Fraktale: das mathematische Utopia

Projekt Praktikum HWS 2006/07
Ghazaleh Arghanoun

1 Projekte

Es war Benoit Mandelbrot, der zum ersten Mal das Wort "Fraktal" benutzt hat, um diejenigen Bilder zu bezeichnen, die eine Art "Selbst-Ähnlichkeit" besitzen. Ein selbstähnliches Bild hat die Eigenschaft, dass ein kleinerer (beliebiger) Teil des Bildes dieselbe Struktur und Erscheinung hat wie das ganze Bild.

Im mathematischen Sinne ist ein Bild (d.h. eine kompakte Teilmenge der Ebene oder des 3-dimensionalen Raums mit der euklidischen Metrik) genau dann ein Fraktal, wenn es unter Anwendung einer Kollektion glatter Abbildungen invariant bleibt. Wir begrenzen uns in diesem Praktikum auf Kollektionen von affinen Transformationen auf $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ mit der standarden euklidischen Metrik, und einfachen rationalen Funktionen auf der Riemannschen Kugel mit z.B. sphärischer Metrik (s. "Grundlagen"). Es werden drei Projekte angeboten:

- **Projekt 1: Iterierte Funktionensysteme (IFS), Kapitel 2.2.**

  1. Suche nach den Attraktoren eines hyperbolischen IFS auf $\mathbb{R}^2$.

  2. Approximation eines Bilds (kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$) mit Hilfe des Collage-Satzes, durch geeignete Wahl der affinen Transformationen eines hyperbolischen IFS.

  Ziel: Erzeugung virtueller Landschaften, Modellierung mit Hilfe der Iterationen der (affinen) Transformationen.

  Am Ende wird eine Verbindung zu den Projekten 2 und 3 hergestellt.

- **Projekt 2: Julia-Mengen, Kapitel 2.3.**

  Erzeugung der Julia-Mengen der rationalen Funktionen vom Grad 1, 2 und 3.
  Ziel: Entdeckung und Veranschaulichung der Eigenschaften der Julia-Mengen als Beispiele für Fraktale durch Computer-Experimente.

  Am Ende wird eine Verbindung zu den Projekten 1 und 3 hergestellt.

- **Projekt 3: Das Newton-Verfahren, Unterkapitel 2.3.1.**

  Das Newton-Verfahren für komplexe Polynome des Grads 2, 3 und 4.
  Ziel: Suche nach den Nullstellen eines komplexen Polynoms.

  Am Ende wird eine Verbindung zu den Projekten 1 und 2 hergestellt.

Vorkenntnisse.

Analysis I und II, Funktionentheorie, Lineare Algebra I.

Literaturverzeichnis

[Barnsley]: Michael Barnsley, "Fractals Everywhere". Academic Press, Boston (1988).

[Beardon]: Alan F. Beardon, "Iterations of Rational Functions". Grad. Texts Math. 132, Springer Verlag.

[Peitgen]: Heinz O. Peitgen, Peter H. Richter, "The Beauty of Fractals". Springer Verlag (1986).

2 Beschreibung der Projekte

2.1 Grundlagen

- **Die Riemannsche Kugel**

Sei $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $i = \sqrt{-1}$, und sei ∞ ein Punkt, der nicht in $\mathbb{C}$ liegt. Bezeichne die Vereinigung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $\mathbb{C}_\infty$. Ausserdem sei S die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, mit dem Nordpol $\zeta = (0, 0, 1)$. Dann ist die Abbildung $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow S$ mit $\pi(x, y) = (\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$ wohldefiniert. Diese Abbildung ist bekannt als die **stereographische Projektion** von $\mathbb{C}$ in S. Definieren wir $\pi(\infty) = \zeta$, erhalten wir eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{C}_\infty$ und S.

