10. Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Finde die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 7\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{für } x \in (0,\,\pi),\ t > 0\,, \\ &u(0,\,t) = u(\pi,\,t) = 0 \qquad \text{für } t > 0\,, \\ &u(x,\,0) = 3\sin(2x) - 6\sin(5x) \qquad \text{für } x \in (0,\,\pi). \end{aligned}$$

2. Löse die folgende Gleichung für eine schwingende Saite:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{für } x \in (0,\,\pi),\ t > 0\,, \\ &u(0,\,t) = u(\pi,\,t) = 0 \qquad \text{für } t \geq 0\,, \\ &u(x,\,0) = \sin(3x) - 4\sin(10x) \qquad \text{für } x \in [0,\,\pi]\,, \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,\,0)} = 2\sin(4x) + \sin(6x) \qquad \text{für } x \in [0,\,\pi]\,. \end{aligned}$$

3. Werte die folgenden Integrale aus, wobei $T > 0$ und $m,\, n \in \mathbb{Z}$.

(a)

$$\int_{-T}^{T} \sin(\tfrac{m\pi x}{T})\, \cos(\tfrac{n\pi x}{T})\, dx\,,$$

(b)

$$\int_{-T}^{T} \sin(\tfrac{m\pi x}{T})\, \sin(\tfrac{n\pi x}{T})\, dx\,,$$

(c)

$$\int_{-T}^{T} \cos(\tfrac{m\pi x}{T})\, \cos(\tfrac{n\pi x}{T})\, dx\,.$$

4. (i) Benutze die Euler'sche Formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ um zu zeigen dass

$$\cos(nx) = \tfrac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \qquad \sin(nx) = \tfrac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}).$$

(ii) Zeige das für die Fourierreihe gilt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right)$$

wobei $\quad c_0 = \dfrac{a_0}{2},\ c_n = \dfrac{1}{2}(a_n - ib_n),\ c_{-n} = \dfrac{1}{2}(a_n + ib_n)\,.$

(iii) Zeige das wenn eine Funktion $f(x)$ eine Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ für $x \in (-\pi,\,\pi)$ besitzt, dass dann

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 23.11.06 in der Übung ein.