8. Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Seien $u_1,\, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u_j & = f \text{ in } \Omega, \\ u_j & = g_j \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeige: Wenn $g_1 \leq g_2$ auf $\partial\Omega$, dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\overline{\Omega}$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, und $B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \epsilon\}$. Zeige dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mu(B_\epsilon(x_0))} \int_{B_\epsilon(x_0)} f(y)\, d\mu(y) = f(x_0).$$

3. Beweisen Sie die zweite Green'sche Integralformel

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\ d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(u\tfrac{\partial v}{\partial n} - v\tfrac{\partial u}{\partial n}\right)\ dS.$$

4. Sind $u(x,\, y)$ und $v(x,\, y)$ Real-und Imaginärteil einer holomorphen Funktion, so zeige dass das Produkt $u\,v$ harmonisch ist.

5. Sei $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

(i) Zeigen Sie dass bezüglich der Zylinderkoordinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ und $z = z$

$$\Delta\, u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(ii) Zeigen Sie dass bezüglich der Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ und $z = r\cos\theta$

$$\Delta\, u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\right].$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 09.11.06 in der Übung ein.