9. Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und für $u \in C(\overline{\Omega})$ definiere

$$L(u) = \Delta\, u + b \cdot \nabla\, u$$

wobei $b = (b_1,\, b_2)$ mit $b_j \in C(\Omega)$. Zeige

(i) Wenn u die Gleichung $L(u) = f$ in Ω mit $f > 0$ erfüllt, dann nimmt u sein Maximum auf $\partial\Omega$ an.

(ii) Wenn u die Ungleichung $L(u) \geq 0$ in Ω erfüllt, und $u \leq M$ auf $\partial\Omega$, dann gilt $u \leq M$ in $\overline{\Omega}$.

2. Betrachte

$$\begin{cases} u' - \Delta u = \phi(x,\, t) & \text{in } \Omega \times (0,\, T) \\ u(x,\, 0) = F(x) & \text{in } \Omega \\ u(x,\, t) = f(x,\, t) & \text{in } \partial\Omega \times [0,\, T] \end{cases} \tag{1}$$

(i) Zeige dass wenn (1) eine steitige Lösung $u \in C(\overline{\Omega} \times [0,\, T])$ hat, dann ist diese Lösung eindeutig.

(ii) Seien u_j Lösungen von (1) mit Daten $\{\phi_j,\, F_j,\, f_j\}$ für $j = 1, 2$. Nimm an dass $\phi_1 \leq \phi_2$ in $\Omega \times (0,\, T)$, und $F_1 \leq F_2$ auf Ω, sowie $f_1 \leq f_2$ in $\partial\Omega \times [0,\, T]$. Zeige dass dann $u_1 \leq u_2$ in $\overline{\Omega} \times [0,\, T]$.

3. Zeige dass

$$u(x,\, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t|k|^2} e^{2\pi i(x-y)\cdot k} h(y)\, d^n k\, d^n y$$

eine Lösung des Randwertproblems

$$u' - \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times [0,\, T]$$
$$u(x,\, 0) = h \text{ auf } \mathbb{R}^n$$

ist. [Hinweis: Zeige zuerst dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\left| 2\pi i k \sqrt{t} + \tfrac{x-y}{2\sqrt{t}} \right|^2 \right) d^n k = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}$$

und benutze dann einen Satz aus der Vorlesung.] Definiere nun die Fouriertransformation von h durch

$$\hat{h}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot k} h(y) d^n y$$

und zeige dass

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot k} \hat{h}(k) d^n k.$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 16.11.06 in der Übung ein.