

Willmore-Funktional in quaternionischer Schreibweise

Jörg Zentgraf

25.04.2007

Dieser Vortrag orientiert sich an dem Buch *Conformal Geometry of Surfaces in S^4 and Quaternions* [1] von Burstall, Ferus, Leschke, Pedit, Pinkall, das eine gute Grundlage für die quaternionische Funktionentheorie ist.

1 Das Energie-Funktional

Definition 1.1. Die Menge \mathcal{Z} sei definiert durch

$$\mathcal{Z} = \{S \in \text{End}(\mathbb{H}^2) \mid S^2 = -1\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass dies die orientierten 2-Sphären in $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ sind. Die Menge \mathcal{Z} bildet eine Untermannigfaltigkeit von $\text{End}(\mathbb{H}^2)$ mit

$$\begin{aligned} T_S \mathcal{Z} &= \{X \in \text{End}(\mathbb{H}^2) \mid XS = -SX\} \\ \perp_S \mathcal{Z} &= \{Y \in \text{End}(\mathbb{H}^2) \mid YS = SY\} \end{aligned}$$

Lemma 1.2. Für ein $S \in \mathcal{Z}$ definieren wir

$$S' := \{\gamma \in \mathbb{P}^1\mathbb{H} \mid S\gamma = \gamma\}$$

Dann gilt

1. S' ist eine 2-Sphäre in $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$, entspricht also einer reellen 2-Ebene in $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ unter einer geeigneten Koordinatentransformation.
2. Jede 2-Sphäre kann auf diese Weise durch ein $S \in \mathcal{Z}$ erhalten werden, dies ist eindeutig bis auf Vorzeichen.

Beweis. Wir betrachten \mathbb{H}^2 als einen komplexen Vektorraum mit imaginärer Einheit i . Dann ist S \mathbb{C} -linear und besitzt einen komplexen Eigenwert l . Gilt $Sv = vl$, dann gilt

$$S(v\mathbb{H}) = vl\mathbb{H} = v\mathbb{H}$$

Somit ist $S' \neq \emptyset$. Wir wählen eine Basis v, w von \mathbb{H}^2 , so dass $v\mathbb{H} \in S'$ gilt, d.h. $Sv = vl$ für ein l und $Sw = -vH - wr$. Dann folgt aus $S^2 = -I$

$$l^2 = -1 = r^2, \quad lH = Hr$$

Für die affine Parametrisierung $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{H}$, $x \mapsto [vx + w]$ erhalten wir :

$$\begin{aligned} [vx + w] \in S' &\equiv \exists \gamma : S(vx + w) = (vx + w)\gamma \\ &\leftrightarrow \exists \gamma : vl x - vH - wr = vx\gamma + w\gamma \\ &\leftrightarrow \exists \gamma : \begin{cases} lx - H = x\gamma \\ -r = \gamma \end{cases} \\ &\leftrightarrow lx + xr = H \end{aligned}$$

Dies ist eine reell-lineare Gleichung für x mit zugehöriger homogener Gleichung

$$lx + xr = 0$$

Diese hat reelle Dimension 2 wegen Lemma 2 (Vortrag Alexander Klauer) und jede reelle 2-Ebene kann auf diese Art realisiert werden. Offensichtlich bestimmen S und $-S$ die gleiche 2-Sphäre. Aber S bestimmt (l, r) und fixiert somit eine Orientierung der obigen reellen 2-Ebene und dadurch auch eine Orientierung von S' . Somit entspricht \mathcal{Z} den orientierten 2-Sphären in $\mathbb{P}^1\mathbb{H} = S^4$. \square

Wir benutzen erneut das innere Produkt

$$\langle A, B \rangle := \langle AB \rangle = \frac{1}{8} \text{Spur}_{\mathbb{R}}(AB).$$

Definition 1.3. Das Energie-Funktional einer Abbildung $S : M \rightarrow \mathcal{Z}$ einer Riemannschen Fläche M ist definiert durch

$$E(S) := \int_M \langle dS \wedge *dS \rangle$$

Kritische Punkte dieses Funktionals bezüglich Variationen von S heißen harmonische Abbildungen von M nach \mathcal{Z} .

