Bemerkung 8.4.** (i) Wegen der Bedingung (i) gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  auch  $|a_n - 1| < 1$  gilt. Auf  $B(1, 1)$  gibt es genau ein Blatt von  $\ln$  mit  $\ln(1) = 0$ , das wir in der Reihe  $\sum_{n=N}^{\infty} \ln(a_n)$  benutzen.

- (ii) Das unendliche Produkt  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  kann auch gegen Null konvergieren. So reicht z.B. aus, dass für ein  $\epsilon > 0$  ab einem Index  $n \geq N$  alle Folgenglieder  $a_n$  in  $B(0, 1 - \epsilon)$  liegen, damit das Produkt gegen Null konvergiert. Offenbar konvergiert  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$  genau dann gegen Null, wenn die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \Re(\ln(a_k))$  gegen  $-\infty$  konvergiert.

**Beweis:** Wenn das unendliche Produkt konvergiert, dann muss wegen dem vorangehenden Lemma (i) erfüllt sein und für grosse  $N$  der Grenzwert  $\prod_{k=N}^{\infty} a_k$  beliebig nahe bei Eins liegen. Wegen

$$\ln \left( \prod_{k=n}^N a_k \right) = \sum_{k=n}^N \ln(a_k) \text{ für alle } n < N \in \mathbb{N}$$

gilt (ii). Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit von  $\exp$  und wegen

$$\prod_{k=1}^n a_k = \exp \left( \ln \left( \prod_{k=1}^n a_k \right) \right) = \exp \left( \sum_{k=1}^n \ln(a_k) \right)$$

aus (ii), dass das Produkt konvergiert. **q.e.d.**

Folgendes Lemma ist oft sehr nützlich um das Logarithmuskriterium anzuwenden.

**Lemma 8.5.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $B(1, 1)$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$  genau dann absolut, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$  absolut konvergiert.

**Beweis:** Wenn eine der beiden Reihen konvergiert, dann konvergiert die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 1. Deshalb genügt es die Behauptung für Folgen in  $B(1, \frac{1}{2})$  zu beweisen. Aus der Potenzreihe

$$\ln(1+z) : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \ln(1+z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n}$$



folgt für alle  $z \in B(0, \frac{1}{2})$ :

$$\left| 1 - \frac{\ln(1+z)}{z} \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|} \leq \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt für alle  $z \in B(0, \frac{1}{2})$ :  $\frac{1}{2}|z| \leq |\ln(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|$

bzw.  $\frac{1}{2}|z-1| \leq |\ln(z)| \leq \frac{3}{2}|z-1|$  für alle  $z \in B(1, \frac{1}{2})$ .

Daraus folgt sofort die Behauptung.

**q.e.d.**

Offenbar konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$  auf ganz  $\mathbb{C}$  kompakt. Auf jeder kompakten Menge konvergiert sie sogar absolut gleichmäßig. Dann folgt aus dem Lemma und dem Logarithmuskriterium, dass das unendliche Produkt  $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$  auf ganz  $\mathbb{C}$  kompakt gegen eine holomorphe Funktion konvergiert, die bei  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  Nullstellen hat. Wegen dem Satz von Weierstraß konvergiert dann auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}$$

kompakt gegen  $\frac{f'(z)}{f(z)}$ . Andererseits gilt für  $g(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{\pi^2 z \cos(\pi z) - \pi \sin(\pi z)}{\pi^2 z^2} \cdot \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z},$$

und  $f(0) = 1 = g(0)$ . Daraus folgt die Produktformel von Euler:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Für  $z = \frac{1}{2}$  erhalten wir  $1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n \cdot 2n}$  oder  $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$ .

## 8.3 Die Gammafunktion

Bei 1 hat der Logarithmus die Taylorreihe  $\ln(1+z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n}$  für alle  $z \in B(0, 1)$ .

Daraus folgt für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $|z| \leq \frac{k}{2}$

$$\left| \ln \left( \left( 1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}} \right) \right| = \left| -\frac{z}{k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{z}{k})^n}{n} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left( \frac{|z|}{k} \right)^n}{n} \leq \frac{|z|^2}{2k^2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{|z|^2}{k^2}.$$

Wegen dem Logarithmuskriterium konvergiert also das unendliche Produkt

$$H(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

auf ganz  $\mathbb{C}$  kompakt gegen eine holomorphe Funktion, die offenbar genau die Punkte  $-n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  als Nullstellen besitzt. Es gilt

$$\begin{aligned} H(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{n!} \exp\left(-z \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{n! n^z} \exp\left(z \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)\right). \end{aligned}$$

Für  $z = 1$  erhalten wir 
$$H(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \exp\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right).$$

Weil das konvergiert, konvergiert auch 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = -\gamma.$$

Die Zahl  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = 0,577$  heißt Eulersche Konstante. Bis heute ist nicht bekannt ob sie rational oder irrational ist. Wir erhalten  $e^\gamma H(1) = 1$ . Es folgt

$$\begin{aligned} e^{\gamma z} H(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1) \dots (z+n)}{n! n^z}, \quad \text{und daraus} \\ e^{\gamma(z+1)} H(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)(z+2) \dots (z+n+1)}{n! n^{z+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1) \dots (z+n+1)}{(n+1)!(n+1)^z} \frac{(n+1)^{z+1}}{z n^{z+1}} = \frac{1}{z} e^{\gamma z} H(z). \end{aligned}$$

**Definition 8.6.** Die Gammafunktion ist definiert als

$$\Gamma : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{e^{\gamma z} H(z)}.$$

Sie ist offenbar meromorph auf  $\mathbb{C}$  und holomorph bis auf einfache Pole in den nicht positiven ganzen Zahlen. Offenbar ist  $\Gamma(z)$  reell für reelles  $z \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ .

Aus den obigen Umformulierungen für die Funktion  $H(z)$  folgt

**Satz 8.7.** (Gaußsche Produktdarstellung): Für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}. \quad \text{q.e.d.}$$

**Satz 8.8.** (Funktionalgleichung) Es gilt  $\Gamma(1) = 1$  und

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}). \quad \text{q.e.d.}$$

Die Funktion  $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$  hat einfache Pole in  $\mathbb{Z}$ , genauso wie die Funktion  $\frac{1}{\sin(\pi z)}$ .

**Satz 8.9.** (Eulerscher Ergänzungssatz): Für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

**Beweis:** 
$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(z)(-z\Gamma(-z)) = \frac{-z}{H(z)H(-z)} = \\ &= \frac{-z}{-z^2 \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{k})(1 - \frac{z}{k})} = \frac{\pi}{\pi z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2})} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

**Übungsaufgabe 8.10.** Zeige durch  $n$  malige partielle Integration, dass für  $x \geq 1$  gilt

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Mit Hilfe von  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t}$  folgere, dass die linke Seite im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  konvergiert. Folgere, dass für  $\Re(z) > 0$   $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  gegen  $\Gamma(z)$  konvergiert. (Fischer Lieb S.186).

