

# Quaternionische Funktionentheorie

Alexander Klauer

25. April 2007

## 1 Einleitung

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit dem Quaternionenschiefkörper  $\mathbb{H}$  (nicht zu verwechseln mit der oberen komplexen Halbebene) und assoziierten Strukturen wie quaternionische Vektorräume, projektive Räume und Vektorbündel, die die Entwicklung einer Theorie von Funktionen in Analogie zu den aus der komplexen Theorie bekannten holomorphen und meromorphen Abbildungen (wobei letztere als holomorphe Abbildungen von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{P}\mathbb{C}$  aufgefasst werden können), erlauben. Wir beginnen mit der Definition von  $\mathbb{H}$  und seinen grundlegenden Eigenschaften.

**Definition 1** (Quaternionenschiefkörper). Sei  $A$  die von den Symbolen  $i, j, k$  erzeugte freie nichtkommutative, assoziative  $\mathbb{R}$ -Algebra mit Eins. Dann definieren wir den *Quaternionenschiefkörper*

$$\mathbb{H} := A / \langle i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \rangle.$$

Zu  $a := a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 \in \mathbb{H}$  mit  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$\bar{a} := a_0 - ia_1 - ja_2 - ka_3,$$

$$\operatorname{Re} a := a_0,$$

$$\operatorname{Im} a := ia_1 + ja_2 + ka_3,$$

$$|a| := \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

**Satz 1** (Elementare Eigenschaften).

- (a) Zu jedem  $a \in \mathbb{H}$  existieren eindeutig  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ , so dass  $a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ . Insbesondere gelten die kanonischen Isomorphismen reeller Vektorräume

$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4,$$

$$\operatorname{Im} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3.$$

- (b)  $\mathbb{H}$  ist ein Schiefkörper.

(c) Für alle  $a, b \in \mathbb{H}$  gilt

$$(i) \quad \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}.$$

(ii) Das  $\mathbb{R}^4$ -Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  ist in  $\mathbb{H}$  darstellbar als

$$(a, b) = \operatorname{Re}(\bar{a}b) = \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \frac{1}{2}(\bar{a}b + \bar{b}a).$$

Insbesondere gilt

$$|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a\bar{a}}.$$

$$(iii) \quad |ab| = |a||b|.$$

(iv)  $a$  und  $b$  kommutieren genau dann, wenn  $\{\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b\} \subseteq \mathbb{R}^3$  linear abhängig ist. Insbesondere ist  $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ .

(d) Sei  $a \in \mathbb{H}$ . Es ist  $a^2 = -1$  genau dann, wenn  $|a| = 1$  und  $\operatorname{Re} a = 0$ . In diesem Fall ist die von  $a$  erzeugte Unteralgebra von  $\mathbb{H}$  ein komplexer Zahlkörper. Die Menge

$$\{a \in \mathbb{H} : a^2 = -1\}$$

ist die 2-Sphäre in  $\mathbb{R}^3$ .

Wir identifizieren  $\mathbb{C}$  mit dem komplexen Zahlkörper, den man mit  $a = i$  erhält, wobei wir dieses  $i$  mit der komplexen Einheit in  $\mathbb{C}$  identifizieren.

(e) Seien  $a, b \in \operatorname{Im} \mathbb{H}$ , dann gilt

$$ab = a \times b - (a, b)$$

bezüglich des Vektor- und des Skalarprodukts in  $\mathbb{R}^3$ .

*Beweis.* All diese Eigenschaften folgen entweder direkt aus der Definition von  $\mathbb{H}$  oder es ist klar, wie man sie nachrechnet.  $\square$

## 2 Lineare und konforme Abbildungen in quaternionischen Vektorräumen

Die Theorie der quaternionischen Vektorräume ist etwas trickreicher als gewöhnliche lineare Algebra, da  $\mathbb{H}$  nur ein Schiefkörper ist.

**Definition 2** (quaternionischer Vektorraum). Sei  $V$  ein  $\mathbb{H}$ -Rechtsmodul. Dann heißt  $V$  *quaternionischer Vektorraum*.

*Beispiel 1.* Das  $n$ -fache kartesische Produkt  $\mathbb{H}^n$  wird in kanonischer Weise zum quaternionischen Vektorraum. Da  $\mathbb{H}$  ein Divisionsbereich ist, hat zudem jeder quaternionische Vektorraum eine Basis und eine Dimension. Insbesondere ist jeder endlichdimensionale quaternionische Vektorraum isomorph zu  $\mathbb{H}^n$  für ein geeignetes  $n$ .

Bei üblichen Vektorräumen ist es bekanntlich egal, ob man sie als Links- oder Rechtsmoduln definiert. Wegen der fehlenden Kommutativität macht die explizite Rechtsmodulstruktur quaternionischer Vektorräume jedoch einen Unterschied, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 1.**

(a) Sei  $\mu \in \mathbb{H}$ .

(i) Die Abbildung

$$A: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad x \mapsto \mu x$$

ist linear.

(ii) Sei  $V$  ein quaternionischer Vektorraum, dann ist die Abbildung

$$B: V \rightarrow V, \quad x \mapsto x\mu$$

im allgemeinen keine lineare Abbildung.

(b) Seien  $V, W$  quaternionische Vektorräume. Dann ist  $\text{Hom}(V, W)$  zwar ein reeller, im allgemeinen aber kein quaternionischer (nicht einmal ein komplexer) Vektorraum.

(c) Sei  $V$  ein quaternionischer Vektorraum,  $A \in \text{End}(V)$  und  $\lambda \in \mathbb{H}$  ein Eigenwert von  $A$  mit  $\text{Im } \lambda \neq 0$ . Dann ist

$$U := \{v \in V : A(v) = v\lambda\}$$

kein quaternionischer Vektorraum.

