

Variationsgleichungen für das Willmore-Funktional

Markus Knopf

0 Einführung

Wir wollen im Folgenden das Funktional

$$\widetilde{W}(X) = \int_M H^2 dA$$

für Immersionen $X : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ betrachten, wobei M^2 eine kompakte Fläche, H die mittlere Krümmung der Immersion und dA das induzierte Flächenelement bezeichnet.

Ebenso kann man betrachten

$$\begin{aligned} W(X) = \int_M (H^2 - K) dA &= \int_M \left(\frac{1}{4} (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - \kappa_1 \cdot \kappa_2 \right) dA \\ &= \widetilde{W}(X) - 2\pi\chi(M) \end{aligned}$$

Hierbei benutzt man den Satz von Gauß-Bonnet und die Tatsache, dass $\chi(M)$ nur vom Geschlecht g von M abhängt. W und \widetilde{W} unterscheiden sich also nur um eine Konstante. Außerdem sieht man, dass der Integrand von $W(X)$ nicht-negativ ist und genau an den *Nabelpunkten* von X verschwindet, wenn also

$$\kappa_1 = \kappa_2$$

Wir wollen nun wie folgt vorgehen:

- (a) Mithilfe des Lichtkegelmodells übertragen wir unsere Betrachtungen in den 5-dimensionalen Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{4,1}$. Damit lassen sich Willmore-Flächen auf S^3 durch stereographische Projektion konform auf Willmore-Flächen in \mathbb{R}^3 abbilden. Lokal kann man also auch Immersionen $X : M^2 \rightarrow S^3$ betrachten.

- (b) Durch Einführung des Konzepts *bewegter Rahmen* untersuchen wir die Flächentheorie für S^3 und leiten die Strukturgleichungen in lokalen Koordinaten her.
- (c) Die Definition einer Folge von Rahmen-Bündeln \mathcal{F}_X erzwingt die Existenz einer 2-Form Ω_X , die invariant unter Rahmenverschiebungen ist.
- (d) Diese kanonische 2-Form Ω_X wird verwendet, um eine Immersion $X : M^2 \rightarrow S^3$ als Willmore-Immersion zu charakterisieren, wenn $\delta\Omega_X \equiv 0$ gilt.

1 Konforme Geometrie von Flächen in S^3

Definition 1 *Der 5-dimensionale Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{4,1}$ ist der Vektorraum \mathbb{R}^5 versehen mit dem inneren Produkt*

$$\tilde{B} = (\tilde{B}_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{4,1}$ heißt Raum-, Licht- oder Zeitvektor, wenn entsprechend $\langle x, x \rangle > 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ oder $\langle x, x \rangle < 0$ gilt. Wir nennen $x \in \mathbb{R}^{4,1}$ positiv, wenn $x^0 > 0$ ist.

Um eine Orientierung zu erhalten, fordern wir

$$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 > 0$$

Abkürzend wollen wir diesen Raum mit den genannten Eigenschaften mit \mathbb{L}^5 bezeichnen.

Indem man die positiven Lichtvektoren in \mathbb{L}^5 durch

$$\mathcal{L}^+ = \{x \in \mathbb{L}^5 \mid \langle x, x \rangle = 0, x^0 > 0\}$$

definiert, erhält man folgende Proposition:

Proposition 1 *Der Untervektorraum*

$$E_y = \{x \in \mathcal{L}^+ \mid \langle x, y \rangle = -1\}$$

mit der induzierten Metrik ist isometrisch zu \mathbb{R}^3 .

