AG Mannheim-Heidelberg WS 2006/2007

Deformationstheorie

Eine Deformation eines geometrischen Objektes ist eine Familie von Objekten, die über einem ausgezeichneten Punkt das gegebene Objekt enthält und natürliche Bedingungen erfüllt, die dafür sorgen, dass die Objekte dem gegebenen Objekt ähnlich sind. Die Basis der Familie ist ein Raumkeim, im besten Fall glatt, aber oft singulär, und oft bloss ein dicker Punkt, z.B. $Spec(\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$. Deformationstheorie untersucht solche Familien: infinitesimale, verselle, semiuniverselle, Existenz und Konstruktionen. Deformationstheorie ist ein weites und nicht abgeschlossenes Gebiet, sowohl in den Anwendungen als auch in den Techniken. Es gibt viele Zugänge zur Deformationstheorie, von zunehmender Allgemeinheit, aber auch zunehmend technischer.
In der Arbeitsgemeinschaft soll ein Reigen von klassischen und modernen Ergebnissen und Techniken besprochen werden. Die folgenden Themen sind klassisch und sollen auf jeden Fall behandelt werden:

- Deformationen kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten (nicht alle Beweise),
- Deformationen komplexer Raumkeime mit isolierten Singularitäten,
- Deformationen von kohärenten Garben,
- Funktoren auf Artinschen Ringen und Schlessingers Theorie formaler Deformationen.

Die folgenden Themen sind moderner. Eine Auswahl von ihnen kann/soll behandelt werden:

- Kotangentialkomplex,
- T^1-Hochhebungsssatz, Glattheit des Modulraums von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten, Mannigfaltigkeiten,
- differentiell graduierte Liealgebren und zugeordnete Deformationsfunktoren,
- L_∞-Morphismen und L_∞-Algebren, Formalitätssatz, Zusammenhang zur Deformationsquantisierung,
- der erweiterte Modulraum einer Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeit und seine Struktur als formaler Keim einer Frobeniusmannigfaltigkeit.

Zur Literatur: Außer den für die einzelnen Vorträge gegebenen Referenzen geben die Bücher/Übersichtsarbeiten [Ste03], [Art76], [dJP00], [dJPSvS98], [Man04], [BF] sowie [FKK$^+$75], [FKK$^+$76], [FKK$^+$78] einen mehr oder weniger umfassenden Eindruck über verschiedene Deformationsprobleme und allgemeine anwendbare Techniken.

Die folgende Liste von Themen und Referenzen ist ein Vorschlag, mit dem wir flexibel umgehen können: die Reihenfolge, die genaue Themenauswahl und die Referenz können gemäss den Wünschen der Vortragenden abgeändert werden.
Die Vorträge 1 und 2 und auch 4 sind auch für Teilnehmer mit wenig Vorkenntnissen gut geeignet.
Vortragsinteressenten wenden sich bitte an Claus Hertling (hertling@math.uni-mannheim.de) oder Christian Sevenheck (sevenheck@math.uni-mannheim.de).

1. **Kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten I (1-2 Vorträge):**

   Ein Zugang zur Deformation einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X: ein $\Phi \in \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{T}_X)$ definiert eine Deformation der komplexen Struktur. Die neue fastkomplexe Struktur ist integrabel, falls die Maurer-Cartan-Gleichung $\overline{\partial}\Phi + [\Phi, \Phi] = 0$ erfüllt ist. Das führt zu infinitesimalen Deformationen und $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ (via Dolbeault-Kohomologie). Obstruktionen liegen in in $H^2(X, \mathcal{T}_X)$, z.B. [Huy05, 6.1, Seiten 256–261].
   Ein anderer Zugang: $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ via Cech-Kohomologie gewinnen und die Mannigfaltigkeit via Verkleben von Karten. Referenzen: z.B. [Ste03, Kap. 7, Seiten 55–57] oder [dJPSvS98, Kap. 12].
   Am Ende sollten die klassischen Sätze von Kodaira–Nirenberg–Spencer (1958) und Kuranishi (1962) zitiert werden, z.B. [Huy05, Kap. 6.2, Seiten 272–273].