Die Hopf-Felder A und Q wurden definiert durch

$$A = \frac{1}{4}(SdS + *dS) \quad Q = \frac{1}{4}(SdS - *dS)$$

Proposition 1.4. S ist genau dann harmonisch, wenn die tangentielle Komponente von $d * dS$ verschwindet.

$$(d * dS)^T = 0 \tag{1}$$

Dies ist äquivalent zu den folgenden Gleichungen

$$d(S * dS) = 0 \tag{2}$$

$$d * A = 0 \tag{3}$$

$$d * Q = 0 \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Es gilt

$$d(S * dS) = 4d * Q = 4d * A = S(d * dS)^T = (Sd * dS)^T \tag{6}$$

Beweis. Wir betrachten eine Variation S_t von S in \mathcal{Z} mit dem Variationsvektorfeld $Y := \frac{d}{dt}S$. Wegen $Y \in T_S\mathcal{Z}$ gilt dann $SY = -YS$.

$$\frac{d}{dt}E(S) = \frac{d}{dt} \int_M \langle dS \wedge *dS \rangle = \int_M (\langle dY \wedge *dS \rangle + \langle dS \wedge *dY \rangle)$$

Wenn wir die Formel für das Wedgeprodukt $\omega \wedge \theta = \omega * \theta - *\omega\theta$ und $\text{Spur}_{\mathbb{R}}(AB) = \text{Spur}_{\mathbb{R}}(BA)$ benutzen, erhalten wir

$$\langle dS \wedge *dY \rangle = \langle dS(-dY) - *dS * dY \rangle = \langle *dY * dS - dYdS \rangle = \langle dY \wedge *dS \rangle$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\frac{d}{dt}E(S) = 2 \int_M \langle dY \wedge *dS \rangle = -2 \int_M \langle Yd * dS \rangle = -2 \int_M \langle Y, d * dS \rangle$$

Somit verschwindet die Ableitung des Energiefunktionals (S ist dann harmonisch) genau dann, wenn $d*dS$ senkrecht auf $Y \in T_S \mathcal{Z}$ steht, also wenn $d*dS$ normal ist. Für die anderen Äquivalenzen beobachten wir zunächst

$$\begin{aligned} 0 &= d * d(S^2) = d(*dSS + S * dS) \\ &= (d * dS)S - *dS \wedge dS + dS \wedge *dS + Sd * dS \\ &= 2dS \wedge *dS + (d * dS)S + Sd * dS \end{aligned}$$

Dies ergibt nun zusammen mit $*Q - *A = \frac{1}{2}dS$ und $A = \frac{1}{4}(SdS + *dS)$

$$\begin{aligned} 8d * Q &= 8d * A = 2d(S * dS) + d(-dS) \\ &= 2dS \wedge *dS + 2Sd * dS \\ &= S(d * dS) - (d * dS)S \\ &= S(d * dS + S(d * dS)S) \\ &= S(2(d * dS)^T) \end{aligned}$$

Somit sind auch die restlichen Äquivalenzen gezeigt. \square

Wenn nun S die konforme Gaußabbildung einer Immersion einer holomorphen Kurve ist, so können wir dS in die Hopf-Felder aufspalten.

Lemma 1.5.

$$\begin{aligned} \langle dS \wedge *dS \rangle &= 4(\langle A \wedge *A \rangle + \langle Q \wedge *Q \rangle) \\ \langle dS \wedge SdS \rangle &= 4(\langle A \wedge *A \rangle - \langle Q \wedge *Q \rangle) \end{aligned}$$

Beweis. Wir hatten die Gleichungen

$$dS = 2(*Q - *A) \quad *dS = 2(A - Q) \quad SdS = 2(Q + A)$$

und es gilt

$$*Q \wedge A = 0 \quad *A \wedge Q = 0$$

wegen dem Typ. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle dS \wedge *dS \rangle &= 4\langle (*Q - *A) \wedge (A - Q) \rangle \\ &= -4\langle *Q \wedge Q \rangle - 4\langle *A \wedge A \rangle \\ &= 4\langle Q \wedge *Q \rangle + 4\langle A \wedge *A \rangle \end{aligned}$$

und der Fall SdS geht ähnlich. \square

Lemma 1.6. Sei V ein quaternionischer Vektorraum, $L \subset V$ eine quaternionische Linie, sowie $S, B \in \text{End}(V)$ zwei Endomorphismen mit

$$S^2 = -I \quad SB = -BS \quad \text{image } B \subset L$$

Dann gilt

$$\text{Spur}_{\mathbb{R}} B^2 \leq 0$$

und Gleichheit genau dann, wenn $B|_L = 0$.

