Funktionalanalysis

WS 2005/06

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Metrische Räume

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1. *(Metrik auf einer Menge X) Eine Metrik (oder Distanzfunktion) ist eine Abbildung* $d : X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$ *mit drei Eigenschaften*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *für alle* $x, y \in X$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Positivität).*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$ *(Symmetrie).*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$$

Also gilt auch $d(x, y) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(v, y)$. Durch vertauschen $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ und unter Benutzung der Symmetrie erhalten wir

$$d(u, v) - d(x, y) \leq d(x, u) + d(v, y) \Rightarrow |d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(v, y).$$

Wenn also x und u dicht beieinander liegen und y und v, dann ist der Abstand zwischen x und y ungefähr gleich dem Abstand zwischen u und v. (Stetigkeit der Metrik)

Beispiel 1.2. **(i)** *auf jeder Menge* X *definiert* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$ *die sogenannte diskrete Metrik.*

(ii) *Auf* $\mathbb{R}$ *definiert* $d(x, y) = |x - y|$ *eine Metrik.*

(iii) *Auf* $\mathbb{C}$ *definiert* $d(x,y) = |x-y|$ *eine Metrik.*

(iv) *Auf jeder nicht leeren Teilmenge* $A \subset X$ *eines metrischen Raumes* (X,d) *definiert die Einschränkung von* d *auf* $A \times A \to \mathbb{R}$ *eine Metrik.*

(v) *Auf dem kartesischen Produkt zweier metrischer Räume definiert die Summe beider Metriken eine Metrik.*

(vi) *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum. Dann ist auch* $(X,\tilde{d})$ *ein metrischer Raum mit*

$$\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \tilde{d}(x,y) \text{ mit } \tilde{d}(x,y) = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)}.$$

Wegen $1 - \frac{1}{1+x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *folgt die Positivität und die Symmetrie von* $\tilde{d}$ *aus den entsprechenden Eigenschaften von* d*. Die Dreieckungleichung von* $\tilde{d}$ *folgt aus der Monotonie der Funktion* $x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x}$ *und für alle* $x,y \in \mathbb{R}_0^+$ *der Ungleichung*

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1+x+y} &\leq 1 - \frac{1}{1+x} + 1 - \frac{1}{1+y} \quad \Longleftrightarrow \\ (x+y)(1+x)(1+y) &\leq x(1+y)(1+x+y) + y(1+x)(1+x+y) : \end{aligned}$$

Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung von d *für alle* $x,y,z \in X$ *auch*

$$\tilde{d}(x,y) = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)} \leq 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \\ 1 - \frac{1}{1+d(x,z)} + 1 - \frac{1}{1+d(z,y)} = \tilde{d}(x,z) + \tilde{d}(z,y).$$

Die offenen Mengen der beiden Metriken d *und* $\tilde{d}$ *stimmen überein. Aber der metrische Raum* $(X,\tilde{d})$ *ist beschränkt.*

(vii) *Die Einschränkung der Metrik (ii) auf die Vereinigung der inversen der natürlichen Zahlen mit* $\{0\}$ *definiert eine Metrik auf* $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$*:*

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm} \quad d(\infty,n) = d(n,\infty) = \frac{1}{n} \quad d(\infty,\infty) = 0 \quad \text{für alle } n,m \in \mathbb{N}.$$

Definition 1.3. *(offene Kugel, Umgebung, offene Menge) Eine offene Kugel in* (X,d) *mit Zentrum* $x \in X$ *und Radius* $r > 0$ *ist die Menge* $B(x,r) = \{y \in X | d(x,y) < r\}$*. Eine Umgebung eines Punktes* $x \in X$ *ist eine Menge* $O \subset X$*, die eine Kugel* $B(x,r)$ *mit einem beliebigen* $r > 0$ *enthält. Eine offene Menge* $O \subset X$ *ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle* $x \in O$ *gibt es ein* $\epsilon > 0$*, so dass* $B(x,\epsilon) \subset O$*.*

Beispiel 1.4. *In $\mathbb{R}$ besteht die Kugel $B(x, r)$ aus dem Intervall $(x - r, x + r)$. Im $\mathbb{R}^n$ besteht die Kugel $B(x, r)$ aus allen Punkten, deren euklidischer Abstand zu x kleiner ist als r.*

Alle offenen Kugeln $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x. Sei $y \in B(x, r)$. Dann ist $d(x, y) < r$. Sei $z \in B(y, r - d(x, y))$. Dann gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$. Also gilt auch $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$. Deshalb sind die offenen Kugeln tatsächlich offene Mengen.

Offenbar ist die beliebige Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Seien O und O' zwei offene Mengen und $x \in O \cap O'$. Dann gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ so dass $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) \subset B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$. Also ist $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen wieder offen.

Definition 1.5. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss) Die Komplemente von offenen heißen abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ eine Menge A ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.*

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Deshalb ist der Abschluss einer beliebigen Menge wieder abgeschlossen und der Abschluss einer abgeschlossenen Menge gleich der Menge. Offenbar gehört ein Punkt x genau dann zu dem Abschluss $\bar{A}$, wenn alle offenen Mengen, die x enthalten, einen nicht leeren Schnitt mit A haben. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element a_n in der Kugel $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ gibt, oder auch dazu, dass es eine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Damit haben wir gezeigt:

Lemma 1.6. *Der Abschluss einer Teilmenge eines metrischen Raumes besteht aus allen Grenzwerten von konvergenten Folgen innerhalb der Teilmenge. Und eine Teilmenge ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte von allen konvergenten Folgen in der Teilmenge auch zu der Menge gehören.* **q.e.d.**

1.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Zunächst verallgemeinern wir einige Aussagen über Zahlenfolge auf allgemeine Folgen in metrischen Räumen.

Definition 1.7. *(Folgen und Cauchyfolgen) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X, mit $n \mapsto x_n$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert gegen $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein*

$N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $d(x_n, x) < \epsilon$.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt aber auch $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$. Damit haben wir gezeigt:

Satz 1.8. *In einem metrischen Raum (X, d) ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge.* **q.e.d.**

Definition 1.9. *Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn auch jede Cauchyfolge konvergiert.*

Wegen dem Vollstänidkeitsaxiom sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vollständige metrische Räume.

Satz 1.10. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist $A \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn A vollständig ist.*

Beweis: Wegen Lemma 1.6 besteht der Abschluss einer Menge aus allen Grenzwerten von konvergenten Folgen in dieser Menge. Deshalb ist eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes vollständig. Umgekehrt enthält eine vollständige Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes alle Grenzwerte von konvergenten Folgen und ist damit auch abgeschlossen. **q.e.d.**

Definition 1.11. *(kompakt) Eine Teilmenge der offenen Mengen von (X, d), die X überdeckt, (d.h. jedes Element von X ist in mindestens einer der offenen Mengen enthalten) heißt offene Überdeckung von X. Der metrische Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Satz 1.12. *Für einen metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *(X, d) ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge in (X, d) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

(iii) *(X, d) ist vollständig und für jedes $\epsilon > 0$ besitzt (X, d) eine endliche Überdeckung mit offenen Kugeln vom Radius ϵ.*

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ohne Häufungspunkt. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $F_n = \{x_m | m \geq n\}$ abgeschlossen, weil der Abschluss von jedem F_n gerade aus der Vereinigung von F_n mit den Häufungspunkten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht. Weil der

Schnitt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ nur aus Häufungspunkten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehen kann, bilden die Mengen $(X\setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X. Offenbar ist aber der Schnitt von endlich vielen Mengen der Mengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht leer. Also besitzt die Überdeckung $(X\setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine endliche Teilüberdeckung.

(ii)⇒(iii): Sei also (X,d) ein metrischer Raum, der (ii) erfüllt. Dann besitzt aber jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N\in\mathbb{N}$, so dass alle $m,n\geq N$ auch $d(x_n,x_m)<\frac{\epsilon}{2}$ erfüllen. Weil x ein Häufungspunkt ist, gibt es aber ein $m\geq N$, so dass $d(x_m,x)<\frac{\epsilon}{2}$ gilt. Also gilt für alle $n\geq N$ auch

$$d(x_n,x)\leq d(x_n,x_m)+d(x_m,x)<\epsilon.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und damit ist (X,d) vollständig. Sei $\epsilon>0$ so gewählt, dass es keine endliche Überdeckung von X mit Kugeln vom Radius ϵ gibt. Dann können wir für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ induktiv so definieren, dass $x_{m+1}\in X\setminus\bigcup\limits_{m=1}^{n} B(x_m,\epsilon)$. Die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ erfüllt also für alle $n\neq m\in\mathbb{N}$ $d(x_n,x_m)\geq\epsilon$. Also besitzt sie keine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist, und damit auch keinen Häufungspunkt.

(iii)⇒(i): Wir nehmen an (X,d) erfüllt Bedingung (iii) und $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ sei eine Überdeckung von (X,d), die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann definieren wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Kugeln $B(x_n,2^{-n})$ keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzen und für alle $n\in\mathbb{N}$ die Kugeln $B(x_{n+1},2^{-(n+1)})$ und $B(x_n,2^{-n})$ nicht disjunkt sind. Weil nämlich (X,d) eine endliche Überdeckung von Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ besitzt, und weil $B(x_n,2^{-n})$ keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzt, gibt es mindestens eine Kugel vom Radius $2^{-(n+1)}$, die nichtleeren Schnitt mit $B(x_n,2^{-n})$ hat und keine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ besitzt. Weil

$$d(x_n,x_{n+1})\leq\frac{2}{2^n}\text{ und }\qquad\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2^{-n+1},$$

ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Der Grenzwert gehört dann zu einer Menge $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$, und es gibt ein $\epsilon>0$, so dass $B(x,\epsilon)\subset U_\lambda$. Für genügend großes m ist dann $\frac{1}{2^{m-2}}\leq\epsilon$, und damit auch

$$B(x_m,2^{-m})\subset B(x,2^{-m+2})\subset B(x,\epsilon).$$

Also besitzt eine Kugel $B(x_m,2^{-m})$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$. Widerspruch. **q.e.d.**

Dieser Satz hat einige wichtige Folgerungen:

Korollar 1.13. **(i)** *Kompakte Mengen eines metrischen Raums sind abgeschlossen.*

(ii) *Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge sind wieder kompakt.*

Beweis:(i): Kompakte Mengen sind vollständig, und stimmen mit ihrem Abschluss überein.
(ii): Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge erfüllen offenbar wieder die Bedingung (ii) des vorangehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 1.14. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt beschränkt, wenn für ein $x \in X$, die Menge der Abstände $\{d(x, y)|y \in A\}$ beschränkt ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass für alle $x \in X$ die Menge der Abstände $\{d(x, y)|y \in A\}$ beschränkt sind, aber nicht uniform in $x \in X$.

Satz 1.15. *(Heine–Borel) Eine Teilmenge A des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^n, d)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis: Offenbar gilt für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Deshalb sind für eine Folge in einer beschränkten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ alle entsprechenden Koordinatenfolgen beschränkt und besitzen konvergente Teilfolgen. Dann besitzt auch die Folge in A eine konvergente Teilfolge. Also erfüllt eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ die Bedingung (ii) von Satz 1.12. Umgekehrt enthält eine unbeschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $x \in X$ die Folge $d(x, x_n)$ gegen ∞ konvergiert. Eine solche Folge kann keinen Häufungspunkt haben. **q.e.d.**

Beispiel 1.16. **(i)** *Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß sind die Intervalle $[a, b]$ kompakt. Weil jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Folge enthält, die gegen das Supremum bzw. Infimum der Menge konvergiert, enthält jede kompakte Menge auch das Supremum und Infimum und besitzt damit ein Minimum und ein Maximum.*

(ii) $\bar{\mathbb{N}}$ *aus Beispiel (vii) ist kompakt.*

(iii) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a. Dann ist $\{a\} \cup \{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ kompakt.*

1.3 Stetigkeit

Definition 1.17. *Eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ von einem metrischen Raum (X, d) in den metrischen Raum (Y, d) heißt stetig in dem Punkt $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle $y \in X$, die $d(x, y) < \delta$ erfüllen, auch $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ erfüllen. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.*

Stetig im Punkt x heißt also, dass alle Punkte, die sehr nahe bei x liegen, auf Werte abgebildet werden, die sehr nahe bei $f(x)$ liegen.

Satz 1.18. *Für eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ zwischen den metrischen Räumen (X, d) und (Y, d) ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist stetig in x.*

(ii) *Das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x.*

(iii) *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d), die gegen x konvergiert, konvergiert auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.*

Beweis: (i)$\Leftrightarrow$(ii): Die Umgebungen von x sind gerade die Mengen, die eine δ-Kugel um x enthalten. Also ist (ii) äquivalent zu der Aussage, dass das Urbild jeder ϵ-Kugel um $f(x)$ eine δ-Kugel um x enthält. Diese Aussage ist nur eine Umformulierung von (i).
(ii)$\Leftrightarrow$(iii): Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann gegen x bzw. $f(x)$, wenn jede Umgebung von x bzw. $f(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert und f (ii) erfüllt, dann konvergiert also auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Also folgt aus (ii) auch (iii). Wenn es umgekehrt eine ϵ-Kugel von $f(x)$ gibt, deren Urbild keine δ-Kugel von x enthält, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, so dass die Folge der entsprechenden Werte $f(x_n)$ im Komplement dieser ϵ-Kugel von $f(x)$ liegt: $f(x_n) \notin B(f(x), \epsilon)$. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(x)$. **q.e.d.**

Korollar 1.19. *Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X, d) und (Y, d) ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*

(ii) *Das Bild $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jeder konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

(iii) *Das Urbild jeder offenen Menge ist offen.*

(iv) *Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz ist (i) und (ii) äquivalent. Weil eine Menge genau dann offen ist, wenn sie eine Umgebung von allen ihren Punkten ist, zeigt der vorangehende Satz, dass aus (i) bzw. (ii) auch (iii) folgt. Weil jede Umgebung eines Punktes auch eine offene Umgebung des Punktes enthält, folgt wieder wegen dem vorangehenden Satz aus (iii) auch (i) bzw. (ii). Weil nun die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und das Urbild eines Komplementes gerade gleich dem Komplement des Urbildes ist, ist (iii) zu (iv) äquivalent. **q.e.d.**

Korollar 1.20. *Die Komposition zweier stetiger Abbildungen ist stetig. Die analoge punktweise Aussage gilt auch.*

Beweis: Benutze die Äquivalenz zwischen (i) und (iii) im vorangehenden Korollar und die Gleichung
$$(f \circ g)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]].$$

Korollar 1.21. *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.*

Beweis: Sei $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung und $A \subset X$ eine kompakte Menge. Dann ist das Urbild einer beliebigen offenen Überdeckung von dem Bild

$$f[A] = \{y \in Y | \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$$

eine offene Überdeckung von A. Diese besitzt, wenn A kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung. Also besitzt jede offene Überdeckung von $f[A]$ eine endliche Teilüberdeckung und $f[A]$ ist kompakt. **q.e.d.**

Korollar 1.22. *Sei f eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum (X, d) auf einen metrischen Raum (Y, d). Dann ist die Umkehrabbildung stetig.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Korollar ist das Bild $f[X] = Y$ kompakt. Weil wegen Korollar 1.13 eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes genau dann abgeschlossen ist, wenn sie kompakt ist, folgt die Aussage aus dem vorangehenden Korollar und der Charakterisierung (iv) im Korollar über stetige Abbildungen. **q.e.d.**

Beispiel 1.23. **(i)** *Auf jedem metrischen Raum ist die identische Abbildung $\mathbb{1}_X$ stetig.*

(ii) *Die konstante Abbildung, die alle $x \in X$ auf einen Punkt y abbildet ist stetig.*

(iii) *Mit der entsprechenden Metrik auf $X \times X$ ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig.*

(iv) *Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen Zahlen oder der komplexen Zahlen. Aus den Rechenregeln für Folgen folgt, dass die Abbildungen*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x + y \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x \cdot y$$

stetig sind. Das gilt auch für die Abbildungen

$$- : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto -x \text{ und } \qquad {}^{-1} : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \mapsto x^{-1}.$$

(v) *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ läßt sich genau dann zu einer stetigen Abbildung von $\bar{\mathbb{N}}$ nach $\mathbb{K}$ fortsetzten, wenn sie konvergiert. ∞ wird dann auf $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ abgebildet.*

Definition 1.24. *(Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz–Stetigkeit) Eine Abbildung $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ zwischen metrischen Räumen heißt gleichmäßig stetig auf einer Teilmenge $A \subset X$,wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in A$ mit $d(x, y) < \delta$ auch $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ gilt.*
Die Abbildung heißt Lipschitz–stetig auf A, wenn es eine Konstante $L > 0$(Lipschitzkonstante) gibt, so dass für alle $x, y \in A$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$.

Offenbar ist jede Lipschitz–stetige Abbildung auch gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz 1.25. *Sei $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist f auf jeder kompakten Menge A auch gleichmäßig stetig.*

Auf kompakten Mengen ist also eine Abbildung genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist.
Beweis: Sei also $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in A$ ein $\delta(x)$, so dass aus $d(x, y) < \delta(x)$ auch $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ folgt. Wir wählen also eine endliche Teilüberdeckung von der offenen Überdeckung $\{B(x, \delta(x)/2) | x \in A\}$ von A. Sei δ das Minimum der Radien dieser endlichen Teilüberdeckung. Dann gibt es für alle $y, z \in A$ mit $d(y, z) < \delta$ eine Kugel $B(x, \delta(x)/2)$ der endlichen Teilüberdeckung mit $y \in B(x, \delta(x)/2)$. Dann folgt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\delta(x)}{2} + \frac{\delta(x)}{2} = \delta(x).$$

Also gilt $y, z \in B(x, \delta(x))$. Dann folgt aber

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(x), f(z)) < \epsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig. **q.e.d.**

Zum Abschluss dieses Abschnittes beweisen wir einen der wichtigsten Sätze der Analysis:

Banachscher Fixpunktsatz 1.26. *Sei $f : X \to X$ eine Lipschitz–stetige Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes auf sich selber mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt: $x \in X$ mit $f(x) = x$.*

Beweis: Sei $x_0 \in X$ beliebig und für alle $n \in \mathbb{N}$ x_n induktiv definiert durch $x_n = f(x_{n-1})$. Dann gilt

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n-1}, x_n) \leq L^n d(x_0, x_1).$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann für $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (L^n + \ldots + L^{m-1})d(x_0, x_1) \\ &= L^n \frac{1 - L^{m-n}}{1 - L} d(x_0, x_1) \leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und es existiert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$. Also ist x ein Fixpunkt. Ist $y \in X$ ein zweiter Fixpunkt, so gilt $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$. Wegen $0 \leq L < 1$ folgt dann $(1 - L)d(x, y) \leq 0$ oder auch $d(x, y) = 0$. Also gilt $x = y$. **q.e.d.**

1.4 Metrische Räume von Abbildungen

In diesem Abschnitt sei (Y, d) ein metrischer Raum (z.B. $\mathbb{K}$) und X zunächst eine beliebige Menge und später auch ein metrischer Raum. Zunächst betrachten wir die Menge aller Y-wertigen (nicht unbedingt stetigen) Funktionen auf X. Falls $Y = \mathbb{K}$ ist, dann können wir solche Funktionen f, g punktweise miteinander addieren und multiplizieren und wir können sie mit Elementen $\lambda \in \mathbb{K}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} f + g :&X \to \mathbb{K}, & x \mapsto& f(x) + g(x), & f \cdot g :&X \to \mathbb{K}, & x \mapsto& f(x) \cdot g(x), \\ \lambda f :&X \to \mathbb{K}, & x \mapsto& \lambda f(x). \end{aligned}$$

Die Addition macht den Raum aller Funktionen von X nach $\mathbb{K}$ zu einer abelschen Gruppe und zusammen mit der Multiplikation mit Elementen von $\mathbb{K}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Multiplikation ist kommutativ, assoziativ, distributiv und in beiden Faktoren linear. Dadurch wird der Raum aller Funktionen von X nach $\mathbb{K}$ zu einer Algebra über $\mathbb{K}$.

Definition 1.27. *Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf der Menge X heißt*

punktweise konvergent, *wenn die Folgen* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in X$ *konvergieren. Die Grenzwerte definieren wieder eine Funktion* $f : X \to Y, x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

gleichmäßig konvergent, *wenn es eine Funktion* $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ *gibt, und für alle* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass für* $n \geq N$ *und alle* $x \in X$ *auch gilt* $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Offenbar ist jede gleichmäßige konvergente Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt.

Beispiel 1.28. *Die Folge von Funktionen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ *konvergiert punktweise gegen die Funktion*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt aber* $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$. *Also konvergiert die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht gleichmäßig gegen* f.

Definition 1.29. *Eine Funktion* $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ *heißt beschränkt, wenn das Bild* $f[X]$ *eine beschränkte Teilmenge von* Y *ist.* $B(X,Y)$ *bezeichne die Menge aller beschränkten Funktionen auf* X. *Auf* $B(X,Y)$ *definieren wir folgende Abbildung:*

$$d : B(X,Y) \times B(X,Y) \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \to d(f,g) \quad \text{mit } d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

Satz 1.30. (i) *Die Abbildung* d *ist eine Metrik auf* $B(X,Y)$.

(ii) *Die Abbildung auf die konstanten Funktionen definiert eine Isometrie von* Y *nach* $B(X,Y)$ *(also eine Abbildung von einem metrischen Raum auf einen metrischen Raum, die die Metrik erhält, aber nicht notwendigerweise surjektiv ist), deren Bild ein abgeschlossener Unterraum ist.*

(iii) *Der metrische Raum* $B(X,Y)$ *ist genau dann vollständig, wenn* Y *vollständig ist.*

(iv) $B(X,\mathbb{K})$ *ist eine Unteralgebra aller Funktionen von* X *nach* $\mathbb{K}$.

