# 11. Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

**1.** Zeige das wenn $\Phi$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist, das dann die Funktion

$$u(x,\,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,\,t)\,g(y)\,d^n y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,\,t-s)\,f(y,\,s)\,d^n y\,ds$$

Lösung ist von

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\,\infty) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}\,. \end{cases} \tag{1}$$

**2.** Nimm an $u$ ist glatt und löst $\dot{u} - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\,\infty)$.

(i) Zeige das $u_\lambda(x,\,t) := u(\lambda x,\,\lambda^2 t)$ auch Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Benutze (i) um zu zeigen, dass $v(x,\,t) := x \cdot \nabla u + 2t\dot{u}$ auch Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

**3.** Fie **Faltung** zweier Funktionen $f,\,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$(f * g)\,(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,d^n y.$$

Zeige dass $(f * g) = (g * f)$ gilt.

**4.** Die **Fourier Transformierte** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is definiert durch

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot y} f(y)\,d^n y.$$

Zeige dass $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\,\hat{g}$ gilt.

**5.** Die **Laplace Transformierte** einer Funktion $f : (0,\,\infty) \to \mathbb{R}$ is definiert durch

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

Nimm an $u : (0,\,\infty) \to \mathbb{R}$ ist Lösung von (1) mit $f \equiv 0$ und $n = 1$. Zeige dass dann $v = \mathcal{L}(u)$ die Gleichung $-\Delta v + s\,v = g$ erfüllt.

---

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 30.11.06 in der Übung ein.