## 8.4 Der Satz von Mittag–Leffler

**Satz 8.11.** (von Mittag–Leffler) Gegeben sei eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von paarweise verschiedenen komplexen Zahlen in  $\mathbb{C}$  ohne Häufungspunkt (d.h.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt keine konvergente Teilfolge) und eine Folge  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von komplexen Polynomen, die bei  $z = 0$  verschwinden. Dann gibt es eine Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Polynomen, so dass die Reihe von Funktionen  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (P_n(\frac{1}{z-a_n}) - p_n(z))$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  kompakt gegen eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  konvergiert, deren Hauptteile bei  $z = a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gegeben sind durch  $P_n(\frac{1}{z-a_n})$ . Für jede Vorgabe von Hauptteilen an einer komplexen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ohne Häufungspunkt gibt es also eine meromorphe Funktion mit diesen Hauptteilen. Die Polynome  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißen konvergenzerzeugende Summanden.

**Bemerkung 8.12.** Die Menge der Singularitäten einer bis auf isolierte Singularitäten holomorphen Funktion kann keine Häufungspunkte im Definitionsbereich haben, weil eine

holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  definiert ist, und es deshalb für jeden Punkt im Definitionsbereich eine Umgebung gibt, auf der die Funktion holomorph ist. Deshalb haben die Polstellen einer beliebigen meromorphen Funktion auf  $\mathbb{C}$  keine Häufungspunkte. Also besagt der Satz von Mittag Leffler, dass es für alle möglichen Vorgaben an Polen eine meromorphe Funktion mit diesen Polen gibt.

Eine analoge Aussage gilt auch für andere Gebiete, ist aber schwieriger zu beweisen.

**Beweis:** Weil die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Häufungspunkte hat, muss die reelle Folge  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\infty$  konvergieren. Wir wählen für jedes  $n \in \{m \in \mathbb{N} \mid a_m \neq 0\}$  ein Taylorpolynom  $p_n(z)$  von  $z \mapsto P_n(\frac{1}{z-a_n})$  bei  $z = 0$  aus, so dass

$$\left| P_n \left( \frac{1}{z - a_n} \right) - p_n(z) \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{für alle } z \in B \left( 0, \frac{|a_n|}{2} \right) \text{ gilt.}$$

Wegen dem Potenzreihenentwicklungssatz gibt es ein solches Polynom  $p_n(z)$ . Weil im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  die reelle Folge  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen Unendlich konvergiert, ist jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{C}$  nur in endlich vielen Bällen  $B(0, \frac{|a_n|}{2})$  nicht enthalten. Also konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\frac{1}{z-a_n}) - p_n(z)$  kompakt auf  $\mathbb{C} \setminus \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Auf jeder kompakten Teilmenge konvergiert für genügend großes  $N \in \mathbb{N}$  die Reihe  $\sum_{n=N+1}^{\infty} P_n(\frac{1}{z-a_n}) - p_n(z)$  gegen eine holomorphe Funktion. Die Hauptteile an den Polstellen in der kompakten Teilmenge sind durch folgende rationale Funktion gegeben:

$$\sum_{n=1}^N \left( P_n \left( \frac{1}{z - a_n} \right) - p_n(z) \right). \quad \text{q.e.d.}$$

**Korollar 8.13.** Jede auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$  besitzt eine Partialbruchzerlegung

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( P_n \left( \frac{1}{z - a_n} \right) - p_n(z) \right)$$

mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie im Satz von Mittag-Leffler und  $g$  holomorph auf  $\mathbb{C}$ .

**Beweis:** Die Polstellen einer auf  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktion haben keine Häufungspunkte. Also sind sie abzählbar und als Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ohne Häufungspunkte gegeben. Die entsprechenden Hauptteile bilden eine Folge von Polynomen  $P_n(\frac{1}{z-a_n})$ . Wegen dem Satz von Mittag-Leffler existiert eine Folge von Polynomen  $p_n$ , so dass  $f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} (P_n(\frac{1}{z-a_n}) - p_n(z))$  auf  $\mathbb{C}$  gegen eine holomorphe Funktion  $g$  konvergiert. **q.e.d.**

## 8.5 Der Weierstraßsche Produktsatz

**Satz 8.14.** (Weierstraß) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  ohne Häufungspunkt. Dann gibt es eine Folge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von natürlichen Zahlen, so dass das unendliche Produkt

$$f(z) = z^m \prod_{\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp \left(p_n \left(\frac{z}{a_n}\right)\right)$$

$$\text{mit } m = \#\{n \mid a_n = 0\} \text{ und mit den Polynomen } p_n(z) = \sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k}$$

auf  $\mathbb{C}$  kompakt gegen eine holomorphe Funktion konvergiert, deren Nullstellen durch die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben sind. Dabei ist die Ordnung jeder Nullstelle bei  $z = a$  gegeben durch die Anzahl  $\#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a\}$ , mit der  $a$  in der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vorkommt.

**Beweis:** Weil die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Häufungspunkte in  $\mathbb{C}$  hat, konvergiert die reelle Folge  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$ . Also ist  $m = \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 0\}$  eine natürliche Zahl. Der Logarithmus besitzt auf  $B(1, 1)$  die konvergente Taylorreihe

$$\ln : B(1, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \ln(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}.$$

Deshalb gibt es eine Folge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass

$$\left| \ln(1-z) + \sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k} \right| < \frac{1}{2^n} \quad \text{gilt für } |z| < \frac{1}{2}.$$

Für jede kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{C}$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für  $n \geq N$  die Menge  $K$  in  $B(0, \frac{|a_n|}{2})$  liegt. Dann konvergiert

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left( \ln \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k a_n^k} \right)$$

auf  $K$  gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion. Wegen den Logarithmuskriterien konvergiert dann

$$f(z) = z^m \prod_{\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp \left(p_n \left(\frac{z}{a_n}\right)\right)$$

auf  $\mathbb{C}$  kompakt gegen eine holomorphe Funktion, deren Nullstellen mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  übereinstimmen. Die Ordnung jeder Nullstelle bei  $z = a$  ist die Anzahl der Folgenglieder von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die mit  $a$  übereinstimmen. **q.e.d.**

Die Faktoren  $\exp(p_n(\frac{z}{a_n}))$  werden konvergenzerzeugende Faktoren genannt.

**Korollar 8.15.** Sei  $g$  auf  $\mathbb{C}$  holomorph, nicht identisch gleich 0, und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die entsprechende Folge der Nullstellen. Jede Nullstelle  $a$  von  $g$  kommt also in  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau  $\text{ord}_a(g)$  mal vor. Dann hat  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Häufungspunkte und es gibt eine holomorphe Funktion  $h$  auf  $\mathbb{C}$ , so dass gilt

$$g(z) = f(z) \exp(h(z)).$$

Hierbei ist  $f$  die Funktion aus dem Weierstraßschen Produktsatz zu der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Beweis:** Die Menge der Nullstellen von  $g$  ist eine abgeschlossene diskrete Teilmenge und hat deshalb keinen Häufungspunkt. Also ist sie abzählbar. Dann gibt es wegen dem Weierstraßschen Produktsatz eine auf  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $f$  mit den gleichen Nullstellen. Insbesondere ist  $\frac{g}{f}$  eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  mit nur hebbaren Singularitäten. Dann ist  $\frac{g}{f}$  sogar eine nicht verschwindende holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ . Weil  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängend ist, besitzt dann  $(\frac{g}{f})' \frac{f}{g}$  eine Stammfunktion  $h$  auf  $\mathbb{C}$ , die für ein  $z_0 \in \mathbb{C}$   $\exp(h(z_0)) = \frac{g(z_0)}{f(z_0)}$  erfüllt. Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(h(z)) = \frac{g(z)}{f(z)} \quad \text{bzw.} \quad g(z) = f(z) \exp(h(z)). \quad \text{q.e.d.}$$

Funktionen  $g$ , deren Absolutbetrag durch eine Funktion  $C \exp(|z|^p)$  mit positiven reellen Konstanten  $C$  und  $p$  beschränkt sind, heißen ganze Funktionen von endlicher Ordnung. Der Satz von Hadamard besagt, dass die entsprechende Reihe  $\sum_{\{n | a_n \neq 0\}} |a_n|^{-s}$  für ein geeignetes positives  $s$  konvergiert und die Folge  $k_n$  als eine konstante Folge gewählt werden kann. Dadurch wird die Produktzerlegung eindeutig. In diesen Fällen kann dann  $h$  auch nur ein Polynom sein, dessen Grad durch  $p$  beschränkt ist.