Beweis: (i): Die Positivität, Symmetrie und die Dreieckungleichung von d folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Metrik von Y.
(ii): Die Abbildung auf die konstanten Funktionen ist offensichtlich eine Isometrie. Wenn $f \in B(X,Y)$ keine konstante Funktion ist, dann gibt es mindestens zwei $x, y \in X$ mit $f(x) \neq f(y)$. Alle Funktionen in der offenen Kugel $B(f, d(f(x), f(y))/2) \subset B(X,Y)$

können dann diese beiden Punkte nicht auf das gleiche Element abbilden. Also ist die Menge aller nicht konstanten Funktionen offen.
(iii): Sei Y vollständig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B(X,Y)$. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es also ein N, so dass für alle $n,m \geq N$ und alle $x \in X$ gilt

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann sind für alle $x \in X$ die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Also konvergieren sie punktweise gegen eine Funktion $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$. Weil auch die Folge $d(f_1, f_n)$ eine Cauchyfolge ist und jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, ist auch $d(f_1, f) \leq \lim\limits_{n\to\infty} d(f_1, f_n)$ beschränkt. Für alle $\epsilon > 0$ und alle $x \in X$ gibt es also ein $N(x) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq N(x)$ gilt $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Damit folgt für $n \geq N$ und $m \geq \max\{N, N(x)\}$

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \epsilon.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. Also ist auch $B(X,Y)$ vollständig. Umgekehrt folgt wegen (ii) aus der Vollständigkeit von $B(X,Y)$ auch die Vollständigkeit von Y.
(iv): Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$ und $|\lambda \cdot \mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$ Dann folgt auch $d(0, f+g) \leq d(0,f) + d(0,g)$ und $d(0,f) \cdot d(0,g) \leq d(0,f) \cdot d(0,g)$. Damit ist die Summe und das Produkt zweier beschränkter Funktionen wieder beschränkt. **q.e.d.**

Definition 1.31. *Seien (X,d) und (Y,d) metrische Räume. Dann sei $C_b(X,Y)$ der Unterraum von $B(X,Y)$ aller stetigen und beschränkten Abbildungen von X nach Y.*

Satz 1.32. **(i)** *Der Raum aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{K}$ ist eine Unteralgebra aller Funktionen von X nach $\mathbb{K}$. Das Inverse einer nicht verschwindenden stetigen Funktion von X nach $\mathbb{K}$ ist wieder stetig.*

(ii) *$C_b(X,\mathbb{K})$ ist eine Unteralgebra von $B(X,\mathbb{K})$.*

(iii) *$C_b(X,Y)$ ist abgeschlossen in $B(X,Y)$ und deshalb genau dann vollständig wenn Y vollständig ist.*

Beweis: (i): Wegen Korollar 1.19 folgt (i) aus den Rechenregeln für konvergente Folgen.
(ii): Folgt aus (i) und dem vorangehenden Satz.
(iii): Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_b(X,Y)$, die in $B(X,Y)$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert f stetig ist. Sei $x \in X$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $d(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$. Weil f_n stetig ist gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in B(x,\delta)$ auch $d(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Dann folgt aber auch

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) < \epsilon.$$

Also ist f stetig. **q.e.d.**

Wichtig in dem Beweis war, dass die Folge f_n in x gleichmäßig gegen f konvergiert und nicht nur punktweise. Auf $[0,1]$ konvergieren die Funktionen $x \mapsto x^n$ gegen die unstetige Funktion $x \to \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

Satz 1.33. *Für jeden metrischen Raum (X,d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\bar{X},d)$ und eine Isometrie $i : X \to \bar{X}$, so dass das Bild von i in $\bar{X}$ dicht liegt, d.h. der Abschluss des Bildes von i ist $\bar{X}$. Jede gleichmäßig stetige Abbildung von X in einen vollständigen metrischen Raum Y lässt sich eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $\bar{f} : \bar{X} \to Y$ fortsetzen, so dass gilt $\bar{f} \circ i = f$. $\bar{X}$ ist dadurch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis: Wegen der Dreiecksungleichung gilt für alle

$$x,y,z \in X : -d(y,y) \leq d(x,y) - d(x,z) \leq d(x,y).$$

Deshalb definiert für jedes $z \in X$ die Abbildung

$$i : X \to C_b(X,\mathbb{R}), y \to f_y \text{ mit } f_y(x) = d(x,y) - d(x,z).$$

eine Isometrie. Es gilt nämlich

$$-d(y,y') \leq d(x,y) - d(x,y') \leq d(y,y').$$

Für $x = y$ bzw. $x = y'$ gilt auch Gleichheit. Also gilt

$$d(f_y, f_{y'}) = d(y,y').$$

Also ist X genau dann vollständig, wenn das Bild von i in $C_b(X,\mathbb{R})$ abgeschlossen ist. Andernfalls definieren wir $\bar{X}$ als den Abschluss des Bildes von i in $C_b(X,\mathbb{R})$. Sei jetzt $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig von X in einen vollständigen metrischen Raum Y. Dann ist für jedes Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Weil Y vollständig ist, konvergiert dann $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Cauchyfolgen $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(i(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren, dann konvergieren die Abstände $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit konvergieren auch die Folgen $(d(f(x_n),f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null. Deshalb konvergieren die beiden Cauchyfolgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert in Y. Also gibt es eine eindeutige Abbildung $\bar{f} : \bar{X} \to Y$, die jeden $x \in \bar{X}$ den Grenzwert von $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zuordnet, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X ist, so dass $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Wegen der Stetigkeit von d gilt für alle Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X

$$d(\lim_{n\to\infty} i(x_n), \lim_{n\to\infty} i(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$$

und

$$d(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)).$$

Sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ so gewählt, dass aus $d(x,y) < \delta$ folgt $d(f(x), f(y) < \epsilon$. Dann folgt für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X aus

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) < \delta \quad \text{auch } d(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) \le \epsilon.$$

Also ist auch $\bar{f}$ gleichmäßig stetig. Wenn f sogar eine Isometrie ist, dann ist wegen

$$d(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(i(y_n))$$

auch $\bar{f}$ eine Isometrie. Wenn das Bild von f in Y dicht liegt, ist die Abbildung $\bar{f} : \bar{X} \to Y$ eine surjektive Isometrie, also ein Isomorphismus von metrischen Räumen. **q.e.d.**

Wir können $\bar{X}$ mit der Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen identifizieren, wobei zwei Cauchyfolgen äquivalent sind, wenn die Folge der Abstände $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Satz 1.34. *Alle stetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum sind beschränkt. Das Bild einer reellen stetigen Funktion auf einem kompakten metrischen Raum besitzt ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis: Sei (X, d) kompakt und $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ stetig. Dann ist $f[X]$ kompakt und damit auch beschränkt. Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind aber gerade die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen. Weil für jede beschränkte nicht leere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\sup A - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von A ist und $\frac{1}{n} + \inf A$ keine untere Schranke von A ist gibt es ein

$$a_n \in \left(\sup A - \frac{1}{n}, \sup A\right] \cap A \text{ und ein } b_n \in \left[\inf A, \inf A + \frac{1}{n}\right) \cap A.$$

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren dann gegen $\sup A$ bzw. $\inf A$. Also liegen $\sup A$ und $\inf A$ im Abschluss von A. Deshalb enthält jede nicht leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1.35.* *(Satz von Stone–Weierstraß) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subset C_b(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra, die die konstanten Funktionen enthält und die Punkte trennt, d.h. für alle $x \neq y \in X$ gibt es ein $f \in A$, so dass $f(x) \neq f(y)$. Dann ist der Abschluss von A gleich $C_b(X, \mathbb{R}) = C(X, \mathbb{R})$.*

Lemma 1.36.* *Auf dem Intervall* $[0,1]$ *konvergiert die induktiv definierte Folge von Polynomen* $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x))$ *mit* $p_0 = 0$, *gleichmäßig gegen die Funktion* $x \mapsto \sqrt{x}$.

Beweis*: Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass $0 \leq p_n(x)$ und $0 \leq p_n^2(x) \leq x$ für $x \in [0,1]$ gilt. Beides ist für $p_0 = 0$ offensichtlich.

$$\begin{aligned} x - p_{n+1}^2(x) &= x - p_n^2(x) - p_n(x)\left(x - p_n^2(x)\right) - \frac{1}{4}\left(x - p_n^2(x)\right)^2 \\ &= (x - p_n^2(x))\left(1 - p_n(x) - \frac{1}{4}(x - p_n^2(x))\right) \\ &= (x - p_n^2(x))\left(\left(1 - \frac{p_n(x)}{2}\right)^2 - \frac{x}{4}\right) \end{aligned}$$

Aus $p_n^2(x) \leq x$ folgt $p_n(x) \leq 1$ und damit $1 - \frac{p_n(x)}{2} \geq \frac{1}{2}$ und $\left(1 - \frac{p_n(x)}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \geq \frac{x}{4}$. Deshalb ist die Folge $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für $x \in [0,1]$ monoton wachsend und $0 \leq p_n^2(x) \leq x$. Dann gilt aber auch $\left(\left(1 - \frac{p_n(x)}{2}\right)^2 - \frac{x}{4}\right) \leq 1 - \frac{x}{4}$ und deshalb auch $0 \leq x - p_n^2(x) \leq x \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n$. Wegen $\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n \geq 1 + \frac{x}{4}$ folgt dann aus der Bernoulli Ungleichung $\frac{1}{(1-\frac{x}{4})^n} \geq 1 + \frac{nx}{4}$ und $0 \leq x - p_n^2(x) \leq \frac{x}{1+\frac{nx}{4}} < \frac{4}{n}$. Also konvergiert $(p_n^2(x))_{n\in\mathbb{N}}$ auf $x \in [0,1]$ gleichmäßig gegen x. Die Funktion $[0,1] \to [0,1], x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $[0,1] \to [0,1], x \mapsto x^2$. Weil die zweite Funktion stetig ist, ist dann wegen Korollar 1.22 die erste auch stetig und wegen Satz 1.25 sogar gleichmäßig stetig. Dann folgt aber dass die Folge $\left(p_n(x) = \sqrt{p_n^2(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ konvergiert. **q.e.d.**

Beweis des Satzes von Stone–Weierstraß*: Wegen dem Lemma gibt es auf $[0,1]$ eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig gegen $x \to \sqrt{x}$ konvergieren. Daraus folgt dann, dass für jedes $f \in A$ auch $|f| = d(0,f)\sqrt{\left(\frac{f}{d(0,f)}\right)^2}$ zu dem Abschluss $\bar{A}$ von A gehört. Dann gehört für jedes $f, g \in \bar{A}$ aber auch

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ und } \inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

zu $\bar{A}$. Weil A die Punkte von X trennt, gibt es für alle $x \neq y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Element $f \in A$, dass $f(x) = \alpha$ und $f(y) = \beta$ erfüllt. Sei nämlich g eine Funktion mit $g(x) \neq g(y)$. Dann ist $f = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g - g(x))$ eine solche Funktion.

Sei jetzt $f \in C_b(X,\mathbb{R})$ eine fest vorgegebene Funktion und $\epsilon > 0$. Dann gibt es für jedes $x, y \in X$ eine Funktion $g_{x,y} \in \bar{A}$ die bei x und y mit f übereinstimmt. Dann gibt es aber auch ein $\delta_{x,y} > 0$, so dass für alle $z \in B(y, \delta_{x,y})$ gilt $g_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon$. Durch Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung und dem Infimum der entsprechenden Funktionen $g_{x,y} \in \bar{A}$ gibt es dann eine Funktion $g_x \in \bar{A}$, die $g_x(x) = f(x)$ und $g_x < f+\epsilon$ erfüllt. Wegen der Stetigkeit gibt es wieder für alle $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, so dass für alle $y \in B(x, \delta_x)$ gilt $f(y)-\epsilon < g_x(y)$. Durch Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung und dem Supremum der entsprechenden Funktionen g_x finden wir schließlich eine Funktion g in $\bar{A}$, die auf X $f - \epsilon < g < f + \epsilon$ erfüllt. Weil ϵ beliebig ist folgt dann, dass f in $\bar{A}$ enthalten ist. **q.e.d.**

Beispiel 1.37. **(i)** *Weil die identische Abbildung auf $\mathbb{K}$ stetig ist, sind wegen Satz 1.32 auch alle Polynome auf $\mathbb{K}$ stetig und alle Quotienten von Polynomen (rationale Funktionen) auf der Teilmenge von $\mathbb{K}$, auf der der Nenner nicht verschwindet.*

(ii) *Alle Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzbereich stetige Funktionen.*

(iii) *Wenn $f : X \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x)$ eine injektive Funktion auf einer kompakten Menge ist, dann ist die Umkehrfunktion $f[X] \to X, x \mapsto f^{-1}(x)$ stetig. Dies gilt auch, wenn X eine offene Teilmenge von $\mathbb{K}$ ist, weil dann jedes $x \in X$ in einer kompakten Umgebung enthalten ist.*

Definition 1.38. *(relativkompakt) Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heisst realtivkompakt, wenn der Abschluss kompakt ist.*

Lemma 1.39. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist genau dann relativkompakt, wenn jede Folge in A eine in X konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis: Wenn A relativkompakt ist, dann besitzt wegen Satz 1.12 jede Folge in A eine konvergente Teilfolge. Hat umgekehrt jede Folge in A eine konvergente Teilfolge, dann gibt es wegen Lemma 1.6 für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Abschluss von A auch eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d(x_n, a_n) < \frac{1}{n}$. Dann konvergiert die jeder konvergenten Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsprechende Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert wie die entsprechende Teilfoge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen Satz 1.12 ist dann der Abschluss von A kompakt. **q.e.d.**

Satz 1.40. *(Arzela–Ascoli) Sei X ein kompakter metrischer Raum und Y ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset C_b(X, Y)$ ist genau dann relativkompakt, wenn*

(i) *für jedes $x \in X$ die Menge $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ relativkompakt ist, und*

(ii) *für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $x' \in B(x, \delta) \subset X$ für alle $f \in \mathcal{F}$ folgt $f(x') \in B(f(x), \epsilon) \subset Y$.*

Beweis: Zunächst nehmen wir an, dass die Menge $\mathcal{F}$ die Bedingungen (i) und (ii)erfüllt. Wir zeigen dann, dass jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ eine in $C_b(X,Y)$ konvergente Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt. Dafür zeigen wir, dass $\mathcal{F}$ sogar gleichgradig stetig ist auf X. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in X$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass aus $d(x,y) < 2\delta_y$ für alle $f \in \mathcal{F}$ folgt $d(f(x),f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Kompaktheit von X hat die Überdeckung $\{B(y,\delta_y)|y \in X\}$ eine endliche Teilüberdeckung $X = B(y_1,\delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N,\delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1,\ldots,\delta_N$. Dann entält für alle Paare $x,x' \in X$ mit $d(x,x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1,\delta_1),\ldots,B(y_N,\delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1,2\delta_1),\ldots,B(y_N,2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f(x),f(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig auf ganz X.

Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in X dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $m \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_m der Menge der Folge $(f_n(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von Y. Wir definieren jetzt induktiv eine Teilfolge von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in Y, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$ gilt $d(g_n(x_m),a_m) < \frac{1}{n}$. Dafür wählen wir zunächst einen Häufungspunkt a_1 von $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(g_n(x_1),a_1) \leq \frac{1}{n}$. Induktiv wählen wir danach für jedes $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_M von $(g_n(x_M))_{n\in\mathbb{N}}$ und ersetzen alle Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes größer als $M-1$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq M}$, so dass für alle $n \geq M$ gilt $d(g_n(x_M),a_M) < \frac{1}{n}$. Dann gilt für alle $m = 1,\ldots,M$ und alle $n \geq m$ auch $d(g_n(x_m),a_m) < \frac{1}{n}$.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x,x' \in X$ mit $d(x,x') < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(g_n(x),g_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$. Die Überdeckung $(B(x_m,\delta))_{m\in\mathbb{N}}$ von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass alle $l,n \geq M$ an den Zentren der Bälle der Teilüberdeckung $d(g_l(x_m),g_n(x_m)) < \frac{\epsilon}{3}$ erfüllen. Dann folgt für alle $x \in X$ und alle $l,n \geq M$

$$d(g_l(x),g_n(x)) \leq d(g_l(x),g_l(x_m)) + d(g_l(x_m),g_n(x_m)) + d(g_n(x_m),g_n(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_b(X,Y)$ eine Cauchyfolge. Wegen der Bedingung (i) konvergiert sie dann in $B(X,Y)$. Wegen Satz 1.32 liegt der Grenzwert in $C_b(X,Y)$.

Wenn umgekehrt $\mathcal{F}$ relativkompakt ist, dann besitzt wegen Lemma 1.39 mit jeder Folge in $\mathcal{F}$ für jedes $x \in X$ auch die Folge der entsprechenden Funktionswerte eine konvergente Teilfolge. Also erfüllt $\mathcal{F}$ die Bedingung (i).

Ausserdem gibt es für jedes $x \in X$ und $\epsilon > 0$ endlich viele $f_1,\ldots,f_k$ im Abschluss von $\mathcal{F}$, so dass $B(f_1,\epsilon/3) \cup \ldots \cup B(f_k,\epsilon/3)$ den Abschluss von $\mathcal{F}$ überdeckt. Weil $f_1,\ldots,f_k$ stetig sind, gibt es $\delta_1,\ldots,\delta_k > 0$, so dass für alle $i = 1,\ldots,k$ aus $x' \in B(x,\delta_i)$ folgt $f_i(x') \in B(f(x),\epsilon/3)$. Dann gibt es für alle $f \in \mathcal{F}$ ein f_i so dass für alle $x' \in B(x,\delta)$

$$d(f(x'),f(x)) \leq d(f(x'),f_i(x')) + d(f_i(x'),f_i(x)) + d(f_i(x),f(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

gilt mit $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$. **q.e.d.**

Kapitel 2

Banachräume

2.1 Normierte Räume

Im folgenden betrachten wir Vektorräume über den reellen oder komplexen Zahlen $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Wir bezeichnen dann den entsprechenden Körper mit $\mathbb{K}$.

Definition 2.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: \quad V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllt heisst Norm. Erfüllt sie nur die beiden letzten Bedingungen, so heisst sie Halbnorm.*

(i) $\|v\| \geq 0$ *und Gleichheit nur für $v = 0$ (Positivität).*

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *für alle $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$ (Linearität).*

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(Dreiecksungleichung).*

Die zweite Eigenschaft impliziert offenbar schon, dass $\|0\| = 0$. Einen Vektorraum V zusammen mit einer Norm nennen wir normierten Vektorraum. Jede Norm induziert auf V offenbar eine Metrik. $d(v, w) = \|v - w\|$. Deshalb sind alle normierten Vektorräume auch metrische Räume. Insbesondere besitzen alle normierten Vektorräume eine Topologie, d.h. eine Klasse von offenen Mengen. Wenn die Abbildungen

$$+ : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

stetig sind, dann sprechen wir von topologischen Vektorräumen.

Satz 2.2. *Auf einem normierten Vektorraum wird durch $d(v, w) = \|v - w\|$ eine Metrik definiert. Dadurch wird der normierte Vektorraum zu einem topologischen Vektorraum.*

Beweis: Die Positivität, Symmetrie und die Dreiecksungleichung von d folgt offenbar aus den Eigenschaften (i) - (iii) der Norm. Aus der Dreieckungleichung folgt auch

$$\|v + w - (v' + w')\| = \|v - v' + w - w'\| \leq \|v - v'\| + \|w - w'\|.$$

Weil die Metrik des kartesischen Produktes gleich der Summe der Metriken ist, folgt, dass die Abbildung + stetig ist. Aus der Dreieckungleichung und der Eigenschaft (ii) folgt auch

$$\|\lambda \cdot v - \lambda' v'\| = \|\lambda v - \lambda' v + \lambda' v - \lambda' v'\| = \|(\lambda - \lambda')v + \lambda'(v - v')\|$$

$$\leq \|(\lambda - \lambda')v\| + \|\lambda'(v - v')\| = |\lambda - \lambda'|\|v\| + |\lambda'|\|v - v'\|.$$

Also ist auch die Abbildung $\cdot$ stetig. **q.e.d.**

Definition 2.3. *Zwei topologische Vektorräume V und W heissen isomorph, wenn es eine bijektive lineare Abbildung von V nach W gibt (also wenn V und W als Vektorräume isomorph sind), die die offenen Mengen des einen auf die offenen Mengen des anderen abbildet (also der Isomorphismus stetig ist).*

Satz 2.4. **(i)** *Eine lineare Abbildung A von einem topologischen Vektorraum V in einen topologischen Vektorraum W ist genau dann stetig, wenn sie in einem Punkt (z.B. Null) stetig ist.*

(ii) *Eine lineare Abbildung A von einem normierten Vektorraum V in einen normierten Vektorraum W ist genau dann stetig, wenn sie auf einer beliebigen offenen Kugel von V beschränkt ist. Dann ist sie auch Lipschitz–stetig.*

(iii) *Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ induzieren auf dem Vektorraum V genau dann die gleiche Topologie, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\frac{1}{C}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1$$

(iv) *Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum sind alle Normen paarweise zueinander äquivalent.*

(v) *Jede lineare Abbildung A von einem endlichdimensionalen normierten Vektorraum V in einen normierten Vektorraum W ist stetig.*

Beweis: (i): Sei V ein topologischer Vektorraum. Dann ist für jedes $w \in V$ die Abbildung

$$T_w : \quad V \to V, v \mapsto v + w$$

eine bijektive stetige Abbildung, deren inverse Abbildung auch stetig ist. Wenn $A : V \to W$ aber linear ist, dann gilt $A \circ T_w = T_{Aw} \circ A$. Also ist A in $v + w$ genau dann stetig, wenn A in v stetig ist.
(ii): Seien $B(v, r)$ und $B(w, R)$ zwei offene Kugeln mit $r > 0, R > 0$. Dann bildet die Abbildung $u \mapsto \frac{R}{r}(u - v) + w$ die Kugel $B(v, r)$ auf die Kugel $B(w, R)$ ab. Wegen der Linearität von A gilt aber

$$\left\| A\left(\frac{R}{r}(u-v)+w\right)\right\| \leq \frac{R}{r}\|Au\| + \frac{R}{r}\|Av\| + \|Aw\|.$$

Also ist A genau dann auf $B(v, r)$ beschränkt, wenn es auf $B(w, R)$ beschränkt ist. A ist aber genau dann in 0 stetig, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass A auf $B(0, \delta)$ beschränkt ist durch ϵ. Wegen der Linearität von A ist das äquivalent dazu, dass A auf $B(0, \frac{\delta}{\epsilon})$ beschränkt ist durch 1. Wegen (i) folgt (ii).
(iii): Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ induzieren auf V genau dann die gleiche Topologie, wenn die identische Abbildung bezüglich $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ stetig ist und bezüglich $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_1$. Wegen (ii) ist das äquivalent dazu, dass es ein $C_1 > 0$ und ein $C_2 > 0$ gibt, so dass gilt $\|v\|_2 \leq C_2$ für alle v mit $\|v\|_1 < 1$ und $\|v\|_1 \leq C_1$ für alle v mit $\|v\|_2 < 1$. Dann gilt aber wegen der Linearität für alle $v \in V$:

$$\|v\|_2 \leq \lim_{\epsilon\to 0}\left\|\frac{v}{\|v\|_1+\epsilon}\right\|_2 (\|v\|_1+\epsilon) \leq C_2\|v\|_1 \text{ und } \qquad \|v_1\| \leq C_1\|v\|_2.$$

Mit $C \geq \max\{C_1, C_2\}$ folgt $\frac{1}{C} \leq \frac{1}{C_1}$ und $C_2 \leq C$. Dann gilt auch

$$\frac{1}{C}\|v_1\| \leq \frac{1}{C_1}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C_2\|v\|_1 \leq C\|v\|_1.$$

Umgekehrt folgt aus dieser Ungleichung und $\|v\|_1 < 1$ auch $\|v\|_2 < C$ bzw. aus dieser Ungleichung und $\|v\|_2 < 1$ auch $\|v\|_1 < C$.
(iv): Sei V ein normierter Vektorraum der Dimension d. Sei $e_1, \ldots, e_d$ eine Basis von V. Dann ist die Abbildung $\mathbb{K}^d \to V, \quad x \mapsto x_1e_1 + \ldots + x_de_d$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Auf $\mathbb{K}^d$ definiert $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_d|$ die Norm des kartesischen Produktes. Wir zeigen jetzt, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf V äquivalent ist zu der Norm $\|x_1e_1 + \ldots + x_de_d\|_1 = |x|_1 + \ldots + |x_d| = \|x\|_1$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt für alle $x \in \mathbb{K}^d$:

$$\|x_1e_1 + \ldots + x_de_d\| \leq |x_1|\|e_1\| + \ldots + |x_d|\|e_d\| \leq \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_d\|\}\|x\|_1.$$

Dann folgt für alle $x, y \in \mathbb{K}^d$ aus der Ungleichung

$$\|x_1e_1 + \ldots + x_de_d\| \leq \|(x_1 - y_1)e_1 + \ldots + (x_d - y_d)e_d\| + \|y_1e_1 + \ldots + y_de_d\|$$

und der entsprechenden Ungleichung mit vertauschten x und y

$$\big|\|x_1e_1+\ldots+x_de_d\|-\|y_1e_1+\ldots+y_de_d\|\big|\leq\max\{\|e_1\|,\ldots,\|e_d\|\}\|x-y\|_1.$$

Also ist die Abbildung $\mathbb{K}^d\to\mathbb{R}, x\mapsto\|x_1e_1+\ldots+x_de_d\|$ stetig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$. Wegen Satz 1.34 nimmt diese Funktion auf der kompakten Teilmenge $\{x\in\mathbb{K}^d\mid\|x\|_1=1\}$ ihr Minimum C an. Wegen der Positivität von $\|\cdot\|$ ist $C>0$. Daraus folgt für alle $x\in\mathbb{K}^d\setminus\{0\}$:

$$C\|x\|_1\leq\left\|\frac{x_1e_1+\ldots+x_de_d}{\|x\|_1}\right\|\|x\|_1=\|x_1e_1+\ldots+x_de_d\|\leq\max\{\|e_1\|,\ldots,\|e_d\|\}\|x\|_1.$$

(v): Sei V wieder ein normierter Vektorraum der Dimension d. Sei $e_1,\ldots,e_d$ eine Basis von V. Dann gilt für alle $x\in\mathbb{K}^d$:

$$\|A(x_1e_1+\ldots+x_de_d)\|\leq|x_1|\|Ae_1\|+\ldots+|x_d|\|Ae_d\|\leq\max\{\|Ae_1\|,\ldots,\|Ae_d\|\}\|x\|_1.$$

Dann folgt (v) aus (iv). **q.e.d.**

Beispiel 2.5. (i) *: $\mathbb{K}^d$ mit den Normen*

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^d|x_i|^p\right)^{1/p} & \text{für } 1\leq p<\infty\\ \max\{|x_1|,\ldots,|x_d|\} & \text{für } p=\infty.\end{cases}$$

Die Positivität und die Linearität aller dieser Normen ist leicht nachzurechnen. Die Dreieckungleichung ist nicht so offensichtlich. Wir zeigen sie über den Umweg der Youngschen Ungleichung und der Hölderschen Ungleichung.