Mit Hilfe dieser bijektiven Abbildung machen wir nun einen metrischen Raum aus $\mathbb{C}_\infty$: Ein möglicher Kandidat kann durch

$$\sigma(z, w) = ||\pi(z) - \pi(w)||, \ \forall z, w \in \mathbb{C},$$

definiert werden, wobei $||.||$ der euklidische Abstand auf $\mathbb{R}^3$ darstellt:

$$||(x, y, z) - (x', y', z')|| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Da $\mathbb{C}$ äquivalent zu $\mathbb{R}^2$ ist, gilt also:

$$\sigma(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)}\sqrt{(1+|w|^2)}},$$

wobei $|.|$ die euklidische Metrik diesmal auf $\mathbb{R}^2$ ist:

$$|(x,y)-(x',y')| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

Für $z=\infty$ definiere:

$$\sigma(\infty,w) = \lim_{z\to\infty}\sigma(z,w) = \frac{2}{\sqrt{(1+|w|^2)}}.$$

Die Abbildung $\sigma : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert nun eine Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$. Geometrisch gesehen ist $\sigma(z,w)$ die Länge der Strecke in $\mathbb{R}^3$, die $\pi(z)$ und $\pi(w)$ miteinander verbindet. Bezeichnen wir die Länge der kürzesten Kurve auf S zwischen $\pi(z)$ und $\pi(w)$ mit $\chi(z,w)$, dann gilt:

$$\sigma(z,w) = 2\sin(\frac{\chi(z,w)}{2}), \quad \forall z,w \in \mathbb{C}_\infty.$$

Die Abbildung $\chi : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine weitere Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$, die **sphärische Metrik** auf $\mathbb{C}_\infty$ genannt wird und äquivalent zu σ ist. Daher induzieren χ und σ dieselbe Topologie auf $\mathbb{C}_\infty$. Die Menge $\mathbb{C}_\infty$ zusammen mit dieser Topologie wird die Riemannsche Kugel genannt.

Von nun ab wird $\mathbb{C}_\infty$ immer ausgerüstet mit der Metrik χ angenommen. Da die Riemannsche Kugel eine kompakte Menge ist (sie ist homöomorch zu S), ist der metrische Raum $\mathbb{C}_\infty$ ein vollständiger Raum (d.h. jede Cauchy-Folge mit Elementen aus $\mathbb{C}_\infty$ konvergiert gegen ein Element in $\mathbb{C}_\infty$.). ([Beardon])

- **Funktionen auf der Riemannschen Kugel**

Ein "komplexes Polynom" $P : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ ist eine Abbildung definiert durch $P(z) = a_0(z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_n)$ mit $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Im Fall der Existenz heißen die komplexen Zahlen $a_1, \cdots, a_n$ die Nullstellen vom Polynom P. Die Zahl n heißt der Grad von P.

Eine "rationale Funktion" $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ ist eine Abbildung der Form $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, indem $P(z) = a_0(z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_n)$ und $Q(z) = b_0(z - b_1)(z - b_2)\cdots(z - b_m)$ komplexe Polynome sind, so dass $a_i \neq b_j$ für alle $i = 1, 2, \cdots, n$ und $j = 1, 2, \cdots, m$. Die Zahl $d = \max\{m, n\}$ heißt der Grad von f. ([Beardon])

- **Die Hausdorffsche Metrik**

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum (z.B. $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$, $(\mathbb{R}^2, |.|)$ oder $(\mathbb{R}^3, ||.||)$). Bezeichne mit $\mathcal{H}(X)$ die Menge der nicht leeren kompakten Teilmengen von X.

Definition 1. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $x \in X$ und $B \in \mathcal{H}(X)$. Definiere den Abstand des Punktes x zur Menge B, $d(x, B)$, durch*

$$d(x, B) := \min\{d(x, y) \mid y \in B\}.$$

Definition 2. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und seien A, B in $\mathcal{H}(X)$. Der Abstand der Menge A zur Menge B, $d(A, B)$, wird definiert durch*

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) \mid x \in A\}.$$

Definition 3 (Die Hausdorffsche Metrik). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann wird der Hausdorff-Abstand zwischen Punkten A und B aus $\mathcal{H}(X)$ definiert durch*

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Wenn (X, d) ein vollständiger metrischer Raum ist, ist der Raum $(\mathcal{H}(X), h)$ auch ein vollständiger metrischer Raum. (Beweis: [Barnsley]).