**Korollar 8.16.** Jede auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion ist der Quotient zweier ganzer Funktionen, d.h. der Körper der meromorphen Funktion auf  $\mathbb{C}$  ist der Quotientenkörper des Ringes der auf  $\mathbb{C}$  holomorphen Funktionen.

**Beweis:** Die Pole einer auf  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktion  $f$  bilden eine Menge ohne Häufungspunkt. Sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der Polstellen mit Ordnungen  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir wählen eine auf  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $h$  mit den Nullstellen  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jeweils mit Vielfachheit  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann hat  $fh$  nur hebbare Singularitäten, ist also gleich einer holomorphen Funktion  $g$  auf  $\mathbb{C}$ . Dann folgt

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \quad \text{q.e.d.}$$

# Kapitel 9

## Der Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass alle einfach zusammenhängenden Gebiete in  $\mathbb{C}$ , die nicht mit  $\mathbb{C}$  übereinstimmen, biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{D}$  sind. Dieser Satz zählt in den Worten von Felix Klein zu den tiefsten und größten Erkenntnissen, die in der Mathematik je erwachsen sind.

**Definition 9.1.** *Zwei Gebiete in  $\mathbb{C}$  heißen biholomorph (oder konform) äquivalent, wenn es eine bijektive holomorphe Abbildung von einem Gebiet auf das andere gibt.*

**Bemerkung 9.2.** *Wegen dem Nullstellensatz ist eine holomorphe Funktion in jeder Umgebung einer Nullstelle der Ableitung nicht injektiv. Deshalb kann die Ableitung einer injektiven holomorphen Funktion keine Nullstellen haben. Wegen dem Satz der inversen Funktion ist dann die Umkehrabbildung einer bijektiven holomorphen Funktion auch holomorph. Wegen der Gebietstreue ist das Bild eines Gebietes unter einer injektiven holomorphen Funktion wieder ein Gebiet. Deshalb ist jede injektive holomorphe Funktion auf einem Gebiet eine bijektive holomorphe Funktion auf ein Gebiet mit holomorpher Umkehrabbildung, also eine biholomorphe Abbildung von einem Gebiet auf ein Gebiet. Insbesondere ist diese Relation tatsächlich symmetrisch.*

**Satz 9.3.** *(Riemannscher Abbildungssatz) Jedes einfach zusammenhängende Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$ , das nicht gleich  $\mathbb{C}$  ist, ist biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{D}$ .*

**Beweis in 3 Schritten:**

**1.Schritt:** Wir zeigen, dass  $G$  biholomorph äquivalent zu einem Gebiet in  $\mathbb{D}$  ist, das die Null enthält.

Weil  $G \neq \mathbb{C}$  ist, können wir durch Translation erreichen, dass  $G$  nicht die 0 enthält. Weil  $G$  einfach zusammenhängend ist, gibt es einen Zweig des Logarithmus

$$\lambda : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } e^{\lambda(z)} = z \quad \text{für alle } z \in G.$$

Die Funktion

$$w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{\frac{1}{2}\lambda(z)}$$

ist holomorph auf  $\mathbb{C}$ , und wegen  $w^2(z) = z$  injektiv. Sie bildet also  $G$  auf ein Gebiet  $w[G]$  ab. Sind  $z_1, z_2 \in G$  mit  $w(z_1) = -w(z_2)$ , dann folgt

$$z_1 = w^2(z_1) = w^2(z_2) = z_2.$$

Also enthält  $w[G]$  keine Punkte, die durch  $z \mapsto -z$  ineinander überführt werden. Es gilt also

$$w[G] \cap -w[G] = \emptyset.$$

Wegen der Gebietstreue ist  $w[G]$  ein Gebiet und damit insbesondere offen. Für jedes  $w_0 \in w[G]$  gibt es also einen abgeschlossenen Ball  $\overline{B}(w_0, \epsilon) \subset w[G]$ . Also liegt  $w[G]$  im Komplement eines abgeschlossenen Balles  $\overline{B}(-w_0, \epsilon)$ . Dann gibt es eine Möbiustransformation  $w \mapsto \frac{w+w_0}{\epsilon}$ , die den Ball  $\overline{B}(-w_0, \epsilon)$  auf  $\overline{\mathbb{D}}$  abbildet. Die Abbildung  $z \mapsto \frac{\epsilon}{w(z)+w_0}$  bildet dann  $G$  nach  $\mathbb{D}$  ab. Weil das Bild dann einen Punkt  $z_0$  von  $\mathbb{D}$  enthalten muss, können wir mit einer geeigneten Möbiustransformation (siehe Satz 2.11) von  $\mathbb{D}$  auf sich selber immer erreichen, dass das Bild  $0 \in \mathbb{D}$  enthält.

**2.Schritt:** Wir setzen voraus, dass  $G \subset \mathbb{D}$  einfach zusammenhängend mit  $0 \in G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  eine injektive holomorphe Funktion mit  $f(0) = 0$  ist. Wenn  $f$  nicht surjektiv ist, dann gibt es eine injektive holomorphe Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $F(0) = 0$  und  $|F'(0)| > |f'(0)|$ .

Wenn  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $f(0) = 0$  nicht surjektiv ist, gibt es ein  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus f[G]$ . Sei

$$\Phi_0(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Dann ist  $\Phi_0 \circ f : G \rightarrow \mathbb{D}$  eine injektive holomorphe Funktion, deren Bild  $\Phi_0(z_0) = 0$  nicht enthält. Dann gibt es wie im ersten Schritt wieder eine Funktion

$$w : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \tilde{G} = (\Phi_0 \circ f)[G] \quad \text{und} \quad w^2(z) = z \quad \text{für alle } z \in \tilde{G}.$$

Offenbar ist  $w[\tilde{G}] \subset \mathbb{D}$ . Wir setzen

$$z_1 = w(\Phi_0(f(0))) = w(-z_0) \quad \text{und} \quad \Phi_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}.$$

Das ist eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{D}$  auf sich selber mit  $\Phi_1(z_1) = 0$ . Dann definieren wir

$$F(z) = (\Phi_1 \circ w \circ \Phi_0 \circ f)(z) \quad \text{für alle } z \in G.$$