2. **Singularitäten I (1-2 Vorträge):**

   Die Begriffe flache Deformation eines Raumkeimes, induzierte Deformation, verselle Deformation und semiuniverselle Deformation sollen definiert und diskutiert werden, und auch verschiedene Flachheitsbedingungen ($-\otimes_R$ linksexakt, Liftbarkeit von Relationen, im Fall $\mathcal{O}_{X,0} = \mathbb{C}\{s\}$ Nullteilerfreiheit). Beispiele. Der Normalenmodul $N_{X,0}$ klassifiziert eingebettet flache Deformationen über $Spec(\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$. Der Raum $T^1_{X,0} := N_{X,0}/\mathrm{Bild}(\Theta)$ klassifiziert ihre Isomorphieklassen. Referenzen: z.B. [dJPSvS98, Kap. 7 und Kap. 10 erste Hälfte] und Auszug aus [dJP00, Kap. 10.2, Seiten 346–353] oder auch, relativ ausführlich gehalten, [Eis95, Exercise 16.8].
   Evtl. kann man auch den Obstruktionsraum $T^2_{X,0}$ diskutieren, z.B. [dJPSvS98, Kap. 10 zweite Hälfte] und Auszug aus [dJP00, Kap. 103, Seiten 359-362].
   Am Ende sollte Grauerts Satz zur Existenz einer semiuniversellen Deformation (1972) formuliert werden (vgl. 4. Vortrag).

3. **Funktoren auf Artinschen Ringen und Schlessingers Theorie (2 Vorträge):**

   Die Begriffe gefaserte bzw. ko-gefaserte Kategorie sollen definiert und diskutiert und durch Beispiele illustriert werden, ebenso Schlessingers Bedingungen (H1), (H2) und (H3). Bewiesen werden sollen Schlessingers Theorem zur Existenz einer Hülle und das Theorem, dass (H1) und (H2) beim Deformationsfunktor einer Singularität erfüllt sind. Die Bedingung (H3), $\dim T^1 < \infty$, ist bei einer isolierten Singularität erfüllt (z.B. [dJP00, Theorem 10.2.15]); daher besitzt sie eine formale formal verselle Deformation.
   Referenzen: [dJPSvS98, Kap. 8+9] ist instruktiv, aber informell; [Ste03, Kap. 6] ist genau, aber knapp. Man könnte es durch Vergleich mit [dJP00, Kap. 10.3] andicken. Alternative Quellen sind [Art76, Kap.. 7+8] (allerdings für affine Schemata) oder die Orginalarbeit [Sch68].

Ein interessantes Beispiel, bei dem eine formal verselle Deformation nicht analytisch versell ist, steht in [BF, Example 3.4.20].

4. **Singularitäten II (1 Vortrag):**
Hier soll Grauerts Satz zur Existenz einer semiuniversellen Deformation bewiesen werden. Dazu muss man den Grauertschen Approximationssatz zitieren. Wenn es im Vortrag zu Schlessingers Theorie gut vorbereitet ist, kann man den Beweis in [Ste03, Kap. 9] nehmen; sonst muss man den Beweis (möglichst effizient) aus [dJP00, Kap. 10.3] ziehen. (Am besten sieht der Vortragende in jedem Fall beide Referenzen an.)
Ein möglicher Zusatz: Im Fall eines reduzierten komplexen Raumes X kann man die infinitesimalen Deformationen der Singularitäten und der komplexen Struktur einheitlich als $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ beschreiben [BF, Abschnitt 2.3, Theorem 2.3.7].

5. **Kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten II (2 Vorträge):**

Nach Kodaira–Nirenberg–Spencer (1958) besitzt jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X mit $H^2(X, \Theta) = 0$ eine verselle Deformation mit glatter Basis. Nach Kuranishi (1962) besitzt jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit eine verselle Deformation. Kuranishis Satz kann nicht in der AG bewiesen werden.
Aber für den Satz von Kodaira–Nirenberg–Spencer gibt es eine schöne Beweisskizze in [For77, Kap. I–III], mit einem Potenzreihenansatz und Banachräumen.
Ein Experte könnte alternativ in einem oder mehreren Vorträgen andere Beweisideen oder Techniken bei Deformationen von Mannigfaltigkeiten skizzieren. z.B. nach [Kod05].

6. **Deformationen von kohärenten Garben (1 Vortrag):**

Gegeben seien eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf einem komplexen Raum X und ein (z.B. Artinscher) Ring A, dann betrachtet man die Menge der Isomorphieklassen von $\mathcal{O}_X \otimes A$-kohärenten Modulgarben, welche über $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X \otimes A/\mathbf{m}_A$ zu $\mathcal{F}$ spezialisieren. Dies definiert einen Deformationsfunktor, dessen Tangentialraum durch $Ext^1(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ gegeben ist. Der Obstruktionsraum ist $Ext^2(\mathcal{F}, \mathcal{F})$. Falls $\mathcal{F}$ kompakten Träger hat, sind diese Räume endlich-dimensional, und man kann den Satz von Schlessinger anwenden. Schwierigere Resultate geben sogar die Existenz einer konvergenten semi-universellen Deformation. Als Referenz empfiehlt sich [BF, Abschnitt 5.3]. Eine sehr kurze Darstellung, in einem etwas anderen Kontext, ist in [HL97, Appendix 2.A] zu finden.