Die Funktion $-\ln$ *ist streng konvex, weil* $-\ln''(x)=\frac{1}{x^2}>0$. *Für alle* $x,y\in\mathbb{R}^+$ *und alle* $p,q>0$ *mit* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *gilt dann* $-\ln\left(\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y\right)\leq-\frac{1}{p}\ln(x)-\frac{1}{q}\ln(y)$. *Mit Hilfe der Monotonie von* $\exp$ *folgt dann die*

Satz 2.6. *(Youngsche Ungleichung) Seien* $p\geq 1, q\geq 1$ *mit* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Dann gilt für alle* $x>0, y>0$.

$$xy\leq\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$

Daraus lässt sich die Höldersche Ungleichung und die Minkowski Ungleichung folgern. Wir werden diese beiden Ungleichungen allerdings beide gleich im allgemeineren Fall der Folgenräume beweisen.

Satz 2.7. *(Höldersche Ungleichung) Seien $x, y \in \mathbb{K}^d$ und $p, q \geq 1SH$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, oder $p = 1$ und $q = \infty$. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Satz 2.8. *(Minkowski Ungleichung) Seien $x, y \in \mathbb{K}^d$ und $1 \leq p \leq \infty$*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Alle diese normierten Vektorräume sind als topologische Vektorräume äquivalent.

(ii) *Sei X eine Menge und Y ein normierter Raum. Dann ist der Vektorraum aller beschränkten Funktionen von X nach Y mit der Norm*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

ein normierter Vektorraum. Wir bezeichnen ihn mit $B(X, Y)$.

(iii) *Sei (X, d) ein metrischer Raum und Y ein normierter Raum. Dann ist der Unterraum von $B(X, Y)$ aller beschränkten stetigen Funktionen von X nach Y ein normierter Vektorraum. Wir wollen ihn mit $C_b(X, Y)$ bezeichnen.*

(iv) *Folgenräume d, c_0, c, ℓ^∞. Diese Räume sind die Vektorräume:*

$$\begin{array}{ll} d & = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{K}, a_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n\} \\ c_0 & = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{K} \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\} \\ c & = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{K} \text{ mit } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent } \} \\ \ell^\infty & = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{K} \text{ mit } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt } \} \end{array}$$

versehen jeweils mit der Supremumsnorm:

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Offenbar erfüllt diese Norm alle drei Bedingungen einer Norm. Weil jede konvergente Folge auch beschränkt ist haben wir die Inklusionen

$$d \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty.$$

(v) *Zuletzt betrachten wir noch folgende Teilräume von ℓ^∞. Für alle $1 \leq p < \infty$ sei*

$$\ell^p = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{K} \text{ mit } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$$

zusammen mit der Norm: $$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}.$$

Die Abbildung erfüllt offenbar die Positivität und die Linearität. Um die Dreieckungleichung zu zeigen, benutzen wir wieder die Youngsche Ungleichung und die Höldersche Ungleichung.

Satz 2.9. *(Höldersche Ungleichung für Folgen) Seien $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oder $p = 1, q = \infty$ oder $p = \infty, q = 1$. Dann gilt für alle $a \in \ell^p$ und $b \in \ell^q$ mit $a \cdot b = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $a \cdot b \in \ell^1$ und $\|a \cdot b\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q$.*

Beweis: Für $p = 1, q = \infty$ und $p = \infty, q = 1$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien $a \in \ell^p$ und $b \in \ell^q$. Wenn $\|a\|_p = 0$ oder $\|b\|_q = 0$ ist, dann gilt $a = 0$ oder $b = 0$ und die Aussage ist wieder offensichtlich. Sei also $\|a\|_p \neq 0$ und $\|b\|_q \neq 0$. Dann definieren wir die Folgen $\frac{a}{\|a\|_p}$ und $\frac{b}{\|b\|_q}$. Wegen der Youngschen Ungleichung gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{|a_n|}{\|a\|_p} \cdot \frac{|b_n|}{\|b\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_n|^q}{\|b\|_q^q}.$$

Die beiden Reihen auf der rechten Seite sind nach Voraussetzung konvergent. Also ist auch die Reihe auf der linken Seite konvergent. Dann folgt, dass

$$\frac{a \cdot b}{\|a\|_p \|b\|_q} \in \ell^1 \quad \text{und} \quad \left\| \frac{a \cdot b}{\|a\|_p \|b\|_q} \right\|_1 = \frac{1}{p} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q}{\|b\|_q^q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Daraus folgt aber auch $a \cdot b \in \ell^1$ und $\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q$. **q.e.d.**

Satz 2.10. *(Minkowski Ungleichung für Folgen) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $a, b \in \ell^p$. Dann gilt $a + b \in \ell^p$ und $\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$.*

Beweis: Für $p = 1$ oder $p = \infty$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $1 < p < \infty$. Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n + b_n|^p \leq 2^p (\max\{|a_n|, |b_n|\})^p \leq 2^p (|a_n|^p + |b_n|^p).$$

Also ist $a+b \in \ell^p$. Anstatt der Minkowskiungleichung zeigen wir die dazu äquivalente Ungleichung

$$\|a+b\|_p^p \leq (\|a\|_p + \|b\|_p)\|a+b\|_p^{p-1}.$$

Wegen der Hölderschen Ungleichung gilt nämlich mit

$$\begin{aligned}
\|a+b\|_p^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||a_n+b_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||a_n+b_n|^{p-1} \\
&\quad \left(\text{mit } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \text{ und Hölderscher Ungleichung}\right) \\
&\leq \|a\|_p \|(a+b)^{p-1}\|_q + \|b\|_p \|(a+b)^{p-1}\|_q \\
&\leq (\|a\|_p + \|b\|_p)\|a+b\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

weil $(p-1)q = p$ und $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$. **q.e.d.**

Satz 2.11. *Sei $1 \leq p < q \leq \infty$ und $a \in \ell^p$. Dann gilt $a \in \ell^q$ und $\|a\|_q \leq \|a\|_p$. Gleichheit gilt genau dann, wenn höchstens ein Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht verschwindet.*

Beweis: Für alle $a \in \ell^p \setminus \{0\}$ hat die Folge $\left(\frac{a_n}{\|a\|_p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nur Folgenglieder vom Betrag ≤ 1. Dann folgt aus $p < q < \infty$

$$\frac{|a_n|^q}{\|a\|_p^q} \leq \frac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p} \text{ und damit auch} \qquad \frac{\|a\|_q^p}{\|a\|_p^p} \leq 1 \text{ bzw.} \qquad \|a\|_q^p \leq \|a\|_p^p.$$

Wegen der Monotonie von $x \mapsto x^{1/p}$ folgt dann $\|a\|_q \leq \|a\|_p$. Gleichheit gilt offenbar nur, wenn $\frac{|a_n|}{\|a\|_q}$ nur die Werte 0 oder 1 annimmt, also wenn $a = 0$ oder alle bis auf ein a_n verschwinden. Für $q = \infty$ ist diese Ungleichung ebenfalls gültig. **q.e.d.**

Dann haben wir $\ell^p \subset \ell^q$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Weil die Folge $\frac{1}{n^r}$ mit $r > 0$ genau dann in ℓ^p liegt, wenn $p \cdot r > 1$, sind alle diese Folgenräume auch verschieden.

Definition 2.12. *(Banachraum) Ein vollständiger normierter Vektorraum heisst Banachraum.*

Satz 2.13. *Sei V ein normierter Vektorraum und $W \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird der Quotientenraum V/W aller Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $v \sim w \Leftrightarrow v - w \in W$ mit der Norm $\|[v]\| = \inf\{\|v+w\| \mid w \in W\}$ ein normierter Vektorraum. Die kanonische Abbildung $V \to V/W$, $v \mapsto [v]$ ist stetig und offen, d.h. das Bild jeder offenen Menge ist offen. Wenn V ein Banachraum ist, dann ist auch V/W ein Banachraum.*

Beweis: Die Ungleichung $\|[v]\| \geq 0$ ist klar. Wenn $\|[v]\| = 0$ gibt es eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in W, so dass $(v + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert. Weil W abgeschlossen ist, folgt $v \in W$. Die Linearität und die Dreiecksungleichung folgen dann aus der Stetigkeit der Norm und den entsprechenden Eigenschaften der Norm.

Die kanonische Abbildung $v \mapsto [v]$ ist Lipschitzstetig mit $L = 1$, also stetig. Für jedes v in einer offenen Menge $O \subset V$ gibt es eine Kugel $B(v, 2\epsilon) \subset V$. Dann gibt es für jedes $[w] \in B([v], \epsilon)$ ein $w' \in W$ mit $\|w + w' - v\| \leq 2\epsilon$. Daraus folgt $w + w' \in B(v, 2\epsilon) \subset O$ und $[w + w'] = [w]$. Also ist $B([v], \epsilon)$ im Bild von O enthalten, und damit das Bild von O offen.

Wenn V ein Banachraum ist, dann können wir für jede Cauchyfolge in V/W eine Teilfolge wählen, so dass $\|[v_n] - [v_{n+1}]\| \leq 2^{-n}$. Dann wählen wir induktive eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in W, so dass gilt $\|v_{n+1} + w_{n+1} - (v_n + w_n)\| \leq 2 \cdot 2^{-n}$. Dann ist die Folge $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}} = v_1 + w_1 + (\sum v_{n+1} + w_{n+1} - (v_n + w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V, die konvergiert. Der Grenzwert ist offenbar ein Repräsentant des Grenzwertes der Teilfolge $([v_n])_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch ein Grenzwert der ursprünglichen Cauchyfolge. **q.e.d.**

Beispiel 2.14. *Die Beispiele (i) sind vollständig.*
Aus den Sätzen 1.30 und 1.32 folgt sofort

Satz 2.15. (i) *$B(X, Y)$ ist genau dann vollständig, wenn Y vollständig ist ($X \neq \emptyset$).*

(ii) *$C_b(X, Y)$ ist genau dann vollständig, wenn Y vollständig ist ($X \neq \emptyset$).* **q.e.d.**

Im Beispiel (iv) ist ℓ^∞ wieder von der Form des Beispiels (ii) mit vollständigem $Y = \mathbb{K}$, also vollständig. Also sind die Räume d, c_0, c genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossene Teilmengen in ℓ^∞ sind. Weil jede Folge in ℓ^∞ nach dem Auswahlprinzip von Bolzano Weierstraß eine konvergente Teilfolge hat, gehört ein $a \in \ell^\infty$ genau dann nicht zu c, wenn es mindestens zwei Häufungspunkte hat. Wenn 2ϵ kleiner ist als der Abstand zwischen zwei Häufungspunkten von a, dann hat jede Folge in $B(a, \epsilon)$ jeweils einen Häufungspunkt in dem Abschluss der Kugeln mit Radius ϵ um die beiden Häufungspunkte, also wieder mindestens zwei Häufungspunkte. Dann ist das Komplement von c in ℓ^∞ offen, also c abgeschlossen. Also ist c vollständig. Wenn $a \in c \setminus c_0$ dann konvergiert a_n gegen ein Element $a_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dann konvergieren aber auch alle Folgen in $B\left(a, \frac{|a_0|}{2}\right) \subset c$ gegen einen Grenzwert in $\overline{B\left(a_0, \frac{|a_0|}{2}\right)}$. Weil $0 \notin \overline{B\left(a_0, \frac{|a_0|}{2}\right)}$ ist $c \setminus c_0$ wieder offen in c und damit c_0 vollständig. Für jede Folge $a \in c_0$ konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in d mit

$$b_{n,m} = \begin{cases} a_m & \text{für } m \leq n \\ 0 & \text{für } m > n \end{cases}$$

offenbar gegen a. Also ist der Abschluss von d gleich c_0. Damit ist d nicht vollständig.

Satz 2.16. *Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist ℓ^p vollständig.*

Beweis: Für $p = \infty$ folgt die Aussage aus Satz 1.30. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ^p. Weil für alle $b \in \ell^p$ gilt $|b_n| \leq \|b\|_p$, ist für alle $m \in \mathbb{N}$ die Zahlenfolge $(a_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Sei b definiert durch $b_m = \lim_{n\to\infty} a_{n,m}$. Für alle $\epsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $n, n' \geq N$ gilt $\|a_n - a_{n'}\|_p < \epsilon$. Dann folgt für alle $M \in \mathbb{N}$ und alle $n, n' \geq N$

$$\left(\sum_{m=1}^{M} |a_{n,m} - a_{n',m}|^p\right)^{1/p} < \epsilon. \text{ Also gilt auch } \quad \left(\sum_{m=1}^{M} |a_{n,m} - b_m|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon.$$

Weil M beliebig war, folgt $\|a_n - b\|_p \leq \epsilon$. Also konvergiert a_n gegen b. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.17. *Zeige in folgenden Schritten, dass die Vervollständigung eines normierten Vektorraumes ein Banachraum ist. Wir werden im nächsten Abschnitt diese Aussage mit einem ähnlichen Trick beweisen, wie die Konstruktion von $\bar{X}$ im Satz 1.33.*

(i) *Zeige, das die Vervollständigung des kartesischen Produktes zweier metrische Räume (X, d) und (Y, d) das kartesische Produkt der Vervollständigung von X mit der Vervollständigung von Y ist.*

(ii) *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung $+ : V \times V \to V$ und für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ die Abbildung $V \to V, v \to \lambda \cdot v$ Lipschitz–stetig sind. Folgere, dass die Vervollständigung von V ein Vektorraum ist.*

(iii) *Zeige, dass die Vervollständigung von V ein normierter Vektorraum ist.*

(iv) *Zeige, dass sich jede stetige lineare Abbildung $A : V \to W$ von einem normierten Vektorraum V in einen Banachraum W zu einer stetigen linearen Abbildung von der Vervollständigung von V nach W fortsetzen lässt. Schließe daraus, dass die Vervollständigung von V als Banachraum bis auf Isomorphie von Banachräumen eindeutig bestimmt ist.*

Beispiel 2.18. **(i)** *Sei $C_b([a, b], \mathbb{K})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{K}$. Die Abbildung*

$$\|\cdot\|_1 : C_b([a, b], \mathbb{K}) \to \mathbb{R}, f \to \int_a^b |f(x)| dx$$

definiert eine Norm. Die Linearität und die Dreiecksungleichung folgen aus den entsprechenden Eigenschaften des Integrals. Wenn eine nicht negative stetige

Funktion f an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$ nicht verschwindet, dann gibt es wegen der Stetigkeit ein $\epsilon > 0$ und ein $0 < \delta < (b - a)$, so dass $f(x) \geq \epsilon$ gilt für alle $x \in B(x_0, \delta) \cap [a, b]$. Also ist das Integral

$$\int_a^b f(x)dx \geq \epsilon \cdot \delta > 0.$$

Deshalb folgt aus

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0 \text{ auch } f = 0.$$

Dieser normierte Vektorraum ist aber nicht vollständig. Er enthält z.B. nicht die charakteristischen Funktionen von allen offenen Intervallen. Wir werden die Vervollständigung $L^1([a, b])$ nennen.

(ii) *Sei $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Dann definiert*

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|dx$$

wieder eine Norm. Auch dieser Vektorraum ist nicht vollständig. Alle Elemente der Vervollständigung lassen sich durch stetige, aber nicht notwendigerweise differenzierbare Funktionen beschreiben. Funktionenräume von dieser Art werden Sobolev Räume genannt.

(iii) *Sei $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Dann definiert*

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \cdot |x|$$

eine Norm auf $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Auch dieser Vektorraum ist nicht vollständig. Die Elemente der Vervollständigung lassen sich mit stetigen Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ identifizieren. Analog definiert die Multiplikation mit der Funktion $x \mapsto x$ eine lineare Abbildung von dem Vektorraum $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ auf sich selber. Weil diese Abbildung aber nicht beschränkt ist, ist sie auch nicht stetig.

2.2 Lineare Operatoren

Definition 2.19. *Seien V, W normierte Vektorräume. Dann sei $\mathcal{L}(V, W)$ die Menge aller linearen stetigen Abbildungen von V nach W zusammen mit den Abbildungen:*

$$+ : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(V, W), (A, B) \mapsto A + B$$

$$\begin{gathered} mit\ A+B: V\to W, v\mapsto Av+Bv \\ \cdot: \mathbb{K}\times\mathcal{L}(V,W)\to\mathcal{L}(V,W), (\lambda,A)\mapsto\lambda A \\ mit\ \lambda A: V\to W, v\mapsto \lambda Av \\ \|\cdot\|: \mathcal{L}(V,W)\to\mathbb{R}, A\mapsto\|A\| = \sup_{v\in B(0,1)\subset V}\|Av\| = \sup_{v\in\overline{B(0,1)}}\|Av\|. \end{gathered}$$

Satz 2.20. $\mathcal{L}(V,W)$ *ist ein normierter Vektorraum.*

Beweis: Aus der Linearität von A und B folgt die Linearität von $A+B$ und $\lambda\cdot A$. Wegen der Dreiecksungleichung folgt aus der Stetigkeit von A und B auch die Stetigkeit von $A+B$. Und schließlich folgt aus der Linearität und der Stetigkeit von A auch die Stetigkeit von $\lambda\cdot A$. Weil W ein Vektorraum ist, ist auch $\mathcal{L}(V,W)$ ein Vektorraum. Wegen der Linearität der Elemente von $\mathcal{L}(V,W)$ und weil W ein normierter Vektorraum ist, ist auch $\mathcal{L}(V,W)$ ein normierter Vektorraum. **q.e.d.**

Wenn $V=\mathbb{K}^n$, dann ist der Abschluss der Einheitskugel $\overline{B(0,1)}=\{v\in\mathbb{K}^n \mid \|v\|\leq 1\}$ kompakt. Deshalb gibt es für jedes $A\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n,W)$ ein $v\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}$, so dass gilt $\|A\| = \|A\frac{v}{\|v\|}\| = \frac{\|Av\|}{\|v\|}$. Weil für jeden linearen Operator $A\in\mathcal{L}(V,W)$ gilt $Av=\|v\|\cdot A\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ ist jeder lineare Operator A durch seine Werte auf $\overline{B(0,1)}$ eindeutig bestimmt. Die Norm von $\mathcal{L}(V,W)$ ist dann einfach die Supremumsnorm der stetigen Abbildung von $\overline{B(0,1)}$ nach W. Deshalb ist der normierte Vektorraum $\mathcal{L}(V,W)$ ein Unterraum von den beschränkten stetigen Funktionen auf $\overline{B(0,1)}\subset V$. So folgt z.B. aus der Konvergenz einer Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(V,W)$ die punktweise Konvergenz auf $\overline{B(0,1)}$ (und damit sogar die punktweise Konvergenz auf V). Die Konvergenz in $\mathcal{L}(V,W)$ beinhaltet sogar die gleichmäßige Konvergenz auf $\overline{B(0,1)}\subset V$.

Satz 2.21. *Seien V ein normierter Vektorraum und W ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{L}(V,W)$ ein Banachraum.*

Beweis: Wir müssen wegen Satz 2.20 nur noch zeigen, dass $\mathcal{L}(V,W)$ vollständig ist. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(V,W)$. Für jedes $v\in V$ ist wegen $\|(A_n-A_m)v\|\leq\|A_n-A_m\|\cdot\|v\|$ die Folge $(A_nv)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in W, die konvergiert. Wir definieren als den Grenzwert von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Abbildung von V nach W, die für alle $v\in V$ durch

$$A: V\to W, v\mapsto Av=\lim_{n\to\infty}A_nv$$

gegeben ist. Wir müssen dann noch zeigen, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A konvergiert und dass A linear stetig ist. Weil $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $\epsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n,m\geq N$ auch $\|A_n-A_m\|<\frac{\epsilon}{2}$ gilt. Für jedes $v\in V$ gibt es ein $m\geq N$ mit $\|Av-A_mv\|<\frac{\epsilon}{2}\|v\|$. Daraus folgt

$$\|(A-A_n)v\|\leq\|(A-A_m)v\|+\|(A_m-A_n)v\|<\left(\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\right)\|v\|\leq\epsilon\|v\|.$$

Also konvergiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A. Aus der Linearität von A_n folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|A(v+w) - (Av + Aw)\| &\leq \|(A - A_n)(v + w) - (A - A_n)v - (A - A_n)w))\| \leq \\ &\leq \|(A - A_n)(v + w)\| + \|(A - A_n)v\| + \|(A - A_n)w\|, \text{ und}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\lambda Av - A(\lambda v)\| &\leq \|\lambda(A - A_n)v - (A - A_n)(\lambda v)\| \leq \\ &\leq |\lambda|\|(A - A_n)v\| + \|(A - A_n)\lambda v\|.\end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ konvergieren die rechten Seiten aber gegen Null, so dass A linear ist. Weil die Konvergenz in $\mathcal{L}(V, W)$ aber die gleichmäßige Konvergenz auf $\overline{B(0, 1)} \subset V$ ist, können wir um die Stetigkeit von A zu zeigen wie im Satz 1.32 (iii) wieder den $\epsilon/3$-Trick benutzen. Wir benutzen aber Satz 2.4. Weil jede Cauchyfolge beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$, so dass $\|A_n\| \leq M$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für alle $v \in V$ folgt

$$\|Av\| \leq \|(A - A_n)v\| + \|A_n v\| \leq (\|A - A_n\| + M)\,\|v\|.$$

Jetzt wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|A - A_n\|$ kleiner ist als 1. Dann folgt $\|Av\| \leq (M + 1)\|v\|$ und A ist wegen Satz 2.4 stetig. **q.e.d.**

Satz 2.22. *Seien U, V und W normierte Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(U, V)$ und $B \in \mathcal{L}(V, W)$, dann ist $B \circ A \in \mathcal{L}(U, W)$ und es gilt $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. Insbesondere ist die Abbildung $\circ : \mathcal{L}(U, V) \times \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(U, W), (A, B) \mapsto B \circ A$ eine stetige Abbildung von dem kartesischen Produkt der metrischen Räume $\mathcal{L}(U, V)$ und $\mathcal{L}(V, W)$ in den metrischen Raum $\mathcal{L}(U, W)$.*

Beweis: Für alle $u \in U$ gilt $\|(B \circ A)u\| \leq \|B\| \cdot \|Au\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|u\|$. Also folgt die Ungleichung $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ aus Satz 2.4. Für zwei normierte Vektorräume V, W mit Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ ist

$$\|\cdot\|_{V\times W} : V \times W \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \|v\|_V + \|w\|_W$$

eine Norm auf $V \times W$ und induziert die Metrik des kartesischen Produktes der metrischen Räume V und W. Für $(A, B), (A', B') \in \mathcal{L}(U, V) \times \mathcal{L}(V, W)$ gilt dann aber

$$\begin{aligned}\|B \circ A - B' \circ A'\| &= \|B \circ A - B \circ A' + B \circ A' - B' \circ A'\| \\ &= \|B \circ (A - A') + (B - B') \circ A'\| \\ &\leq \|B\| \cdot \|A - A'\| + \|B - B'\| \cdot \|A'\| \\ &\leq (\|A - A'\| + \|B - B'\|)(\|B\| + \|A'\|) \\ &\leq (\|A - A'\| + \|B - B'\|)(\|B\| + \|A\| + \|A - A'\|) \\ &\leq \|(A, B) - (A', B')\|(\|B\| + \|A\| + \|(A, B) - (A', B')\|).\end{aligned}$$

Also ist diese Abbildung im Punkt $(A,B) \in \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W)$ stetig. **q.e.d.**

Wir bezeichnen die Komposition $B \circ A$ von linearen Operatoren auch einfach nur als BA.