Wir wollen nun das Konzept bewegter Rahmen einführen und machen zunächst folgende Beobachtung:

Das innere Produkt auf \mathbb{R}^5 , das durch die Matrix

$$B = (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird, entspricht einer symmetrischen Bilinearform auf dem euklidischen $(\mathbb{R}^5, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$ mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle x, x \rangle_{\text{standard}} = \sum_{i=0}^4 x_i y_i$$

Unter der Bijektion $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^5) \cong \text{Bil}(\mathbb{R}^5) := \{\gamma : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R} \mid \gamma \text{ ist Bilinearform} \}$ entsprechen sich die selbstadjungierten Endomorphismen und die symmetrischen Bilinearformen. Somit kann man eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^5, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{standard}})$ bestehend aus Eigenvektoren von B (als Endomorphismus) angeben, die gleichzeitig eine Orthogonalbasis für B (als symmetrische Bilinearform) ist. Die entsprechende Strukturmatrix hat dann dieselbe Signatur wie \tilde{B} , d.h. man kann die beiden inneren Produkte, die durch B und \tilde{B} repräsentiert werden, isometrisch ineinander überführen.

Definition 2 Sei \mathcal{F} der Raum der positiv orientierten Basen (Rahmen) $b = (e_0, e_1, \dots, e_4)$ von \mathbb{L}^5 mit

$$\langle e_i, e_j \rangle = B_{ij}, \quad e_0, e_4 \in \mathcal{L}^+.$$

Sei außerdem

$$O(B) = \{g \in M(5 \times 5, \mathbb{R}) \mid g^t B g = B\}$$

und definiere G als die Zusammenhangskomponente von $I_5 \in O(B)$.

G ist isomorph zu den linearen Isometrien von \mathbb{L}^5 , die das Skalarprodukt, die Orientierung und die Zeitorientierung erhalten und man kann ausrechnen:

$$G = \{g \in M(5 \times 5, \mathbb{R}) \mid g^t B g = B, \det(g) = 1, g_0^0 > 0\}$$

Außerdem wirkt G auf natürliche Weise von rechts auf \mathcal{F} und wir können \mathcal{F} mit G identifizieren, indem wir setzen

$$\mathcal{F} = \{b = (e_0, e_1, \dots, e_4) \mid \exists ! g \in G : b = \epsilon g\},$$

wobei ϵ eine fest gewählte Basis von \mathbb{L}^5 ist. G ist insbesondere eine *Lie-Gruppe*.

2 Die Strukturgleichungen in lokalen Koordinaten und das Rahmen-Bündel 0-ter Ordnung $\mathcal{F}_X^{(0)}$

Zunächst fasse man die Komponenten e_a eines Elements b aus \mathcal{F} (den positiv orientierten Rahmen) auf als \mathbb{L}^5 -wertige Funktionen. Unter dieser Identifikation berechnet man

$$de_a = \sum_{c=0}^4 e_c \omega_a^c =: e_c \omega_a^c, \quad (2.1)$$

mit den eindeutig bestimmten 1-Formen ω_a^b . Differenziert man diesen Ausdruck erhält man unter Verwendung von (2.1)

$$\begin{aligned} 0 = d(de_a) &= de_c \wedge \omega_a^c + e_c d\omega_a^c = e_b \omega_c^b \wedge \omega_a^c + e_c d\omega_a^c \\ &= e_b \omega_c^b \wedge \omega_a^c + e_b d\omega_a^b \end{aligned}$$

und somit

$$d\omega_b^a = -\omega_c^a \wedge \omega_b^c \quad (2.2)$$

Dies sind die Strukturgleichungen von É. Cartan. Wenn wir noch $\langle e_a, e_b \rangle = B_{ab}$ differenzieren erhalten wir mit $\omega_{ab} = B_{ac} \omega_b^c$

$$\begin{aligned} 0 = d\langle e_a, e_b \rangle &= \langle de_a, e_b \rangle + \langle e_a, de_b \rangle = \langle e_c \omega_a^c, e_b \rangle + \langle e_a, e_c \omega_b^c \rangle \\ &= B_{bc} \omega_a^c + B_{ac} \omega_b^c = \omega_{ba} + \omega_{ab} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Daraus folgt, dass nur 10 der ω_b^a linear unabhängig sind und dass sie eine Basis für die links-invarianten Formen auf G bilden.