Offenbar ist  $F : G \rightarrow \mathbb{D}$  injektiv mit  $F(0) = 0$ . Für die holomorphe Abbildung

$$h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto h(z) = \Phi_0^{-1}((\Phi_1^{-1}(z))^2)$$



gilt

$$h(0) = \Phi_0^{-1}(z_1^2) = \Phi_0^{-1}(w^2(-z_0)) = \Phi_0^{-1}(-z_0) = 0$$

und

$$h \circ F = \Phi_0^{-1} \circ w^2 \circ \Phi_0 \circ f = f.$$

Die Abbildungen  $z \mapsto z^2$  und  $\frac{1}{z} \mapsto \frac{1}{z^2}$  definieren eine holomorphe nicht injektive Abbildung von  $\mathbb{P}^1$  nach  $\mathbb{P}^1$ . Dann ist auch  $h$  eine holomorphe nicht injektive Abbildung von  $\mathbb{P}^1$  nach  $\mathbb{P}^1$ , also keine Möbiustransformation. Aus dem Schwarzschen Lemma folgt

$$|h'(0)| < 1 \quad \text{und deshalb auch} \quad |f'(0)| = |h'(0)F'(0)| = |h'(0)| \cdot |F'(0)| < |F'(0)|.$$

**3.Schritt:** Die Menge der injektiven holomorphen Funktionen  $f$  von einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $0 \in G \subset \mathbb{D}$  nach  $\mathbb{D}$  mit Fixpunkt 0 enthält ein Element, für das  $|f'(0)|$  maximal ist. Diese Abbildung ist wegen dem zweiten Schritt dann surjektiv.

Zunächst bemerken wir, dass diese Menge nicht leer ist, weil sie die identische Abbildung enthält.  $G$  enthält offenbar einen Ball  $\overline{B}(0, \epsilon)$  mit  $\epsilon > 0$ . Dann folgt aus der Cauchyschen Abschätzung für die Taylorkoeffizienten  $|f'(0)| \leq \frac{1}{\epsilon}$ . Also besitzt die Menge

$$\{|f'(0)| \mid f : G \rightarrow \mathbb{D} \text{ holomorph und injektiv mit } f(0) = 0\}$$

ein Supremum  $s_0 \in [1, \infty)$ . Dann existiert eine Folge  $f_n$  von solchen Abbildungen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(0)| = s_0$ . Die Folge  $(|f_n(z)|)_{n \in \mathbb{N}}$  ist für alle  $z \in G$  durch 1 beschränkt. Wegen dem Satz von Montel besitzt  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kompakt konvergente Teilfolge mit Grenzwert  $f$ . Wegen dem Satz von Weierstraß konvergieren die Ableitungen kompakt. Insbesondere ist der Betrag von der Ableitung  $f'(0)$  an der Stelle  $z = 0$  gleich  $s_0 \geq 1$ . Wegen Korollar 7.5 ist der Grenzwert eine injektive holomorphe Funktion. Das Bild ist wegen der Gebietstreue eine offene Teilmenge von  $\bar{\mathbb{D}}$ , also in  $\mathbb{D}$  enthalten. Wegen dem 2. Schritt ist der Grenzwert dann eine surjektive Funktion auf  $\mathbb{D}$ . **q.e.d.**

#### Beispiel 9.4.

$$G = \{x + iy \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

*Wegen dem Riemannschen Abbildungssatz lässt sich dieses Gebiet auf  $\mathbb{D}$  abbilden. Wir wollen annehmen, dass sich diese Abbildung stetig auf den Rand als eine bijektive stetige Abbildung von  $\bar{G}$  nach  $\bar{\mathbb{D}}$  fortsetzen lässt. Wir werden am Schluss sehen, dass das tatsächlich der Fall ist. Im Lemma 2.11 haben wir mit der Möbiustransformation*

$$x = \frac{i+z}{i-z} \quad \Longleftrightarrow \quad ix - i = z(1+x) \quad \Longleftrightarrow \quad x \mapsto z = i \frac{x-1}{x+1}$$

*den Rand  $\partial\mathbb{D}$  von  $\mathbb{D}$  auf alle reellen Zahlen (einschließlich  $\infty$ ) abgebildet. Weil diese Möbiustransformation  $x = 0$  auf  $-i$  abbildet, bildet sie auch  $\mathbb{D}$  auf die untere Halbebene*

$\mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}$  ab. Die Verkettung der Abbildung vom Riemannschen Abbildungssatz mit dieser Möbiustransformation ergibt eine Abbildung von  $G$  in die untere Halbebene, die den Rand  $\partial G$  auf alle reellen Zahlen abbildet. Durch eine reelle Möbiustransformation können wir dann erreichen, dass z.B. der Punkt  $0 \in \bar{G}$  auf  $\infty$  abgebildet wird. Wegen dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip Satz 2.9 können wir durch geeignete Spiegelungen an den 4 Kanten von  $G$  diese Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  dann zu einer meromorphen Abbildung fortsetzen:

$$\begin{aligned} f : \{x + iy \mid 0 \leq x \leq a, -b \leq y \leq 0\} &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto \bar{f}(\bar{z}) \\ f : \{x + iy \mid 0 \leq x \leq a, b \leq y \leq 2b\} &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto \bar{f}(\bar{z} + 2bi) \\ f : \{x + iy \mid -a \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq b\} &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto \bar{f}(-\bar{z}) \\ f : \{x + iy \mid 0 \leq x \leq a, b \leq y \leq 2b\} &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto \bar{f}(-\bar{z} + 2a) \end{aligned}$$

Wenn wir das dann allen Kanten des dadurch entstandenen Gebietes wiederholen erhalten wir eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet, das die Menge

$$\{x + iy \mid -a \leq x \leq 2a, -b \leq y \leq 2b\}$$

enthält. Man rechnet leicht nach, dass diese Funktion doppelperiodisch ist:

$$\begin{aligned} f(z + 2a) &= f(z) && \text{wenn } f(z) \text{ und } f(z + 2a) \text{ definiert sind.} \\ f(z + 2bi) &= f(z) && \text{wenn } f(z) \text{ und } f(z + 2bi) \text{ definiert sind.} \end{aligned}$$

Dann läßt sie sich offenbar zu einer doppelperiodischen meromorphen Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen, die

$$f(z + 2ak + 2bil) = f(z) \text{ für alle } k, l \in \mathbb{Z}$$

erfüllt. Mit solchen Funktionen werden wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen. Insbesondere werden wir sehen, dass diese Funktion gleich der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion ist.

# Kapitel 10

## Elliptische Funktionen

### 10.1 Periodische Funktionen und Periodengitter

Wir betrachten in diesem Kapitel meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}$ , die periodisch bezüglich eines Gitters sind. Wir fassen dabei meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}$  als holomorphe Funktionen nach  $\mathbb{P}^1$  auf, so dass sie überall definiert sind.

**Definition 10.1.** Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  eine meromorphe Funktion. Dann heißt die Menge

$$\Lambda(f) = \{\omega \in \mathbb{C} \mid f(z + \omega) = f(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\}$$

Periodenmenge von  $f$ .

**Satz 10.2.** Die Periodenmenge einer nicht konstanten meromorphen Funktion  $f$  ist eine diskrete Untergruppe von  $\mathbb{C}$ .

**Beweis:** Offenbar ist die Periodenmenge eine Untergruppe von  $\mathbb{C}$ . Wenn sie einen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}$  besitzt, dann ist  $f$  wegen dem Identitätssatz konstant. **q.e.d.**

**Satz 10.3.** (Klassifikation diskreter Untergruppen von  $\mathbb{C}$ ) Es gibt drei Typen von diskreten Untergruppen  $\Lambda$  von  $\mathbb{C}$ .