Definition 2.23. *Sei V ein normierter Vektorraum. Dann ist $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ eine Algebra, d.h. ein Vektorraum mit einer Abbildung*

$$\circ : \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), (A,B) \mapsto AB$$

die bilinear ist, d.h. sie erfüllt

$$(A + A')B = AB + A'B \text{ und } (\lambda A)B = \lambda(AB)$$
$$A(B + B') = AB + AB' \text{ und } A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

$\mathcal{L}(V)$ ist sogar eine normierte Algebra, d.h. die Norm $\|\cdot\|$ erfüllt $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$. Wenn V ein Banachraum ist, dann ist $\mathcal{L}(V)$ eine Banachalgebra.

Satz 2.24. *(Neumannsche Reihe) Sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$ ein Operator mit $\|A\| < 1$. Dann ist $\mathbb{1} - A$ invertierbar und es gilt $(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Beweis: Weil $\|A^n\| \le \|A\|^n$ ist für $\|A\| < 1$ die Reihe $\left(\sum A^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge und es gilt

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} A^n\right\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Wegen Satz 2.21 konvergiert diese Reihe gegen einen Operator $B \in \mathcal{L}(V)$. Offenbar gilt

$$(\mathbb{1} - A)B = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = \mathbb{1}$$

und genauso

$$B(\mathbb{1} - A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = \mathbb{1}.$$

Also ist $(\mathbb{1} - A)$ invertierbar und es gilt

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Insbesondere gilt $$\left\|(\mathbb{1} - A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$ **q.e.d.**

Alle Potenzreihenfunktionen $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ definieren dann offenbar eine Abbildung

$$f : \{A \in \mathcal{L}(V) \mid \|A\| < R\} \to \mathcal{L}(V), A \mapsto f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Viele der Aussagen, die wir für Potenzreihenfunktionen auf $\mathbb{K}$ gezeigt haben, lassen sich jetzt auf Potenzreihenfunktionen auf $\mathcal{L}(V)$ ausdehnen. Aber weil im Allgemeinen $AB \neq BA$ für $A, B \in \mathcal{L}(V)$, gilt im Allgemeinen auch

$$\exp(A)\exp(B) \neq \exp(A + B).$$

Definition 2.25. *Eine Derivation einer Algebra $\mathcal{L}(V)$ ist ein Operator $D \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$, der die Bedingung $D(AB) = D(A) \cdot B + A \cdot D(B)$ erfüllt.*

Übungsaufgabe 2.26. (i) *Zeige, dass für jedes $A \in \mathcal{L}(V)$, die Abbildung*

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), B \mapsto AB - BA$$

eine Derivation ist.

(ii) *Sei V ein Banachraum und D eine Derivation von $\mathcal{L}(V)$. Zeige dass* $\exp(D)$ *ein Algebraisomorphismus ist, d.h. ein invertierbares Element von*

$$\{C \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V)) \mid C(AB) = C(A)C(B) \text{ für alle } A, B \in \mathcal{L}(V)\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}(V)).$$

(iii) *Sei V ein Banachraum. Zeige, dass für alle $B \in \mathcal{L}(V)$ gilt*

$$\exp(D_A)B = \exp(A) \cdot B \cdot \exp(-A).$$

2.3 Der Satz von Hahn–Banach

Für einen beliebigen normierten Vektorraum wissen wir bisher nicht, ob er überhaupt stetige lineare Abbildungen in einen anderen normierten Vektorraum besitzt. In diesem Abschnitt beweisen wir die Existenz genügend vieler stetiger linearen Abbildungen eines normierten Vektorraumes V nach $\mathbb{K}$.

Definition 2.27. *Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Funktion $p : V \to \mathbb{R}$ heisst sublinear, falls*

(i) $p(\lambda v) = \lambda p(v)$ *für alle* $\lambda \geq 0$ *und* $v \in V$.

(ii) *$p(v+w) \leq p(v) + p(w)$ für alle $v, w \in V$.*

Die Menge aller sublineare Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$. Darauf ist folgende Ordnungsrelation definiert:

$$p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad p(v) \leq q(v) \text{ für alle } v \in V.$$

Lemma 2.28. (i) *Jede total geordnete Teilmenge in $\mathcal{S}$ (d.h. alle Paare p, q in der Teilmenge erfüllen entweder $p \leq q$ oder $q \leq p$) besitzt eine untere Schranke.*

(ii) *Sei $W \subset V$ invariant unter der Multiplikation mit $\lambda \geq 0$ und unter der Addition $+ : W \times W \to W$, und $A : W \to \mathbb{R}$ erfülle*

$$A(\lambda w) = \lambda A(w) \quad \forall \lambda \geq 0, w \in W \quad A(v+w) = A(v) + A(w) \quad \forall v, w \in W.$$

Dann ist für jedes $p \in \mathcal{S}$, das für alle $w \in W$ $p(w) \geq A(w)$ erfüllt, die folgende Funktion wohldefiniert und sublinear:

$$p : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto p_A(v) \text{ mit } p_A(v) = \inf\{p(v+w) - A(w) \mid w \in W\}.$$

(iii) *Ein Element von $\mathcal{S}$ ist genau dann minimal, wenn es linear ist.*

Beweis: (i): Aus der Bedingung (i) folgt $p(0) = 0$ und aus der Bedingung (ii) $p(0) \leq p(v) + p(-v)$. Dann sind wegen $-p(-v) \leq p(v)$ für jedes $v \in V$ die Werte einer total geordneten Teilmenge von $\mathcal{S}$ an der Stelle v nach unten beschränkt. Das Infimum einer Teilmenge von $\mathcal{S}$ ist offenbar wieder sublinear. Also besitzt jede total geordnete Teilmenge von $\mathcal{S}$ eine untere Schranke in $\mathcal{S}$.
(ii): Wegen $p(v+w) - A(w) \geq p(w) - p(-v) - A(w) \geq -p(-v)$ ist das Infimum wohldefiniert. Zum Beweis der Sublinearität sei also zunächst $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda v) &= \inf\{p(\lambda v + w) - A(w) \mid w \in W\} \\ &= \inf\{\lambda(p(v+w') - A(w')) \mid w' \in W\} \\ &= \lambda \inf\{p(v+w') - A(w') \mid w' \in W\} = \lambda p_A(v). \end{aligned}$$

Für $\lambda = 0$ folgt aus $p(w) \geq A(w)$ und $p(0) = 0 = A(0)$ auch $p_A(0) = 0$.

Aufgrund der Definition von p_A gibt es für alle $u, v \in V$ und jedes $\epsilon > 0$ zwei $w_1, w_2 \in W$ so dass gilt

$$p_A(u) \geq p(u + w_1) - A(w_1) - \frac{\epsilon}{2} \qquad p_A(v) \geq p(v + w_2) - A(w_2) - \frac{\epsilon}{2}$$

Mit $w = w_1 + w_2$ ergibt sich durch Addition der beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} p_A(u) + p_A(v) &\geq p(u + w_1) + p(v + w_2) - A(w) - \epsilon \\ &\geq p(u + v + w) - A(w) - \epsilon \geq p_A(u + v) - \epsilon. \end{aligned}$$

Weil $\epsilon > 0$ beliebig ist, ist p_A sublinear.
(iii): Wenn p linear ist und $q \in \mathcal{S}$ mit $q \leq p$, dann gilt für alle $v \in V$
$p(v) = -p(-v) \leq -q(-v) \leq q(v) \leq p(v)$. Daraus folgt $q(v) = p(v)$.

Für alle $p \in \mathcal{S}$ und $w \in V$ erfüllen $W = \{\lambda w \mid \lambda \geq 0\}$ und $A = p|_W$ die Voraussetzungen von (ii). Das entsprechende p_A erfüllt $p_A(v) \leq p(v + w) - p(w) \leq p(v)$ für alle $v \in V$. Wenn p ein minimales Element ist muss Gleichheit gelten. Dann folgt

$$p_A(v) + p(w) \leq p(v + w) \leq p(v) + p(w).$$

Also ist jedes minimale Element von $\mathcal{S}$ linear. **q.e.d.**

Satz 2.29. *(Hahn–Banach) Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum, $W \subset V$ ein Untervektorraum, $A : W \to \mathbb{K}$ linear und $p : V \to \mathbb{R}$ sublinear mit $|A(w)| \leq p(w)$ für alle $w \in W$. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $B : V \to \mathbb{K}$ von A auf V, die beschränkt ist durch $|B(v)| \leq p(v)$ für alle $v \in V$.*

Beweis: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, W, A und p wie vorausgesetzt existiert wegen Lemma 2.28 (ii) ein $p_A \in \mathcal{S}$. Für $v \in W$ wird wegen $p(v+w) - A(w) \geq p(v+w) - A(v+w) + A(v) \geq A(v)$ das Infimum bei $w = -v$ angenommen, und stimmt auf W mit A überein. Mit $w = 0$ folgt $p_A \leq p$. Dann besitzt die Menge $\{q \in \mathcal{S} \mid q \leq p_A\}$ wegen Lemma 2.28 (i) und dem Zornschen Lemma ein minimales Element B. Wegen Lemma 2.28 (iii) ist B linear, und für $w \in W$ gilt $A(w) = -A(-w) \leq -B(-w) = B(w) \leq A(W)$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erhalten wir zunächst eine Abbildung $B_{\mathbb{R}} : V \to \mathbb{R}$, die den Realteil von A auf V fortsetzt. Dann ist $B(v) = B_{\mathbb{R}}(v) - \imath B_{\mathbb{R}}(\imath v)$ wegen $B(\imath v) = B_{\mathbb{R}}(\imath v) - \imath B_{\mathbb{R}}(-v) = \imath(B_{\mathbb{R}}(v) - \imath B_{\mathbb{R}}(\imath v)) = \imath B(v)$ eine komplexe Fortsetzung von A auf B. **q.e.d.**

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch zeigen, dass zwei schnittfremde konvexe Mengen in einem normierten Vektorraum durch eine Hyperebene getrennt werden können. Dafür benutzen wir die sogenannte Minkowskifunktion.

Definition 2.30. *Sei $A \subset V$ eine Teilmenge eines (normierten) Vektorraumes V. Dann heisst folgende (nicht notwendigerweise endliche) Funktion Minkowskifunktion:*

$$p_A : V \to [0, \infty], \ v \mapsto p_A(v) \ \textit{mit} \ p_A(v) = \inf\left\{\lambda > 0 \mid \frac{v}{\lambda} \in A\right\}.$$

Lemma 2.31. *Sei V ein normierter Vektorraum und $U \subset V$ eine konvexe Umgebung von 0, dann ist die Minkowskifunktion sublinear und beschränkt durch $C\|\cdot\|$ mit $C > 0$. Wenn U offen ist, dann ist U gleich dem Urbild von $[0, 1)$ unter p_U.*

Beweis: Aus $B(0,\epsilon) \subset U$ folgt offenbar $p_U(x) \leq \frac{1}{\epsilon}\|x\|$. Für $v, w \in V$ und $\epsilon > 0$ gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\frac{v}{\lambda} \in U \qquad \lambda \leq p_U(v) + \frac{\epsilon}{2} \qquad \frac{w}{\mu} \in U \qquad \mu \leq p_U(w) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Da U konvex ist folgt $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{v}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{w}{\mu} = \frac{v+w}{\lambda+\mu} \in U$. Dann folgt $p_U(v+w) \leq \lambda+\mu \leq p_U(v) + p_U(w) + \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $p_U(v+w) \leq p_U(v) + p_U(w)$. Offenbar ist das Urbild von $[0,1)$ unter p_U in U enthalten. Wenn U offen ist, dann gibt es für jedes $v \in U$ ein $\lambda > 1$ mit $\lambda v \in U$. Daraus folgt $p_U(v) \leq \frac{1}{\lambda} < 1$. **q.e.d.**

Satz 2.32. *Sei V ein reeller normierter Vektorraum, und X und Y zwei disjunkte offene konvexe Teilmengen von V. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung $A : V \to \mathbb{R}$, die X und Y auf disjunkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ abbildet.*

Beweis: Die Menge $X - Y = \{x - y \mid x \in X, y \in Y\}$ ist offenbar konvex und offen. Sei $v_0 \in X - Y$ und $U = \{x - y - v_0 \mid x \in X, y \in Y\}$. Weil X und Y disjunkt sind, liegt $-v_0 \notin U$. Dann ist $p_U(-v_0) \geq 1$. Dann gibt es ein lineares Funktional auf $\mathbb{R}v_0$, das bei $-v_0$ den Wert Eins annimmt und durch p_U beschränkt ist. Wegen Satz 2.29 hat diese Funktional ein stetige lineare Fortsetzung A auf V, die durch p_U beschränkt ist. Weil U offen ist, ist dann A auf $X - Y$ kleiner als $A(v_0) + \sup\{p_U(u) \mid u \in U\} \leq -1 + 1$. Also ist das Bild von X und von Y unter A disjunkt. **q.e.d.**

2.4 Der Dualraum

Definition 2.33. *Sei V ein normierter Vektorraum, dann heisst $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ der Dualraum von V.*

Satz 2.34. **(i)** *Der Dualraum eines normierten Vektorraumes ist ein Banachraum.*

(ii) *Sei $A \in \mathcal{L}(V, W)$ ein linearer stetiger Operator vom normierten Vektorraum V in den normierten Vektorraum W. Dann definiert $A' : W' \to V'$, $B \mapsto B \circ A$ einen linearen stetigen Operator in $\mathcal{L}(W', V')$. Es gilt $\|A'\| = \|A\|$.*

(iii) *Seien U, V, W normierte Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(U, V)$ und $B \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann gilt $(B \circ A)' = A' \circ B'$ in $\mathcal{L}(W', U')$.*

(iv) *Sei V ein normierter Vektorraum. Dann definiert die Abbildung*

$$i : V \to V'', \qquad v \mapsto i(v) \text{ mit } \qquad i(v) : V' \to \mathbb{K}, \qquad A \mapsto A(v)$$

eine natürliche Isometrie von V nach V''.

(v) *Seien V und W normierte Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & W \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ V'' & \xrightarrow{A''} & W'' \end{array}$$

(vi) *Für jeden normierten Vektorraum V ist der Abschluss des Bildes von $i : V \to V''$ zusammen mit der entsprechenden Isometrie von V auf den Abschluss des Bildes von i die Vervollständigung von V.*

(vii) *Die Isometrien $i_{V'} : V' \to V'''$ und $i'_V : V''' \to V'$ erfüllen $i'_V \circ i_{V'} = \mathbb{1}_{V'}$.*

Offenbar ist die duale Abbildung der identischen Abbildung von V auch die identische Abbildung von V'. Diese Beobachtung zusammen mit den den Aussagen (i)–(iii) kann man in der Sprache der Kategorien zusammenfassen zu der Aussage, dass der Dualraum ein kontravarianter Funktor ist von der Kategorie der normierten Vektorräume (mit den Morphismen der stetigen linearen Abbildungen) in die Kategorie der Banachräume (mit den Morphismen der stetigen linearen Abbildungen).

Beweis: (i) folgt aus Satz 2.21.

(ii): Wegen Satz 2.22 ist für jedes $A \in \mathcal{L}(V, W)$ auch $A' \in \mathcal{L}(W', V')$. Die Norm $\|A'\|$ ist definiert als das Supremum $\sup\{\|BA\| \mid B \in W' \text{ mit } \|B\| \le 1\}$. Mit Satz 2.22 schliessen wir $\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$. Also gilt $\|A'\| \le \|A\|$. Die umgekehrte Ungleichung zeigen wir später.

(iii): Wegen Satz 2.22 und (ii) liegt $A' \circ B' \in \mathcal{L}(W', U')$. Ein Element $C \in W'$ bildet $A' \circ B'$ auf $C \circ B \circ A$ ab, genauso wie $(B \circ A)'$.

(iv): Die Linearität von i ist klar. Aufgrund der Definition der Norm von V' gilt für alle $v \in V$ auch $\|i(v)\| \le \|v\|$. Dann liegt $i \in \mathcal{L}(V, V'')$. Wegen Satz 2.29 (Hahn–Banach) gibt es für jedes $v \in V$ ein $A \in V'$ mit $|A(v)| = \|v\|$ und $\|A\| = 1$. $\Rightarrow \|v\| \le \|i(v)\|$.

(v): Für jedes $v \in V$ und jedes $B \in W'$ gilt offenbar $A''(i(v))(B) = B \circ A(v) = i(A(v))(B)$. Das zeigt (v).

(ii): Aufgrund der Definition der Norm folgt dann $\|A''\| \ge \|A\|$. Andererseits haben wir schon gezeigt $\|A''\| \le \|A'\| \le \|A\|$. Dann folgt $\|A''\| = \|A'\| = \|A\|$.

(vi): Wegen (i) ist V'' ein Banachraum, und wegen (iv) ist $V \to V''$ eine Isometrie. Wegen (v) hat der Abschluss des Bildes von dieser Isometrie in V'' die Eigenschaften aus Satz 1.33, die die Vervollständigung des metrischen Raumes V charakterisieren.

(vii): Sei $A \in V'$ und $v \in V$. Dann gilt $i'_V \circ i_{V'}(A)(v) = i_{V'}(A)(i(v)) = A(v)$. **q.e.d.**

Definition 2.35. *Ein Banachraum V heisst reflexiv, wenn die Isometrie $i_V : V \to V''$ surjektiv ist, also ein Isomorphismus von normierten Vektorräumen ist.*

2.5 Der Satz von Baire und seine Implikationen

Definition 2.36. *(nirgends dichte Mengen) Eine Teilmenge A eines metrischen (topologischen) Raumes X heisst dicht, wenn der Abschluss von A gleich X ist. Eine Teilmenge heisst nirgends dicht, wenn das Komplement des Abschlusses dicht ist.*

Satz 2.37. *(Satz von Baire) Die abzählbare Vereinigung nirgends dichter abgeschlossener Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes hat keine inneren Punkte (d.h. wenn eine abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ von abgeschlossenen Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Kugel enthält, dann enthält ein A_n eine offene Kugel).*

Beweis: Sei eine offene Kugel $B(x_0, 2\epsilon_0)$ enthalten in der abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ der abgeschlossenen nirgends dichten Teilmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X. Wir definieren induktiv eine Folge von abgeschlossenen Kugeln $\overline{B(x_0,\epsilon_0)} \supset \overline{B(x_1,\epsilon_1)} \supset \ldots$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\overline{B(x_n,\epsilon_n)}$ in der Schnittmenge $(X \setminus A_n) \cap B(x_{n-1},\epsilon_{n-1})$ enthalten ist. Weil alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nirgends dicht sind, sind diese Schnittmengen alle nichtleere offene Teilmengen von $B(x_{n-1},\epsilon_{n-1})$. Zusätzlich können wir die Radien $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so wählen, dass sie alle $\epsilon_n < \frac{1}{n}$ erfüllen. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert, weil X vollständig ist. Der Grenzwert x ist in der Schnittmenge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B(x_n,\epsilon_n)}$ enthalten, die ihrerseits in der Schnittmenge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ enthalten ist. Also ist x auch nicht in der Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ enthalten. Andererseits ist $x \in \overline{B(x_0,\epsilon_0)} \subset B(x_0, 2\epsilon_0) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, was den Annahmen widerspricht. **q.e.d.**

Satz 2.38. *(Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) Sei V ein Banachraum und W ein normierter Raum. Dann ist jede Teilmenge $\mathfrak{a} \subset \mathcal{L}(V, W)$, die punktweise beschränkt ist, also für alle $v \in V$ beschränkte Teilmengen $\{A(v) \mid A \in \mathfrak{a}\} \subset W$ besitzt, in $\mathcal{L}(V, W)$ beschränkt.*

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir folgende abgeschlossenen Mengen $A_n = \{v \in V \mid \|A(v)\| \leq n$ für alle $A \in \mathfrak{a}\}$. Weil $\mathfrak{a}$ punktweise beschränkt ist, ist die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = V$. Wegen dem Satz von Baire gibt es dann ein eine offene Kugel in V und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle Elemente von $\mathfrak{a}$ auf der offenen Kugel beschränkt sind durch N. Weil wir jede offene Kugel durch eine affine Abbildung auf die Einheitskugel abbilden können (siehe Beweis von Satz 2.4 (ii)), gibt es ein $M > 0$ so dass alle Elemente von $\mathfrak{a}$ auf der Einheitskugel beschränkt sind durch M. **q.e.d.**

Korollar 2.39. *Sei V ein normierter Raum und $W \subset V$ eine Teilmenge, so dass für alle $B \in V'$ die Mengen $\{B(v) \mid v \in W\}$ beschränkt sind. Dann ist W beschränkt.*

Beweis: Wegen Satz 2.34 (iv) können wir W mit einer Teilmenge $\mathcal{W}$ von V'' identifizieren, und wegen Satz 2.34 (i) sind die Voraussetzungen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit für diese Teilmenge $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}(V', \mathbb{K})$ erfüllt. **q.e.d.**

Korollar 2.40. *Sei V ein Banachraum und W ein normierter Raum. Sei $\mathfrak{a} \subset \mathcal{L}(V,W)$ ein Teilmenge, so dass für alle $B \in W'$ und $v \in V$ die Mengen $\{(B \circ A)(v) \mid A \in \mathfrak{a}\}$ beschränkt sind. Dann ist $\mathfrak{a}$ beschränkt.*

Beweis: Wegen Korollar 2.39 sind für $v \in V$ die Mengen $\{A(v) \mid A \in \mathfrak{a}\}$ beschränkt. Die Behauptung folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. **q.e.d.**

Satz 2.41. *(Satz des inversen Operators) Seien V und W Banachräume und $A \in \mathcal{L}(V,W)$ bijektiv. Dann ist die Umkehrabbildung $A^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$ stetig*

Beweis: Weil A surjektiv ist, überdecken die Mengen $(\overline{A[B(0,n)]})_{n\in\mathbb{N}}$ ganz W. Dann folgt aus dem Satz von Baire, dass eine dieser Mengen $\overline{A[B(0,N)]}$ eine offene Kugel $B(w_0,\epsilon) \subset W$ enthält. Weil diese Menge invariant ist unter $w \mapsto -w$ enthält sie auch $B(-w_0,\epsilon)$. Weil diese Menge konvex ist, enthält sie auch $B(0,\epsilon)$. Aus der Linearität folgt, dass $\overline{A[B(0,1)]}$ die offene Kugel $B(0,\epsilon/N)$ enthält.