Proposition 2 *Die Projektion $(e_0) : \mathcal{F} \rightarrow S^3$ macht \mathcal{F} zu einem Faserbündel über S^3 mit Faser*

$$\begin{aligned} G_0 &= \{g \in G \mid (e_0)(b \cdot g) = (e_0)(b) \forall b \in \mathcal{F}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} r^{-1} & c^t A & \frac{1}{2} r c^t c \\ 0 & A & r c \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \mid r > 0, c \in M(3 \times 1, \mathbb{R}), A \in SO(3, \mathbb{R}) \right\} \end{aligned}$$

Beweis Da $(e_0)(b \cdot g) = (e_0)(b)$ sein soll muss die erste Spalte von g nur im ersten Eintrag $g_0^0 > 0$ ungleich Null sein. Außerdem muss $\det(g) = 1$ sein

und I_3 in $B = B_{ij}$ muss unter $g^t B g$ erhalten bleiben. Somit hat g zunächst die Gestalt

$$\begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, a, c \in M(3 \times 1, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}, A \in SO(3, \mathbb{R})$$

Es muss außerdem gelten

$$\begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ a & A^t & 0 \\ b & c^t & -r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & -r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & A^t & a \\ -r^{-1} & c^t & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & a^t & b \\ 0 & A & c \\ 0 & 0 & -r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} -r^{-1}b + c^t c - r^{-1}b &= 0 \\ -r^{-1}a^t + c^t A &= 0 \end{aligned}$$

und somit $b = \frac{1}{2}rc^t c$ sowie $a^t = rc^t A$. Substitution von c durch $\frac{1}{r}c'$ und anschließende Substitution $r' := \frac{1}{r}$ ergeben die Behauptung.

□

Definition 3 Sei M^2 eine orientierte Fläche und $X : M^2 \rightarrow S^3$ eine glatte Immersion. Dann ist das Rahmen-Bündel von X 0-ter Ordnung $\mathcal{F}_X^{(0)}$ definiert durch

$$\mathcal{F}_X^{(0)} = \{(p, b) \in M \times \mathcal{F} \mid X(p) = (e_0)(b)\}$$

Man sieht an der vorangegangenen Überlegungen, dass die Formen $\{\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3\}$ auf der Faser G_0 verschwinden und somit mit (e_0) auf S^3 projiziert werden können. Da außerdem die symmetrische und quadratische Form $(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2$ sowie die 3-Form $\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \wedge \omega_0^3$ bis auf einen positiven Faktor wohldefiniert sind, folgt die lineare Unabhängigkeit der $\{\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3\}$, d.h. sie bilden eine Basis für die durch (e_0) zurückgezogenen 1-Formen auf \mathcal{F} und somit auch auf $\mathcal{F}_X^{(0)}$.

3 Die Unter-Rahmen-Bündel höherer Ordnung und die verschiebungsinvariante 2-Form Ω_X

Aus Dimensionsgründen ($\dim(M) = 2$) muss es eine Beziehung zwischen den 1-Formen aus $\{\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3\}$ geben, die wir nun zur Definition von Unter-Rahmen-Bündeln höherer Ordnung verwenden wollen. Zunächst benötigen wir folgende

Definition 4 Sei G eine Lie-Gruppe, dann bezeichnen wir die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit einem Element $g \in G$ mit L_g bzw. R_g , also

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G, h \mapsto gh \\ R_g : G &\rightarrow G, h \mapsto hg \end{aligned}$$