7. **Obstruktionstheorie, T^1-Hochhebungssatz, Glattheit des Modulraumes von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten (1 Vortrag):**

In diesem Vortrag soll genauer auf Obstruktionstheorie im abstrakten Rahmen eingegangen werden. Als Referenzen bietet sich [Man99a] an, insbesondere die Abschnitte 2.12 bis 2.22. Eine umfangreichere Referenz ist [FM98]. Der T^1-Hochhebungssatz liefert eine Methode, die Glattheit des semi-universellen Deformationsraumes auch dann zu beweisen, wenn man keine Obstruktionstheorie zur Verfügung hat, zwei mögliche Quellen hierfür sind [Gro97] oder [FM99]. Eine wichtige Anwendung ist die Unobstruiertheit von dreidimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Eine gute Referenz ist [Nam94], wo allerdings ein allgemeinerer Fall behandelt wird, bei dem man gewisse Singularitäten erlaubt. Man kann den glatten Fall als Spezialfall davon lesen, dann ist §2 von [Nam94] geignet für einen Vortrag. In [BF, Abschnitt 5.1] wird eine allgemeiner Beweis, welcher in allen Dimensionen funktioniert, gegeben.

8. **Differentiell graduierte Lie-Algebren und zugeordnete Deformationsfunktoren (1 Vortrag):**
Hier soll der Formalismus der differentiell graduierten Lie-Algebren (kurz dgLie-Algebra) diskutiert werden. Die klassische Referenz ist [GM88]. Zu empfehlen wäre auch das erste Kapitel aus [BM97]. Am einfachsten lesbar und auch für den Vortrag als Grundlage gut geeignet ist aber [Man99a], Kapitel 1, 3 und 4. Es sollten die einer dgLie-Algebra $(\mathfrak{g}, \partial, [\ ,\ ])$ zugeordneten Funktoren $MC_{\mathfrak{g}}$, $G_{\mathfrak{g}}$ und $Def_{\mathfrak{g}}$ eingeführt und diskutiert werden. Eventuell kann man auch noch die abstrakte Konstruktion des (formalen) Kuranishi-Raums besprechen.
Je nach Zeit und Interesse kann man hier als Beispiele die in den Vorträgen 1 und 2 behandelten Deformationsprobleme in diesem allgemeineren Rahmen diskutieren. Für Singularitäten ist die kontrollierende dgLie-Algebra der (lokale) Tangentialkomplex (siehe [Man99a, Abschnitt 4], oder [BM97, Kap. 5]), für komplexe Mannigfaltigkeiten die Kodaira-Spencer-Algebra [Huy05, Kap. 6].

9. **L_∞-Morphismen und L_∞-Algebren, Formalitätssatz, vielleicht Deformationsquatisierung (1-2 Vorträge):**

   Eine zentrale Aussage über dgLie-Algebren ist die Tatsache, dass ein Morphismus $\varphi : (\mathfrak{g}_1, \partial_1, [\ ,\ ]_1) :\to (\mathfrak{g}_2, \partial_2, [\ ,\ ]_2)$ von dgLie-Algebren, welcher ein quasi-Isomorphismus ist, einen Isomorphismus der zugeordneten Deformationsfunktoren $Def_{\mathfrak{g}_1} \to Def_{\mathfrak{g}_2}$ induziert. In Anwendungen hat man allerdings die Situation, dass man einen quasi-Isomorphismus zwischen zwei dgLie-Algebren konstruieren kann, dass dieser aber nicht mit den Lie-Klammern kommutiert. Eine Idee, diese Schwierigkeit zu umgehen, besteht darin, die Kategorie der dgLie-Algebren in die Kategorie der L_∞-Algebren einzubetten. Dann muss man zeigen, ein quasi-Isomorphismus, welcher eine Morphismus von L_∞-Algebren ist, nach wie vor einen Isomorphismus der entsprechenden Deformationsfunktoren induziert. Ein eleganter Ansatz ist die Theorie der Q-Mannigfaltigkeiten ([Kon03]). Der sogenannte Formalitätssatz ist die Aussage, dass eine gewisse dgLie-Algebra als L_∞-Algebra quasi-isomorph zu ihrer Kohomologie-Algebra ist.

10. **Der erweiterte Modulraum einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit und seine formale Frobeniusstruktur (1-2 Vorträge):**

