12. Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Sei $H = -\Delta$ der Laplace-Operator und für $f \in C(\Omega)$ definiere

$$u(x,\,t) = e^{-t\,H} f.$$

(i) Zeige dass u eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = 0, \\ u(x,\,0) = f(x). \end{cases}$$

(ii) Zeige dass der Wärmeleitungskern $H_\Omega(x,\,y,\,t)$ der Integralkern des Operators e^{-tH} ist.

2. Bezeichne mit $H_\Omega(x,\,y,\,t)$ wieder den Wärmeleitungskern, und definiere

$$G(x,\,y,\,\lambda) = \int_0^\infty H_\Omega(x,\,y,\,t)\, e^{-\lambda\,t} dt.$$

Zeige dass dann für die Green'sche Funktion $G_\Omega(x,\,y)$ gilt:

$$\lim_{\lambda \to 0} G(x,\,y,\,\lambda) = G_\Omega(x,\,y).$$

3. Zeige das für den Wärmeleitungskern von $\mathbb{S}^1$ gilt das

$$H_{\mathbb{S}^1}(x,\,y,\,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x - y + n,\,t).$$

Hinweis: Benutze die Poisson'sche Summenformel: Für $f \in \mathcal{S}$ gilt dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}.$$

4. Zeige dass sich der Wärmeleitungskern auf dem Interval $[0,\,1]$ schreiben lässt als

$$H_{[0,\,1]}(x,\,y,\,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x - y + 2n,\,t) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi(x + y + 2n + 1,\,t).$$

5. Zeige dass für $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$ die Laplace-Transformierte gegeben ist durch

$$\hat{f}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 07.12.06 in der Übung ein.