Jetzt wählen wir $\delta > 2\sum_{n\in\mathbb{N}}\delta_n$ mit $\delta_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen dem ersten Schritt existieren dann $\epsilon > 0$ und eine Folge von positiven Zahlen $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $B(0,\epsilon) \subset \overline{A[B(0,\delta/2)]}$ und $B(0,\epsilon_n) \subset \overline{A[B(0,\delta_n)]}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $w \in B(0,\epsilon) \subset W$ definieren wir induktiv eine Reihe $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $B(0,\delta)$, so dass $(A\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen w konvergiert. Wegen $B(0,\epsilon) \subset \overline{A[B(0,\delta/2)]}$, gibt es ein $v_0 \in B(0,\delta/2)$ mit $w - Av_0 \in B(0,\epsilon_1)$. Wegen $B(0,\epsilon_n) \subset \overline{A[B(0,\delta_n)]}$ gibt es dann induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $v_n \in B(0,\delta_n)$ mit $w - Av_0 - Av_1 - \ldots - Av_n \in B(0,\epsilon_{n+1})$. Wegen $\delta > 2\sum_{n\in\mathbb{N}}\delta_n$ und der Vollständigkeit von V konvergiert die Reihe $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in V gegen ein $v \in B(0,\delta)$ mit $Av = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} Av_n = w$. Also enthält $A[B(0,\delta)]$ die offene Kugel $B(0,\epsilon)$. Dann folgt die Aussage aus Satz 2.4. **q.e.d.**

Satz 2.42. *(Prinzip der offenen Abbildung) Seien V und W Banachräume und $A \in \mathcal{L}(V,W)$ surjektiv. Dann bildet A offene Mengen auf offene Mengen ab.*

Beweis: Weil A stetig ist, ist der Kern $U \subset V$ von A abgeschlossen. Die Abbildung A induziert dann eine bijektive Abbildung $B \in \mathcal{L}(V/U,W)$. Wegen dem Satz des inversen Operators ist die Umkehrabbildung B^{-1} stetig. Die Aussage folgt aus Satz 2.13.**q.e.d.**

Satz 2.43. *(Satz vom abgeschlossenen Graphen) Seien V und W Banachräume. Dann ist eine lineare Abbildung $A : V \to W$ genau dann stetig, wenn der Graph $\{(v,w) \in V \times W \mid w = A(v)\}$ abgeschlossen ist.*

Beweis: Sei $A \in \mathcal{L}(V,W)$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann konvergiert $((v_n, Av_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Der Grenzwert gehört zum Graphen. Wegen Lemma 1.6 ist der Graph abgeschlossen.

Wenn der Graph abgeschlossen ist, dann ist er ein Banachraum. Die Projektion auf die erste Komponente ist bijektiv und stetig. Wegen dem Satz vom inversen Operator ist auch die Umkehrabbildung stetig. Weil auch die Projektion auf die zweite Komponente stetig ist, ist die Komposition der Umkehrabbildung mit dieser Projektion stetig, also auch A. **q.e.d.**

Kapitel 3

Das Lebesgueintegral auf dem $\mathbb{R}^d$

3.1 Stufenfunktionen

Zunächst führen wir die Klasse der Mengen von Quadern im $\mathbb{R}^d$ ein.

Definition 3.1. *Ein Quader ist ein d–faches kartesisches Produkt von Intervallen im* $\mathbb{R}^d$

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_d = \{x \in \mathbb{R}^d | x_1 \in I_1, \ldots, x_d \in I_d\}$$

wobei $I_1, \ldots, I_d$ Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Diese können den linken und rechten Rand enthalten, bzw. nicht enthalten.

Für jeden solchen Quader definieren wir das Volumen als das Produkt der Längen aller Intervalle $I_1, \ldots, I_d$. Wenn die Intervalle alle beschränkt sind, sind alle ihre Längen endlich und das Volumen des entsprechenden Quaders ist auch endlich. Das Volumen bezeichnen wir mit $\mu(Q)$.

Definition 3.2. *Eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^d$ heisst Nullmenge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge von Quadern mit endlichem Volumen $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d$ gibt, mit*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \text{ und } \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \leq \epsilon.$$

Lemma 3.3. *Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge und $\epsilon > 0$. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ Q_n der Quader mit Zentrum x_n, dessen Kantenlängen alle gleich $\sqrt[d]{\epsilon \cdot 2^{-n}}$ sind. Dann überdeckt die Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d$. Wegen der geometrischen Reihe gilt aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon \cdot 2^{-n} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \epsilon.$$

Also gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überdeckt, und deren Gesamtvolumen nicht größer als ϵ ist. **q.e.d.**

Lemma 3.4. *Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen. Dann besitzt für jedes $\epsilon > 0$ jede Menge A_n eine Überdeckung von Quadern, deren gesamtes Volumen nicht größer ist als $\epsilon \cdot 2^{-n}$. Die Vereinigung aller dieser Quader hat dann ein gesamtes Volumen von $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon$. Also gibt es eine Überdeckung von $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ von Quadern, deren gesamtes Volumen nicht größer ist als ϵ. **q.e.d.**

Definition 3.5. *Eine Stufenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von beschränkten Quadern.*

Proposition 3.6. *Jede Stufenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten Quadern.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass je zwei Quader Q_1 und Q_2 im $\mathbb{R}^d$ eine disjunkte Vereinigung von höchstens 3^d Quadern ist. Das folgt daraus, dass zwei Intervalle $\mathbb{R}$ entweder disjunkt sind, oder eine disjunkte Vereinigung von der Schnittmenge mit den relativen Komplementen der Schnittmenge in beiden Intervallen ist. Wenn wir das auf alle Faktoren $\mathbb{R}$ im kartesischen Produkt anwenden, lassen sich zwei Quader in eine disjunkte Vereinigung von höchstens 3^d-Quadern zerlegen. **q.e.d.**

Für jede charakteristische Funktion χ_Q eines Quaders definieren wir das Integral

$$\int \chi_Q d\mu = \mu(Q).$$

Proposition 3.7. *Sei f eine Stufenfunktion und $f = \sum_i c_i \chi_{Q_i} = \sum_j d_j \chi_{R_j}$ zwei Zerlegungen in endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten Quadern. Dann ist*

$$\int f d\mu = \sum_i c_i \mu(Q_i) = \sum_j d_j \mu(R_j).$$

Beweis: Im Fall $d = 1$ ist das Komplement eines beschränkten Intervalles die disjunkte Vereinigung von zwei Intervallen. Für jedes beschränkte Intervall wird damit $\mathbb{R}$ zu einer disjunktem Vereinigung von drei Intervallen. Wählen wir von den endlich vielen beschränkten Intervallen Q_i und R_j jeweils eine der drei entsprechenden Intervalle aus, so bilden die entsprechenden Schnittmengen eine disjunkte Vereinigung von $\mathbb{R}$. Die Teilmenge aller der Schnittmengen, die in der Vereinigung $(\cup_i Q_i) \cup (\cup_j R_j)$ enthalten sind, ergibt eine disjunkte Vereinigung dieser Menge. Wenden wir für $d > 1$ diese

Zerlegung auf alle Faktoren des kartesischen Produktes $\mathbb{R}^{\times d}$ an, dann bilden die kartesischen Produkte $I_1 \times \ldots \times I_d$ von allen Kombinationen von Intervallen $I_1, \ldots, I_d$ aus dem kartesischen Produkt dieser Zerlegungen wieder eine disjunkte Vereinigung von $(\cup_i Q_i) \cup (\cup_j R_j)$. Weil die Stufenfunktion f einen eindeutigen Wert auf jedem Quader annimmt, erhalten wir eine eindeutige gemeinsame Zerlegung in eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen auf paarweise disjunkten Quadern. Wegen der Linearität genügt es die Behauptung für eine solche Zerlegung eines Quaders $I_1 \times \ldots \times I_d$ in ein kartesisches Produkt von Zerlegungen der Intervalle $I_1, \ldots, I_d$ in paarweise disjunkten Intervalle zu zeigen. Wegen dem Distributivgesetz folgt das aus dem Spezialfall mit $d = 1$. Der folgt daraus, dass die Gesamtlänge einer disjunkten Vereinigung von Intervallen gleich der Summe der Intervalllängen ist. **q.e.d.**

Wegen dieser Proposition definiert das Integral $f \mapsto \int f d\mu$ eine lineare Abbildung von dem Raum aller Stufenfunktionen nach $\mathbb{R}$.

Proposition 3.8. *Seien f und g zwei Stufenfunktionen mit $f \geq g$. Dann gilt*

$$\int f d\mu \geq \int g d\mu.$$

Beweis: Wir zerlegen die beiden Vereinigungen von Quadern der Stufenfunktion f und der Stufenfunktion g in eine gemeinsame disjunkte Vereinigung von Quadern. Auf jedem der Quader ist dann aber f größer oder gleich g. Deshalb gilt das auch für die entsprechenden Summen, die die Integrale berechnen. **q.e.d.**

3.2 Lebesgue–integrable Funktionen auf dem $\mathbb{R}^d$

Satz 3.9. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, deren Integrale $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind. Dann ist die Menge aller Punkte $\{x \in \mathbb{R}^d | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht $\}$ eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $M > 0$ eine obere Schranke von $\left(\int (f_n - f_1) d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\int f_n d\mu \leq M + \int f_1 d\mu \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist für alle $\epsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, die Menge

$$S_{n,\epsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d | f_n(x) \geq \frac{M}{\epsilon} + f_1(x) \right\}$$

eine monoton wachsende Folge von endlichen Vereinigungen von Quadern. Aus der Konstruktion einer gemeinsamen Zerlegung in eine disjunkte Vereinigung von Quadern im Beweis von Proposition 3.6 folgt, dass das relative Komplement eines Quaders in einem anderen Quader wieder eine disjunkte Vereinigung von Quadern ist. Dann ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n.\epsilon} = S_{1,\epsilon} \cup (S_{2,\epsilon} \setminus S_{1,\epsilon}) \cup (S_{3,\epsilon} \setminus S_{2,\epsilon})$$

eine abzählbare Vereinigung von disjunkten Quadraten. Weil $f_n - f_1$ positive Funktionen sind, ist das Gesamtvolumen von $S_{n,\epsilon}$ nicht größer als

$$\int \chi_{S_{n,\epsilon}} d\mu \leq \int \frac{\epsilon}{M}(f_n - f_1) d\mu = \frac{\epsilon}{M} \int (f_n - f_1) d\mu \leq \epsilon.$$

Wegen der Monotonie ist das Gesamtvolumen der abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon}$ nicht größer als ϵ. Weil die kritische Menge gleich der Schnittmenge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht } \} = \bigcap_{\epsilon>0} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} \right)$$

ist, folgt, dass diese Menge S eine Nullmenge ist. **q.e.d.**

Wir sagen nun von Aussagen, die auf dem Komplemente einer Nullmenge gelten, dass sie fast überall gelten. Also besagt der vorangehende Satz, dass jede monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen fast überall konvergiert.

Satz 3.10. *Für jede Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass A in der Menge enthalten ist, auf der die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.*

Beweis: Sei A eine Nullmenge. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung von A mit abzählbar vielen Quadern, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als 2^{-n}. Sei nun $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Vereinigung aller dieser Quader. Dann gehört jeder Punkt von A zu unendlich vielen Quadern. Also definiert die Reihe $(\sum \chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotonwachsende Folge von Stufenfunktionen, die auf A nicht konvergiert. Die Integrale $(\sum \int \chi_{Q_n} d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt durch $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1$. **q.e.d.**

Für jede monotonwachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$, können wir jetzt den Grenzwert fast überall definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{wenn}(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt ist} \\ 0, & \text{wenn } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ nicht beschränkt ist.} \end{cases}$$

Dann wollen wir $\int f d\mu$ als den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ definieren. Damit diese Definition aber konsistent nur von der fast überall definierten Funktion f abhängt, benötigen wir noch die folgenden Lemmata.

Lemma 3.11. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von nicht negativen Stufenfunktionen, die fast überall gegen Null konvergieren. Dann ist $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis: Offenbar gibt es einen kompakten Quader Q_0 außerhalb dessen f_1 verschwindet. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_n. Wegen $0 \leq f_n \leq f_1$ ist A_n eine Nullmenge in Q_0. Dann ist auch $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge. Sei B die Nullmenge aller Punkte, an denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es dann eine Überdeckung $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$ durch Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als 2ϵ. Indem wir die Kanten aller Quader um ein geeignetes $\epsilon' > 0$ verlängern, dabei aber den Mittelpunkt fest lassen, erhalten wir auch eine solche Überdeckung $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$ durch offene Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als ϵ. Für jeden Punkt $x \in Q_0 \setminus (A \cup B)$ gibt es auch ein N, so dass $f_N(x) \leq \epsilon$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt für alle $n \geq N$ auch $f_n(x) \leq \epsilon$. Weil alle f_N bei den Punkten von $Q_0 \setminus (A \cup B)$ lokal konstant sind, gibt es eine offene Überdeckung von offenen Quadern $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von $Q_0 \setminus (A \cup B)$, und eine Folge $(N_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass auf R_m für $n \geq N_m$ gilt $f_n \leq \epsilon$. Dann bilden $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zusammen mit $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Q_0. Weil Q_0 kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Wenn n größer ist als die entsprechenden endlich vielen N_m's können wir $\int f_n d\mu$ abschätzen durch

$$\int f_n d\mu \leq \epsilon(\max\{f_1(x)|x \in Q_0\} + \mu(Q_0)).$$

Auf den Quadern $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ schätzen wir f ab durch $\max\{f_1(x)|x \in Q_0\}$ und auf den offenen Quadern $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ durch ϵ. Also konvergiert $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null. **q.e.d.**

Lemma 3.12. *Seien f und g fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn fast überall gilt $f \geq g$, dann gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Beweis: Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ erfüllen die Funktionen

$$((g_m - f_n)^+)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}(g_m - f_n + |g_m - f_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

die Voraussetzungen von dem vorangehenden Lemma. Deshalb konvergieren die entsprechenden Integrale gegen Null. Weil

$$g_m - f_n \leq (g_m - f_n)^+$$

gilt, folgt aus Proposition 3.8 und Lemma 3.11

$$\int g_m d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq 0.$$

Dann gilt aber auch $$\lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$ **q.e.d.**

Aus Lemma 3.12 folgt, dass wir das Integral auf die Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen konsistent fortsetzen können. Seien nämlich $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsenden Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwerte fast überall übereinstimmen, dann können wir Lemma 3.12 sowohl auf diese Folge, als auch auf die vertauschten Folgen anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Definition 3.13. *Sei $L^1(\mathbb{R}^d)$ die Menge der Äquivalenzklassen von fast überall definierten Funktionen f, für die es monoton wachsende Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int h_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass fast überall gilt*

$$f = \lim_{n\to\infty} g_n - \lim_{n\to\infty} h_n.$$

Hierbei werden zwei Funktionen miteinander identifiziert, wenn sie fast überall miteinander übereinstimmen.

Satz 3.14. *(Eigenschaften der Lebesgue-integrablen Funktionen)*

(i) *$L^1(\mathbb{R}^d)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und das Integral über Stufenfunktionen induziert eine lineare Abbildung $\int : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, f \to \int f d\mu$*

(ii) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ fast überall nicht negativ ist, dann gilt auch $\int f d\mu \geq 0$.*

(iii) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist auch $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu$.*

Beweis: (i): Seien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn die Grenzwerte

$$g(x) - h(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) - \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

fast überall mit den Grenzwerten von

$$\tilde{g}(x) - \tilde{h}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) - \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(x)$$

übereinstimmen, dann stimmen auch die Funktionen $g(x)+\tilde{h}(x)$ und $\tilde{g}(x)+h(x)$ fast überall überein und sind fast überall auch die Grenzwerte von

$$(g_n+\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bzw. } (\tilde{g}_n+h_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dann folgt aus Lemma 3.12

$$\int(g+\tilde{h})d\mu=\int gd\mu+\int\tilde{h}d\mu=\int\tilde{g}d\mu+\int hd\mu=\int(\tilde{g}+h)d\mu.$$

Daraus folgt wegen der Linearität des Integrals

$$\int(g-h)d\mu=\int gd\mu-\int hd\mu=\int\tilde{g}d\mu-\int\tilde{h}d\mu=\int(\tilde{g}-\tilde{h})d\mu.$$

Deshalb definiert $\int$ eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$. Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für Folgen und der Linearität des Integrals auf Stufenfunktionen.
(ii): Wenn $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen sind, so dass fast überall $\lim_{n\to\infty}g_n-\lim_{n\to\infty}h_n$ nicht negativ ist, dann ist auch fast überall $g=\lim_{n\to\infty}g_n\geq\lim_{n\to\infty}h_n=h$. Aus Lemma 3.12 folgt dann $\int gd\mu\geq\int hd\mu$ bzw. $\int(g-h)d\mu\geq 0$.
(iii): Sowohl die Minima als auch die Maxima von zwei monoton wachsenden Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen sind wieder monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn f fast überall die Differenz $g-h$ der Grenzwerte der monoton wachsenden Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen ist, dann ist $|f|$ fast überall die Differenz $\tilde{g}-\tilde{h}$ der Grenzwerte der monoton wachsenden Folgen $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\max\{g_n,h_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\min\{g_n,h_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Also ist $|f|\in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wegen (ii) folgt aus

$$-|f|\leq f\leq|f| \text{ auch } -\int|f|d\mu\leq\int fd\mu\leq\int|f|d\mu \text{ bzw. } \left|\int fd\mu\right|\leq\int|f|d\mu.$$

q.e.d.

Satz 3.15. *Eine beschränkte Funktion, die außerhalb einer beschränkten Menge verschwindet und deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bildet, gehört zu $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis: Wir wählen einen Quader $Q\subset\mathbb{R}^d$, außerhalb dessen die Funktion verschwindet. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ teilen wir jede der d-Kanten des Quaders in 2^n gleichlange Abschnitte. Dadurch wird der Quader jeweils eine disjunkte Vereinigung von $2^{d\cdot n}$ Quadern. Dann sei f_n die Stufenfunktion, die auf jedem der 2^{dn} Quader gleich dem Infimum der entsprechenden Funktionswerte von f ist. Offenbar ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, deren Integrale durch $\|f\|_\infty \cdot \mu(Q)$ beschränkt sind. An allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}^d$, an denen f stetig ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x \in B(x_0, \delta)$ folgt $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$. Dann gibt es aber auch ein $N \in \mathbb{N}$, so dass der Durchmesser von Q kleiner ist als $2^N \delta$. Für alle $n \geq N$, ist dann der Teilquader der 2^{dn} Teilquader von Q, der x_0 enthält, in $B(x_0, \delta)$ enthalten. Deshalb gilt dann

$$f(x_0) - \epsilon < f_n(x_0) \leq f(x_0).$$

Also konvergiert $(f_n(x_0))$ gegen $f(x_0)$. Weil die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann fast überall gegen f. **q.e.d.**

3.3 Der Satz von Fubini

Für jeden Quader Q in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ und jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \chi_Q(x, y)$ eine Stufenfunktion auf $\mathbb{R}$. Wenn wir die Funktion integrieren erhalten wir eine Stufenfunktion auf dem $\mathbb{R}^d$:

$$\int \chi_Q(x, y) d\mu(y) = \begin{cases} \text{Länge der Kante in der Dimension } d+1 \text{ von } Q, \\ \text{wenn es ein } y \in \mathbb{R} \text{ gibt mit } (x, y) \in Q. \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Also ist

$$\int \left(\int \chi_Q(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \mu(Q).$$

Wegen der Linearität des Integrals definiert die Abbildung $\int d\mu(y)$ also eine lineare Abbildung von den Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$. Und für jede Stufenfunktion f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass diese Abbildung eine Abbildung

$$\int d\mu(y) : L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}^d)$$

induziert, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ gilt

$$\int \left(\int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Wenn $f \geq g$ zwei Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ sind, dann erfüllten für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die entsprechenden Stufenfunktionen $f_x : y \to f(x,y)$ bzw. $g_x : y \to g(x,y)$ auch $f_x \geq g_x$. Wegen Proposition 3.8 gilt für die Integrale auch

$$\int f(x,y)d\mu(y) \geq \int g(x,y)d\mu(y).$$

Also definiert $\int d\mu(y)$ eine lineare monotone Abbildung von den Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$. Damit diese Abbildungen eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$ induziert, müssen zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Stufenfunktionen, die fast überall übereinstimmen, auch auf zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Stufenfunktionen abgebildet werden, die fast überall übereinstimmen.

Lemma 3.16. *Sei $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ eine Nullmenge. Dann ist fast überall in $x \in \mathbb{R}^d$, die Menge $S_x = \{y \in \mathbb{R} | (x,y) \in S\}$ eine Nullmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis: Wegen Satz 3.10 gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$von Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ mit beschränkten Integralen, die auf S divergiert. Dann sind auch die entsprechenden Integrale $(\int f_n d\mu(y))_{n\in\mathbb{N}}$ über $\mathbb{R}$ monoton wachsende Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen auf $\mathbb{R}^d$. Wegen Satz 3.9 konvergieren die entsprechenden Integrale dann fast überall auf $x \in \mathbb{R}^d$. Für alle $x \in \mathbb{R}^d$, für die die Integrale konvergieren, sind die entsprechenden Einschränkungen auf $\{x\} \times \mathbb{R}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}$. Wegen Satz 3.9 sind also für alle $x \in \mathbb{R}^d$, so dass die Integrale über $\mathbb{R}$ konvergieren, die Mengen S_x Nullmengen. **q.e.d.**

Proposition 3.17. *Die Integration über $\mathbb{R}$ induziert eine monotone Abbildung $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ gilt*

$$\int \left(\int f(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Beweis: Weil die Integration über $\mathbb{R}$ eine monotone lineare Abbildung von den Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$ definiert und wegen Lemma 3.16, induziert sie eine Abbildung von den Äquivalenzklassen von den Grenzwerten von monoton wachsenden Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die entsprechenden Äquivalenzklassen auf $\mathbb{R}^d$. Wegen der Konstruktion des Lebesgueintegrals induziert sie also auch eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$. Weil für alle Stufenfunktionen f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\int f(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

gilt das auch für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$. **q.e.d.**

Die Argumente zeigen die analoge Aussage auch für die vertauschten Faktoren $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Wenn wir die mehrfach anwenden erhalten wir also

Korollar 3.18. *(Satz von Fubini) Für alle Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'})$ gilt*

$$\int \left(\int f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

q.e.d.

Mit dem Satz von Fubini und dem Lebesguekriterium können wir jetzt auch Integrale auf dem $\mathbb{R}^d$ ausrechnen. Als erstes können wir für fast alle $(x_2, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^d$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1$ ausrechnen. Dabei können wir die Methoden der eindimensionalen Integration, wie wir sie bei dem Riemannintegral kennen, benutzen. Dann integrieren wir genauso über $dx_2, \ldots, dx_d$ bis wir schließlich haben

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_d.$$

Wir können die Reihenfolge dieser eindimensionalen Integrale beliebig permutieren.

3.4 Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt werden wir drei Aussagen darüber beweisen, wann Grenzwertbildungen mit der Integration vertauschen. Als erstes werden wir die Konvergenz von monotonen Folgen mit beschränkten Integralen beweisen.

Satz 3.19. *(Satz der Monotonen Konvergenz von Beppo Levi) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion f in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Durch Übergang zu $(\pm f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir annehmen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen mit beschränkten Integralen ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $(\tilde{g}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass fast überall gilt

$$f_n = \lim_{m\to\infty} \tilde{g}_{nm} - \lim_{m\to\infty} \tilde{h}_{nm}.$$

Die entsprechenden Folgen der Integrale $(\int \tilde{g}_{nm} d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\int \tilde{h}_{nm} d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $M(n) \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $m, m' \geq M(n)$ gilt

$$\left| \int \tilde{h}_{nm} d\mu - \int \tilde{h}_{n,m'} d\mu \right| \leq 2^{-n}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien h_{nm} und g_{nm} induktiv definiert durch

$$h_{nm} = \begin{cases} h_{n-1m} & \text{für } m < M(n) \\ \tilde{h}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m} & \text{für } m \geq M(n) \end{cases} \quad \text{und} \quad g_{nm} = \tilde{g}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m}$$

mit $h_{0m} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Weil für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folgen $(\tilde{h}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, bestehen die Folgen $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ nur aus nicht negativen Funktionen. Weil die Folgen $(\tilde{g}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, sind auch die Folgen $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(h_{nm})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Aufgrund der Wahl von $M(n)$ sind die Integrale $(\int h_{nm} d\mu - \int h_{n-1m} d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch 2^{-n}. Also sind alle Integrale $(\int h_{nm} d\mu)_{n,m\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch 1. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Integrale $(\int g_{nm} d\mu)_{n,m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $g_n = \lim_{m\to\infty} g_{nm}$ und $h_n = \lim_{m\to\infty} h_{nm}$ und

$$\tilde{g}_m = \max\{g_{1m}, \ldots, g_{mm}\} \text{ und } \tilde{h}_m = \max\{h_{1m}, \ldots, h_{mm}\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ auch fast überall $f_n = g_n - h_n$. Außerdem ist die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall monoton wachsend und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch. Offenbar sind $(\tilde{g}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Seien $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ die entsprechenden Grenzwerte. Für $n \leq m$ gilt

$$g_{nm} \leq \tilde{g}_m \text{ und } h_{nm} \leq \tilde{h}_m.$$

Also gilt für die entsprechenden Grenzwerte $m \to \infty$ fast überall

$$g_n \leq \tilde{g} \text{ und } h_n \leq \tilde{h}.$$

Weil $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall monoton wachsende Folgen sind, gilt fast überall

$$\tilde{g}_m \leq \max\{g_1, \ldots, g_m\} \leq g_m \text{ und } \qquad \tilde{h}_m \leq \max\{h_1, \ldots, h_m\} \leq h_m.$$

Also gilt auch fast überall $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$ bzw. $f = \tilde{g} - \tilde{h} = g - h$. Dann folgt aus Lemma 3.12

$$\int f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \left(\tilde{g}_m - \tilde{h}_m\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (g_n - h_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

q.e.d.