*Beweis.*

(a) Die erste Aussage ergibt sich durch Nachrechnen. Bei der zweiten Aussage schlägt die Skalarenmultiplikation fehl, denn sei  $\lambda \in \mathbb{H}$ , dann gilt im Allgemeinen

$$B(x\lambda) = x\lambda\mu \neq x\mu\lambda = B(x)\lambda.$$

(b) Hier passiert im Wesentlichen dasselbe wie oben. Sei  $A \in \text{Hom}(V, W)$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{H}$ , dann ist im Allgemeinen

$$(A\lambda)(x\mu) = A(x\mu)\lambda = A(x)\mu\lambda \neq A(x)\lambda\mu = (A\lambda)(x)\mu.$$

(c) Seien  $v \in U$ ,  $v \neq 0$  und  $\mu \in \mathbb{H}$  mit  $\mu\lambda \neq \lambda\mu$ . Dann gilt wie oben

$$A(v\mu) \neq v\mu\lambda. \quad \square$$

Eine Möglichkeit, bei der Definition der zu einem Vektorraum gehörenden Konzepte im Quaternionischen diese Problematik zu umgehen, ist der Rückgriff auf reelle Strukturen.

**Definition 3** (Erwartungswert). Sei  $V$  ein quaternionischer Vektorraum der Dimension  $n$ . Für ein  $A \in \text{End}(V)$  definieren wir den *Erwartungswert* von  $A$

$$\langle A \rangle := \frac{1}{4n} \text{Spur}_{\mathbb{R}} A.$$

Hiermit können wir für  $A, B \in \text{End}(V)$  folgende Bilinearform definieren:

$$(A, B) := \langle AB \rangle.$$

Eine weitere Möglichkeit ist, dass man sich einfach eine komplexe Struktur dazufügt.

**Definition 4** (komplex quaternionischer Vektorraum). Sei  $V$  ein  $(\mathbb{C}, \mathbb{H})$ -Bimodul,  $J \in \text{End}(V)$  (Endomorphismen bezüglich der quaternionischen Struktur) mit  $J^2 = -1$ , so dass für alle  $v \in V$  und  $z \in \mathbb{C}$

$$zv = v \text{Re } z + J(v) \text{Im } z$$

gilt. Dann heißt  $(V, J)$  ein *komplex quaternionischer Vektorraum*. Dabei nennt man  $J$  auch die *komplexe Struktur* von  $V$ . Später werden wir Ähnliches für mit Vektorräumen verwandten Gebilden definieren, etwa für Vektorbündel. Wir behalten dabei die Bezeichnung „komplexe Struktur“ bei.

Mit dieser zusätzlichen Struktur bilden die Homomorphismen einen komplexen Vektorraum mit kontrolliertem Verhalten bei Faktorenvertauschung im folgenden Sinne:

**Satz 2.** Seien  $(V_1, J_1)$  und  $(V_2, J_2)$  komplex quaternionische Vektorräume. Definiere

$$\text{Hom}_{\pm}(V_1, V_2) := \{A \in \text{Hom}(V_1, V_2) : AJ_1 = \pm J_2 A\}.$$

Dann gilt

$$\text{Hom}(V_1, V_2) = \text{Hom}_{+}(V_1, V_2) \oplus \text{Hom}_{-}(V_1, V_2).$$

$\text{Hom}_{\pm}(V_1, V_2)$  sind dann komplexe Vektorräume mit

$$zA := A \text{Re } z + J_2 A \text{Im } z$$

(hier ist das  $\text{Im}$  in  $\mathbb{C}$  gemeint, also  $\text{Im } z \in \mathbb{R}$ ).

*Beweis.* Offensichtlich ist

$$\text{Hom}_{+}(V_1, V_2) \cap \text{Hom}_{-}(V_1, V_2) = \{0\}.$$

Sei nun  $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ . Definiere

$$A_{\pm} := A \mp J_2 A J_1.$$

Dann ist  $A_2 = A_+ + A_-$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} A_+ J_1 &= A J_1 + J_2 A \\ &= A J_1 + J_2 (A - J_2 A J_1 + J_2 A J_1) \\ &= A J_1 + J_2 A_+ - A J_1 \\ &= J_2 A_+. \end{aligned}$$

Also ist  $A_+ \in \text{Hom}_+(V_1, V_2)$ . Analog zeigt man  $A_- \in \text{Hom}_-(V_1, V_2)$ . Damit folgt der erste Teil der Aussage.

Beim zweiten Teil ist nur das Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation nicht unmittelbar klar. Um es zu beweisen, benutzen wir, dass für  $w, z \in \mathbb{C}$

$$\text{Re } wz = \text{Re } w \text{Re } z - \text{Im } w \text{Im } z, \quad \text{Im } wz = \text{Re } w \text{Im } z + \text{Im } w \text{Re } z$$

gilt. Dann hat man für  $A \in \text{Hom}_+(V_1, V_2)$

$$\begin{aligned} w(zA) &= w(A \text{Re } z + J_2 A \text{Im } z) \\ &= A \text{Re } w \text{Re } z + J_2 A \text{Im } w \text{Re } z + w A J_1 \text{Im } z \\ &= A \text{Re } w \text{Re } z + J_2 A \text{Im } w \text{Re } z + A J_1 \text{Re } w \text{Im } z + J_2 A J_1 \text{Im } z \text{Im } z \\ &= A(\text{Re } w \text{Re } z - \text{Im } w \text{Im } z) + J_2 A(\text{Re } w \text{Im } z + \text{Im } w \text{Re } z) \end{aligned}$$

und die analoge Aussage für  $A \in \text{Hom}_-(V_1, V_2)$ .  $\square$

Mit dieser zusätzlichen komplexen Struktur steht uns der Weg frei, das aus der komplexen Theorie bekannte Konzept der konformen linearen Abbildung ins Quaternionische zu übertragen. Dazu ist allerdings noch ein wenig Vorarbeit erforderlich.