Solch ein R_g kann man auch auf $\mathcal{F}_X^{(0)}$ definieren, indem man es punktweise auf \mathcal{F} wirken lässt. Für ein $g \in G_0$ kann man dann berechnen

$$\begin{aligned} R_g^* \begin{pmatrix} \omega_0^1 \\ \omega_0^2 \\ \omega_0^3 \end{pmatrix} &= R_g^* \begin{pmatrix} e_1^{-1}(de_0)_1 \\ e_2^{-1}(de_0)_2 \\ e_3^{-1}(de_0)_3 \end{pmatrix} =: R_g^* \left(\widetilde{e^{-1}} de_0 \right) \\ &= R_g^* \left(\widetilde{e^{-1}} \right) R_g^*(de_0) = (\widetilde{eg})^{-1} R_g^*(de_0) \\ &= g^{-1} \left(\widetilde{e^{-1}} de_0 \right) g = g^{-1} \begin{pmatrix} e_1^{-1}(de_0)_1 \\ e_2^{-1}(de_0)_2 \\ e_3^{-1}(de_0)_3 \end{pmatrix} g \\ &= g^{-1} \begin{pmatrix} \omega_0^1 \\ \omega_0^2 \\ \omega_0^3 \end{pmatrix} g = r^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} \omega_0^1 \\ \omega_0^2 \\ \omega_0^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also kann man für entsprechend gewähltes $g \in G_0$ $\omega_0^3 = 0$ setzen und somit lässt sich definieren

Definition 5 Definiere das Unter-Rahmen-Bündel 1-ter Ordnung $\mathcal{F}_X^{(1)}$ durch

$$\mathcal{F}_X^{(1)} = \left\{ (p, b) \in \mathcal{F}_X^{(0)} \mid \omega_0^3|_{(p,b)} = 0, (\omega_0^1 \wedge \omega_0^2) > 0 \right\}$$

Bemerkung 1 $\mathcal{F}_X^{(1)}$ wird via $p : \mathcal{F}_X^{(1)} \rightarrow M$ zu einem Prinzipal-Bündel über M mit Faser

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r^{-1} & p^t A & \frac{1}{2} r p^t p \\ 0 & A & r p \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in G_0 \mid A = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c^2 + s^2 = 1, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right\}$$

Durch die Gleichungen (2.2) und (2.3) erhalten wir

$$0 = d\omega_0^3 = -\omega_1^3 \wedge \omega_0^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_0^2 \quad (3.1)$$

Mit Cartan's Lemma folgt dann, dass man ω_1^3 und ω_2^3 jeweils als Linearkombination von ω_0^1 und ω_0^2 schreiben kann:

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= h_{11}\omega_0^1 + h_{12}\omega_0^2 \\ \omega_2^3 &= h_{21}\omega_0^1 + h_{22}\omega_0^2 \end{aligned}$$

Hierbei sind die h_{ij} glatte Funktionen auf $\mathcal{F}_X^{(1)}$ und es gilt für $g \in G_1$ mit einer ähnlichen Rechnung:

$$R_g^* \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} - p_3 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

Das Verhalten der h_{ij} bei Rahmenverschiebung ist somit geklärt und man kann für $p_3 = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$ definieren

Definition 6 Definiere das Unter-Rahmen-Bündel $\mathcal{F}_X^{(\gamma)}$ durch

$$\mathcal{F}_X^{(\gamma)} = \left\{ (p, b) \in \mathcal{F}_X^{(1)} \mid (h_{11} + h_{22})(p, b) = 0 \right\}.$$

Dieses ist ein G_γ -Bündel mit

$$G_\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} r^{-1} & p^t A & \frac{1}{2} r p^t p \\ 0 & A & r p \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in G_1 \mid p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aus der obigen Betrachtung folgt nun für $g \in G_1$

$$\begin{aligned}
R_g^*(\omega_0^1 \wedge \omega_0^2) &= R_g^*\omega_0^1 \wedge R_g^*\omega_0^2 = r^{-2} (c\omega_0^1 - s\omega_0^2) \wedge (s\omega_0^1 + c\omega_0^2) \\
&= r^{-2} (cs(\omega_0^1)^2 - s^2\omega_0^2\omega_0^1 + c^2\omega_0^1\omega_0^2 - sc(\omega_0^2)^2 \\
&\quad - sc(\omega_0^1)^2 - c^2\omega_0^2\omega_0^1 + s^2\omega_0^1\omega_0^2 + cs(\omega_0^2)^2) \\
&= r^{-2} (s^2 + c^2)\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \\
&= r^{-2}\omega_0^1 \wedge \omega_0^2
\end{aligned}$$

sowie

$$R_g^* \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) = r^2 \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right)$$

und somit

$$R_g^* \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 = \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2,$$

das heißt, es existiert eine glatte 2-Form auf M, bezeichnet mit Ω_X , so dass

$$p^*(\Omega_X) = \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2,$$

invariant ist unter Rahmenverschiebung R_g^* .