Beweis. Wir können annehmen, dass $B \neq 0$ gilt. Dann ist $L = BV$ und $SB = -BS$ impliziert $SL = L$. Sei nun $\phi \in L \setminus \{0\}$ und

$$S\phi = \phi\lambda, \quad B\phi = \phi\mu.$$

Dann gilt $\lambda^2 = -1$ und aus $BS = -SB$ folgt

$$\lambda\mu = -\mu\lambda$$

Deshalb ist auch μ rein imaginär. Somit folgt $B^2\phi = -|\mu|^2\phi$ und

$$\text{Spur}_{\mathbb{R}} B^2 = \text{Spur}_{\mathbb{R}} B^2|_L = -4|\mu|^2.$$

□

Dies kann man nun anwenden auf A oder Q statt B , da ihr Rang kleiner gleich 1 ist. Wir erhalten somit

Lemma 1.7. *Es gilt*

$$\langle A \wedge *A \rangle = \frac{1}{2} \langle A|_L \wedge *A|_L \rangle$$

und

$$\langle A \wedge *A \rangle \geq 0 \quad \langle Q \wedge *Q \rangle \geq 0.$$

Im Speziellen gilt $E(S) \geq 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle A \wedge *A \rangle &= \frac{1}{8} \text{Spur}_{\mathbb{R}} (-A^2 - \underbrace{(*A)^2}_{=-ASSA=A^2}) = -\frac{1}{4} \text{Spur}_{\mathbb{R}} A^2 \end{aligned}$$

Wegen $\dim L = \frac{1}{2} \dim H$ haben wir ebenfalls

$$\langle A|_L \wedge *A|_L \rangle = -\frac{1}{2} \text{Spur}_{\mathbb{R}} A|_L^2$$

Aufgrund der Inklusion $AH \subset L$ erhalten wir

$$\text{Spur}_{\mathbb{R}} A^2 = \text{Spur}_{\mathbb{R}} A|_L^2$$

Die Positivität folgt aus dem vorherigen Lemma. □

Die folgende Proposition hilft uns das Energiefunktional durch ein anderes zu ersetzen.

Proposition 1.8. 1. Die 2-Form $\omega \in \Omega^2(\mathcal{Z})$ definiert durch

$$\omega_S(X, Y) = \langle X, SY \rangle \quad S \in \mathcal{Z}, X, Y \in T_S \mathcal{Z}$$

ist geschlossen.

2. Für $S : M \rightarrow \mathcal{Z}$ und $dS = 2(*Q - *A)$ gilt

$$S^* \omega = 2 \langle A \wedge *A \rangle - 2 \langle Q \wedge *Q \rangle. \quad (7)$$

Im Besonderen ist

$$\deg S := \frac{1}{\pi} \int_M \langle A \wedge *A \rangle - \langle Q \wedge *Q \rangle$$

eine topologische Invariante (nicht der Abbildungsgrad von S).

Beweis. zu 1. Wir betrachten die folgende 2-Form auf $\text{End}(\mathbb{H}^2)$

$$\tilde{\omega}(X, Y) := \frac{1}{2} (\langle X, SY \rangle - \langle Y, SX \rangle)$$

Dann ist $d_S \tilde{\omega}(X, Y, Z)$ eine Linearkombination von Termen der Form

$$\langle Y, XZ \rangle$$

Aber für $X, Y, Z \in T_S \mathcal{Z}$ und $S \in \mathcal{Z}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle Y, XZ \rangle &= -\langle S^2 Y X Z \rangle = \langle S Y X Z S \rangle \\ &= \langle S^2 Y X Z \rangle = -\langle Y, XZ \rangle \end{aligned}$$

und somit ist $\langle Y, XZ \rangle = 0$. Wenn nun $\iota : \mathcal{Z} \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}^2)$ die Inklusion ist, dann erhalten wir

$$d\omega = d\iota^*\tilde{\omega} = \iota^*d\tilde{\omega} = 0$$

zu 2. Es gilt

$$\begin{aligned} S^*\omega(X, Y) &= \langle dS(X), SdS(Y) \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle dS(X)SdS(Y) \rangle - \langle SdS(X)dS(Y) \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle dS(X)SdS(Y) \rangle - \langle dS(Y)SdS(X) \rangle) \\ &= \frac{1}{2}\langle dS \wedge SdS \rangle(X, Y) \end{aligned}$$