Unsere **Fraktale** sind dann spezielle Punkte des Raums $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), h)$ bzw. $(\mathcal{H}(\mathbb{C}_\infty), h')$, wobei h und h' die entsprechenden Hausdorffschen Metriken auf $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{H}(\mathbb{C}_\infty)$ sind, und $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Iterierte Funktionensysteme (IFS): Projekt 1

Ein iteriertes Funktionensystem ist eine Kollektion von Kontraktionen definiert auf einem metrischen Raum. Ein Fraktal wird durch mehrmale Anwendung (Iterationen) dieser Kontraktionen auf einem Anfangsbild erzeugt, das hier ein Polygon genommen wird. Die Endform des Fraktals ist unabhähgig von dem Anfangsbild: Die Parameter der Kontraktionen, die hier affin genommen werden, bestimmen die Endform des entsp. Fraktals. Wir machen jetzt diese Begriffe präziser:

Definition 4. *Sei* $f : (X,d) \longrightarrow (X,d)$ *eine Abbildung auf einem metrischen Raum* (X,d)*. Die Vorwärtsiterationen von* f *sind die Abbildungen* $f^n : (X,d) \longrightarrow (X,d)$*, die durch* $f^0(x) = x$*,* $f^1(x) = f(x)$*,* $f^{(n+1)}(x) = f \circ f^n(x) = f(f^n(x))$ *für* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *definiert werden. Wenn* f *invertierbar ist, werden die Abbildungen* $f^{(-n)} : (X,d) \longrightarrow (X,d)$ *definiert durch* $f^{-n}(x) = (f^n)^{-1}(x)$ *die Rückwärtsiterationen von* f *genannt, wobei* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definition 5. *Eine Abbildung* $f : X \longrightarrow X$ *auf einem metrischen Raum* (X,d) *heißt eine Kontraktion, wenn es eine Konstante* $0 \leq s < 1$ *gibt, so dass*

$$d(f(x), f(y)) \leq s.d(x,y), \quad \forall x, y \in X.$$

Die Zahl s hießt die Kontraktionsfaktor für f.

Aus der Analysis kennen wir den "Kontraktionssatz" bekannt auch als "Banachschen Fixpunktsatz":

Satz 1 (Kontraktionssatz). *Sei $f : X \longrightarrow X$ eine Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum (X, d). Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $x_f \in X$ (Fixpunkt: $f(x_f) = x_f$). Darüber hinaus konvergiert die Folge $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ für jeden Punkt $x \in X$ gegen x_f:*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_f.$$

([Barnsley])

Offenbar ist jede Kontraktion $f : X \longrightarrow X$ auf dem metrischen Raum (X, d) stetig. Wie aus der Analysis bekannt, bildet eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow X$ kompakte Mengen auf kompakte Mengen. Daher definiert jede Kontraktion f auf dem vollständigen metrischen Raum (X, d) eine Abbildung von $\mathcal{H}(X)$ in sich, die wir auch mit f bezeichnen:

$$f : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X) \text{ mit } f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Satz 2. *Sei $f : X \longrightarrow X$ eine Kontraktion auf dem (vollständigen) metrischen Raum (X, d) mit Kontraktionsfaktor s. Dann ist die Abbildung $f : \mathcal{H}(X) \longrightarrow$*

$\mathcal{H}(X)$ *definiert oben eine Kontraktion auf* $(\mathcal{H}(X), h)$ *mit demselben Kontraktionsfaktor* s*. Die Metrik* h *ist die Hausdorffsche Metrik auf* $\mathcal{H}(X)$ *bezüglich der ursprünglichen Metrik* d *auf* X*. ([Barnsley])*

Folgender Satz ist eine einfache Folge vom Satz 2:

Satz 3. *Sei* (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum. Sei* $\{f_n \mid n = 1, 2, \cdots, N\}$ *eine endliche Menge von Kontraktionen* f_n *mit jeweiligen Kontraktionsfaktoren* s_n *auf* $(\mathcal{H}(X), h)$*. Definiere* $F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ *durch*

$$F(B) = f_1(B) \cup f_2(B) \cup \cdots \cup f_N(B) = \bigcup_{n=1}^{N} f_n(B),$$

für alle $B \in \mathcal{H}(X)$*. Dann ist* F *eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor* $s = \max\{s_n \mid n = 1, 2, \cdots, N\}$*. Daher hat* F *einen Fixpunkt in* $\mathcal{H}(X)$*. ([Barnsley])*

Definition 6. *Ein* **hyperbolisches Iteriertes Funktionensystem***, abgekürzt durch* **IFS***, besteht aus einem vollständigen metrischen Raum* (X, d)*, zusammen mit einer endlichen Menge von Kontraktionen* $f_n : X \longrightarrow X$ *mit jeweiligen Kontraktionsfaktoren* s_n *für* $n = 1, 2, \cdots, N$*. Das "Iterierte Funktionensystem" wird mit* $\{X\ ; f_n,\ n = 1, 2, \cdots, N\}$ *bezeichnet. Sein Kontraktionsfaktor ist dann* $s = \max\{s_n \mid n = 1, 2, \cdots, N\}$*.*

Definition 7. *Der Fixpunkt von F, der im Satz 3 beschrieben wird, heißt der Attraktor vom entsprechenden IFS.*

Der Attraktor von F definiert oben ist eine kompakte Teilmenge von X, die unter Vorwärtsiterationen von F invariant bleibt. Daher bietet der Attraktor eines hyperbolischen IFS ein klassisches Beispiel für Fraktale.