Insbesondere gilt somit auf $\mathcal{F}_X^{(\gamma)}$ ($h_{22} = -h_{11}$):

$$\begin{aligned}
p^*(\Omega_X) &= \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \\
&= \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \\
&= -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3
\end{aligned}$$

Definition 7 Definiere die Menge der Nabelpunkte von X durch

$$\mathcal{U}_X = \{p \in M \mid \Omega_X(p) = 0\}$$

Für ein $g \in G_\gamma$ sieht man sofort, dass $(e_3)(b \cdot g) = (e_3)(b)$, also gibt es eine glatte Abbildung $\gamma_X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^5$, die faserweise $e_3 = \gamma_X \circ p$ erfüllt.

Definition 8 Die Abbildung $\gamma_X : M^2 \rightarrow Q$ mit $Q = \{x \in \mathbb{L}^5 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ heißt konforme Gauß-Abbildung der Immersion X .

Bemerkung 2 • Die Wahl des Zielbereichs Q ist durch $\langle e_3, e_3 \rangle \equiv 1$ gerechtfertigt.

- Geometrisch entspricht $\gamma_X(p)$ der Sphäre in S^3 , die im Punkt $X(p)$ tangential an $X(M^2)$ ist, die gleiche mittlere Krümmung wie $X(M^2)$ im Punkt $X(p)$ hat sowie über die gleiche Orientierung verfügt.
- Ω_X ist das induzierte Flächenelement von $\gamma_X : M^2 \rightarrow Q$.

4 Die Variationsgleichungen für das Willmore-Funktional

Bevor wir uns dem Hauptresultat dieses Abschnittes zuwenden können, benötigen wir noch etwas Begriffsbildung.

Notation 1 Die Menge aller glatten Immersionen $X : M^2 \rightarrow S^3$ bezeichnen wir mit $\text{Imm}(M^2, S^3)$.

Definition 9 Eine Variation von $X \in \text{Imm}(M^2, S^3)$ ist eine Abbildung $X_t : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{Imm}(M^2, S^3)$, für die gilt:

- (a) X_t ist glatte Immersion für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.
- (b) $X_0 = X$.

Bemerkung 3 • Wir können für ein $X \in \text{Imm}(M^2, S^3)$ ein glattes Vektorfeld erhalten, indem wir setzen:

$$W(p) := W_p := \frac{\partial X_t}{\partial t}(0, p)$$

Dieses glatte Vektorfeld entlang X heißt Variationsvektorfeld von X_t .

- Umgekehrt lässt sich einem glatten Vektorfeld W entlang X eine Variation X_t zuordnen, deren Variationsvektorfeld gerade W ist. Dazu setzt man:

$$X_t(p) := \exp(tW_p)$$

Unter der Identifikation von \mathbb{R}^3 mit E_y , können wir die lokale Flächentheorie in \mathbb{R}^3 auf konforme Flächentheorie in S^3 übertragen. Dann lauten die Gauß'sche und die mittlere Krümmung für die Immersion $X : M^2 \rightarrow E_y \cong \mathbb{R}^3$

$$K = h_{11}h_{22} - h_{12}^2, \quad H = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\Omega_X = b^* \circ p^*(\Omega_X) &= \left(\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22})^2 + h_{12}^2 \right) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 \\ &= (H^2 - K) \omega_0^1 \wedge \omega_0^2 = (H^2 - K) dA.\end{aligned}$$