Korollar 3.20. *(Norm $\|\cdot\|_1$) Auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ definiert $\|\cdot\| : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_1 = \int |f| d\mu$ eine Norm.*

Beweis: Die Dreiecksungleichung und die Eigenschaft

$$\|\lambda f\|_1 = \int |\lambda| \cdot |f| d\mu = |\lambda| \cdot \int |f| d\mu = |\lambda| \|f\|_1$$

folgt aus der Monotonie und der Linearität des Lebesgueintegrals. Zu zeigen bleibt noch, dass aus $\|f\|_1 = 0$ folgt $f = 0$ fast überall. Sei also $\int |f| d\mu = 0$. Dann konvergiert wegen dem Satz der monotonen Konvergenz die Folge $(n|f|)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall. Also gilt auch fast überall $|f| = 0$. **q.e.d.**

Korollar 3.21. *(Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass fast überall gilt $|f_n| \le k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergiert, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\int f d\mu$.*

Beweis: Seien $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$g_{nm} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\} \text{ und } h_{nm} = \max\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind wegen den Eigenschaften des Lebesgueintegrals $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Folgen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit durch $\int k d\mu$ beschränkten Integralen, und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Funktionen mit durch $\int k d\mu$ beschränkten Integralen. Also konvergieren diese Folgen gegen Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

$$g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\} \text{ und } h_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$$

sind monotone Folgen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkter Integralen. Also konvergieren fast überall $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f. Dann gilt aber auch

$$\int g_n d\mu \le \int f_n d\mu \le \int h_n d\mu \text{ und } \qquad \int f d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \le \int f d\mu.$$

q.e.d.

Korollar 3.22. *(Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^d)$, Satz von Riesz-Fischer) $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist mit $\|\cdot\|_1$ ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_m})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_1 \le 2^{-m}$. Die Reihe $\left(\sum_{m=1}^n \left|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt dann die Voraussetzungen des Satzes über die Monotone Konvergenz. Also konvergiert sie fast überall gegen eine Funktion $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann konvergiert aber auch die Folge $(f_{n_m} - f_{n_1})_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall und erfüllt mit $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ die Voraussetzungen von Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz. Dann konvergiert auch die Teilfolge gegen einen Grenzwert $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, konvergiert $(\|f_n - f\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null, und damit auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f. **q.e.d.**

Satz 3.23. *(Fatou's Lemma) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ von fast überall nicht negativen Funktionen, die fast überall gegen f konvergieren. Wenn $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}_0} \int f_{n+m} d\mu.$$

Beweis: Sei wieder $g_{mn} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\}$. Dann erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes über die Monotone Konvergenz. Also konvergieren diese Folgen gegen $(g_n)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$. die Folgen $(g_n)_{m\in\mathbb{N}}$ erfüllen wieder die Voraussetzungen des Satzes über die Monotone Konvergenz und konvergieren fast überall gegen f. Also gilt auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und für alle $m \in \mathbb{N}_0$ $f_{n+m} \geq g_n$. Daraus folgt $\int f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n d\mu$ und $\int f d\mu \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{m\in\mathbb{N}_0} \int f_{n+m} d\mu$. **q.e.d.**

3.5 Messbare Mengen und Maße

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wann wir eine Lebesgue–integrable Funktion über eine Teilmenge integrieren können. Das führt dann zu einer allgemeineren Definition vom Volumen von sogenannten messbaren Mengen. Dieses Volumen heisst Maß.

Definition 3.24. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heisst messbar, wenn für jede nicht negative Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ das Produkt $f \cdot \chi_A$ mit der charakteristischen Funktion von A Lebesgue–integrabel ist.*

Für messbare Mengen A bilden die Produkte von Lebesgue–integrablen Funktionen mit der charakteristischen Funktion χ_A von A den Teilraum von $L^1(\mathbb{R}^d)$ aller Lebesgue–integrablen Funktionen, die außerhalb von A verschwinden. Als diesen Teilraum definieren wird den Raum $L^1(A)$ aller Lebesgue–integrablen Funktionen auf A

Definition 3.25. *Für messbare Teilmengen A von $\mathbb{R}^d$ sei $L^1(A) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ der Teilraum aller Lebesgue–integrablen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$, die ausserhalb von A verschwinden.*

Satz 3.26. **(i)** *Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.*

(ii) *Die abzählbare Schnittmenge von messbaren Mengen ist messbar.*

(iii) *Jede offene Menge ist messbar.*

Beweis: (i) Weil die charakteristische Funktion des Komplements gerade 1 minus der charakteristischen Funktion ist, folgt (i) daraus, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$ ein Vektorraum ist.
(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Mengen und f eine nicht negative Funktion in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Folge $\left(f\prod\limits_{k=1}^{n}\chi_{A_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Wegen dem Satz der Monotonen Konvergenz konvergiert sie in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Der Grenzwert stimmt fast überall mit $f\chi_A$ überein, wobei $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
(iii) Jeder Quader ist messbar, weil die Multiplikation einer Stufenfunktion mit der charakteristischen Funktion eines Quaders eine Stufenfunktion ergibt. Die Menge aller offenen Quader mit rationalen Zentren und rationalen Kantenlängen ist abzählbar. Jeder Quader ist offenbar messbar. Weil aber jede offene Menge U gleich der Vereinigung aller der offenen Quader ist, deren Zentren und Kantenlängen in $\mathbb{Q}^d$ liegen, und die in U liegen, folgt (iii) aus (i) und (ii) und den de Morganschen Regeln. **q.e.d.**

Definition 3.27. *Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X heisst σ–Algebra, wenn diese Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ unter Komplementbildung und dem Schnitt von abzählbar vielen Elementen von $\mathcal{B}$ abgeschlossen ist. Wenn X ein metrischer Raum ist, dann heissen die Elemente der kleinsten σ–Algebra, die alle offenen (und abgeschlossenen) Mengen enthält, Borelmengen.*

Definition 3.28. *Sei $\mathcal{B}$ eine σ–Algebra auf der Menge X. Dann heisst $\mu : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_0^+$ Maß, wenn für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{B}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Satz 3.29. *(Lebesguemaß) Seien $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borelmengen von $\mathbb{R}^d$. Dann definiert*

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \bar{\mathbb{R}}_0^+, \qquad A \mapsto \int \chi_A d\mu$$

ein Maß auf den Borelmengen des $\mathbb{R}^d$, also ein Borelmaß.

Beweis: Wegen Satz 3.26 sind alle Borelmengen messbar. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen. Für jede nichtnegative Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist die Folge

$$(gf_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(g\left(1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - \chi_{A_k})\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton wachsende Folge von Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Also konvergiert die Folge $(gf_n)_{n\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion gf in $L^1(\mathbb{R}^d)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Wenn wir diese Aussage auf die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der charakteristischen Funktionen $g_n = \chi_{B(0,n)}$ von $B(0,n)$ anwenden, dann konvergiert die entsprechenden Folge $(g_f)_{n\mathbb{N}}$ entweder gegen eine Lebesgue–integrable Funktion, und $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\right)$ ist endlich, oder das Maß der disjunkten Vereinigung der Borelmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist undendlich. In beiden Fällen folgt die σ–Additivität aus den Rechenregeln für Folgen. **q.e.d.**

Definition 3.30. *Eine Funktion $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heisst messbar, wenn für alle nicht negativen Funktionen $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ auch die Funktion* $\min(g, \max(-g, f)) \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 3.31. **(i)** *Alle stetigen und Lebesgue–integrablen Funktionen sind messbar.*

(ii) *Wenn f und g messbare Funktionen sind, dann sind auch $|f|$ und $\lambda f + \mu g$ messbare Funktionen mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

(iii) *Wenn eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen fast überall gegen eine Funktion f konvergiert, dann ist auch f messbar.*

Beweis: (i): Für jede stetige Funktion f und jeden Quader Q ist wegen Satz 3.15 das Produkt von f mit der charakteristischen Funktion von Q messbar. Dann liegt für jede nicht–negative Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ auch das Produkt von $\min(g, \max(-g, f))$ mit einer charakteristischen Funktion eines Quaders in $L^1(\mathbb{R}^d)$). Wegen Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz liegt auch $\min(g, \max(-g, f))$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Also ist jede stetige Funktion messbar. Jede Lebesgue–integrable Funktion ist wegen Satz 3.14 messbar.
(ii): Wegen Satz 3.14 ist für jede messbare Funktion f auch die Funktion $|f|$ messbar. Weil für alle nicht negativen $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ die Folgen $(\min(nh, \max(-nh, f)))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\min(nh, \max(-nh, g)))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f bzw. g konvergieren, sind wegen Satz 3.14 und Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz für messbar f und g und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch $\lambda f + \mu g$ messbar.
(iii): folgt aus Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz. **q.e.d.**

Satz 3.32. *Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *Die Funktion f ist messbar.*

(ii) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$ messbar.*

(iii) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq a\}$ messbar.*

(iv) *Für alle* $a \in \mathbb{R}$ *sind die Mengen* $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a\}$ *messbar.*

(v) *Für alle* $a \in \mathbb{R}$ *sind die Mengen* $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > a\}$ *messbar.*

(vi) *Für alle* $g \geq h$ *in* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *liegt die Funktion* $\min(g, \max(f, h))$ *in* $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Beweis (i)⇒(ii): Die Folge $n\,(\max(a + 1/n, f) - \max(a, f))$ konvergiert offenbar gegen die charakteristische Funktion der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$. Also folgt (i) aus Lemma 3.31.
(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇔(v): Wegen Satz 3.26 sind die Aussagen (ii) und (iv) und die Aussagen (iii) und (v) äquivalent. Weil gilt $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\}$ sind auch die Aussagen (ii) und (iv) äquivalent.
(v)⇒(vi): Wenn eine Funktion f die äquivalenten Bedingungen (ii)–(v) erfüllt, dann gibt es offenbar eine Folge $(f_n)_{n\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n nur endlich viele Werte in $[-n, n]$ annimmt und die Ungleichung $\|f_n - \min(n, \max(f, -n))\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ erfüllt. Für alle $g \geq h$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegen die Funktionen $\min(g, \max(f_n, h))$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und konvergieren fast überall gegen $\min(g, \max(f, h))$. Wegen Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz liegt auch $\min(g, \max(f, h))$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Also folgt aus einer der äquivalenten Aussagen (ii)–(v) die Aussage (vi).
(vi)⇒(i): klar. **q.e.d.**

3.6 Die Räume $L^p(\mathbb{R}^d)$

Eine komplex–wertige Funktion ist genau dann Lebesgue–integrabel bzw. messbar, wenn sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil Lebesgue–integrabel bzw. messbar sind. Dies ist offenbar dazu äquivalent, dass der Absolutbetrag der Funktion Lebesgues–integrabel bzw. messbar ist. Aus Satz 3.31 folgt, dass für jede messbare Funktionen f und g auch die Funktionen $|f|^p$ und fg messbar sind.

Definition 3.33. *Für alle* $1 < p < \infty$ *sei* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *die Menge aller Äquivalenzklassen von fast überall definierten messbaren Funktionen von* $\mathbb{R}^d$ *nach* $\mathbb{K}$, *für die die Funktion* $|f|^p$ *Lebesgue–integrabel ist. Der Raum* $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *ist definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren beschränkten Funktionen von* $\mathbb{R}^d$ *nach* $\mathbb{K}$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $p = 1$ stimmt diese Definition mit den Lebesgues–integrablen Funktionen überein.

Satz 3.34. *Für alle* $1 \leq p \leq \infty$ *ist* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *zusammen mit der Abbildung*

$$\|\cdot\|: \quad L^p(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{C \in \mathbb{R}_0^+ \mid |f| \leq C \text{ a.e.}\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

ein normierter Vektorraum. Für $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ *und* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *und* $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *gilt* $fg \in L^r(\mathbb{R}^d)$ *und die Höldersche Ungleichung:* $\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Die Dreiecksungleichung der Norm $\|\cdot\|_p$ wird wieder Minkowski–Ungleichung genannt: für alle $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt $f + g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Beweis: Wir beweisen zuerst die Höldersche Ungleichung. Indem wir zu den Funktionen $|f|^r$ und $|g|^r$ übergehen anstatt der Funktionen f und g, und den Exponenten 1, $\frac{r}{p}$ und $\frac{r}{q}$ anstatt r, p und q, genügt es den Fall $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ für nicht–negative reelle Funktionen zu betrachten. Es gilt nämlich $\|f\|_p^r = \||f|^r\|_{\frac{p}{r}}$ bzw. $\|g\|_q^r = \||g|^r\|_{\frac{q}{r}}$. Für $p = 1$, $q = \infty$ bzw. $p = \infty$, $q = 1$ folgt die Höldersche Ungleichung aus den Eigenschaften der Lebesgues–integrablen Funktionen. Für $f = 0$ oder $g = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $f \neq 0$, $g \neq 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Die Youngsche Ungleichung ergibt für die Funktionen $\frac{|f|}{\|f\|_p}$ und $\frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \text{ a.e.}$$

Wegen $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ ist die rechte Seite Lebesgues–integrabel und das Integral gleich 1. Also ist auch die linke Seite Lebesgues–integrabel und das Integral gleich 1. Daraus folgt $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Wegen Korollar 3.20 erfüllen die Abbildungen $f \mapsto \|f\|_p$ die Positivität. Die Linearität ist offensichtlich. Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Dreieckungleichung schon gezeigt. Sei also $1 < p < \infty$ und $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Offenbar gilt für $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ fast überall $|f+g|^p \leq 2^p \max^p\{|f|, |g|\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$. Also liegt $f + g$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Die Höldersche Ungleichung ergibt für die Funktionen $|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \leq |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)$ mit $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Leftrightarrow (p-1)q = p$

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^q(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Daraus folgt die Minkowski Ungleichung. **q.e.d.**

Satz 3.35. *(Satz von Riesz Fischer) Für alle* $1 \leq p \leq \infty$ *ist* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *ein Banachraum.*

Beweis: Sei zunächst $1 \leq p < \infty$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ die $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_p \leq 2^{-m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt. Wegen dem Satz der Monotonen Konvergenz konvergiert dann die Folge $(|f_{n_m}|^p - |f_{n_1}|^p)$ zu einer Lebesgues–integrablen Funktion.

Auf einer messbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ mit endlichen Volumen folgt aus der Hölderschen Ungleichung $\|f\|_1 \leq \|f\|_p \mu^{1-\frac{1}{p}}(A)$ für alle $f \in L^p(A)$. Deshalb konvergiert auch die Folge der Einschränkungen $(f_{n_m}|_A)_{m\in\mathbb{N}}$ in $L^1(A)$. Aus Satz 3.31 folgt dass die Teilfolge gegen eine messbare Funktion f konvergiert. Weil $|f|^p$ beschränkt ist durch den

Grenzwert der Lebesgues integrablen Funktionen $(|f_{n_m}|)_{m\in\mathbb{N}}$ liegt f in $L^p(\mathbb{R}^d)$, und die Teilfolge konvergiert gegen f. Weil die ursprüngliche Folge eine Cauchyfolge ist, konvergiert die ganze Folge gegen den Grenzwert der Teilfolge.

Für $p = \infty$ ist die Aussage klar, weil die Aussage klar. **q.e.d.**

Definition 3.36. *Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ und alle $1 \leq p \leq \infty$ sei $L^p(A)$ der Unterraum von $L^p(\mathbb{R}^d)$ aller Äquivalenzklassen von Funktionen, die ausserhalb von A verschwinden.*

Offenbar ist für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ und alle $1 \leq p \leq \infty$ der Unterraum $L^p(A) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ abgeschlossen.

Korollar 3.37. *Für messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(A)$ ein Banachraum.* **q.e.d.**

Satz 3.38. *Für alle messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und alle $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist folgende Abbildung eine Isometrie:*

$$j : L^q(A) \to \mathcal{L}(L^p(A), \mathbb{K}), \quad g \mapsto j(g) \textit{ mit } \quad j(g) : L^p(A) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int\limits_A fg d\mu.$$

Beweis: Für messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist j wegen der Hölderschen Ungleichung Lipschitz–stetig mit $L = 1$. Wir definieren f so, dass im Beweis der Hölderschen Ungleichung die Youngsche Ungleichung eine Gleichheit wird. Sei also

$$f = \frac{|g|^{\frac{q}{p}+1}}{g} = \frac{|g|^{q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}}{g} = \frac{|g|^q}{g}$$

Für $1 \leq q < \infty$ ist f messbar und liegt in $L^p(A)$. Es gilt sogar $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$ und $\|fg\|_1 = \|g\|_q^q$. Daraus folgt

$$\|g\|_q = \|g\|_q^{q-q\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \frac{\|gf\|_1}{\|f\|_p} \leq \|j(g)\| \leq \|g\|_q \text{ für alle } g \in L^q(A) \setminus \{0\}.$$

Also ist für $1 < p < \infty$ die Abbildung j eine Isometrie. Für $p = 1$, $q = \infty$ und jedes $\epsilon > 0$ ist die Menge aller $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\}$ keine Nullmenge aber messbar ist. Auf allen Funktionen $f \in L^1(A)$, die außerhalb dieser Menge verschwinden, nimmt $|j(g)|$ größere Werte als $(\|g\|_\infty - \epsilon)\|f\|_1$ an. Also gilt für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $g \in L^\infty(A) \setminus \{0\}$ auch $\|g\|_\infty - \epsilon \leq \|j(g)\| \leq \|g\|_\infty$. Dann ist auch für $p = 1$ j eine Isometrie. **q.e.d.**

Kapitel 4

Hilberträume

4.1 Hilberträume

Definition 4.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine hermitesche Form $\langle , \rangle$ ist eine Abbildung von $V \times V$ nach $\mathbb{K}$, die für alle $v, v', w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgendes erfüllt:*

(i) $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$

(ii) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$

(iii) $\langle v, w\rangle = \langle\overline{w, v}\rangle$.

Aus diesen Eigenschaften folgt sofort

$$\begin{aligned}
\langle v, w + w'\rangle &= \langle\overline{w + w', v}\rangle = \langle\overline{w, v}\rangle + \langle\overline{w', v}\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle \\
\langle v, \lambda w\rangle &= \langle\overline{\lambda w, v}\rangle = \overline{\lambda}\langle\overline{w, v}\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle \\
\langle v, v\rangle &= \langle\overline{v, v}\rangle \text{ oder } \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Die hermitesche Form heisst positiv definit, wenn für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt $\langle v, v\rangle > 0$. Eine positiv definite Hermitesche Form heisst inneres Produkt oder Skalarprodukt.

Beispiel 4.2. **(i)** *Auf $\mathbb{K}^n$ ist $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i$ ein Skalarprodukt.*

(ii) *Auf l^2 ist $\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b}_n$ ein Skalarprodukt.*

(iii) *Auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}d\mu$ ein Skalarprodukt.*

Satz 4.3. *(Cauchy–Schwarzsche Ungleichung). Sei $\langle , \rangle$ eine positiv definite hermetische Form auf dem Vektorraum V. Dann gilt für alle $v, w \in V$*

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle.$$

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\langle v + \lambda w, v + \lambda w\rangle = \langle v, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, w\rangle + \lambda\langle w, v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$$

Für $\langle w, w\rangle \neq 0$ setzen wir $\lambda = -\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ und erhalten

$$\langle v, v\rangle - 2\frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\langle w, w\rangle} + \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\langle w, w\rangle} \geq 0.$$

Also folgt

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle.$$

Für $\langle v, v\rangle \neq 0$ vertauschen wir v und w und erhalten wieder die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Für $\langle v, v\rangle = 0 = \langle w, w\rangle$ setzen wir $\lambda = -\langle v, w\rangle$ und erhalten

$$0 \leq |\langle v, w\rangle|^2 \leq 0.$$

q.e.d.

Satz 4.4. *Sei $\langle , \rangle$ eine positiv definite hermitesche Form auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann definiert $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ eine Norm.*

Beweis: Die Positivität ist klar und die Linearität gilt wegen

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda|\|v\|.$$

Für $v, w \in V$ gilt auch

$$\begin{aligned}
\langle v + w, v + w\rangle &= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\
&\leq \langle v, v\rangle + |\langle v, w\rangle| + |\langle w, v\rangle| + \langle w, w\rangle \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \\
&\quad \text{(wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung)} \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2
\end{aligned}$$

Also folgt die Dreiecksungleichung. **q.e.d.**

Lemma 4.5. *Die Abbildung $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ ist stetig.*

Beweis: Seien $v, w, v', w' \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|\langle v,w\rangle - \langle v',w'\rangle| &\leq |\langle v,w\rangle - \langle v',w\rangle| + |\langle v',w\rangle - \langle v',w'\rangle| \\ &= |\langle v-v',w\rangle| + |\langle v',w-w'\rangle| \\ &\leq \|v-v'\|\cdot\|w\| + \|v'\|\cdot\|w-w'\| \\ &\leq (\|v-v'\| + \|w-w'\|)(\|w\| + \|v\| + \|v-v'\|)\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 4.6. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann gibt es auf V genau dann eine positiv definite hermitesche Form, die die Norm $\|\cdot\|$ induziert, wenn das Parallelogrammgesetz gilt:*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Beweis: Für jede hermitesche Form gilt:

$$\begin{aligned}&\langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle \\ &\quad = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle + \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\ &\quad = 2\langle v,v\rangle + 2\langle w,w\rangle.\end{aligned}$$

Also gilt auch das Parallelogrammgesetz.

Wenn umgekehrt das Parallelogrammgesetz gilt, dann definieren wir

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + \imath\|v+\imath w\|^2 - \imath\|v-\imath w\|^2).$$

Wir zeigen, dass dann $\langle , \rangle$ eine positiv definite hermitesche Form ist. Die Parallelogrammgleichung ergibt

$$\|v+v'+w\|^2 = 2\|v+w\|^2 + 2\|v'\|^2 - \|v-v'+w\|^2 = \alpha$$

$$\|v+v'+w\|^2 = 2\|v'+w\|^2 + 2\|v\|^2 - \|v'-v+w\|^2 = \beta.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned}&\|v+v'+w\|^2 = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ &\quad = \|v+w\|^2 + \|v\|^2 + \|v'+w\| + \|v'\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|v-v'+w\|^2 + \|v'-v+w\|^2\right).\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\|v+v'-w\|^2 = \|v-w\|^2 + \|v\|^2 + \|v'-w\|^2 + \|v'\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|v-v'-w\|^2 + \|v'-v-w\|^2\right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\Re\langle v+v',w\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|v+v'+w\|^2-\|v+v'-w\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2+\|v'+w\|^2-\|v'-w\|^2\right)\\ &= \Re\langle v,w\rangle+\Re\langle v',w\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Im\langle v+v',w\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|v+v'+\imath w\|^2-\|v+v'-\imath w\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|v+\imath w\|^2-\|v-\imath w\|^2+\|v'+\imath w\|^2-\|v'-\imath w\|^2\right).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\langle v+v',w\rangle=\langle v,w\rangle+\langle v',w\rangle.$$

Daraus folgt auch für alle $n,m\in\mathbb{N}$, also auch $\frac{m}{n}\langle v,w\rangle=\langle v',w\rangle=\langle\frac{m}{n}v,w\rangle$. Schließlich gilt auch

$$\begin{aligned}\langle -v,w\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|v-w\|^2-\|v+w\|^2+\imath\|v-\imath w\|^2-\imath\|v+\imath w\|^2\right) &&= -\langle v,w\rangle.\\ \langle \imath v,w\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|v-\imath w\|^2-\|v+\imath w\|^2+\imath\|v+w\|^2-\imath\|v-w\|^2\right)\\ &= \frac{\imath}{4}\left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2+\imath\|v+\imath w\|^2-\imath\|v-\imath w\|^2\right) &&= \imath\langle v,w\rangle.\end{aligned}$$

Weil $\|\cdot\|$ stetig ist, folgt dann für alle $\lambda\in\mathbb{K}$ $\quad\langle\lambda v,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle$. **q.e.d.**

Allgemeiner ist auf einen $\mathbb{R}$-Vektorraum jede symmetrische Bilinearform eindeutig durch die Diagonale bestimmt und auf einen $\mathbb{C}$-Vektorraum jede (nicht notwendigerweise positiv definite) hermitesche Form.