**Definition 5.** Sei  $V$  ein zweidimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $B$  eine geordnete Basis von  $V$  und  $J \in \text{End}(V)$  mit  $J^2 = -1$ , so dass für alle  $x \in V \setminus \{0\}$  die Basen  $(x, J(x))$  und  $B$  orientierungsgleich sind. Dann heißt  $J$  *orientierungskompatibel* zu  $B$ .

**Lemma 2** (Fundamentallemma).

- (a) Sei  $V$  ein zweidimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $J \in \text{End}(V)$  mit  $J^2 = -1$ . Dann existiert eine geordnete Basis  $B$  von  $V$ , so dass  $J$  orientierungskompatibel zu  $B$  ist.
- (b) Seien  $l, r \in \mathbb{H}$  mit  $l^2 = r^2 = -1$  und definiere

$$V^\pm := \{x \in \mathbb{H} : lxr = \pm x\}.$$

Dann sind  $V^\pm$  zueinander orthogonale reelle, zweidimensionale Unterräume von  $\mathbb{H}$ .

- (c) Sei  $V$  ein zweidimensionaler, reeller Unterraum von  $\mathbb{H}$  mit geordneter Basis  $B$ . Dann gibt es genau ein Paar  $(l, r) \in \mathbb{H}^2$ , so dass

$$\begin{aligned} l^2 = r^2 &= -1, \\ lV = Vr &= V, \\ V &= \{x \in \mathbb{H} : lxr = x\} \end{aligned} \tag{1}$$

und außerdem  $l$ , mittels (1) aufgefasst als  $V$ -Endomorphismus, orientierungskompatibel zu  $B$  ist. Wir bezeichnen  $l$  bzw.  $r$  als linken bzw. rechten Normalenvektor zu  $V$  bezüglich  $B$ .

- (d) Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen in (c) noch  $V \subseteq \text{Im } \mathbb{H}$ , dann ist  $N := l = r$  und  $N$  ist der Normaleneinheitsvektor zu  $V$  in  $\text{Im } \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ .
- (e) Seien  $V_1, V_2$  quaternionische Vektorräume der Dimension 1 und

$$U \subseteq \text{Hom}(V_1, V_2)$$

ein zweidimensionaler reeller Unterraum mit orientierter Basis  $B$ . Dann existieren genau ein  $J_1 \in \text{End}(V_1)$  und genau ein  $J_2 \in \text{End}(V_2)$ , so dass  $(V_1, J_1)$  und  $(V_2, J_2)$  komplex quaternionische Vektorräume sind mit

$$\begin{aligned} J_2 U &= U = U J_1 \\ U &= \{A \in \text{Hom}(V_1, V_2) : J_2 A J_1 = -A\}, \end{aligned}$$

wobei  $J_1$  orientierungskompatibel zu  $B$  ist.

*Beweis.*

- (a) Sei  $x \in V$  mit  $x \neq 0$  und setze  $B := (x, J(x))$ . Wegen  $J^2 = -1$  hat  $J$  in dieser Basis die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine weitere Basis der Form  $B' = (y, J(y))$  ist dann  $J(y)_1 = -y_2$  und  $J(y)_2 = y_1$ . Die Determinante der Basistransformationsmatrix ist dann  $y_1^2 + y_2^2 > 0$ .

- (b) Offensichtlich sind  $V^\pm$  reelle Vektorräume mit

$$V^+ \cap V^- = \{0\}.$$

Definiere für  $x \in \mathbb{H}$

$$x^\pm := x \pm lxr,$$

dann folgt  $\mathbb{H} = V^+ \oplus V^-$  genau wie in Satz 2. Durch Nachrechnen findet man, dass

$$\dim \langle \{1, i, l\}^\pm \rangle \geq 2,$$

also ist  $\dim V^\pm = 2$ .

- (c) Sei  $x \in V$  ein Einheitsvektor. Wegen Lemma 1 (a)(i) ist dann  $\tilde{V} := x^{-1}V$  ebenfalls ein zweidimensionaler, reeller Unterraum von  $\mathbb{H}$ . Es ist  $1 \in \tilde{V}$ . Dann existiert ein bis auf das Vorzeichen eindeutiges  $a \in \tilde{V}$  mit  $a \perp 1$  und  $|a| = 1$ . Wegen Satz 1(d) ist dann  $a^2 = -1$  und  $\tilde{V}$  ein komplexer Unterkörper von  $\mathbb{H}$ . Definiere nun  $l := xax^{-1}$  und  $r := -a$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} lV &= xax^{-1}V = xa\tilde{V} = x\tilde{V} = V, \\ Vr &= xx^{-1}Va = x\tilde{V}a = x\tilde{V} = V. \end{aligned}$$

Sei weiterhin  $y \in V$ , dann ist  $x^{-1}y \in \tilde{V}$ , also ist

$$lyr = xax^{-1}y(-a) = x(-a^2)x^{-1}y = y.$$

Damit ist  $V \subseteq \{y \in \mathbb{H} : lyr = y\}$ . Die Gleichheit folgt mit (b).  $\tilde{V}$  ist unabhängig von  $x$ , denn sei  $y \in V$  ein weiterer Einheitsvektor, dann ist  $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in \tilde{V}$ , also

$$y^{-1}V = y^{-1}xx^{-1}V = y^{-1}x\tilde{V} = \tilde{V}.$$

Die beiden möglichen Vorzeichen von  $a$  korrespondieren offenbar mit zwei verschiedenen Orientierungen, so dass man sich die richtige auswählen kann.

