3.Übung

Differentialgleichungen HS 2006
Martin Schmidt/Martin Kilian

1. In jedem der folgenden Fälle, finde die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\dot{x}(t) = A\,x(t)$:

$$\text{(i)}\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(ii)}\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(iii)}\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. *Reelle Lösungen eines reellen homogenen Systems.* In vielen Anwendungen hat die Matrix A in $\dot{x}(t) = Ax(t)$ reelle Einträge und man sucht reele Lösungen $x(t) \in \mathbb{R}^N$. Die Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ können natürlich komplex sein. Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und nehme an das $\lambda = \alpha + i\beta \in \operatorname{spec}(A)$ $(\beta \neq 0)$ ein komplexer Eigenwert ist mit zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^N$.

(i) Zeige $\lambda = \alpha + i\beta \in \operatorname{spec}(A) \;\Leftrightarrow\; \bar{\lambda} = \alpha - i\beta \in \operatorname{spec}(A)$.

(ii) Zeige das dann $\bar{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda} \in \operatorname{spec}(A)$ ist.

(iii) Verifiziere das $x_1(t) = e^{\lambda t}v \in \mathbb{C}^N$ und $x_2(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{v} \in \mathbb{C}^N$ linear unabhängige komplexe Lösungen der reellen homogenen Gleichung sind.

(iv) Merke das $x_2(t) = \overline{x_1(t)}$ für alle t, und zeige das

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(t) + x_2(t)\right) = \operatorname{Re} x_1(t) \in \mathbb{R}^N,$$
$$y_2(t) = \frac{1}{2i}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = \operatorname{Im} x_1(t) \in \mathbb{R}^N$$

linear unabhängige <u>reelle</u> Lösungen sind.

(v) Schreibe $v = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}^N$, und zeige das dann für die in (iv) definierten Funktionen $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)a - e^{\alpha t}\sin(\beta t)b$, und $y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)a + e^{\alpha t}\cos(\beta t)b$ gilt.

(vi) Finde die allgemeine reelle Lösung des Systems $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Verifiziere dass $A^2 = -I$ (und somit $A^3 = A^2A = -A$, $A^4 = A^2A^2 = I$, $A^5 = A^4A = A$, ... etc.). Schliesse dass $\exp At = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

4. Sei

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \qquad \text{Zeige dass} \qquad \exp At = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix}.$$

(ii) Seien A und B beliebige $N \times N$ Matrizen und B invertierbar. Zeige dass

$$\exp(B^{-1}ABt) = B^{-1}\exp(At)B \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

5. Seien A und B kommutierende $N \times N$ Matrizen also, $AB = BA$.

(i) Zeige dass $B(\exp(At)) = (\exp(At))B$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Definiere die Funktion $M : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ durch

$$M(t) = \exp((A+B)t)\,\exp(-At)\,\exp(-Bt).$$

Betrachte $M(0)$ und die Ableitung dM/dt von M. Zeige dass $M(t) = I$ for all $t \in R$. Im Fall $B = -A$, zeige dass $(\exp(At))^{-1} = \exp(-At)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und zeige somit dass

(1) $$\exp\left((A+B)t\right) = \exp(At)\,\exp(Bt) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

6. Betrachte die nicht-kommutiernden Matrizen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Zeige dass die Gleichung (1) in diesem Fall nicht gilt.

Bitte reichen Sie Ihre Lösung am 05.10.06 in der Übung ein.