(i)  $\Lambda = \{0\}$

(ii) Es gibt ein  $\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $\Lambda = \{n_1 \omega_1 \mid n_1 \in \mathbb{Z}\}$

(iii) Es gibt zwei über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige Elemente  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , so dass

$$\Lambda = \{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

**Beweis:** Offenbar enthält  $\Lambda$  die Null. Weil jede beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{C}$  nur endlich viele Elemente einer diskreten Teilmenge von  $\mathbb{C}$  enthalten kann, enthält  $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$  ein Element  $\omega_1$  minimaler Länge, wenn diese Menge nicht leer ist. Dann enthält  $\Lambda$  die Untergruppe  $\{n_1\omega_1 \mid n_1 \in \mathbb{Z}\}$ . Insbesondere ist  $\Lambda \cap \mathbb{R}\omega_1$  eine diskrete Untergruppe von  $\mathbb{R}\omega_1 \simeq \mathbb{R}$ . Weil für jedes Element  $z \in \mathbb{R}\omega_1$  es ein  $n_1 \in \mathbb{Z}$  gibt, so dass  $z - n_1\omega_1 \in \{s\omega_1 \mid s \in [0, 1)\}$  liegt, und diese Menge nur das Element Null von  $\Lambda$  enthält, folgt

$$\Lambda \cap \mathbb{R}\omega_1 = \{n_1\omega_1 \mid n_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

Wenn  $\Lambda$  dann auch noch ein Element in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\omega_1$  enthält, muss  $\Lambda$  eine zweite Untergruppe von der Form  $\{n_2\omega_2 \mid n_2 \in \mathbb{Z}\}$  enthalten mit

$$\Lambda \cap \mathbb{R}\omega_2 = \{n_2\omega_2 \mid n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann enthält  $\Lambda$  offenbar das Gitter vom Typ (iii)  $\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ . Weil auch  $\Lambda \setminus \mathbb{R}\omega_1$  eine diskrete Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist können wir  $\omega_2$  sogar so wählen, dass es ein Element minimaler Länge von dieser diskreten Teilmenge ist. Dann enthält  $\Lambda \setminus \{0\}$  kein Element im Inneren der konvexen Hülle von  $\omega_1, -\omega_1, \omega_2$  und  $-\omega_2$ , weil alle Elemente im Inneren eines Dreieckes von einer Ecke des Dreieckes kleineren Abstand haben als die längere der beiden Kanten lang ist, die an der Ecke enden. Aufgrund unserer Wahl von  $\omega_1$  hat  $\omega_1$  nämlich keinen größeren Abstand von Null als  $\omega_2$ . Es gilt sogar, dass die abgeschlossene konvexe Hülle nur die Elemente  $0, \omega_1, -\omega_1, \omega_2$  und  $-\omega_2$  enthält, weil alle anderen Punkte kürzeren Abstand von 0 haben als  $\omega_2$ . Weil  $\Lambda$  aber  $\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  enthält, und sich jeder Punkt von  $\mathbb{C}$  nur durch ein Element von dieser diskreten Untergruppe von einem Element in der abgeschlossenen konvexen Hülle von  $\omega_1, -\omega_1, \omega_2$  und  $-\omega_2$  unterscheidet, folgt

$$\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}. \quad \text{q.e.d.}$$

**Definition 10.4.** (i) Ein Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ist eine diskrete Untergruppe vom Typ (iii).

(ii) Eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion heißt doppelperiodisch, wenn  $\Lambda(f)$  ein Gitter enthält. Dann heißt  $f$  auch elliptische Funktion.

(iii) Eine elliptische Funktion zu einem Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ist eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  mit  $\Lambda(f) \supset \Lambda$ .

Für jedes Gitter, also jede diskrete Untergruppe vom Typ (iii), ist das abgeschlossene Periodenparallelogramm zu den Erzeugenden  $\omega_1$  und  $\omega_2$  definiert durch

$$\{z_0 + s\omega_1 + t\omega_2 \mid (s, t) \in [0, 1]^2\}.$$

Diese Erzeugenden sind nicht eindeutig. Wenn wir zusätzlich noch fordern, dass die Orientierung von  $(\omega_1, \omega_2)$  mit der Orientierung von  $(1, i)$  übereinstimmen soll, also die Determinante

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\omega_1) & \operatorname{Re}(\omega_2) \\ \operatorname{Im}(\omega_1) & \operatorname{Im}(\omega_2) \end{pmatrix} > 0$$

positiv sein soll, dann erhalten wir die Menge aller solchen Erzeugenden durch folgende Wirkung der Gruppe  $SL(2, \mathbb{Z})$  auf den Erzeugenden:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\omega_1 + b\omega_2 \\ c\omega_1 + d\omega_2 \end{pmatrix}$$

Für jedes Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  definiert

$$z \sim z' \iff z - z' \in \Lambda$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{C}$ . Die Menge der Äquivalenzklassen ist die Quotientengruppe  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Offenbar enthält jede Äquivalenzklasse mindestens ein Element in einem abgeschlossenen Periodenparallelogramm. Die Äquivalenzklassen von Punkten im Inneren des Periodenparallelogramms enthalten keine weiteren Punkte im abgeschlossenen Periodenparallelogramm. Aber die Äquivalenzklassen von den Punkten auf den Kanten enthalten jeweils zwei solche Punkte auf einander gegenüberliegenden Kanten, und alle vier Eckpunkte gehören sogar zu einer Äquivalenzklasse. Deshalb kann man die Menge der Äquivalenzklassen mit dem Periodenparallelogramm dann identifizieren, wenn man die jeweils gegenüberliegenden Kanten miteinander identifiziert und alle vier Eckpunkte. Geometrisch erhält man dann einen Torus, also  $S^1 \times S^1$ . Indem wir die Ecke  $z_0$  des Periodenparallelogramms gegebenenfalls verschieben, sehen wir, dass jede Äquivalenzklasse von  $\mathbb{C}/\Lambda$  in einer offenen Umgebung enthalten ist, die wir mit einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  identifizieren können. Deshalb sind elliptische Funktionen offenbar holomorphe Funktionen von  $\mathbb{C}/\Lambda$  nach  $\mathbb{P}^1$ .

**Satz 10.5.** *Die Menge  $\mathbb{K}(\Lambda)$  der elliptischen Funktionen zu einem Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  bildet einen Unterkörper der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . Er enthält alle Konstanten und ist abgeschlossen unter Differentiation.*

Beweis ist offensichtlich.

**q.e.d.**

**Satz 10.6.** *Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.*

**Beweis:** Eine solche Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Periodenparallelogramm alle ihre Werte an. Weil sie als stetige Funktion auf einer solchen kompakten Menge beschränkt ist, ist sie dann auf  $\mathbb{C}$  beschränkt und wegen dem Satz von Liouville konstant.

**q.e.d.**

**Satz 10.7.** (*Residuensumme einer elliptischen Funktion*) Eine elliptische Funktion hat auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  höchstens endlich viele Pole. Die Summe der Residuen einer elliptischen Funktion verschwindet. Die Anzahl der mit Vielfachheit gezählten Pole einer elliptischen Funktion heißt die Ordnung.

