1.Übung

Differentialgleichungen WS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Zeigen Sie das die Funktion $y(x) = A\cos(\alpha\, x) + B\sin(\alpha\, x)$ für beliebige Konstanten A, B, $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + \alpha^2 y = 0$ ist.

2. Welche Differentialgleichung erfüllt die Funktion $y(t) = A\,e^{2t} + B\,e^{t} + C$? Hier sind A, B, $C \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten.

3. Sei$f(t,\, u,\, u') = 2t - 3 + 3u' - 2u$. Zeigen Sie das $u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + t$ eine allgemeine Lösung von $u'' = f(t,\, u,\, u')$ ist. Bestimmen Sie die spezielle Lösung für die $u(0) = u(1) = 0$ gilt.

4. Schreiben Sie das folgende System dritter Ordnung in der Form $\dot{x}(t) = A\,x(t)$:

$$y''' + 2y' + y - 3z' + z = 0$$
$$2z''' + z'' - 4y'' + 2z + 6y = 0.$$

5. Bringen Sie die folgende skalare inhomogene Differentialgleichung N-ter Ordung

$$y^{(N)}(t) + \sum_{n=0}^{N-1} a_n(t) y^{(n)}(t) = f(t), \quad a_n \in \mathbb{R}\,,$$

in die Form $\dot{u}(t) = A(t)\,u(t) + b(t)$ eines Systems 1. Ordnung.

6. (a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval und $y_1,\, \ldots,\, y_M : I \to \mathbb{C}^N$ Funktionen. Was ist damit gemeint, das diese Funktionen *linear unabhängig* sind?

Zeigen Sie, das wenn für ein $t_0 \in I$ die Vektoren $y_1(t_0),\, \ldots,\, y_M(t_0) \in \mathbb{C}^N$ linear unabhängig sind, dann sind $y_1, ..., y_M$ linear unabhängige Funktionen auf I.

(b) Schliessen Sie hieraus, das wenn $v_1,\, \ldots,\, v_M \in \mathbb{C}^N$ linear unabhängige Vektoren sind, und $\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_M \in \mathbb{C}$, dann sind die Funktionen $y_n : t \mapsto e^{\lambda_n t} v_n$ für $n = 1,\, \ldots,\, M$ linear unabhängig.

7. Entscheiden Sie im Folgenden, ob die Funktionen (auf $\mathbb{R}$) linear unabhängig sind.

(i) $y_1 : t \mapsto \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad y_2 : t \mapsto \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$

(ii) $f_1 : t \mapsto \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad f_2 : t \mapsto \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}, \quad f_3 : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$

(iii) $g_1 : t \mapsto \sin 3t, \quad g_2 : t \mapsto -\sin t, \quad g_3 : t \mapsto \cos 2t \sin t.$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen am Donnerstag, den 21.09.06 in der Übung ein.