Somit können wir für kompakte $K \subseteq M^2$ definieren

$$W_K(X) = \int_K \Omega_X$$

und legen fest

Definition 10 *Eine glatte Immersion $X : M^2 \rightarrow S^3$ heißt Willmore-Immersion, wenn für jedes Kompaktum $K \subseteq M^2$ und jede glatte Variation $X_t : M^2 \rightarrow S^3$ mit Träger in K , also eine in $(-\epsilon, \epsilon)$ stetig parametrisierte Familie von glatten Immersionen, gilt*

$$\frac{d}{dt} (W_K(X_t))|_{t=0} = 0$$

mit $X_0 = X$.

Definieren wir uns nun ein G_γ -Bündel $\mathcal{F}_{X_t}^{(\gamma)} \subseteq M \times (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{F}$ mit

$$\mathcal{F}_{X_s}^{(\gamma)} = \left\{ (p, s, b) \in \mathcal{F}_{X_t}^{(\gamma)} \right\} \forall s \in (-\epsilon, \epsilon),$$

so folgt aus der Tatsache, dass sich die zurückgezogenen 1-Formen auf $\mathcal{F}_X^{(\gamma)}$ durch $\{\omega_0^1, \omega_0^2\}$ darstellen lassen, dass sich ω_0^3 auf $\mathcal{F}_{X_t}^{(\gamma)}$ als Linearkombination von $\{\omega_0^1, \omega_0^2, dt\}$ schreiben lässt:

$$\omega_0^3 = \lambda dt$$

für eine glatte Funktion λ auf $\mathcal{F}_{X_t}^{(\gamma)}$; die Koeffizienten vor den ω_0^i müssen für fixiertes t Null sein. Ähnlich wie in (3.1) erhält man

$$\omega_i^3 = h_{ij}\omega_0^j + \lambda_i dt \quad (4.1)$$

für glatte λ_i auf $\mathcal{F}_{X_t}^{(\gamma)}$. Mit der Gleichung (2.3) folgt $\omega_3^3 = 0$ und $\omega_0^4 = 0$ und somit durch Differentiation

$$\begin{aligned}d\omega_0^3 &= d(\lambda dt) = d\lambda \wedge dt \\ &= -\omega_0^3 \wedge \omega_0^0 - \omega_1^3 \wedge \omega_0^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_0^2 - \omega_3^3 \wedge \omega_0^3 - \omega_4^3 \wedge \omega_0^4 \\ &= -\lambda dt \wedge \omega_0^0 - \omega_1^3 \wedge \omega_0^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_0^2 \\ &= \lambda \omega_0^0 \wedge dt - (h_{1j}\omega_0^j + \lambda_1 dt) \wedge \omega_0^1 - (h_{2j}\omega_0^j + \lambda_2 dt) \wedge \omega_0^2 \\ &= \lambda \omega_0^0 \wedge dt - (h_{12}\omega_0^2 \wedge \omega_0^1 + \lambda_1 dt \wedge \omega_0^1) - (h_{21}\omega_0^1 \wedge \omega_0^2 + \lambda_2 dt \wedge \omega_0^2) \\ &= \lambda \omega_0^0 \wedge dt + (\lambda_1 \omega_0^1 + \lambda_2 \omega_0^2) \wedge dt\end{aligned}$$

Somit erfüllt $d\lambda$ die Gleichung

$$d\lambda = \lambda\omega_0^0 + \lambda_i\omega_0^i + \lambda'dt,$$

mit den glatten Funktionen λ_i, λ' auf $\mathcal{F}_{X_t}^{(\gamma)}$. Es sei noch einmal daran erinnert, dass gilt

$$\Omega_{X_s} = (-\omega_1^3 \wedge \omega_2^3)|_{t=s} \forall s.$$

Proposition 3

$$\frac{d}{dt}(W_K(X_t))|_{t=0} = \int_K \lambda \delta \Omega_X$$

für eine glatte Funktion λ auf M .