**Beweis:** Jedes abgeschlossene Periodenparallelogramm enthält höchstens endlich viele Pole, weil die Menge der Polstellen einer meromorphen Funktion keine Häufungspunkte enthält. Durch eine geeignete Wahl von  $z_0$  können wir erreichen, dass der Rand des Periodenparallelogramms keine Pole enthält. Der Rand des Periodenparallelogramms ist offenbar ein geschlossener Weg, der jeden Punkt im Inneren genau einmal umrundet und alle Punkte im Äußeren nicht umrundet. Dann folgt aus dem Residuensatz, dass das Kurvenintegral von  $f$  längs des Randes von dem Periodenparallelogramm gleich  $2\pi i$  mal der Summe der Residuen von  $f$  im Periodendiagramm ist. Wegen der Doppelperiodizität kürzen sich die Kurvenintegrale längs der gegenüberliegenden Seiten im Kurvenintegral längs des Randes eines Periodenparallelogramms weg. **q.e.d.**

**Korollar 10.8.** Eine nicht konstante elliptische Funktion der Ordnung  $m$  mit Periodengitter  $\Lambda$  nimmt auf dem Periodentorus  $\mathbb{C}/\Lambda$  jeden Wert mit Vielfachheit gezählt genau  $m$ -mal an.

**Beweis:** Sei  $\omega \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $\frac{(f(z)-\omega)'}{(f(z)-\omega)}$  auch eine elliptische Funktion. Die Polstellen dieser Funktion sind genau die Polstellen von  $f$  und die Nullstellen von  $f(z) - \omega$ . Die Summe der Residuen dieser Funktion ist dann die Summe der Nullstellen mit Vielfachheit gezählt - Anzahl der Polstellen von  $f$  mit Vielfachheit gezählt. Also folgt das Korollar aus dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

Eine zu einem Periodengitter  $\Lambda$  elliptische Funktion der Ordnung Eins bildet  $\mathbb{C}/\Lambda$  bijektiv auf  $\mathbb{P}^1$  ab, wäre also eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{C}/\Lambda$  auf  $\mathbb{P}^1$ . Diese kann es aber nicht geben, weil  $\mathbb{P}^1$  im Gegensatz zu  $\mathbb{C}/\Lambda$  einfach zusammenhängend ist:

**Korollar 10.9.** Für jedes Periodengitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  gibt es keine elliptische Funktion der Ordnung Eins

**Beweis:** Wegen dem Residuensatz müsste der Hauptteil einer solchen Funktion verschwinden. **q.e.d.**

## 10.2 Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion

Die einfachsten elliptischen Funktionen haben also entweder einen Pol zweiter Ordnung oder zwei Pole erster Ordnung.

**Satz 10.10.** (Definition der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion) Sei  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Dann konvergiert

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{mit } \Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}.$$

auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  kompakt gegen eine elliptische Funktion zu dem Gitter  $\Lambda$  mit genau einem Pol zweiter Ordnung. Diese Funktion  $\wp$  heißt Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion.

**Beweis:** Für ein beliebiges  $R > 0$  folgt aus  $|z| \leq R$  und  $|\omega| \geq 2R$

$$|z - \omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{|\omega|}{2}.$$

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| \leq \frac{3|z| \cdot |\omega|}{|\omega|^2 \frac{|\omega|^2}{4}} \leq \frac{12R|\omega|}{|\omega|^4} = \frac{12R}{|\omega|^3}.$$

Für die kompakte Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{mit } \Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$$

genügt es also die absolute Konvergenz von  $\sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{|\omega|^3}$  zu zeigen.

**Lemma 10.11.** Für jedes Periodengitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  und jedes  $s > 2$  konvergiert die Reihe

$$\sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{|\omega|^s}.$$

**Beweis:** Wir wählen wie in der Klassifikation der diskreten Untergruppen von  $\mathbb{C}$  ein Element  $\omega_1$  in  $\mathbb{C}^* \cap \Lambda$  von minimaler Länge und ein Element  $\omega_2$  in  $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\omega_1) \cap \Lambda$  von minimaler Länge. Wir behaupten jetzt, dass es zwei positive Konstanten  $C_1, C_2$  gibt, so dass

$$C_1(|n_1| + |n_2|) \leq |n_1\omega_1 + n_2\omega_2| \leq C_2(|n_1| + |n_2|)$$

gilt für alle  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . Um das einzusehen schreiben wir

$$|n_1\omega_1 + n_2\omega_2| = |\omega_1| \cdot |n_1 + n_2\tau| = |\omega_1| \sqrt{(n_1 + xn_2)^2 + (yn_2)^2} \quad \text{mit } \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = x + iy.$$

Weil  $\omega_1$  und  $\omega_2$  über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig sind muss  $y \neq 0$  gelten. Wenn  $|n_1| \leq 2|x| \cdot |n_2|$  gilt, dann folgt aus  $2|n_1| \cdot |n_2| \leq (n_1^2 + n_2^2)$  auch

$$\begin{aligned} \frac{|\omega_1| \cdot |y|}{1 + 2|x|} (|n_1| + |n_2|) &\leq |\omega_1| \cdot |y| \cdot |n_2| \leq \\ &\leq |\omega_1| \sqrt{(n_1 + xn_2)^2 + (yn_2)^2} \leq \\ &\leq |\omega_1| \sqrt{(1 + |x| + x^2 + y^2)(n_1^2 + n_2^2)} \leq |\omega_1| \sqrt{(1 + |x|)^2 + y^2} (|n_1| + |n_2|). \end{aligned}$$

Wenn andererseits gilt  $|n_1| \geq 2|x| \cdot |n_2|$ , dann folgt wieder aus  $2|n_1| \cdot |n_2| \leq n_1^2 + n_2^2$

$$\begin{aligned} \frac{|\omega_1| \cdot |y|}{\sqrt{2+8y^2}}(|n_1| + |n_2|) &\leq |\omega_1| \sqrt{\frac{y^2(n_1^2 + n_2^2)}{1+4y^2}} \leq |\omega_1| \sqrt{\left(\frac{n_1}{2}\right)^2 + y^2 n_2^2} \leq \\ &\leq |\omega_1| \sqrt{(n_1 + xn_2)^2 + (yn_2)^2} \leq \\ &\leq |\omega_1| \sqrt{(1+|x|+x^2+y^2)(n_1^2 + n_2^2)} \leq |\omega_1| \sqrt{(1+|x|)^2 + y^2}(|n_1| + |n_2|). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. Andererseits gilt für  $n_1 \neq 0$  und  $s > 2$

$$\sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(|n_1| + |n_2|)^s} = \frac{1}{|n_1|^s} + 2 \sum_{k \geq |n_1|+1} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{|n_1|^s} + 2 \int_{|n_1|}^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{|n_1|^s} + \frac{2}{(s-1)|n_1|^{s-1}}$$

Daraus folgt für  $s > 2$

$$\begin{aligned} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(|n_1| + |n_2|)^s} &\leq \sum_{n_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{2}{|n_1|^s} + \frac{2}{(s-1)|n_1|^{s-1}} \right) \\ &\leq 4 + \frac{4}{s-1} + \int_1^{\infty} \left( \frac{4}{x^s} + \frac{4}{(s-1)x^{s-1}} \right) dx = 4 + \frac{8}{s-1} + \frac{4}{(s-1)(s-2)}. \quad \mathbf{q.e.d.} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Summe