- (d) Sei  $z \in V$  ein Einheitsvektor mit  $z \perp x$ . Wegen Satz 1(e) erfüllt  $n := l = r = \pm x \times z$  alle notwendigen Eigenschaften.
- (e) Wähle Basen zu  $V_1$  bzw.  $V_2$ , dann haben wir kanonische Isomorphismen  $V_1 \cong \mathbb{H} \cong V_2$ . Die Homomorphismen werden dann zu Linksmultiplikationen mit Quaternionen, so dass dieser Teil des Satzes aus den Vorhergehenden folgt.  $\square$

**Definition 6** (konforme Abbildung).

- (a) Seien  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare, injektive Abbildung und  $l, r \in \mathbb{H}$  mit  $l^2 = r^2 = -1$ , so dass für alle  $z \in \mathbb{C}$

$$*F(z) := F(iz) = lF(z) = -F(z)r$$

gilt. Dann heißt  $F$  *konforme lineare Abbildung*.

- (b) Seien  $M$  eine riemannsche Fläche und  $J: TM \rightarrow TM$  mit  $J^2 = -1$ . Eine Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{H}$  heißt *konform*, falls  $l, r: M \rightarrow \mathbb{H}$  existieren, so dass

$$l_x^2 = r_x^2 = -1 \text{ für alle } x \in M, \quad (2)$$

$$*df := dfJ = ldf = -dfr. \quad (3)$$

**Satz 3.**

- (a) Eine konforme lineare Abbildung  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$  ist konform im klassischen Sinne, wenn man  $F$  als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow F(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}^4$  auffasst.

- (b) Sei  $M$  eine riemannsche Fläche mit  $J: \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M$ , so dass  $J^2 = -1$ , und  $F: M \rightarrow \mathbb{H}$  eine Immersion, für die  $l, r: M \rightarrow \mathbb{H}$  existieren, so dass (3) gilt. Dann ist  $f$  eine konforme Abbildung und  $l$  und  $r$  sind (bis auf Orientierung) eindeutig bestimmt. Man nennt  $l$  bzw.  $r$  dann den linken bzw. rechten Normalenvektor zu  $f$ .

*Beweis.*

- (a) Seien  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$  eine konforme lineare Abbildung und  $x, y \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  zueinander orthogonale Vektoren. Dann ist ohne Einschränkung (d. h. bis auf einen reellen Faktor)  $y = ix$ . Da  $F$  injektiv ist, ist  $V := F(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{H}$  ein reeller, zweidimensionaler Unterraum. Für  $x, y \in V$  gilt wegen Satz 1(c)

$$(x, y) = \operatorname{Re}(\bar{x}y) = \operatorname{Re}(\bar{x}\bar{l}ly) = \operatorname{Re}(\bar{l}xly) = (lx, ly)$$

und daher

$$(x, lx) = (lx, -x) = -(x, lx),$$

also  $(x, lx) = 0$ . Nun gilt

$$(F(x), F(y)) = (F(x), F(ix)) = (F(x), lF(x)) = 0.$$

Also ist  $F$   $\mathbb{R}^4$ -konform. Übrigens erfüllen  $l$  und  $r$  die Eigenschaften des linken bzw. rechten Normalenvektors von  $V$ .

- (b) Ist  $f$  eine Immersion, so ist  $df_x$  für alle  $x \in M$  eine Abbildung, die die Voraussetzungen von (a) erfüllt, d. h. die zugehörigen  $l_x$  und  $r_x$  erfüllen die Normalenvektoreigenschaften. Nach Lemma 2(c) sind diese bis auf Orientierung eindeutig bestimmt.  $\square$

### 3 Quaternionische projektive Räume

Quaternionisch projektive Räume  $\mathbb{P}^n\mathbb{H}$  mit  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  sowie die Projektion

$$\pi: \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{H}$$

können wie üblich definiert werden. Wir untersuchen zunächst die Struktur von  $\mathbb{P}^n\mathbb{H}$  als  $n$ -dimensionale  $\mathbb{H}$ -Mannigfaltigkeit.

**Satz 4.**

- (a) Für  $\beta \in (\mathbb{H}^{n+1})^*$  sei  $U_\beta := \{x\mathbb{H} \in \mathbb{P}^n\mathbb{H} : \exists_{y \in x\mathbb{H}} \beta(y) \neq 0\}$ . Definiere  $V_\beta := \{y \in \mathbb{H}^{n+1} : \beta(y) = 1\} \cong \mathbb{H}^n$  und

$$f_\beta: U_\beta \rightarrow V_\beta, \quad x\mathbb{H} \mapsto x\beta(x)^{-1}.$$

Dann ist  $f_\beta$  wohldefiniert und  $\{f_\beta\}_{\beta \in (\mathbb{H}^{n+1})^*}$  ist ein Atlas für  $\mathbb{P}^n\mathbb{H}$  als  $n$ -dimensionale quaternionische Mannigfaltigkeit. Aufgefasst als reelle Mannigfaltigkeit ist diese analytisch.



(b) Sei  $x\mathbb{H} \in \mathbb{P}^n\mathbb{H}$ . Dann ist

$$\mathbb{T}_{x\mathbb{H}}\mathbb{P}^n\mathbb{H} \cong \text{Hom}(x\mathbb{H}, \mathbb{H}^{n+1}/x\mathbb{H}).$$

(c) Seien  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$  eine glatte Abbildung. Definiere  $f := \pi\tilde{f}$ . Seien weiterhin  $x \in M$ ,  $\lambda \in \mathbb{H}$  und  $v \in \mathbb{T}_x M$ . Dann ist

$$(\mathrm{d}_x f(v))(\tilde{f}(x)\lambda) = \mathrm{d}_x \tilde{f}(v)\lambda + f(x)$$

(wobei wir obige Identifikation des Tangentialraums mit den Homomorphismen benutzen). Dementsprechend benutzen wir die Notation

$$(\delta f(v))(\tilde{f}) := \mathrm{d}\tilde{f}(v) \mod f.$$

*Beweis.*

(a) Aufgrund der  $\mathbb{R}$ -Linearität von  $\beta$  ist  $f_\beta$  wohldefiniert und es ist offensichtlich, dass  $\{U_\beta\}_{\beta \in (\mathbb{H}^{n+1})^*}$  ein Atlas ist.

