7. Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Betrachte die lineare homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(\nabla u,\, u,\, x) = b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)\, u(x) = 0. \tag{1}$$

Zeige dass die Methode der Charakteristik auf die folgenden Gleichungen führt:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) &= b(x(s)), \\ \dot{z}(s) &= -c(x(s))\, z(s). \end{cases} \tag{2}$$

2. Benutze die Gleichungen (2) um das folgende Randwertproblem zu lösen:

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} &= u \text{ in } \; U := \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\}, \\ \qquad\qquad\quad u &= g \text{ auf } \; \Gamma := \{x_1 > 0,\, x_2 = 0\}. \end{cases} \tag{3}$$

[Hinweis: Die PDE in (3) ist von der Form (1) mit $b(x_1,\, x_2) = (-x_2,\, x_1)$ und $c = -1$.]

3. Sei O eine orthogonale $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und definiere

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ox + b.$$

Zeige: Wenn $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, dann auch die Komposition $v \circ T$.

4. Löse mit Hilfe der Methode der Charakteristik die inhomogene Transportgleichung.

5. Seien $u,\, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lösungen der Laplace Gleichung. Dann löst $w(x) := u(x)v(x)$ die Laplace Gleichung genau dann wenn $\nabla u \perp \nabla v$.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 02.11.06 in der Übung ein.