4. Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. Betrachte das homogene System

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter ist.

(i) Nimm an $a \neq 1$. Zeige dass A zwei linear unabhängige Eigenvektoren hat. Finde hiermit die allgemeine Lösung im Fall $a \neq 1$.

(ii) Nimm jetzt an $a = 1$. Zeige dass A dann nicht zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt. Merke dass das System Komponentenweise geschrieben werden kann

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

Nutzte dies aus, und nicht mittels verallgemeinerten Eigenvektoren, um die allgemeine Lösung zu finden.
(Hinweis: Löse die 1. Gleichung, substituiere in die 2. und löse diese mit Hilfe eines Integrierenden Faktors.)

2. Betrachte nochmals das System aus Frage 1 oben im Fall $a = 1$.
(i) Finde einen Eigenvektor v_1 und bestimme eine Lösung $x_1(t)$ des Systems.
(ii) Finde einen verallgemeinerten Eigenvektor v_2 der Ordnung 2. Verifiziere dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Zeige dass $x_2(t) = e^{-t}(tv_1 + v_2)$ auch eine Lösung des Systems ist. Verifiziere dass die Funktionen x_1 and x_2 linear unabhängig sind. Bestimme dann die allgemeine Lösung und prüfe ob dies mit der Antwort in Frage 1(ii) oben übereinstimmt.

3. Berechne Eigenwerte, Eigenvektoren und einen verallgemeinerten Eigenwert, und bestimme die Lösung des homogenen Systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Löse das inhomogene Anfangswertproblem:

$$\dot{x}_1(t) - 4x_1(t) - 2x_2(t) = 0, \quad x_1(0) = 0\,,$$
$$\dot{x}_2(t) + x_1(t) - x_2(t) = e^t, \quad x_2(0) = 0\,.$$

5. Betrachte das inhomogene Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b, \quad x(0) = \xi \in \mathbb{R}^N, \quad b \in \mathbb{R}^N.$$

Nimm an dass $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ invertierbar ist. Zeige mit der Variation der Parameter Formel, dass die eindeutige Lösung gegeben ist durch

$$x(t) = (\exp At)\xi + A^{-1}\left((\exp At) - I\right) b.$$

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 12.10.06 in der Übung ein.