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{auf } \mathbb{C} \setminus \Lambda$$

kompakt gegen eine meromorphe Funktion, die nur an allen Punkten des Periodengitters eine Polstelle zweiter Ordnung hat. Es bleibt zu zeigen, dass  $\wp$  doppelperiodisch ist. Dazu bemerken wir, dass die Ableitung gegeben ist als der kompakte Grenzwert von

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3} \quad \text{auf } \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Offenbar ist diese Ableitung doppelperiodisch. Deshalb ist für alle  $\omega \in \Lambda$  die Funktion

$$\wp(z+\omega) - \wp(z)$$

auf  $\mathbb{C}$  konstant. Weil  $\wp(z)$  offenbar eine gerade Funktion ist, gilt  $\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right) = 0$  für alle  $\omega \in \Lambda$ . Daraus folgt  $\wp(z+\omega) = \wp(z)$  für alle  $\omega \in \Lambda$ . **q.e.d.**



Die Laurententwicklung von  $\wp(z)$  bei  $z = 0$  läßt sich folgendermaßen berechnen:  
Wegen

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

folgt

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{z^{k-1}}{\omega^{k-1}}$$

Dann erhält man

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\omega^{k+1}} z^{k-1} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} k \left( \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^{k+1}} \right) z^{k-1}.$$

Für gerades  $k$  verschwinden die Summen  $\sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^{k+1}}$  weil mit  $\omega \in \Lambda^*$  auch  $-\omega$  in  $\Lambda^*$  liegt. Deshalb erhalten wir:

**Satz 10.12.** Die Laurententwicklung von  $\wp(z)$  bei  $z = 0$  ist gegeben durch

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) E_{2k+2} z^{2k} \text{ mit } E_{2k+2} = \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^{2k+2}}.$$

Diese Reihen heißen Eisensteinreihen.

**q.e.d.**

Gliedweise Differentiation liefert:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6E_4 z + 20E_6 z^3 + \dots$$

Berechnen wir die ersten Terme von folgenden Cauchyprodukten so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 3E_4 z^2 + 5E_6 z^4 + \dots \\ \wp^3(z) &= \frac{1}{z^6} + \frac{9E_4}{z^2} + 15E_6 + \dots \\ \wp'^2(z) &= \frac{4}{z^6} - \frac{24E_4}{z^2} - 80E_6 + \dots \end{aligned}$$

Deshalb gibt es eine Linearkombination dieser Funktionen die keine Polstellen hat und bei  $z = 0$  verschwindet:

$$f(z) = \wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 60E_4\wp(z) + 140E_6.$$

Weil alle holomorphen elliptischen Funktionen konstant sind, folgt:

**Satz 10.13.** (Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion) Es gilt

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \text{ mit } g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^4} \text{ und } g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^6}.$$

**q.e.d.**

Diese Differentialgleichung bestimmt die Funktion  $\wp$  zusammen mit einem Anfangswert eindeutig. Deshalb sind die einzigen Lösungen dieser Differentialgleichungen durch  $f(z) = \wp(z + a)$  gegeben.

Die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion nimmt auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  jeden Wert mit Vielfachheit gezählt genau zweimal an. Die Punkte, wo sie einen Wert mit Vielfachheit 2 annimmt, sind genau die Nullstellen von  $\wp'(z)$ .

**Lemma 10.14.** Ist  $f$  eine gerade elliptische Funktion zum Periodengitter  $\Lambda$ , so gilt für alle  $\omega \in \Lambda$  und  $z \in \mathbb{C}$

$$f\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = f\left(\frac{\omega}{2} - z\right).$$

Ist  $\frac{\omega}{2}$  kein Pol von  $f$  so folgt  $f'(\frac{\omega}{2}) = 0$ .

**Beweis:**

$$f\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = f\left(-\frac{\omega}{2} - z\right) = f\left(-\frac{\omega}{2} - z + \omega\right) = f\left(\frac{\omega}{2} - z\right).$$

**q.e.d.**

Die entsprechenden Werte  $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2})$ ,  $e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2})$ ,  $e_3 = \wp(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})$  heißen auch Halbwerte von  $\wp$ . Die Funktion

$$\wp'^2(z) - 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

hat auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  nur bei  $z = 0$  einen Pol höchstens vierter Ordnung und bei  $\frac{\omega_1}{2}$ ,  $\frac{\omega_2}{2}$  und  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  jeweils mindestens eine doppelte Nullstelle, ist also nach dem Korollar 10.8 konstant mit dem Wert 0.

**Satz 10.15.** Mit den Werten  $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2})$ ,  $e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2})$ ,  $e_3 = \wp(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})$  gilt:

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \quad \text{q.e.d.}$$

Aus dem Vergleich mit Satz 10.13 erhalten wir die Gleichheit der Polynome in  $\wp$

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

Also gilt

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_1e_3) = -g_2$$

$$4e_1e_2e_3 = g_3$$

## 10.3 Der Körper der elliptischen Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir den Körper  $\mathbb{K}(\Lambda)$  aller elliptischen Funktionen zu einem festen Periodengitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ .

**Satz 10.16.** *Sei  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ein Periodengitter vom Typ (iii). Dann gilt*

- (i) *Jede gerade elliptische Funktion zum Periodengitter  $\Lambda$  ist eine rationale Funktion von der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion.*
- (ii) *Jede elliptische Funktion zum Periodengitter  $\Lambda$  ist die Summe einer rationalen Funktion von  $\wp$  und einer rationalen Funktion von  $\wp$  multipliziert mit  $\wp'$ .*
- (iii) *Der Körper der elliptischen Funktionen zum Periodengitter  $\Lambda$  ist isomorph zu*

$$\mathbb{K}(\Lambda) \simeq \mathbb{C}(s)[t] / \langle t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3 \rangle.$$

*Hierbei bezeichnet  $\mathbb{C}(s)$  den Körper der rationalen Funktion in der Variablen  $s$ ,  $\mathbb{C}(s)[t]$  den Ring der Polynome in  $[t]$ , dessen Koeffizienten in  $\mathbb{C}(s)$  liegen und  $\langle t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3 \rangle$  das Ideal in  $\mathbb{C}(s)[t]$ , dass von  $t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3$  erzeugt wird.*

**Beweis:**(i) Sei  $f$  eine gerade elliptische Funktion zum Periodengitter  $\Lambda$ . Weil  $f'$  höchstens endliche viele Nullstellen hat, hat  $f - c$  für höchstens endlich viele Werte  $c \in \mathbb{C}$  Nullstellen höherer Ordnung. Also gibt es zwei Werte  $c, d \in \mathbb{C}$ , so dass  $f - c$  und  $f - d$  nur einfache Nullstellen auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  hat. Jede Nullstelle  $z$  von  $f - c$  bzw.  $f - d$ , die  $2z \in \Lambda$  erfüllt, müsste wegen Lemma eine doppelte Nullstelle sein. Also sind für alle Nullstellen  $z$  von  $f - c$  bzw.  $f - d$   $z$  und  $-z$  nicht äquivalent modulo  $\Lambda$ . Seien also  $a_1, -a_1, \dots, a_m, -a_m$  und  $b_1, -b_1, \dots, b_m, -b_m$  die Nullstellen von  $f - c$  bzw.  $f - d$ . Wir bemerken, dass ihre Anzahl  $2m$  wegen Korollar 10.8 gleich der Ordnung von  $f$  sein muss. Dann sind

$$\frac{f(z) - c}{f(z) - d} \quad \text{und} \quad \frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \dots (\wp(z) - \wp(a_m))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \dots (\wp(z) - \wp(b_m))}$$

zwei elliptische Funktionen mit den gleichen Nullstellen und Polstellen, also wegen Satz 10.6 zueinander proportional. Also ist  $f(z)$  eine rationale Funktion in  $\wp$ .