Auf der Suche nach Fraktalen beginnen wir also mit den einfachsten Kontraktionen auf $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik $|.|$, den sogenannten kontrahierenden affinen Transformationen:

Definition 8. *Eine affine Transformation auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch*

$$f(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Eine affine Transformation f wie oben kann auch in einer Matrix-Form umgeschrieben werden:

$$f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} =$$

$Ax + t$, wobei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle 2×2-

Matrix ist, und $t = (e, f) = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ mit $e, f \in \mathbb{R}^2$ der Spaltenvektor ist.

Die Matrix A kann immer in der Form $A = \begin{pmatrix} r_1 \cos\theta_1 & -r_2 \sin\theta_2 \\ r_1 \sin\theta_1 & r_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$ geschrieben werden, wobei (r_1, θ_1) die Polarkoordinaten vom Punkt (a, c) und $(r_2, \theta_2 + \frac{\pi}{2})$ die Polarkoordinaten vom Punkt (b, d) darstellen.

Ein einfaches Beispiel für ein IFS mit affinen Kontraktionen auf $\mathbb{R}$ ist $\{\mathbb{R}\,; f_1(x) = 0,\ f_2(x) = \frac{2}{3}x+1\}$. Sein Attraktor besteht aus einer Folge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ reeller Zahlen vereinigt mit der Menge $\{0\}$, so dass $x_n = 1 - (\frac{2}{3})^n$.

Schließlich wird der "Collage-Satz" erwähnt, mit dessen Hilfe ein IFS entworfen werden kann, so dass sein Attraktor nahe an einer vorgegebenen (kompakten) Menge liegt:

Satz 4 (Collage-Staz). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $T \in \mathcal{H}(X)$ gegeben, und sei $\{X\ ; f_1, f_2, \cdots, f_N\}$ ein IFS mit Kontraktionsfaktor $0 \leq s < 1$ und Attraktor A. In der Hausdorffschen Metrik h gilt dann:*

$$h(T, A) \leq (1-s)^{-1}.h\left(T, \bigcup_{n=1}^{N} f_n(t)\right) \textit{ für alle}$$

$T \in \mathcal{H}(X)$.

([Barnsley])

Zusammenfassung.

IFS sind Kollektionen von endlich vielen (oft affinen) Kontraktinen auf einem metrischen Raum (in unserem Fall: $\mathbb{R}^2$). Die Attraktoren von solchen IFS sind Beispiele von Fraktalen. Nach Satz 3, um diese Attraktoren auf dem Computer zu veranschaulichen, wird eine beliebige Anfangsmenge (normalerweise ein Polygon) in $\mathbb{R}^2$ genommen, worauf die Transformationen n-mal angewendet werden (Iterationen der Abbildung W in Satz 3). Dieser Prozess produziert eine Approximation von dem Attraktor des IFS. Nach dem Collage-Satz kann das IFS so ausgewählt werden, dass sein Attraktor und dessen Approximation in der Nähe eines vogegebenen Bilds liegen.

2.3 Julia-Mengen: Projekte 2 und 3

Sei $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine rationale Funktion. Bezeichne (wie im Unterkapitel 2.2) $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-mal}(a)$ mit $f^n(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei a ein Punkt in $\mathbb{C}_\infty$ mit der Eigenschaft, dass $f^k(a) = a$ und $f^j(a) \neq a$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq k-1$. Dann heißt a ein **periodischer Punkt** der Periode k für f. Die Menge $Z(a) := \{a, f(a), f^2(a), \cdots, f^{k-1}(a)\}$ heißt ein **Zykel** der Länge k für f.

