2.Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Eine Bakterienkolonie wächst proportional zur Anzahl Ihrer Einwohnerinnen, und verdoppelt sich alle 50 Stunden. Nach wievielen Stunden haben sie sich verdreifacht?

2. Laut Newton's Kühlungsgesetz kühlt eine Substanz in bewegter Luft mit einer Rate ab, die proportional zum Temperaturunterschied zwischen Substanz und Luft ist.

a. Sei

$$\begin{aligned} C &= \text{Lufttemperatur}, \\ T(t) &= \text{Temperatur der Substanz zur Zeit } t, \\ T_0 &= \text{Temperatur der Substanz zur Zeit } t = 0. \end{aligned}$$

Drücken Sie die Proportionalität mithilfe einer Konstanten $\kappa \in \mathbb{R}$ aus, und leiten Sie die zugehörige Differentialgleichung her.

b. Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

c. Eine Substanz kühlt in 15 Minuten von 100° auf 70° ab, wobei die Lufttemperatur 30° beträgt. Wie lange dauert es bis die Temperatur der Substanz 40° beträgt?

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heist $f : U \to \mathbb{R}^n$ *lokal Lipschitz-stetig* auf U, wenn für jedes $p \in U$ ein $L_p \geq 0$ und $\delta_p > 0$ existieren, sodass für alle $q \in B(p, \delta_p) \subset U$ gilt:

$$\|f(p) - f(q)\| \leq L_p \, \|p - q\|.$$

Beweisen Sie folgende

Proposition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig auf U.

4. Zeigen Sie dass $f(x) = x^2$ lokal Lipschitz-stetig auf jedem offenen Interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist, jedoch nicht gleichmässig Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$.

5. Finden Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des inhomogenen Anfangswertproblems

$$u'(t) = u(t) + t, \qquad u(0) = 1.$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 28.09.06 in der Übung ein.