Beweis Sei

$$\Phi = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 + dt \wedge \left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ (\omega_1^3 \wedge \omega_2^3) \right),$$

dann folgt sofort: $i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ \Phi = 0$ und somit

$$\Omega_{X_s} = \Phi|_{t=s}$$

Setzen wir nun

$$f(s) = W_K(X_s) = \int_K \Phi|_{t=s},$$

so folgt durch Rechnung

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_K \left(\theta_{\frac{\partial}{\partial t}} \Phi \right) |_{t=0} = \int_K \left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ d\Phi + d \left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ \Phi \right) \right) |_{t=0} \\ &= \int_K \left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ d\Phi \right) |_{t=0} \\ &= \int_K \left(-i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ (d\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 - \omega_1^3 \wedge d\omega_2^3) - i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ dt \wedge d(\lambda_1\omega_2^3 - \lambda_2\omega_1^3) \right) |_{t=0} \\ &= \int_K \left(-i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ (d\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 - \omega_1^3 \wedge d\omega_2^3) - d(\lambda_1\omega_2^3 - \lambda_2\omega_1^3) \right) |_{t=0} \end{aligned}$$

Nun folgt durch die Strukturgleichungen

$$\begin{aligned} -d(\omega_1^3 \wedge \omega_2^3) &= -d\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \wedge d\omega_2^3 \\ &= \omega_0^3 \wedge (\omega_1^0 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_2^0) + \omega_0^3 \wedge (\omega_0^1 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_0^2) \end{aligned}$$

Verjüngt man nun den obigen Ausdruck mit $\frac{\partial}{\partial t}$ und wertet dies nun an der Stelle $t = 0$ aus (bezeichnet mit $\bar{\cdot}$), so ergibt dies mit der Formel für $f'(0)$, den Strukturgleichungen und Cartan's Lemma

$$f'(0) = \int_K \bar{\lambda} (\bar{p}_{11} + \bar{p}_{22}) \bar{\omega}_0^1 \wedge \bar{\omega}_0^2 - d\chi,$$

mit einer glatten 1-Form χ und glatten Funktionen \bar{p}_{11} und \bar{p}_{22} . Unter Anwendung des Satzes von Stokes verschwindet der letzte Term im obigen Integral und man erhält

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_K \bar{\lambda} (\bar{p}_{11} + \bar{p}_{22}) \bar{\omega}_0^1 \wedge \bar{\omega}_0^2 \\ &=: \int_K \lambda \delta \Omega_X \end{aligned}$$

Diese aus den Strukturgleichungen kanonisch hervorgegangene 2-Form $\delta \Omega_X$ wird 1. Variation des Willmore-Integranden Ω_X genannt.

□

Satz 1 *Sei M^2 eine orientierte Fläche. Dann ist $X : M^2 \rightarrow S^3$ eine Willmore-Immersion genau dann, wenn $\delta \Omega_X \equiv 0$.*

Beweis Sei λ eine glatte Funktion auf M mit kompaktem Träger in K , dann existiert eine Variation X_t mit Träger in K , so dass λe_3 das Variationsvektorfeld bei $t = 0$ ist. Nach der vorangegangenen Proposition gilt dann

$$\frac{d}{dt} (W_K(X_t))|_{t=0} = \int_K \lambda \delta \Omega_X$$

Da λ beliebig mit kompaktem Träger war, folgt, dass die linke Seite der Gleichung genau dann für alle solche Variationen X_t verschwindet, wenn $\delta \Omega_X \equiv 0$.

□

Quellen

- [1] Bryant, Robert L., *A duality theorem for Willmore surfaces*, J. Differential Geom. 20, 1984, Seite 25-53
- [2] Hélein, Frédéric, *Willmore immersions and Loop groups*, J. Differential Geom. 50, 1998, Seite 331-385
- [3] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, GTM 218, Springer-Verlag, 2002