Die Natur von $Z(a)$ wird durch die Ableitung $(f^k)'(x) = \frac{d(f^k)(x)}{dx} \in \mathbb{C}_\infty$ von f^k im Punkt $x \in Z(a)$ bestimmt (in der Nähe des Punkts ∞ wird wie üblich zuerst die Transformation $w = \frac{1}{z}$ angewendet):

Definition 9. *Sei a ein periodischer Punkt der Periode k für die rationale Funktion f, und sei $Z(a)$ sein Zykel.*

1. *$Z(a)$ heißt ein superattraktiver Zykel (ein* **Superattraktor***) für f genau dann, wenn $(f^k)'(a) = 0$.*

2. *$Z(a)$ heißt ein attraktiver Zykel (ein* **Attraktor***) für f genau dann, wenn $0 < |(f^k)'(a)| < 1$.*

3. *$Z(a)$ heißt ein repulsiver Zykel (ein* **Repeller***) für f genau dann, wenn $|(f^k)'(a)| > 1$.*

4. *$Z(a)$ hießt ein indifferenter Zykel für f genau dann, wenn $|(f^k)'(a)| = 1$.*

Schließlich ist der Begriff vom Bassin (oder Attraktionsgebiet) sehr wichtig:

Definition 10. *Sei a ein periodischer Punkt der Periode k für die rationale Funktion f. Das* **Bassin** *von a (oder vom Zykel $Z(a)$) ist die Menge $A(a)$ aller Punkte $x \in \mathbb{C}_\infty$, für die $f^{nk}(x)$ mit $n \to \infty$ gegen a strebt. Das unmittelbare Bassin von a ist diejenige Zusammenhangskomponente $A^*(a)$ von $A(a)$, die a enthält. Das Bassin von a (oder vom Zykel $Z(a)$) ist dann die Vereinigung aller unmittelbaren Bassins der Elemente des Zykels $Z(a)$.*

Definition 11. *Die* **Julia-Menge** *$J(f)$ der rationalen Funktion $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ vom Grad größer 1 ist der Abschluss der Menge aller repulsiven periodischen Punkte von f.*

Eigenschaften der Julia-Menge ([Beardon], [Peitgen])

Sie $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine rationale Funktion vom Grad größer 1. Dann gilt ([Barnsley], [Beardon])

1. $J(f)$ ist kompakt und nicht leer, d.h. $J(f) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_\infty)$.

2. $f[J(f)] = J(f) = f^{-1}[J(f)]$.

3. Die Julia-Mengen von f und f^n, $n \in \mathbb{N}$, sind gleich.

4. Sei $x \in J(f)$. Dann ist die Menge $\{y \in \mathbb{C}_\infty \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } y = f^{-n}(x)\}$ dicht in $J(f)$.

5. Sei V eine offene Menge in $\mathbb{C}_\infty$ mit $J(f) \cap V \neq \emptyset$. Dann gibt es eine natürliche Zahl m mit $f^m[J(f) \cap V] = J(f)$.

6. Sei a ein Attraktor von f. Dann gilt: $A(a) \subset (\mathbb{C}_\infty \setminus J(f)$ und $\partial A(a) = J(f)$, wobei ∂V der Rand der Teilmenge $V \subset \mathbb{C}_\infty$ ist.

7. Wenn f ein komplexes Polynom ist, gilt $J(f) \cap \{\infty\} = \emptyset$. Die Julia-Menge $J(f)$ ist in diesem Fall der Rand der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \{|f^n(z)|\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \text{ ist beschränkt. }\}$.

Die Definition der Julia-Menge zusammen mit den Eigenschaften 1, 2, 3 und 4 bilden den theoretischen Hintergrund zur Erzeugung der Approximationen der Julia-Menge einer gegebenen Abbildung auf dem Bildschirm eines Computers. Eine mögliche Strategie könnte so lauten: Sei $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine gegebene rationale Funktion. Finde zuerst einen Repeller von f. Nach der Definition liegt der Repeller in der Julia-Menge der Funktion. Bilde dann die Menge $T = \{y \in \mathbb{C}_\infty \mid \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ mit } y = f^{-n}(x) \ \}$, wobei $f^0(x) = x$ (Erinnerung: $f^{-n}(x) = (f^n)^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{C}_\infty \mid f^n(y) = x\}, \ \forall x \in \mathbb{C}_\infty$). Aber vorsicht! Erstens kann ein Repeller von f eine Vereinigung endlich vieler Punkte in $\mathbb{C}_\infty$ sein. Zweitens sind die rationalen Funktionen im allgemeinen nicht invertierbar. Daher hat ein Punkt $x \in \mathbb{C}_\infty$ verschidene Urbilder unter f bzw. f^n, $n \in \mathbb{N}$, deren Anzahl vom Grad der Funktion f bzw. f^n abhängig ist.

