13. Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Betrachte die folgende modifizierte Wellengleichung für $u(x,\,t):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$u_{tt}-\sum_{j=1}^{n}c_j^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=0\,, \tag{1}$$

wobei $c_1,\,\dots,\,c_n\in\mathbb{R}$ Konstanten sind. Sei $\alpha\in\mathbb{R}^n$ mit $\|\alpha\|=1$ und $F\in C^0(\mathbb{R})$ beliebig und definiere

$$v(x,\,t)=F(\alpha\cdot x-\mu t).$$

Zeige das v eine Lösung von (1) ist falls gilt dass

$$\mu^2=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2c_j^2.$$

2. Benutze die Formel von d'Alembert um zu zeigen, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\,u_{xx}=0 & x\in\mathbb{R},\,t>0\\ u(x,\,0)=f(x) & x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,\,0)=g(x) & x\in\mathbb{R}\end{cases} \tag{2}$$

die Lösung $u(x,\,t)$ besitzt mit

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+at)+f(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)\,ds.$$

Benutze dies um die Lösung für das Anfangswertproblem (2) mit $a=2$, $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=1$ zu bestimmen.

3. Zeige dass $u(x,\,y,\,t)$ gegeben durch

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_{mn}\cos\left(\sqrt{m^2/L^2+n^2/W^2}\,a\pi t\right)+b_{mn}\sin\left(\sqrt{m^2/L^2+n^2/W^2}\,a\pi t\right)\right\}\sin\left(\tfrac{m\pi x}{L}\right)\,\sin\left(\tfrac{n\pi y}{W}\right)\,,$$

wobei die Konstanten a_{mn} und b_{mn} bestimmt sind durch die Fourierreihen

$$f(x,\,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\left(\tfrac{m\pi x}{L}\right)\,\sin\left(\tfrac{n\pi y}{W}\right)\,,$$

$$g(x,\,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a\pi\sqrt{\tfrac{m^2}{L^2}+\tfrac{n^2}{W^2}}\,b_{mn}\sin\left(\tfrac{m\pi x}{L}\right)\,\sin\left(\tfrac{n\pi y}{W}\right)\,,$$

eine formale Lösung des Anfangswertproblems ist

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\,\Delta u=0 & (x,\,y)\in(0,\,L)\times(0,\,W),\,t>0\\ u(0,\,y,\,t)=u(L,\,y,\,t)=0 & y\in(0,\,W),\,t>0\\ u(x,\,0,\,t)=u(x,\,W,\,t)=0 & x\in(0,\,L),\,t>0\\ u(x,\,y,\,0)=f(x,\,y) & (x,\,y)\in(0,\,L)\times(0,\,W)\\ u_t(x,\,y,\,0)=g(x,\,y) & (x,\,y)\in(0,\,L)\times(0,\,W)\,.\end{cases}$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 14.12.06 in der Übung ein.