Definition 4.7. *Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum V mit einer positiv definiten hermiteschen Form, der bezüglich der induzierten Norm vollständig ist.*

Satz 4.8. *Sei V ein Vektorraum mit einer positiv definiten hermiteschen Form. Ein solcher Raum wird Prähilbertraum genannt. Dann ist die Vervollständigung $\hat{V}$ mit der natürlichen Inklusion $V\to\hat{V}$ ein Hilbertraum.*

Beweis: Weil das Bild von $i:V\hookrightarrow\hat{V}$ dicht in $\hat{V}$ ist, und die Parallelogrammidendität auf V gilt, gilt sie auch auf $\hat{V}$. Insbesondere gilt dann für alle $v,w\in V:\langle i(v),i(w)\rangle=\langle v,w\rangle$. **q.e.d.**

Satz 4.9. *Sei V ein Hilbertraum und $j:V\to V'$ mit $j(w)(v)=\langle v,w\rangle$. Dann gilt:*

(i) *j ist additiv und antilinear, d.h. $j(v+w) = j(v) + j(w)$ und $j(\lambda v) = \bar{\lambda} j(v)$.*

(ii) *j ist eine Isometrie, also injektiv.*

(iii) *j ist surjektiv, also ein Antiisomorphismus.*

Beweis: (i) ist klar.
(ii): Wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt $|j(w)(v)| \leq \|w\|\|v\|$. Also gilt $\|j\| \leq 1$. Andererseits gilt $|j(w)(w)| = \|w\|^2$. Also gilt $\|j\| \geq 1$. Daraus folgt (ii).
(iii): Sei $A \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ mit $\|A\| = 1$. Dann gibt es eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|v_n\| = 1$ und $\lim_{n\to\infty} Av_n = 1$. Wir können durch Multiplikation mit geeigneten Zahlen vom Betrag 1 erreichen, dass $Av_n \in [0, 1]$ gilt.

$$\|v_n - v_m\|^2 = 2\|v_n\|^2 + 2\|v_m\|^2 - \|v_n + v_m\|^2$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass gilt

$$\|v_n + v_m\| \geq A(v_n + v_m) \geq 2 - \frac{\epsilon}{4} \text{ für } n, m \geq N.$$

Dann folgt $\|v_n - v_m\|^2 \leq 4 - \left(2 - \frac{\epsilon}{4}\right)^2 < \epsilon$. Also ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $v \in V$ mit $Av = 1$ und $\|v\| = 1$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt aus $\|A\| = 1$ folgt für $\lambda > 0$

$$\frac{-1}{\lambda}(\|v - \lambda w\| - \|v\|) \leq Aw$$

und

$$A(w) = \frac{1}{\lambda}(A(v + \lambda w) - Av) \leq \frac{1}{\lambda}(\|v + \lambda w\| - \|v\|).$$

Das ergibt für alle $w \in V$ und $\lambda > 0$

$$-\frac{1}{\lambda}(\|v - \lambda w\| - \|v\|) \leq Aw \leq \frac{1}{\lambda}(\|v + \lambda w\| - \|v\|).$$

Aus $\|v \pm \lambda w\| = \sqrt{\langle v, v\rangle \pm 2\lambda\langle v, w\rangle + \lambda^2\langle w, w\rangle}$ folgt im Grenzwert $\lambda \to 0$:

$$\lim_{\lambda\to 0} \pm\frac{1}{\lambda}(\|v \pm \lambda w\| - \|v\|) = \langle v, w\rangle.$$

und $Aw = \langle w, v\rangle$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wird V mit $\Re\langle,\rangle$ zu einem reellen Hilbertraum. Dann haben wir schon gezeigt $\Re(Aw) = \Re\langle w, v\rangle$. Aus $A\imath w = \imath Aw$ folgt aber $\Im(A\imath w) = \Re(Aw)$ bzw. $\Im(Aw) = -Re(A\imath w)$, so dass dann für alle $w \in W$ gilt

$$Aw = \Re(\langle w, v\rangle) - i\Re(\langle \imath w, v\rangle) = \Re(\langle w, v\rangle) + i\Im(\langle w, v\rangle) = \langle v, w\rangle.$$

q.e.d.

Korollar 4.10. *Hilberträume sind reflexiv.*

Beweis: $j : V \to V'$ ist ein Antiisomorphisumus. Dann ist auch $\bar{j}' : V'' \to V' \quad A \mapsto \bar{j}'(A)$ mit $\bar{j}'(A)(v) = \overline{A(j(v))}$ ein Antiisomorphismus. Aus der Identität $\bar{j}'i = j$ folgt, dass i auch surjektiv ist. **q.e.d.**

4.2 Orthonormalbasen

In diesem Abschnitt ist H stets ein Hilbertraum.

Definition 4.11. *Eine Teilmenge $S \subset H$ heisst Orthonormalsystem, falls $\|e\| = 1$ gilt für alle $e \in S$ und $\langle e, f\rangle = 0$ für alle $e, f \in S$ mit $e \neq f$. Ein maximales Orthonormalsystem heisst Orthonormalbasis, d.h., wenn aus $S \subset T$ und T Orthonormalsystem folgt $T = S$, dann ist das Orthonormalsystem S eine Orthonormalbasis.*

Eine Orthonormalbasis ist keine Basis des Vektorraumes H, wenn H unendlichdimensional ist.

Satz 4.12. *(Gram-Schmidt-Verfahren) Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in dem Hilbertraum H, so dass für alle $n \in \mathbb{N}, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind. Dann gibt es eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

(i) *Lineare Hülle$\{v_1, \ldots, v_n\}$ = Lineare Hülle$\{e_1, \ldots, e_n\}$*

(ii) *$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Orthonormalsystem.*

Die Folge $(e_n)_{e\in\mathbb{N}}$ ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ mit $|\lambda_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir definieren die Elemente $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv. Offenbar muss e_1 proportional zu v_1 sein. Sei $e_1, \ldots, e_n \in$ Lineare Hülle$\{v_1, \ldots, v_n\}$ definiert und erfülle die Bedingungen (i) und (ii). Dann muss $e_{n+1} \in$ Lineare Hülle$\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ liegen und $\langle e_{n+1}, e_l\rangle = 0$ erfüllen für $l = 1, \ldots, n$. Daraus folgt aber $\langle e_{n+1}, v\rangle = 0$ für alle $v \in$ Lineare Hülle$\{v_1, \ldots, v_n\}$. Setze

$$f_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{l=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_l\rangle \cdot e_l.$$

Dann gilt $\langle f_{n+1}, e_l\rangle = 0$ für alle $l = 1, \ldots, n$. Setze $\qquad e_{n+1} = \dfrac{f_{n+1}}{\|f_{n+1}\|}.$

Dann ist Lineare Hülle$\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ = Lineare Hülle$\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Wegen der Besselschen Ungleichung, muss für jedes $\tilde{e}_{n+1}$ mit dieser Eigenschaft gelten $\langle \tilde{e}_{n+1}, e_l\rangle = 0$ für $l = 1, \dots, n$ und $|\langle \tilde{e}_{n+1}, e_{n+1}\rangle| \leq 1$. Dann folgt aus dem Satz von Pythagoras

$$\|\tilde{e}_{n+1}\|^2 = |\langle \tilde{e}_{n+1}, \tilde{e}_{n+1}\rangle| = 1.$$

Also ist $\tilde{e}_{n+1}$ eindeutig bis auf Multiplikation mit $\lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda_{n+1}| = 1$. **q.e.d.**

Satz 4.13. *(Satz von Pythagoras) Seien $v, w \in H$ mit $\langle v, w\rangle = 0$. Dann gilt*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Beweis:
$$\langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle.$$
q.e.d.

Satz 4.14. *(Besselsche Ungleichung) Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $v \in H$. Dann gilt*

$$\|v\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n\rangle|^2.$$

Beweis: Sei $N \in \mathbb{N}$ und $v_N = v - \sum\limits_{n=1}^{N} \langle v, e_n\rangle e_n$. Dann gilt $\langle v_N, e_n\rangle = 0$ für alle $n = 1, \dots, N$. Also folgt aus dem Satz von Pythagoras

$$v = v_N + \sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n\rangle e_n$$

mit

$$\|v\|^2 = \|v_N\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n\rangle|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n\rangle|^2$$

q.e.d.

Lemma 4.15. *Sei $S \subset H$ ein Orthonormalsystem und $v \in H$. Dann ist folgendes Teilsystem höchstens abzählbar:*

$$S_v = \{e \in S | \langle v, e\rangle \neq 0\}$$

Beweis Wegen der Besselschen Ungleichung ist die Menge $\{e \in S | |\langle e, v\rangle| \geq \frac{1}{n}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich. Also ist

$$S_v = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ e \in S | |\langle e, v\rangle| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

höchstens abzählbar. Damit gilt die Besselsche Ungleichung auch für beliebige Orthonormalsysteme.

Satz 4.16. *(Orthonormalbasen) Sei $S \subset H$ ein Orthonormalsystem.*

(a) *Es existiert eine Orthonormalbasis S' mit $S \subset S'$.*

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *S ist Orthonormalbasis.*

(ii) *Ist $v \in H$ und $\langle v, e\rangle = 0$ für alle $e \in S$, dann gilt $v = 0$.*

(iii) *$H = \overline{\text{Lineare Hülle}\, S}$.*

(iv) *$v = \sum_{e \in S} \langle v, e\rangle \cdot e$ für alle $v \in H$.*

(v) *$\langle v, w\rangle = \sum_{e \in S} \langle v, e\rangle\langle e, w\rangle$ für alle $v, w \in H$.*

(vi) *$\|v\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle v, e\rangle|^2$ für alle $v \in H$.*

Beweis: Offenbar ist die Vereinigung von einer total geordneten Familie von Orthonormalsystemen wieder ein Orthonormalsystem. Also folgt (a) aus dem Zornschen Lemma.

(i)⇒(ii) Sei $\langle v, e\rangle = 0$ für alle $e \in S$ und $v \neq 0$. Dann ist $S \cup \{\frac{v}{\|v\|}\}$ ein Orthogonalsystem.

(ii)⇒(iii) Wegen der Besselschen Ungleichung konvergiert für alle $v \in H$ die Reihe $w = \sum_{e \in S} \langle v, e\rangle \cdot e$. Offenbar ist $\langle w - v, e\rangle = 0$ für alle $e \in S$. Also folgt $w = v$.

(iii)⇒(iv) Weil S ein Orthonormalsystem ist, gilt (iv) für alle $v \in$ Lineare Hülle S. Dann gilt (iv) auch für alle Elemente $v \in \overline{\text{Lineare Hülle}\, S}$, für die die Summe konvergiert. Wegen der Besselschen Ungleichung gilt das für alle $v \in \overline{\text{Lineare Hülle}\, S}$.

(iv)⇒(v) $\langle v, w\rangle = \sum_{e \in S} \sum_{f \in S} \langle \langle v, e\rangle e, \langle w, f\rangle f\rangle = \sum_{e \in S} \sum_{f \in S} \langle v, e\rangle\langle f, w\rangle\langle e, f\rangle = \sum_{e \in S} \langle v, e\rangle\langle e, w\rangle$.

(v)⇒(vi) Setze $w = v$.

(vi)⇒(i) Wenn S keine Orthonormalbasis ist, dann gibt es $f \in H \setminus \{0\}$ mit $\langle f, e\rangle = 0$ für alle $e \in S$. Daraus folgt $\|f\|^2 = 0$. Also $f = 0$ Widerspruch. **q.e.d.**

Korollar 4.17. *Für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum ist folgendes äquivalent:*

(i) *H besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge (d.h. H ist separabel).*

(ii) *Alle Orthonormalbasen von H sind abzählbar.*

(iii) *Es gibt eine abzählbare Orthonormalbasis.*

(iv) *Es gibt eine lineare stetige bijektive Abbildung $A : H \to l^2$, so dass für alle $v, w \in H$ gilt $\langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle$. Also sind H und l^2 sind als Hilberträume isomorph.*

Beweis:

(i)⇒(ii) Wenn S ein überabzählbares Orthonormalsystem ist, dann sind wegen $\|e - f\| = \sqrt{2}$ für $e \neq f \in S$ kleine Kreise $\left(B\left(e, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)_{e\in S}$ disjunkt und können deshalb nicht alle ein Element einer abzählbaren Menge enthalten. Also ist jede Orthonormalbasis abzählbar.

(ii)⇒(iii) folgt aus (a) vom letzten Satz.

(iii)⇒(iv) Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis. Dann ist die Abbildung $H \to l^2, v \mapsto (\langle v, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Isometrie un die Umkehrabbildung ist gegeben durch $l^2 \to H, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$.

(iv)⇒(i) l^2 ist separabel, weil die lineare Hülle von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über $\mathbb{Q}$ abzählbar und dicht ist. **q.e.d.**

Satz 4.18. *Für jeden Unterraum $V \subset H$ sei*

$$V^\perp = \{w \in H | \langle v, w\rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}$$

das orthogonale Komplement. Dann gilt

(i) *$V^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.*

(ii) *$(V^\perp)^\perp$ ist der Abschluss von V.*

(iii) *Für jeden abgeschlossenen Unterraum $V \subset H$ gilt $H \simeq V \oplus V^\perp$ als direkte Summe von Hilberträumen.*

(iv) *Für jeden abgeschlossenen Unterraum $V \subset H$ ist die Abbildung $P_V : H \to H, v \to P_V(v)$ mit $P_V(v) \in V$ und $v - P_V(v) \in V^\perp$ Lipschitz-stetig mit $L \leq 1$.*

Beweis: (i): folgt aus der Stetigkeit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
(iii): Sei V ein abgeschlossener Unterraum, dann ist auch $V^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum und deshalb V und $V^\perp$ Hilberträume. Wir definieren $V \oplus V^\perp$ als den Raum $V \times V^\perp$ mit der hermiteschen Form

$$\langle (v,w),(v',w')\rangle = \langle v,v'\rangle + \langle w,w'\rangle.$$

Dann gilt $\|(v,w)\| = \sqrt{\|v\|^2+\|w\|^2}$, also

$$\frac{1}{2}(\|v\|+\|w\|) \leq \max\{\|v\|,\|w\|\} \leq \|(v,w)\| \leq \|v\|+\|w\|.$$

Also ist $V \oplus V^\perp$ als das kartesische Produkt zweier Banachräume auch vollständig und damit ein Hilbertraum. Die Abbildung

$$V \oplus V^\perp \to H, \quad (v,w) \mapsto v+w$$

ist offenbar ein unitärer Operator, also injektiv. Das Bild dieser Abbildung ist dann abgeschlossen, weil die Abbildung eine Isometrie ist. Die Komposition der dualen Abbildung mit den beiden Abbildungen j ist dann eine lineare Abbildung von H nach $V \oplus V^\perp$, die ebenfalls unitär ist, also auch injektiv. Dann ist das Bild der ersten Abbildung surjektiv und es folgt (iii).
(ii): Sei $\bar{V}$ der Abschluss von V. Dann folgt aus (iii), dass $\bar{V} = (V^\perp)^\perp$ gilt.
(iv): Wegen (iii) ist die Komposition von $H \simeq V \oplus V^\perp$ mit $V \oplus V^\perp \to V, \quad (v,w) \mapsto v$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit $L \leq 1$. **q.e.d.**

4.3 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Seien G und H Hilberträume und $A : G \to H$ eine lineare stetige Abbildung. Wir haben schon gezeigt, dass die Abbildungen $j_G : G \to G'$ bzw. $j_H : H \to H'$ antilineare bijektive isometrien sind.

Definition 4.19. *Für jeden linearen stetigen Operator $A : G \to H$ zwischen Hilberträumen sei der adjungierte Operator A^* definiert durch*

$$A^* : H \to G, A^* = j_G^{-1} \circ A' \circ j_H.$$

Aufgrund der Definition von j_H und j_G gilt dann für alle $v \in G$ und $w \in H$:

$$\langle Av,w\rangle = j_H(w)(Av) = A' \circ j_H(w)(v) = \langle v, A^*w\rangle$$

$$\langle w,Av\rangle = \langle\overline{Av,w}\rangle = \langle\overline{v,A^*w}\rangle = \langle A^*w,v\rangle.$$

Satz 4.20. *Die Abbildung* $* : \mathcal{L}(G,H) \to \mathcal{L}(H,G), A \mapsto A^*$ *ist eine Isometrie und es gilt*

$$(A+B)^* = A^* + B^*, (\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^* \text{ und } (A^*)^* = A.$$

Also ist $*$ *eine antilineare Involution. Wenn* F, G, H *Hilberträume sind und* $A \in \mathcal{L}(F,G)$ *und* $B \in \mathcal{L}(G,H)$*, dann gilt* $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$*.*

Beweis: Weil j_G und j_H bijektive Isometrien sind, ist A^* eindeutig durch die Bedingung $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle$ für alle $v \in G$ und $w \in H$ bestimmt. Dann folgen die Behauptungen aus den Eigenschaften des Skalarproduktes. **q.e.d.**

Lemma 4.21. *Ein Operator* $A \in \mathcal{L}(G,H)$ *zwischen zwei Hilberträumen ist genau dann eine Isometrie, wenn für alle* $v, w \in G$ *gilt* $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$*.*

Beweis: folgt aus der Parallelogrammidentität und der Charkterisierung der hemitischen Form durch die Norm. **q.e.d.**

Satz 4.22. *(Satz von Hellinger-Toeplitz) Eine lineare Abbildung* A *von einem Hilbertraum* H *auf sich selber, die für alle* $v, w \in H$ *auch* $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ *erfüllt, ist stetig und es gilt* $A^* = A$*.*

Beweis Nach dem Satz von abgeschlossenen Graphen ist zu zeigen, dass für jede Nullfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H, für die auch die Folge $(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, der Grenzwert von $(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich Null ist. Es gilt aber:

$$\langle \lim_{n\to\infty} Av_n, \lim_{m\to\infty} Av_m\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Av_n, \lim_{m\to\infty} Av_m\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} v_n, A \lim_{m\to\infty} Av_m\rangle = 0$$

q.e.d.

Satz 4.23. *Sei* H *ein Hilbertraum über* $\mathbb{C}$*. Dann ist für jede lineare (nicht notwendigerweise stetige) Abbildung* $A : H \to H$ *folgendes äquivalent:*

(i) $A \in \mathcal{L}(H)$ *und* $A = A^*$

(ii) $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$ *für alle* $v \in H$*.*

Beweis: (i)⇒(ii): Sei $A = A^*$. Dann folgt $\overline{\langle Av, v\rangle} = \langle v, Av\rangle = \langle Av, v\rangle$. Also gilt (ii).
(ii)⇒(i): Es gelte (ii). Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v, w \in H$ gilt

$$\langle A(v+\lambda w), v+\lambda w\rangle = \langle Av, v\rangle + \bar{\lambda}\langle Av, w\rangle + \lambda\langle Aw, v\rangle + |\lambda|^2\langle Aw, w\rangle$$

bzw.

$$\langle A(v+\lambda w), v+\lambda w\rangle = \overline{\langle A(v+\lambda w), v+\lambda w\rangle} =$$

$$= \langle Av, v\rangle + \lambda\langle w, Av\rangle + \bar{\lambda}\langle v, Aw\rangle + |\lambda|^2\langle Aw, w\rangle.$$

Wir setzen $\lambda = 1$ und $\lambda = i$ ein und erhalten

$$\langle Av, w\rangle + \langle Aw, v\rangle = \langle w, Av\rangle + \langle v, Aw\rangle$$

$$\langle Av, w\rangle - \langle Aw, v\rangle = -\langle w, Av\rangle + \langle v, Aw\rangle.$$

Dann folgt $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ für alle $v, w \in H$. Aus dem Satz von Hellinger-Toeplitz folgt (i). **q.e.d.**

Definition 4.24. *Seien G und H Hilberträume.*

(i) *Ein Element $U \in \mathcal{L}(G, H)$ heisst unitär, wenn $U^* = U^{-1}$ gilt,*

$\Leftrightarrow$ *$\langle Uv, Uv\rangle = \langle v, v\rangle$ gilt für alle $v \in G$ und U surjektiv ist,*

$\Leftrightarrow$ *wenn U eine surjektive Isometrie ist.*

(ii) *Ein Element $A \in \mathcal{L}(H)$ heisst selbstadjungiert, wenn $A = A^*$,*

$\Leftrightarrow$ *$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ für alle $v, w \in H$ gilt.*

(iii) *Ein Element $A \in \mathcal{L}(H)$ heisst normal, wenn $AA^* = A^*A$ gilt.*

Jede bijektive Isometrie U besitzt wegen dem Satz vom inversen Operator eine stetige lineare Umkehrabbildung U^{-1}. Wegen Lemma 4.21 und Korollar 4.26 folgt daraus, dass $U^*U - \mathbb{1} = 0$ gilt. Also ist U dann unitär. Umgekehrt erfüllt jeder unitäre Operator U auch $U^*U = \mathbb{1}$ und erhält damit auch die hermitesche Form.

Satz 4.25. *Für selbstadjungierte $A \in \mathcal{L}(H)$ gilt*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Av, v\rangle| | v \in H, \|v\| \leq 1\}$$

Beweis:

$$|\langle Av, v\rangle| \leq \|Av\| \cdot \|v\| \leq \|A\| \cdot \|v\|^2.$$

Also folgt

$$\sup\{|\langle Av, v\rangle| | v \in H, \|v\| \leq 1\} \leq \|A\|.$$

sei

$$M = \sup\{|\langle Av, v\rangle| | v \in H, \|v\| \leq 1\}$$

$$\begin{aligned}\langle A(v+w), v+w\rangle - \langle A(v-w), v-w\rangle &= 2\langle Av, w\rangle + 2\langle Aw, v\rangle \\ &= 4\Re\langle Av, w\rangle.\end{aligned}$$

Also gilt wegen der Parallelogrammidentität

$$4\Re\langle Av, w\rangle \leq M(\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2) = 2M(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

und damit auch $\Re\langle Av, w\rangle \leq M$ für $\|v\| \leq 1$ und $\|w\| \leq 1$. Durch Multiplikation mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ erhält man $|\langle Av, w\rangle| \leq M$ für alle $\|v\| \leq 1$ und $\|w\| \leq 1$. Daraus folgt $\|A\| \leq M$. **q.e.d.**

Korollar 4.26. *Ist $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $\langle Av, v\rangle = 0$ für allle $v \in H$, dann folgt $A = 0$.* **q.e.d.**

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt die Selbstadjungiertheit von A aus der Gleichung $\langle Av, v\rangle = 0$ und Satz 4.23.

Beispiel 4.27. *Sei $H = \mathbb{K}^2$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht selbstadjungiert. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{K}^2$*

$$\langle Av, v\rangle = \langle (v_2, v{-}_1) \cdot (v_1, v_2)\rangle = v_2 v_1 - v_1 v_2 = 0.$$

Also gilt nicht immer $\|A\| = \sup\{|\langle Av, v\rangle| \mid \|v\| \leq 1\}$.