Die Menge T sollte nach der Eigenschaft 3 die Julia-Menge von f approximieren. Im Falle eines Polynoms $P : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ können bessere Strategien gefunden werden. Zum Beispiel könnten die Eigenschaften 5 und 6 in diesem Fall benutzt werden: Nehme an, dass P mindestens zwei unterschiedliche Attraktoren, z.B. $a, \ b$ hat. Wähle ein Quader U auf dem Bildschirm als ein Gebiet in $\mathbb{C}_\infty$, wo $J(P)$ erzeugt werden sollte. Falls B eine offene Menge in diesem Quader wäre mit $B \cap J(P) \neq \emptyset$, dann sollte B Punkte von den beiden Bassins $A(a)$ und $A(b)$ enthalten. Also finde zunächst eine offene Teilmenge mit dieser Eigenschaft in U und nutzte dann die Eigenschaft 5. Die Bassins werden nach deren Definition durch folgende Eigenschaft bestimmt:

> Sei $\varepsilon > 0$ eine ausreichend kleine reelle Zahl und sei x ein Punkt in U. Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $|P^k(x) - a| < \varepsilon$, dann gehört x in $A(a)$. Wenn es kein $k \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft gibt, dann liegt x nicht in $A(a)$. Natürlich ist die letzte Aussage abhängig von der Resolution des Rechners!

Nach der Eigenschaft 3 sind die Julia-Mengen von P und P^n für jedes natürliche n gleich. Das erleichtert die Suche nach mindestens zwei unterschiedlichen Attraktoren von P: Wenn a ein Attraktor der Periode $m > 1$ von P ist, bilden die (unterschiedlichen) Punkte $P^k(a),\ k = 0, 1, \cdots, m-1$ attraktive Fixpunkte (Fixpunkt: Ein Attraktor der Periode 1) für P^m! Also können wir den o.g. Prozess diesmal mit P^m laufen lassen. ([Barnsley)]

2.3.1 Das Newton-Verfahren: Projekt 2 und 3

In diesem Unterkapitel des Kapitels 2.3 begrenzen wir uns auf bestimmte rationale Funktionen und deren Julia-Mengen und Fixpunkte, um die Anwendung der Begriffe des Kapitels 2.3 in anderen Bereichen der Mathematik vorzustellen. ([Barnsley], [Beardon], [Peitgen])

Sei $P : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ ein Polynom vom Grad $m > 1$. Eine Nullstelle von P ist eine Zahl $z^* \in \mathbb{C}$, so dass $P(z^*) = 0$. Die Anzahl der Nullstellen ist gleich dem Grad von P. Das Newton-Verfahren gibt uns eine Möglichkeit, diese Nullstellen zu berechnen:

Definiere zuerst eine Abbildung

$$N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$$

bekannt als zur Funktion P gehörende Newton-Transformation. Jede Nullstelle z^* von $P(z)$ ist ein Fixpunkt von der rationalen Funktion $N_P(z)$. Andererseits ist jeder Fixpunkt z^* von $N_P(z)$ mit $P'(z^*) \neq 0$ eine Nullstelle von P. Die Erwartung besteht darin, dass die Folge $\{N_P^n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, die von einem geeigneten Anfangswert $z_0 \in \mathbb{C}$ aus startet, gegen eine Nullstelle von $P(z)$ konvergieren wird. Also müßten zuerst die Bassins der Fixpunkte der rationalen Funktion N_P bestimmt werden. Falls z_0 im Bassin von (d.h. nahe genug bei) z^*, $P'(z^*) \neq 0$, gewählt wird, , so läßt sich schnell zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} N_P^n(z_0) = z^*$. Die Punkte der Julia-Menge der Funktion N_P werden dafür niemals gegen einen Fixpunkt von N_P konvergieren und daher sind die schlimmsten Anfagswerte.

Am Ende sollte darauf geachtet werden, dass die zu einem Polynom gehörende Newton-Transformation einen oder mehrere Attraktoren besitzen kann, deren Perioden größer als 1 sind. Diese brauchen nicht im direkten Zusammenhang mit den Nullstellen des Polynoms zu stehen.