(b) Für alle  $\beta \in (\mathbb{H}^{n+1})^*$  definiere

$$h_\beta := f_\beta \pi: \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow V_\beta, \quad y \mapsto y\beta(y)^{-1}.$$

Dann gilt für  $v \in \mathbb{H}^{n+1}$  nach der Produktregel

$$\mathrm{d}_y h_\beta(v) = v\beta(y)^{-1} - y\beta(y)^{-1}\beta(v)\beta(y)^{-1}.$$

Dann ist  $\mathrm{d}_y h_\beta(v)$  skalierungsinvariant in  $(y, v)$ . Außerdem ist für  $v \neq 0$   $\mathrm{d}_y h_\beta(v) = 0$  genau dann wenn

$$v\beta(v)^{-1} = y\beta(y)^{-1},$$

also  $v \in y\mathbb{H}$ . Da die  $f_\beta$  alle injektiv sind, gelten dieselben Aussagen auch für  $\mathrm{d}_y \pi(v)$ . Die Isomorphie ergibt sich damit mittels der Abbildung

$$\text{Hom}(x\mathbb{H}, \mathbb{H}^{n+1}/x\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{T}_{x\mathbb{H}}\mathbb{P}^n\mathbb{H}, \quad F \mapsto \mathrm{d}_x \pi(F(x)).$$

(c) Mit der Kettenregel gilt

$$\mathrm{d}_x f(v) = \mathrm{d}_x (\pi(\tilde{f}(v))) = (\mathrm{d}_{\tilde{f}(x)} \pi)(\mathrm{d}_x \tilde{f}(v)).$$

Wegen (b) erhalten wir also

$$(\mathrm{d}_x f(v))(\tilde{f}(x)\lambda) = (\mathrm{d}_{\tilde{f}(x)} \pi)((\mathrm{d}_x \tilde{f}(v))(\tilde{f}(x)\lambda)) \mapsto \mathrm{d}_x \tilde{f}(v)\lambda + f(x). \quad \square$$

*Beispiel 2.* Der einfachste quaternionisch projektive Raum ist  $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ . Sei  $0 \neq \beta \in (\mathbb{H}^2)^*$ . Dann ist  $\dim \text{Kern } \beta = 1$ , also ist nur ein Element aus  $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$  nicht in  $U_\beta$ . Daher entspricht  $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$  der 4-Sphäre.

## 4 Quaternionische Vektorbündel

**Definition 7** (quaternionisches Vektorbündel). Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\pi: V \rightarrow M$  ein reelles Vektorbündel vom Rang  $4n$ . Ferner gebe es eine multiplikativ geschriebene Operation  $V \times \mathbb{H} \rightarrow V$ , die faserinvariant ist und auf jeder Faser einen quaternionischen Vektorraum induziert. Dann heißt  $\pi$  ein *quaternionisches Vektorbündel*. Wenn klar ist, was gemeint ist, wird auch  $V$  als das quaternionische Vektorbündel bezeichnet.

*Beispiel 3.* Seien

$$\Sigma := \{(l, v) \in \mathbb{P}^n \mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1} : v \in l\}$$

und

$$\pi_\Sigma: \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{H}, \quad (l, v) \mapsto l.$$

Dann ist  $\pi_\Sigma$  ein quaternionisches Vektorbündel, nämlich das *tautologische Bündel*, für das  $\Sigma_l = l$  gilt.

**Theorem 1.** *Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es ein natürliches 1 : 1-Verhältnis zwischen glatten Abbildungen*

$$f: M \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{H}$$

*und Linienunterbündeln von*

$$\pi: M \times \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow M, \quad (v, l) \mapsto v.$$

*Beweis.* Sei  $\Sigma \subseteq \mathbb{P}^n \mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1}$  das tautologische Bündel. Wir ordnen einer glatten Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{H}$  die Zurückziehung  $f^*\Sigma$  zu, genauer

$$f^*\Sigma := \{(x, v) \in M \times \Sigma : v \in \Sigma_{f(x)}\}$$

Dies ist ein Linienunterbündel von  $\pi$ , da  $(f^*\Sigma)_x = \Sigma_{f(x)} = f(x)$ . Damit ist diese Zuordnung auch offensichtlich injektiv. Sei umgekehrt  $L$  ein Linienunterbündel von  $\pi$ . Definiere dann  $f(x) := L_x$ .  $\square$

**Satz 5.** *Seien  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $L$  ein Linienunterbündel des Vektorbündels  $H := M \times \mathbb{H}^{n+1}$ ,  $x \in M$  und  $v \in \mathbb{T}_x M$ . Setze für Schnitte  $\psi$  von  $L$*

$$\delta(v) := \psi \mapsto d_x \psi(v) + L.$$

*Dann ist  $\delta$  eine 1-Form mit Werten in  $\text{Hom}(L, H/L)$ . Wir nennen  $\delta$  dann die Ableitung des Linienbündels  $L$ . Diese entspricht der Ableitung der nach Theorem 1 zu  $L$  gehörenden glatten Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{H}$ .*

*Beweis.* Wir fassen  $\psi$  via  $\psi(x) \in L_x \subseteq H_x \cong \mathbb{H}^{n+1}$  als Abbildung  $M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  auf. Für ein glattes  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}$  gilt nach der Produktregel

$$d(\psi\lambda)(v) = d\psi(v)\lambda + \psi d\lambda(v) \in d\psi(v)\lambda + L,$$

so dass  $\delta(v) \in \text{Hom}(L, H/L)$ . Dass  $\delta$  der Ableitung von  $f$  entspricht, folgt faserweise aus Satz 4(b).  $\square$

**Definition 8** (komplex quaternionisches Vektorbündel). Sei  $V$  ein quaternionisches Vektorbündel und  $J$  ein globaler Schnitt von  $\text{End}(V)$  mit  $J^2 = -1$ . Dann heißt das Tupel  $(V, J)$  ein *komplex quaternionisches Vektorbündel*.