    Für eine komplexe Mannigfaltigkeit kann man die Kodaira-Spencer-Algebra

    $$(T_M \otimes \mathcal{A}^{0,\bullet}, \overline{\partial}, [\ ,\ ] \otimes \wedge)$$

    erweitern, indem man statt T_M Polyvektorfelder betrachtet, also $T_M \otimes \mathcal{A}^{0,\bullet}$ durch $\bigwedge^\bullet T_M \otimes \mathcal{A}^{0,\bullet}$ ersetzt. Dann erhält man eine neue dg-Lie-Algebra, wobei jetzt die Lieklammer das Produkt der *Schouten-Nijenhuis*-Klammer mit dem äußeren Produkt von $(0,*)$-Formen ist. Für eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit X zeigt man mit Hilfe des Tian-Todorov-Lemmas, dass diese dgLie-Algebra quasi-isomorph zu ihrer Kohomologie (also formal) ist. Diese Kohomologie ist nichts anderes als die totale Kohomologie $H^*(X, \mathbb{C})$, so dass man einen (lokalen) Modulraum $\mathcal{M}$, welcher zu $H^*(X, \mathbb{C})$ isomorph ist, bekommt. Bei diesem Beweis stellt sich heraus, dass man eine noch reichere Struktur auf $\bigwedge^\bullet T_M \otimes \mathcal{A}^{0,\bullet}$ hat, nämlich die einer „differentiell graduierten Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky-Algebra". Die Konsequenz ist, dass das Tangentialbündel von $\mathcal{M}$ mit einer assoziativen und kommutativen Multiplikation und einer bilinearen Metrik versehen wird, welche zusammen eine (formale) Frobeniusstruktur bilden. Möglich Referenzen für diesen Vortrag: [BK98], [Huy05, Abschnitt 6.A], [Man99b, Kap. III, §9 und §10].

Literatur

[Art76] Michael Artin, *Lectures on deformations of singularities. Notes by C. S. Seshadri, Allen Tannenbaum*, Lectures on Mathematics and Physics, vol. 54, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976.

[BF] Ragnar-Olaf Buchweitz and Hubert Flenner, *Deformation Theory*, notes from a Oberwolfach school, year=.

[BK98] Sergey Barannikov and Maxim Kontsevich, *Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields.*, Int. Math. Res. Not. **1998** (1998), no. 4, 201–215.

[BM97] Ragnar-Olaf Buchweitz and John J. Millson, *CR-geometry and deformations of isolated singularities.*, Mem. Am. Math. Soc. **597** (1997), 96.

[dJP00] Theo de Jong and Gerhard Pfister, *Local analytic geometry. Basic theory and applications.*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, 2000.

[dJPSvS98] Theo de Jong, Ulf Persson, Jan Stevens, and Duco van Straten, *Lectures on Deformation Theory*, Notes from a school in Nordfjordeid, 1998.

[Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry.*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, 1995.

[FKK+75] Heinz-Jörg Fitzner, Werner Kleinert, Herbert Kurke, Gerhard Pfister, Marko Roczen, and Thomas Zink, *Modulprobleme in der algebraischen Geometrie. I*, Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Reihe M **6** Beitr. Algebra Geom. **4** (1975), 93–150.

[FKK+76] ———, *Modulprobleme in der algebraischen Geometrie. II*, Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Reihe M Math. **7** (1976), 75–130.

[FKK+78] ———, *Modulprobleme in der algebraischen Geometrie. III*, Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg M **11** (1978), 91–144, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 7.

[FM98] Barbara Fantechi and Marco Manetti, *Obstruction calculus for functors on Artin Rings, I*, Journal of Algebra **202** (1998), 541–576.

[FM99] ———, *On the T^1-lifting theorem*, Journal of Algebraic Geometry **8** (1999), 31–39.

[For77] Otto Forster, *Power series methods in deformation theory*, Several complex variables (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXX, Part 2, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1975), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977, pp. 199–217.

[GM88] William M. Goldman and John J. Millson, *The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1988), no. 67, 43–96.

[Gro97] Mark Gross, *Deforming Calabi-Yau threefolds.*, Math. Ann. **308** (1997), no. 2, 187–220.

[HL97] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics, E31, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997, available under `http://www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/moduli.ps`.

[Huy05] Daniel Huybrechts, *Complex geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2005, An introduction.

[Kod05] Kunihiko Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, english ed., Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao.

[Kon03] Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216.

[Man99a] Marco Manetti, *Deformation theory via differential graded Lie algebras*, Algebraic Geometry Seminars, 1998–1999 (Italian) (Pisa), Scuola Norm. Sup., Pisa, 1999, electronic version available via `http://www.mat.uniroma1.it/people/manetti/dispense/defosing.pdf`, pp. 21–48.

[Man99b] Yuri I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Man04] Marco Manetti, *Lectures on deformations of complex manifolds (deformations from differential graded viewpoint)*, Rend. Mat. Appl. (7) **24** (2004), no. 1, 1–183, available under math.AG/0507286.

[Nam94] Yoshinori Namikawa, *On deformations of Calabi-Yau 3-folds with terminal singularities.*, Topology **33** (1994), no. 3, 429–446.

[Sch68] M. Schlessinger, *Functors of Artin rings*, Trans. Am. Math. Soc. **130** (1968), 208–222.

[Ste03] Jan Stevens, *Deformations of Singularities*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1811, Springer, 2003.