und wir erhalten mit Lemma 1.5 die Formel (7). Die topologische Invarianz unter Deformationen von S folgt aus dem Satz von Stokes. Dazu sei $\tilde{S} : M \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{Z}$ eine Deformation von $S_0 : M \rightarrow \mathcal{Z}$ zu S_1 , dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{M \times [0, 1]} d\tilde{S}^*\omega \\ &= \int_{M \times 1} \tilde{S}^*\omega - \int_{M \times 0} \tilde{S}^*\omega \\ &= \int_M S_1^*\omega - \int_M S_0^*\omega \end{aligned}$$

□

Nun sehen wir mit

$$\begin{aligned} E(S) &= 4 \int_M \langle A \wedge *A \rangle + \langle Q \wedge *Q \rangle \\ &= 8 \int_M \langle A \wedge *A \rangle + \underbrace{4 \int_M \langle Q \wedge *Q \rangle - \langle A \wedge *A \rangle}_{\text{topologisch invariant}} \end{aligned}$$

dass wir bei Variationsproblemen das Energiefunktional ersetzen können durch das Integral von $\langle A \wedge *A \rangle$.

2 Das Willmore-Funktional

Definition 2.1. Sei L eine Immersion einer kompakten holomorphen Kurve in $\mathbb{P}^1\mathbb{H}$ mit Hopf-Feld A . Das Willmore-Funktional ist dann definiert durch

$$W(L) := \frac{1}{\pi} \int_M \langle A \wedge *A \rangle.$$

Wenn wir die Immersion $L : M \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{H}$ variieren, wird sie im Allgemeinen keine holomorphe Kurve mehr bleiben. Allerdings können wir immer eine komplexe Struktur wählen, die durch die Kurve induziert wird. Bezüglich dieser Struktur ist die Kurve dann wieder holomorph. Kritische Punkte solcher Variationen heißen Willmoreflächen. Wenn wir nur Variationen betrachten, die die konforme Struktur erhalten, so sprechen wir von constrained Willmoreflächen.

Im Fall von Flächen im \mathbb{R}^4 erhalten wir die herkömmliche Definition von Willmoreflächen. Zunächst ein Lemma, das wir im Beweis von dem darauffolgenden Theorem benutzen werden.

Lemma 2.2.

$$\text{image } d*Q \subset L \subset \ker d*Q$$

Beweis. Für einen Schnitt $\psi \in \Gamma(L)$ gilt wegen $Q|_L = 0$ (S ist die komplexe Struktur auf L)

$$0 = d(*Q\psi) = (d*Q)\psi - *Q \wedge d\psi = (d*Q)\psi - *Q \wedge \delta\psi$$

Da Q und δ unterschiedlichen Typ haben, gilt

$$(d*Q)\psi = *Q \wedge \delta\psi = 0$$

Somit ist die rechte Inklusion gezeigt. Sei nun π die Projektion von H auf H/L , dann gilt

$$\begin{aligned} \pi(d*Q)(X, JX) &= \pi(d*A)(X, JX) \\ &= \pi(X(*A(JX)) - JX(*A(X)) - \underbrace{*A([X, JX])}_{L\text{-wertig}}) \\ &= \delta(X)*A(JX) - \delta(JX)*A(X) \\ &= -\delta(X)A(X) - \delta(X)SSA(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Somit können wir $d*Q$ als eine 2-Form betrachten : $d*Q \in \Omega^2(\text{Hom}(H, H/L))$

Nun beweisen wir mit den entwickelten Begriffen ein Theorem, das bereits von Ejiri [2] und Rigoli [3] bewiesen wurde.

Theorem 2.3. *Eine Immersion einer holomorphen Kurve L ist genau dann Willmore, wenn die konforme Gaußabbildung S harmonisch ist.*

Beweis. Sei L_t eine Variation der Immersion und S_t die dazugehörige Gaußabbildung. Damit L_t konform bleibt, ändern wir auch automatisch die komplexe Struktur, d.h. $*$. Die Variation hat ein Variationsvektorfeld $Y \in \Gamma(\text{Hom}(L, H/L))$, gegeben durch

$$Y\psi := \pi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi\right), \quad \psi \in \Gamma(L_t)$$