**Satz 6.** Seien  $M$  eine orientierte, glatte Fläche,  $f: M \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{H}$  eine Immersion,  $L$  das nach Theorem 1 zu  $F$  gehörende Linienunterbündel des Vektorbündels  $H := M \times \mathbb{H}^2$ ,  $\delta$  die Ableitung von  $L$  und  $B$  eine Basis von  $\mathbb{T}M$ . Dann existieren eindeutige komplexe Strukturen  $J, \tilde{J}$ , so dass  $(L, J)$  und  $(H/L, \tilde{J})$  komplex quaternionische Vektorbündel sind und für alle  $x \in M$  gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{J}\delta(\mathbb{T}_x M) &= \delta(\mathbb{T}_x M) = \delta(\mathbb{T}_x M)J, \\ \tilde{J}\delta &= \delta J\end{aligned}$$

und  $J$  ist orientierungskompatibel mit  $\delta(B_x)$ .

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 2(e). □

**Definition 9** (konforme Kurve). Seien  $M$  eine riemannsche Fläche,  $L$  ein Linienunterbündel des Vektorbündels  $H := M \times \mathbb{H}^{n+1}$  und  $J$  eine komplexe Struktur für  $L$ , so dass

$$*\delta = \delta J.$$

Dann heißt  $L$  eine *konforme Kurve* in  $\mathbb{P}^n\mathbb{H}$ .

**Definition 10** (holomorphe Struktur). Sei  $(V \rightarrow M, J)$  ein komplex quaternionisches Vektorbündel über einer riemannschen Fläche  $M$ . Definiere

$$\begin{aligned}KV &:= \{\omega \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}M, V) : *\omega = J\omega\}, \\ \overline{K}V &:= \{\omega \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}M, V) : *\omega = -J\omega\},\end{aligned}$$

so dass  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}M, V) = KV \oplus \overline{K}V$ . Sei weiterhin

$$D: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(\overline{K}V)$$

eine  $\mathbb{H}$ -lineare Abbildung, so dass für alle  $\psi \in \Gamma(V)$  und alle glatten  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}$  die *Produktregel*

$$D(\psi\lambda) = D(\psi)\lambda + \frac{1}{2}(\psi d\lambda + J\psi *d\lambda)$$

gilt. Dann heißt  $D$  *holomorphe Struktur* auf  $(V, J)$  und man definiert die *holomorphen Schnitte* von  $V$

$$H^0(V) := \text{Kern } D.$$

## 5 Die quaternionische konforme Gaußabbildung

**Definition 11.** Seien  $M$  eine riemannsche Fläche und  $S$  eine komplexe Struktur auf dem Vektorbündel  $H := M \times \mathbb{H}^2$ . Dann definieren wir

$$\begin{aligned} d'\psi &:= \frac{1}{2}(d\psi - S*d\psi) & d''\psi &:= \frac{1}{2}(d\psi + S*d\psi) \\ \partial\psi &:= \frac{1}{2}(d'\psi - Sd'(S\psi)) & \bar{\partial} &:= \frac{1}{2}(d''\psi - Sd''(S\psi)) \\ A &:= d' - \partial & Q &:= d'' - \bar{\partial}. \end{aligned}$$

Später werden wir  $A$  und  $Q$  auch als *Hopffelder* bezeichnen (s.u.).

**Satz 7.** Für die soeben definierten Größen gilt:

$$\begin{aligned} *d' &= Sd', \\ *d'' &= -Sd'', \\ *S &= S*, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \partial S &= S\bar{\partial}, \\ \bar{\partial} S &= S\partial, \\ AS &= -SA, \end{aligned} \tag{5}$$

$$QS = -SQ, \tag{6}$$

$$A \in \Gamma(K \operatorname{End}^-(H)), \tag{7}$$

$$Q \in \Gamma(\bar{K} \operatorname{End}^-(H)), \tag{8}$$

$$Q = \frac{1}{4}(SdS - *dS), \tag{9}$$

$$A = \frac{1}{4}(SdS + *dS), \tag{10}$$

$$d(A + Q) = 2(Q \wedge Q + A \wedge A).$$

*Beweis.* Die ersten sieben dieser Gleichungen lassen sich leicht mit den Definitionen nachrechnen. Wegen (5) und (6) sind  $A, Q \in \Gamma(\operatorname{End}^-(H))$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} *A\psi &= *(d' - \partial)\psi \\ &= \frac{1}{2}*(d'\psi + Sd'(S\psi)) \\ &= \frac{1}{2}(Sd'\psi + S^2d'(S\psi)) \\ &= \frac{1}{2}S(d'\psi + Sd'(S\psi)) \\ &= SA\psi. \end{aligned}$$

Also ist  $A \in \Gamma(K \operatorname{End}^-(H))$ . Analog folgt (8).

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
(SdS)\psi + (*dS)\psi &= Sd(S\psi) - S^2d\psi + *d(S\psi) - *Sd\psi \\
&= Sd'(S\psi) + Sd''(S\psi) - S^2d'\psi - S^2d''\psi \\
&\quad + Sd'(S\psi) - Sd''(S\psi) - S^2d'\psi + S^2d''\psi \\
&= 2(Sd'(S\psi) + d'\psi) \\
&= 4A.
\end{aligned}$$

Damit folgt (10) und auf analoge Weise (9).