(ii) Jede elliptische Funktion  $f$  erfüllt

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)).$$

Also ist jede elliptische Funktion die Summe einer geraden elliptischen Funktion und einer ungeraden elliptischen Funktion. Weil  $\wp'(z)$  eine ungerade elliptische Funktion

ist, ist  $\frac{1}{2\wp'(z)}(f(z) - f(-z))$  eine gerade elliptische Funktion zum Periodengitter  $\Lambda$ . Also folgt (ii) aus (i).

(iii) Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{C}(s)[t] \rightarrow K(\Lambda), \quad (s, t) \mapsto (\wp, \wp').$$

Dann liegt das Polynom  $t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3$  offenbar im Kern. Auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  definiert

$$z \sim z' \iff z + z' = 0 \pmod{\Lambda}$$

eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen wird wegen Korollar 10.8 und Satz 10.15 durch  $\wp$  bijektiv auf  $\mathbb{P}^1$  abgebildet. Also definieren alle geraden elliptischen Funktionen auch meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{P}^1$ , was gerade die rationalen Funktionen sind. Insbesondere ist die Abbildung von  $\mathbb{C}(s)$  auf die geraden Funktionen in  $\mathbb{K}(\Lambda)$ , die  $s$  auf  $\wp$  abbildet nicht nur surjektiv sondern auch injektiv. Deshalb ist der Unterkörper von  $\mathbb{K}(\Lambda)$ , der alle geraden elliptischen Funktionen enthält, isomorph zu  $\mathbb{C}(\wp)$ . Weil  $\wp'$  ungerade ist, ist jedes Polynom im Kern gerade und damit in  $\langle t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3 \rangle$  enthalten. **q.e.d.**

Aus Korollar 10.8 und Satz 10.15 folgt auch, dass die Menge  $\mathbb{C}/\Lambda \setminus \{0\}$  durch die Abbildung  $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$  bijektiv auf die Menge

$$\{(s, t) \in \mathbb{C}^2 \mid t^2 = 4s^3 - g_2s - g_3\}$$

abgebildet wird. Indem wir die Ableitung der inversen Funktion  $1/\wp$  ausrechnen,

$$\left(\frac{1}{\wp(z)}\right)' = -\frac{\wp'(z)}{\wp^2(z)}$$

erhalten wir

$$\left(\left(\frac{1}{\wp(z)}\right)'\right)^2 = \frac{1}{\wp(z)} \left(4 - g_2 \left(\frac{1}{\wp(z)}\right)^2 - g_3 \left(\frac{1}{\wp(z)}\right)^3\right).$$

Dann wird  $\mathbb{C}/\Lambda$  durch  $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$  bijektiv auf die Menge

$$\{(s, t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid t^2 = 4s^3 - g_2s - g_3 \text{ bzw. } (-ts^{-2})^2 = s^{-1}(4 - g_2s^{-2} - g_3s^{-3})\}.$$

abgebildet. Solche Nullstellenmengen von Polynomen werden in der algebraischen Geometrie untersucht. Insbesondere ist also  $\mathbb{C}/\Lambda$  isomorph zu einer sogenannten elliptischen Kurve.

## 10.4 Elliptische Integrale

Die Relation  $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$  kann man dazu benutzen um die Umkehrfunktion von  $z \mapsto \wp(z)$  zu bestimmen. Offenbar gilt  $d\wp = \wp'(z)dz$ , also auch

$$dz = \frac{d\wp}{\wp'(z)} = \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}$$

Deshalb kannman für einen glatten Weg in  $\mathbb{C}/\Lambda$  die Differenz der entsprechenden  $z$ -Werte durch ein Kurvenintegral von  $\frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}$  längs des entsprechenden Weges im Bildbereich von  $z \mapsto \wp(z)$  ausrechnen. Die Integrale von der Art

$$\frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}}$$

werden ganz allgemein elliptische Integrale genannt und lassen sich im Allgemeinen auf obige Integrale zurückführen. Um sie zu lösen, muss allerdings das Periodengitter berechnet werden. Mit Hilfe von Möbiustransformationen reduziert sich das auf die Frage, wie aus  $g_2$  und  $g_3$  die entsprechenden Perioden berechnet werden. Wir erhalten sie offenbar als bestimmte elliptische Integrale. Indem wir die Nullstellen  $e_1, e_2, e_3$  von  $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$  berechnen erhalten wir

$$\omega_1 = 2 \int_{\wp=\infty}^{\wp=e_1} \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = 2 \int_{\wp=\infty}^{\wp=e_2} \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}.$$

Damit haben wir das Periodengitter  $\Lambda$  aus den Konstanten  $g_2$  und  $g_3$  berechnet und erhalten mit der Umkehrfunktion der entsprechenden  $\wp$ -Funktion das unbestimmte Integral

$$\int \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}.$$

## 10.5 $\wp$ -Funktion und der Riemannsche Abbildungssatz

Zum Abschluss wollen wir für Rechtecke in  $\mathbb{C}$  die Abbildung des Riemannschen Abbildungssatzes bestimmen. Seien  $\omega_1$  und  $-i\omega_2$  zwei positive reelle Zahlen. Dann ist das entsprechende Periodengitter  $\Lambda$  invariant unter komplexer Konjugation. Daraus folgt

$$\wp(\bar{z}) = \bar{\wp}(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Weil  $\wp$  gerade ist, folgt auch

$$\wp(it) = \overline{\wp(-it)} = \overline{\wp(it)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wegen Lemma 10.14 gilt sogar für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{\wp\left(\frac{\omega_1}{2} + it\right)} &= \wp\left(\frac{\omega_1}{2} - it\right) = \wp\left(\frac{\omega_1}{2} + it\right) \\ \overline{\wp\left(\frac{\omega_2}{2} + t\right)} &= \wp\left(\frac{-\omega_2}{2} + t\right) = \wp\left(\frac{\omega_2}{2} + t\right). \end{aligned}$$

Also ist  $\wp$  auf allen Geraden

$$\{t \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \{it \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \left\{\frac{\omega_1}{2} + it \mid t \in \mathbb{R}\right\}, \quad \left\{\frac{\omega_2}{2} + t \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

reell. Der Rand jedes der 4 halben Periodenrechtecke durchläuft also alle Werte von  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , und jedes der 4 halben Periodenrechtecke wird durch  $\wp$  entweder auf die obere oder die untere Halbebene abgebildet. Durch Verkettung mit einer geeigneten Möbiustransformation, die die obere bzw. untere Halbebene auf  $\mathbb{D}$  abbildet (siehe den Beweis von Lemma 2.11), erhalten wir die Abbildung von dem Riemannschen Abbildungssatz für diese halben Periodenrechtecke.