Wie üblich kürzen wir die Ableitung $\frac{d}{dt}$ mit einem Punkt ab. Für einen Schnitt $\psi \in \Gamma(L)$ gilt

$$\pi\dot{S}\psi = \pi(S\dot{\psi}) - \pi S\dot{\psi} = YS\psi - S\pi\dot{\psi} = (YS - SY)\psi \quad (8)$$

Da die Extremwerte des Energiefunktional auch die Extremwerte des Willmorefunktional sind, können wir auch die Variation des Energiefunktional betrachten.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E(S_t) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_M \langle dS_t \wedge *_t dS_t \rangle \\ &= \underbrace{\int_M \langle d\dot{S} \wedge *dS \rangle}_I + \underbrace{\int_M \langle dS \wedge *\dot{d}S \rangle}_{II} + \underbrace{\int_M \langle dS \wedge *d\dot{S} \rangle}_{III} \end{aligned}$$

Allgemein gilt $\langle A \wedge *B \rangle = \langle B \wedge *A \rangle$ wegen $\text{Spur}_{\mathbb{R}}(AB) = \text{Spur}_{\mathbb{R}}(BA)$. Somit gilt

$$III = I.$$

Als nächstes behaupten wir

$$II = 0. \quad (9)$$

Auf TM sei $\dot{J} = B$, d.h. $*\omega =: \omega(BX)$. Dann gilt wegen $J^2 = -1$ auch $BJ + JB = 0$ und

$$\begin{aligned} \langle dS \wedge *\dot{d}S \rangle(X, JX) &= \langle dS(X)*\dot{d}S(JX) \rangle - \langle dS(JX)*\dot{d}S(X) \rangle \\ &= \langle dS(X)dS(BJX) \rangle - \langle dS(JX)dS(BX) \rangle \\ &= -\langle dS(X)dS(JBX) \rangle - \langle dS(BX)dS(JX) \rangle \end{aligned}$$

Aber da S konform ist gilt

$$\langle dS(X)dS(JX) \rangle = 0 \quad \text{für alle } X.$$

Leitet man diese Gleichung nach X ab, so ergibt sich

$$\langle dS(X)dS(JY) \rangle + \langle dS(Y)dS(JX) \rangle = 0$$

für alle X, Y . Benutzen wir dies mit $Y = BX$, so erhalten wir (9).

Als nächstes berechnen wir das Integral I .

$$\begin{aligned} I &= - \int_M \langle \dot{S}, d * dS \rangle \\ &\stackrel{(6)}{=} 4 \int_M \langle \dot{S}, Sd * Q \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(\dot{S}Sd * Q) \end{aligned}$$

In dem vorherigen Lemma haben wir gezeigt, dass wir $d * Q$ als eine 2-Form

$$d * Q \in \Omega^2(\text{Hom}(H/L, L))$$

betrachten können und fahren fort :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(\dot{S}Sd * Q : H \rightarrow H) \\ &= \frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(\pi \dot{S}Sd * Q : H/L \rightarrow H/L) \\ &= \frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(\pi \dot{S}|_L Sd * Q : H/L \rightarrow H/L) \\ &\stackrel{(8)}{=} \frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}((YS - SY)Sd * Q) : H/L \rightarrow H/L) \\ &= -\frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(Yd * Q) - \frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(SY Sd * Q) \end{aligned}$$

Nun ist $d * Q$ tangential wegen (6) und antikommutiert somit mit S .

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(Yd * Q) + \frac{1}{2} \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(SYd * QS) \\ &= - \int_M \text{Spur}_{\mathbb{R}}(Yd * Q) \\ &= -8 \int_M \langle Y, d * Q \rangle \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(S_t) = -16 \int_M \langle Y, d * Q \rangle$$

Wegen $Y \in \Omega^2(\text{Hom}(H/L, L))$ verschwindet dies für alle Variationsvektorfelder genau dann, wenn

$$d * Q = 0$$

gilt. □

7

Literatur

- [1] BURSTALL, F. E., FERUS, D., LESCHKE, K., PEDIT, F., AND PINKALL, U. *Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions*, vol. 1772 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] EJIRI, N. Willmore surfaces with a duality in $S^N(1)$. *Proc. London Math. Soc. (3)* 57, 2 (1988), 383–416.
- [3] RIGOLI, M. The conformal Gauss map of submanifolds of the Möbius space. *Ann. Global Anal. Geom.* 5, 2 (1987), 97–116.