Aus diesen beiden Gleichungen folgt schließlich

$$\begin{aligned}
d(A + Q) &= \frac{1}{2}d(SdS) \\
&= \frac{1}{2}dS \wedge dS \\
&= 2S(A + Q) \wedge S(A + Q).
\end{aligned}$$

Mit der Darstellung des äußeren Produkts von 1-Formen über den Hodge-Stern

$$\omega \wedge \xi = \omega * \xi - * \omega \xi,$$

also

$$(\omega \wedge \xi)(X) = (\omega * \xi - * \omega \xi)(X) = \omega(X)\xi(JX) - \omega(JX)\xi(X),$$

erhalten wir

$$S\omega \wedge S\xi = \omega \wedge \xi$$

und damit

$$d(A + Q) = 2(A \wedge A + A \wedge Q + Q \wedge A + Q \wedge Q).$$

Wegen (7) und (8) gilt aber

$$A \wedge Q = A * Q - *AQ = -ASQ - SAQ = SAQ - SAQ = 0$$

und analog  $Q \wedge A = 0$ . Wegen  $*A = SA$  und  $*Q = QS$  sagt man auch „ $A$  ist links- $K$ “ und „ $Q$  ist rechts- $K$ .“  $\square$

**Theorem 2** (konforme Gaußabbildung). *Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{H}$  die Immersion einer konformen Kurve. Nach Theorem 1 entspricht dies einem Linienunterbündel  $L$  von  $H := M \times \mathbb{H}^2$ . Sei  $\pi: H \rightarrow H/L$  die kanonische Projektion und  $\delta$  die Ableitung von  $L$  mit den gemäß Satz 6 zugehörigen komplexen Strukturen  $J$  bzw.  $\tilde{J}$  von  $L$  bzw.  $H/L$ . Dann existiert genau eine komplexe Struktur  $S$  auf  $H$ , so dass*

$$SL = L, \tag{11}$$

$$dSL \subseteq L, \tag{12}$$

$$*\delta = \delta S|_L, \quad \pi S = \tilde{J}\pi, \tag{13}$$

$$Q|_L = 0 \tag{14}$$

((13) bedeutet im Prinzip, dass  $S$  eine Erweiterung von  $J$  und  $\tilde{J}$  ist.) Für  $dS$  gilt

$$\begin{aligned}(dS, dS) &= (*dS, *dS), \\ (dS, *dS) &= 0.\end{aligned}$$

Für  $x \in M$  entspricht  $S_x$  via

$$S_x \mapsto \{\lambda \in \mathbb{P}^1\mathbb{H} : S_x\lambda \subseteq \lambda\}$$

einer 2-Sphäre tangential zu  $L_x$ . Man nennt  $S$  dann die konforme Gaußabbildung. Die zugehörigen Differentialformen  $A$  und  $Q$  heißen Hopffelder.

*Beweis.* Sei  $\Phi: H \rightarrow L \oplus H/L$  ein Isomorphismus. Dann definieren wir

$$S_\Phi := \Phi^{-1}(J + \tilde{J})\Phi.$$

Damit erfüllt  $S_\Phi$  (11) und (13) genau dann, wenn

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}J\Phi|_L &= J, \\ \pi\Phi^{-1}\tilde{J}\Phi &= \tilde{J}\pi\end{aligned}$$

gilt. Weiterhin gilt für  $\psi \in \Gamma(L)$

$$\begin{aligned}(\pi dS_\Phi)(\psi) &= \pi(d(S_\Phi\psi) - S_\Phi d\psi) \\ &= (d(J\psi) + L) - (\tilde{J}d\psi + L) \\ \text{gemäß Satz 5 also} &= (\delta J)\psi - (\tilde{J}\delta)\psi = 0.\end{aligned}$$

Damit erfüllt  $S_\Phi$  also auch (12). Sei  $S'$  eine weitere komplexe Struktur, die (11), (12) und (13) erfüllt. Dann gilt für  $R := S_\Phi - S'$  einmal

$$\pi R = \pi S_\Phi - \pi S' = \tilde{J}\pi - \tilde{J}\pi = 0,$$

also  $RH \subseteq L$ , und wegen  $S'|_L = S_\Phi|_L = J$  folgt  $L \subseteq \text{Kern } R$ . Ist umgekehrt  $R$  ein Schnitt mit

$$RH \subseteq L \subseteq \text{Kern } R, \tag{15}$$

dann erfüllt  $S_\Phi + R$  (11), (12) und (13); damit haben wir alle in Frage kommenden komplexen Strukturen erfasst. Wir wollen jetzt  $R$  so bestimmen, dass  $S'$  auch noch die Bedingung (14) erfüllt. Dazu berechnen wir zunächst  $Q'$  gemäß (9):

$$\begin{aligned}Q' &:= \frac{1}{4}((S_\Phi + R)d(S_\Phi + R) - *d(S_\Phi + R)) \\ &= Q_\Phi + \frac{1}{4}(S_\Phi dR + RdS_\Phi + RdR - *dR).\end{aligned}$$

Mit  $\psi \in \Gamma(L)$  gilt dann also

$$\begin{aligned}
Q'(\psi) &= Q_\Phi(\psi) + \frac{1}{4}((S_\Phi dR)(\psi) + \underbrace{(RdS_\Phi)(\psi)}_{=0} + (RdR)(\psi) - (*dR)(\psi)) \\
&= Q_\Phi(\psi) + \frac{1}{4}(\underbrace{(S_\Phi d)(R\psi)}_{=0} - S_\Phi R d\psi \\
&\quad + \underbrace{(Rd)(R\psi)}_{=0} - \underbrace{R^2 d\psi}_{=0} - \underbrace{(*d)(R\psi)}_{=0} + *R d\psi)
\end{aligned}$$

mit Satz 5 und Gl. (4)

$$\begin{aligned}
&= Q_\Phi(\psi) + \frac{1}{4}(-S_\Phi R \pi^{-1} \delta \psi + R \pi^{-1} * \delta \psi) \\
&= Q_\Phi(\psi) - \frac{1}{4}(S_\Phi R - R S_\Phi) \pi^{-1} \delta \psi
\end{aligned}$$

(Wegen  $L \subseteq \text{Kern } R$  sind Ausdrücke mit  $\pi^{-1}$  sinnvoll, solange links von ihnen ein  $R$  steht.) Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
S_\Phi R &= S_\Phi(S_\Phi - S') \\
&= S_\Phi^2 - S_\Phi S' \\
&= S'^2 - S_\Phi S' \\
&= (S' - S_\Phi)S' - R^2 \\
&= -RS' - R^2 \\
&= -R(S' + R) \\
&= -RS_\Phi.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$Q'(\psi) = Q_\Phi(\psi) - \frac{1}{2}S_\Phi R \pi^{-1} \delta \psi.$$

Wir möchten  $R$  also so wählen, dass  $\frac{1}{2}S_\Phi R \pi^{-1} \delta = Q_\Phi$ . Es gilt nun

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}S_\Phi R \pi^{-1} \delta = Q_\Phi \\
\iff &R \pi^{-1} \delta = -2S_\Phi Q_\Phi \\
\iff &\forall_{0 \neq v \in \mathbb{T}M} R \pi^{-1} \delta(v) = -2S_\Phi Q_\Phi(v)
\end{aligned}$$

da  $f$  eine Immersion ist:

$$\iff \forall_{0 \neq v \in \mathbb{T}M} R = -2S_\Phi Q_\Phi(v) \delta(v)^{-1} \pi.$$

Tatsächlich ist  $R$  unabhängig von  $v$ , da  $\mathbb{T}M$  komplex eindimensional ist und  $Q_\phi(v) \delta^{-1}(v)$  invariant unter  $v \mapsto (x + yJ)v$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ . Es muss noch gezeigt werden, dass  $R$  der Bedingung (15) genügt.  $L \subseteq \text{Kern } R$  ist klar.  $RH \subseteq L$  folgt aus

$$Q_\Phi L = \frac{1}{4}(S_\Phi dS_\Phi - *dS_\Phi)L \subseteq L.$$

Damit genügt  $S'$  den Anforderungen. Da  $S'$  für jeden passenden Isomorphismus  $\Phi$  eindeutig aus einer festen Menge wählbar ist und  $L$  unabhängig von  $\Phi$  ist, ist auch  $S'$  unabhängig von  $\Phi$ .

Nun zeigen wir den zweiten Teil der Aussage. Aus der Differenz von (9) und (10) erhalten wir

$$*dS = 2(A - Q),$$

also ist

$$\begin{aligned} (*dS, *dS) &= 4(Q - A, Q - A) \\ &= 4\langle Q^2 - AQ - QA + A^2 \rangle \end{aligned}$$

Wegen (7) und (8) ist aber  $AQ = QA = 0$ , also

$$\begin{aligned} &= 4\langle Q^2 + AQ + QA + A^2 \rangle \\ &= 4\langle (Q + A)(Q + A) \rangle \\ &= -4\langle (Q + A)(-S)^2(Q + A) \rangle \\ \text{wegen (5) und (6)} \quad &= 4(-S(Q + A), -S(Q + A)) \\ &= (dS, dS). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (dS, *dS) &= 4(-S(Q + A), A - Q) \\ &= 4(-\underbrace{\langle SQA \rangle}_{=0} + \langle SQ^2 \rangle - \langle SA^2 \rangle + \underbrace{\langle SAQ \rangle}_{=0}), \end{aligned}$$

Aus der zyklischen Invarianz der Spur sowie (5) und (6) folgt aber

$$\langle SA^2 \rangle = -\langle SA^2 \rangle = 0 = -\langle SQ^2 \rangle = \langle SQ^2 \rangle.$$

Zum letzten Teil der Aussage. Sei  $v$  ein Eigenvektor von  $S_x$  mit Eigenwert  $l$  (ein solcher existiert, da  $S_x$ , aufgefasst als  $\mathbb{C}^4$ -Endomorphismus, normal ist). Das Quaternion  $w$  ergänze  $v$  zu einer Basis des  $\mathbb{H}^2$ . Seien  $(h, r)$  die Koordinaten von  $S_p(w)$ . Dann gilt für  $\lambda, \mu \in \mathbb{H}$ ,  $\mu \neq 0$  und  $\rho := \lambda\mu^{-1}$ :

$$\begin{aligned} &S(v\lambda + w\mu) \in (v\lambda + w\mu)\mathbb{H} \\ \iff \exists_{a \in \mathbb{H}} \quad &S(v\lambda\mu^{-1} + w)\mu = (v\lambda\mu^{-1} + w)\mu a \\ \iff \exists_{a \in \mathbb{H}} \quad &S(v\rho + w) = (v\rho + w)a \\ \iff \exists_{a \in \mathbb{H}} \quad &vl\rho + vh + wr = v\rho a + wa \\ \iff &l\rho + h = \rho r \\ \iff &l\rho - \rho r = -h. \end{aligned}$$

Der letzten Gleichung entspricht wegen Lemma 2(c) ein reell zweidimensionaler, affiner Lösungsraum für  $\rho$ , also auch für  $\mu$ . Dieser entspricht einer 2-Sphäre.  $\square$



## Literatur

- [BFLPP] F. BURSTALL, D. FERUS, K. LESCHKE, F. PEDIT, U. PINKALL,  
Conformal Geometry of Surfaces in  $S^4$  and Quaternions, 1st ed.,  
*Springer Berlin*, 2002.