Satz 4.28. *Sei $P \in \mathcal{L}(H)$ eine Projektion, d.h. es gilt $P^2 = P$ und $P \neq 0$. Dann ist folgendes äquivalent:*

(i) *P ist die orthogonale Projektion auf das Bild von P.*

(ii) $\|P\| = 1$.

(iii) *P ist selbstadjungiert.*

(iv) *P ist normal.*

(v) $\langle Pv, v\rangle \geq 0$ *für alle $v \in H$.*

Beweis

(i)⇒(ii) jede orthogonale Projektion hat Norm 1.

(ii)⇒(i) Sei $\|P\| = 1$ und $Pv = 0$ und w im Bild von P. Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $P(v+\lambda w) = \lambda w$ also auch

$$\|\lambda w\|^2 = \|P(v+\lambda w)\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\Re\bar{\lambda}\langle v, w\rangle + \|\lambda w\|^2.$$

Insbesondere gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$-\lambda\Re\langle v, w\rangle \leq \|v\|^2.$$

Dann folgt $\Re\langle v, w\rangle = 0$ und analog folgt für $\lambda \in \imath\mathbb{R}$

$$\frac{\lambda}{\imath}\Im\langle v, w\rangle \leq \|v\|^2$$

also $\Im\langle v, w\rangle = 0$. Daraus folgt (i).

(i)⇒(iii)

$$\langle Pv, w\rangle = \langle Pv, Pw + w - Pw\rangle = \langle Pv, Pw\rangle$$

weil $w - Pw$ im orthogonalen Komplement vom Bild von P liegt.

$$\langle v, Pw\rangle = \langle Pv + v - Pv, Pw\rangle = \langle Pv, Pw\rangle$$

weil $v - Pv$ im orthogonalen Komplement vom Bild von P liegt.

(iii)⇒(iv) ist klar.

(iv)⇒(i) Es gilt

$$0 = \langle (P^*P - PP^*)v, v\rangle = \|Pv\|^2 - \|P^*v\|^2.$$

Also stimmt der Kern von P mit dem von P^* überein. Der Kern von P^* ist aber gleich dem orthogonalen Komplement vom Bild von P. Also folgt (i).

(iii)⇒(v) $\langle Pv, v\rangle = \langle P^2v, v\rangle = \langle Pv, Pv\rangle = \|Pv\|^2$.

(v)⇒(i) Für $Pv = 0$ und w im Bild von P und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \langle P(v + \lambda w), v + \lambda w\rangle = \langle \lambda w, v + \lambda w\rangle = \lambda^2\|w\|^2 + \lambda\langle v, w\rangle.$$

Dann folgt für alle $\lambda > 0 \langle w, v\rangle \geq -\lambda\|w\|^2$ und $\langle w, v\rangle \leq -\lambda\|w\|^2$ für alle $\lambda < 0$. Also gilt $\langle w, v\rangle = 0$ und es folgt (i).

q.e.d.

Im Beweis von (iv)⇒(i) haben wir sogar gezeigt:

Lemma 4.29. *Für einen normalen Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ eines Hilbertraumes gilt $\|Av\| = \|A^*v\|$ für alle $v \in H$.* **q.e.d.**

Definition 4.30. *Seien A und B selbstadjungierte Operatoren. Dann heisst A nicht negativ (bzw. positiv) wenn gilt $\langle Av, v\rangle \geq 0$ (bzw. $\langle Av, v\rangle > 0$) für alle $v \in H$. Analog gilt $A \geq B$ (bzw. $A > B$)⇔ $A - B \geq 0$ (bzw. $A - B > 0$).*

Korollar 4.31. *Sei A selbstadjungiert und nicht negativ, dann gilt für alle $v, w \in H$*

$$|\langle Av, w\rangle|^2 \leq \langle Av, v\rangle\langle Aw, w\rangle.$$

Ist insbesondere $\langle Av, v\rangle = 0$ für alle $v \in H$, so folgt $A = 0$.

Beweis Übertrage den Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf die positiv semi-definite Form $\langle v, w\rangle_A = \langle Av, w\rangle$. **q.e.d.**

Kapitel 5

Spektraltheorie linearer Operatoren

5.1 Das Spektrum eines beschränkten Operators

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Diagonalisierung von Matrizen auf Operatoren zu übertragen. Dazu definieren wir zunächst ein Analogon zu der Menge der Eigenwerte, die Spektrum genannt wird.

Definition 5.1. *Sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$.*

(i) *Ein Element $\xi \in \mathbb{K}$ heisst regulär bezüglich A, wenn $A - \xi \mathbb{1}_V$ bijektiv ist. (Dann ist wegen dem Satz vom inversen Operator $(A - \xi \mathbb{1}_V)^{-1} \in \mathcal{L}(V)$.)*

(ii) *Die Menge $\{\xi \in \mathbb{K} \mid \xi$ ist regulär bzgl. $A\}$ heisst Resolventenmenge. Die Funktion $\xi \mapsto (A - \xi \mathbb{1}_V)^{-1}$ von der Resolventenmenge von A nach $\mathcal{L}(V)$ heisst Resolvente.*

(iii) *Das relative Komplement der Resolventenmenge in $\mathbb{K}$ heisst Spektrum von A. Ein Element $\xi \in \mathbb{K}$ heisst Eigenwert von A, wenn $A - \xi \mathbb{1}$ einen nicht-trivialen Kern hat. Jeder Eigenwert von A ist also ein Element vom Spektrum von A.*

Im endlichdimensionalen Fall besteht das Spektrum gerade aus den Eigenwerten. Das gilt aber im Allgemeinen nicht.

Beispiel 5.2. **(i)** *Die Abbildung $(a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_1, a_2, \ldots)$ ist eine Isometrie von l^p nach l^p, aber nicht surjektiv. Also ist 0 kein Eigenwert, aber gehört zum Spektrum.*

(ii) *Die Multiplikation mit x ist eine stetige lineare Abbildung von $L^p([0,1])$ auf sich selber. Für alle $\xi \in [0,1]$ ist die Multiplikation mit $\frac{1}{x-\xi}$ nicht beschränkt, deshalb besteht das Spektrum aus $[0,1] \subset \mathbb{K}$. Aber für alle $\xi \in [0,1]$ ist der Kern von dem Multiplikationsgenerator mit x minus $\xi \mathbb{1}$ trivial. Also gibt es keinen Eigenwert.*

(iii) *Sei $H = \mathbb{K}^n$. Dann ist $\mathcal{L}(H)$ isomorph zu der Algebra der $\mathbb{K}$-wertigen $n \times n$-Matrizen. Sei A eine solche Matrix. Dann ist ξ genau dann im Spektrum von A, wenn $\det(A - \xi \mathbb{1}) = 0$, wenn also ξ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung ist. Also besteht das Spektrum aus allen Eigenwerten, die zu $\mathbb{K}$ gehören.*

Es bietet sich an für einen Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ eines reellen Hilbertraumes zu der Komplexifizierung $H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = H + \imath H$ mit Skalarprodukt

$$\langle v + \imath v', w + \imath w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w' \rangle + \imath(\langle v', w \rangle - \langle v, w' \rangle)$$

und dem Operator $A_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}, \quad v + \imath w \mapsto Av + \imath Aw$ überzugehen.

Lemma 5.3. *Seien V und W Banachräume. Dann ist die Menge aller invertierbaren Elementen von $\mathcal{L}(V, W)$ offen.*

Beweis: Sei $A \in \mathcal{L}(V, W)$ invertierbar, also bijektiv. Dann ist für alle Elemente $B \in B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \subset \mathcal{L}(V, W)$ die Abbildung $A^{-1}B = \mathbb{1} - A^{-1}(A - B) \in B(\mathbb{1}, 1) \subset \mathcal{L}(V)$, also wegen der Neumannschen Reihe invertierbar. Daraus folgt, dass auch B invertrierbar ist und gilt:

$$B^{-1} = (AA^{-1}B)^{-1} = (A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = (\mathbb{1} - A^{-1}(A - B))^{-1}A^{-1}.$$

Korollar 5.4. *Die Resolventenmenge ist offen.*

Beweis: Sei ξ in der Resolventenmenge. Wenn

$$\|(A - \xi' \mathbb{1}_V) - (A - \xi \mathbb{1}_V)\| = \|(\xi - \xi')\mathbb{1}_V\| = |\xi - \xi'| < \frac{1}{\|(A - \xi \mathbb{1}_V)^{-1}\|},$$

dann ist wegen dem vorangehenden Lemma auch ξ' in der Resolventenmenge. **q.e.d.**

Satz 5.5. *Sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann ist die Resolvente eine analytische Funktion von der Resolventenmenge nach $\mathcal{L}(V)$. Das Spektrum ist eine kompakte Teilmenge von $\{\xi \in \mathbb{K} \mid |\xi| \leq \|A\|\}$, die für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nicht leer ist.*

Beweis: Für $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist der Operator $-\xi \mathbb{1}_V$ invertierbar mit

$$\|(-\xi \mathbb{1}_V)^{-1}\| = \left\| \frac{-\mathbb{1}_V}{\xi} \right\| = \frac{1}{|\xi|}.$$

Wenn also $\|A\| < |\xi|$, dann gehört wegen Lemma 5.3 ξ zur Resolventenmenge. Also ist das Spektrum enthalten in

$$\{\xi \in \mathbb{K} \mid |\xi| \leq \|A\|\}$$

und abgeschlossen. Wegen Heine-Borel ist das Spektrum dann auch kompakt. Aus Lemma 5.3 folgt sogar, dass für $|\xi| > 2\|A\|$ die Resolvente beschränkt ist durch

$$(A - \xi\mathbb{1}_V)^{-1}\| = \left\| \left(-\xi\mathbb{1}_V \left(\mathbb{1} - \frac{A}{\xi} \right) \right)^{-1} \right\| = \frac{1}{|\xi|} \left\| \left(\mathbb{1} - \frac{A}{\xi} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\xi|} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{|\xi|}.$$

Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und das Spektrum leer ist, dann ist für alle $v \in V$ und alle $B \in V'$ die Funktion $\xi \mapsto B(A - \xi\mathbb{1}_V)^{-1}v$ eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$, die für $|\xi| > 2\|A\|$ beschränkt ist durch $\frac{2}{|\xi|}$. Weil jede stetige Funktion auf der kompakten Menge $\{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| \leq 2\|A\|\}$ beschränkt ist, ist diese Funktion also auf $\mathbb{C}$ beschränkt und konvergiert für $|\xi| \to \infty$ gegen Null. Wegen dem Satz von Liouville verschwindet diese Funktion. Aus dem Satz von Hahn–Banach folgt, dass auch die Resolvente

$$\xi \mapsto (A - \xi\mathbb{1}_V)^{-1}$$

gleich Null ist. Weil aber $0 \in \mathcal{L}(V)$ nicht invertierbar ist, ist dies nicht möglich. **q.e.d.**

Es gibt reelle Matrizen, die keine reellen Eigenwerte haben, deren reelles Spektrum also leer ist. Also ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bei dem letzten Teil der Aussage auch notwendig.

5.2 Kommutative Banachalgebren

Wir werden den Begriff des Spektrums auf Algebren verallgemeinern. Dadurch können wir kommutative Banachalgebren beschreiben als Algebren von stetigen Funktionen auf topologischen Räumen. Daraus wird sich der Spektralsatz ergeben.

Im Folgenden sei B eine kommutative Banachalgebra über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit Eins, bezeichnet durch $\mathbb{1}$. Das Einselement von V wird mit $\mathbb{1}_V$ bezeichnet. Es sei $\mathcal{L}(B)$ die Banachalgebra der linearen stetigen Abbildungen von B nach B.

Satz 5.6. *Sei B eine Banachalgebra über $\mathbb{C}$ und*

$$\pi : B \to \mathcal{L}(B),\ a \mapsto \pi(a) \text{ mit } \pi(a) : B \to B,\ b \mapsto ab = ba.$$

Dann ist π ein Banachalgebrahomomorphismus, der auch eine Isometrie ist. Dieser Homomorphismus π heisst reguläre Darstellung. Also ist jede kommutative Banachalgebra isomorph zu einer Unteralgebra einer Algebra von linearen stetigen Abbildungen eines Banachraumes auf sich selber.

Beweis: Für alle $a, b \in B$ gilt

$$\|\pi(a)b\| = \|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

Also gilt auch

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\|.$$

Andererseits gilt

$$0 < \|\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}^2\| \leq \|\mathbb{1}\|^2$$

Daraus folgt $\|\mathbb{1}\| = 1$ und wegen $\|\pi(a)\mathbb{1}\| = \|a\|$ auch

$$\|\pi(a)\| \geq \|a\|.$$

Dann ist $\|\pi(a)\| = \|a\|$ für alle $a \in B$ und π eine Isometrie. Für alle $a, b, c \in B$ gilt auch $\pi(ab)c = abc = \pi(a)\pi(b)c$. Dann folgt

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(ab) = \pi(ba) = \pi(b)\pi(a).$$

Also ist das Bild von π eine kommutative Banachalgebra, die wegen dem Satz des inversen Operators isomorph ist zu B. **q.e.d.**

Wir definieren für jedes Element $a \in B$ das Spektrum von a als das Spektrum von $\pi(a)$. Es gilt

Lemma 5.7. *Das Spektrum eines Elementes $a \in B$ einer kommutativen Banachalgebra besteht aus allen $\xi \in \mathbb{C}$, so dass $a - \xi\mathbb{1}$ in B nicht invertierbar ist.*

Beweis Sei $a - \xi\mathbb{1}$ ind B invertierbar, dann ist offenbar $\pi((a - \xi\mathbb{1})^{-1})$ das Inverse von $\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B$. Ist umgekehrt $\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B$ invertierbar, dann ist $(\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B)^{-1})(\mathbb{1})$ das Inverse von $a - \xi\mathbb{1}$ in B, weil gilt

$$(a - \xi\mathbb{1})\left((\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B)^{-1}(\mathbb{1})\right) = (\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B)(\pi(a) - \xi\mathbb{1}_B)^{-1}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}.$$

Dann folgt wegen der Kommutativität die Aussage. **q.e.d.**

Satz 5.8. *(Gelfand–Mazur) Ist die kommutative $\mathbb{C}$-Banachalgebra B ein Körper, d.h. jedes Element in $B \setminus \{0\}$ ist invertierbar, dann ist B isomorph zu der Banach–Unteralgebra $\mathbb{C}\mathbb{1}$.*

Beweis Sei $a \in B$. Dann ist wegen Satz 5.5 das Spektrum von a nicht leer. Sei also λ im Spektrum von a. Dann ist aber $a - \lambda\mathbb{1}$ nicht invertierbar, also gleich Null. Es folgt $a = \lambda\mathbb{1}$. Also ist B isomorph zu $\mathbb{C}\mathbb{1}$. **q.e.d.**

Definition 5.9. *Ein Ideal ist ein Untervektorraum $\mathfrak{a} \subset B$, so dass für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in B$ folgt $ab \in \mathfrak{a}$ und $ba \in \mathfrak{a}$. Wir fordern zusätzlich $\mathbb{1} \notin \mathfrak{a}$ um $\mathfrak{a} = B$ auszuschließen.*

Lemma 5.10. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal der Banachalgebra B. Dann ist der Abschluss von $\mathfrak{a}$ ebenfalls ein Ideal.*

Beweis Offenbar ist der Abschluss von $\mathfrak{a}$ ein Banachraum. Er besteht aus allen Grenzwerten von konvergenten Folgen in $\mathfrak{a}$. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathfrak{a}$. Dann konvergieren für jedes $b \in B$ die Folgen $(a_n b)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(ba_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) b$ bzw. $b \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Die invertierbaren Elemente von B sind eine offene Umgebung von $\mathbb{1}$ in B. Also folgt aus $\mathbb{1} \notin \mathfrak{a}$ auch $\mathbb{1} \notin \bar{\mathfrak{a}}$. **q.e.d.**

Definition 5.11. *Ein Ideal heisst maximal, wenn es in keinem Ideal echt enthalten ist.*

Korollar 5.12. *Jedes maximale Ideal ist abgeschlossen.* **q.e.d.**

Die Menge der Ideale einer kommutativen Algebra besitzt eine natürliche Ordnungsrelation. Offenbar ist die Vereinigung über eine total geordnete Menge von Idealen einer kommutativen Algebra wieder ein Ideal. Also ist wegen dem Zornschen Lemma jedes Ideal in einem maximalen Ideal enthalten.

Lemma 5.13. *Sei B eine kommutative Banachalgebra und $\mathfrak{a}$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist $B/\mathfrak{a}$ eine kommutative Banachalgebra.*

Beweis Wegen Satz 2.13 ist $B/\mathfrak{a}$ ein Banachraum. Seien $a, b \in$ und $c, d \in \mathfrak{a}$. Dann folgt $(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd$. Aus $c, d \in \mathfrak{a}$ folgt, dass auch ad, cb, cd und $ad+cb+cd$ im Ideal liegen. Also definiert die Multiplikation von B eine Multiplikation auf $B/\mathfrak{a}$, die dann auch kommutativ, assoziativ und distributiv ist. Zuletzt müssen wir noch

$$\|[a] \cdot [b]\| \leq \|[a]\| \cdot \|[b]\| \text{ für alle } a, b \in B$$

zeigen mit

$$\begin{aligned}
\|[a]\| &= \inf\{\|a + c\| \mid c \in \mathfrak{a}\}. \\
\|[a] \cdot [b]\| &= \|[a \cdot b]\| = \inf\{\|ab + c\| \mid c \in \mathfrak{a}\} \\
&\leq \inf\{\|(a + c)(b + d)\| \mid c, d \in \mathfrak{a}\} \\
&\leq \inf\{\|a + c\| \mid c \in \mathfrak{a}\} \inf\{\|b + d\| \mid d \in \mathfrak{a}\} = \|[a]\| \cdot \|[b]\|.
\end{aligned}$$

$\mathbb{1}$ ist in $B/\mathfrak{a}$ offenbar eine Eins. **q.e.d.**

Sei B eine kommutative Banachalgebra mit $\mathbb{1}$ und $a \in B$ ein Element, das nicht invertierbar ist, dann ist $\mathfrak{a}_a = \{ab \mid b \in B\}$ ein Ideal, das $\mathbb{1}$ nicht enthält, weil a nicht invertierbar ist. Das Urbild eines Ideals $\mathfrak{a}$ unter einem Algebra–Homomorphismus π ist offenbar ein Vektorraum und sogar ein Ideal, weil aus $\pi(a) \in \mathfrak{a}$ folgt $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \in \mathfrak{a}$ und $\pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \notin \mathfrak{a}$. Also kann für ein maximales Ideal $\mathfrak{a}$ einer kommutativen Algebra mit Eins, die Algebra $B/\mathfrak{a}$ kein nichttriviales Ideal enthalten, weil sonst das Urbild unter $B \to B/\mathfrak{a}$ ein Ideal enthalten würde, das $\mathfrak{a}$ echt enthält. Dann folgt aber, dass $B/\mathfrak{a}$ ein Körper ist.

Umgekehrt enthält ein Körper nur das triviale Ideal $\{0\}$.

Lemma 5.14. *Die maximalen Ideale einer kommutativen Banachalgebra B sind in Eins-zu-Eins Beziehung zu den Algebra-Homomorphismen $\chi : B \to \mathbb{C}$ mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$.*

Beweis Sei χ ein Algebra-Homomorphismus von B nach $\mathbb{C}$ mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$. Dann ist der Kern von χ ein Ideal, das maximal sein muss, weil $\mathbb{C}$ ein Körper ist. Umgekehrt ist für jedes maximale Ideal die Algebra $B/\mathfrak{a}$ ein Körper, also wegen dem Satz von Gelfand–Mazur isomorph zu $\mathbb{C}$. Also definiert $\mathfrak{a}$ einen Algebra-Homomorphismus $\chi : B \to B/\mathfrak{a} \simeq \mathbb{C}$. **q.e.d.**

Für jeden Algebra-Homomorphismus $\chi : B \to \mathbb{C}$ mit $\chi(\mathbb{1}) = 1$ ist $a - \chi(a)\mathbb{1}$ nicht invertierbar, weil gilt $\chi(a - \chi(a)\mathbb{1}) = 0$. Also gehört $\chi(a)$ zum Spektrum von a und es folgt aus Satz 5.5 $|\chi(a)| \leq \|a\|$. Also gilt $\|\chi\| \leq 1$. Aus $\chi(\mathbb{1}) = 1$ folgt dann $\|\chi\| = 1$. Deshalb können wir die maximalen Ideale mit einer Teilmenge von der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B(0,1)} \subset B'$ identifizieren.

Definition 5.15. *Sei V ein normierter Raum. Dann heisst die gröbste Topologie von V', so dass alle linearen Abbildungen von V' nach $\mathbb{K}$, die im Bild von $i : V \to V''$ liegen, stetig sind, schwache$*$Topologie. Sie wird ezeugt von allen Mengen der Form*

$$\{A \in V' \mid A(v) \in U\} \text{ mit } v \in V \text{ und } U \subset \mathbb{K} \text{ offen }.$$

Die schwach$*$ Umgebungen eines Elementes $A_0 \in V'$ bestehen aus den Teilmengen von V', für die es ein $\epsilon > 0$ gibt und $v_1, \ldots, v_n \in V$ gibt, so dass die Umgebung die Menge

$$\{A \in V' \mid |A(v_i) - A_0(v_i)| < \epsilon \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

enthält.

Wir benutzen diese schwache$*$Topologie, um den Raum der maximalen Ideale mit einer Topologie zu versehen. Diese Topologie macht den abgeschlossenen Einheitsball von dem Dualraum eines normierten Vektorraumes kompakt.

Satz 5.16. *(Satz von Alaoglu) Sei V ein normierter Vektorraum und $\overline{B_{V'}(0,1)}$ die abgeschlossene Einheitskugel von V'. Dann ist $\overline{B_{V'}(0,1)}$ schwach$*$kompakt.*

Wir werden diesen Satz nicht beweisen. Der Beweis benutzt vor allem den Satz von Tychonov, der besagt, dass ein beliebiges kartesisches Produkt von kompakten topologischen Räumen wieder kompakt ist. Unendliche kartesische Produkte einer Menge werden dabei aufgefasst als die Menge aller Abbildungen von der Indexmenge in die Menge. Indem $\overline{B_{V'}(0,1)}$ als Teilmenge von dem Raum aller Abbildungen von $S_V = \{v \in V | \|v\| = 1\}$ nach $\overline{B_{\mathbb{K}}(0,1)} = \{\lambda \in \mathbb{K} | |\lambda| \leq 1\}$ aufgefasst wird, muss dann nur noch gezeigt werden, dass B als Teilmenge dieses kartesischen Produktes abgeschlossen ist. Das folgt daraus, dass eine Abbildung $\Phi : S_V \to \overline{B_{\mathbb{K}}(0,1)}$ genau dann dem Element $A \in \overline{B_{V'}(0,1)}$ mit $A(v) = \|v\|\Phi(\frac{v}{\|v\|})$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ entspricht, wenn

(i) $\Phi\left(\frac{v+\lambda w}{\|v+\lambda w\|}\right) = \frac{\Phi(v)+\lambda\Phi(w)}{\|v+\lambda w\|}$ für alle $v, w \in S_V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $v+\lambda w \neq 0$

(ii) $\Phi(\lambda v) = \lambda\Phi(v)$ für alle $v \in S_V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$.

Die Teilmengen solcher Abbildungen sind aber abgeschlossen in der Menge aller Abbildungen bezüglich der Topologie des kartesischen Produktes.

Definition 5.17. *Sei B eine kommutative Banachalgebra. Dann sei* $\mathrm{Spec}(B)$ *die Teilmenge von B' aller Algebra-Homomorphismen von B nach $\mathbb{C}$, die $\mathbb{1}$ auf* 1 *abbilden, zusammen mit der schwach∗Topologie, als topologischer Unterraum von B'.*

Satz 5.18. *Für jede kommutative Banachalgebra ist* $\mathrm{Spec}(B)$ *ein kompakter Hausdorff Raum, d.h. für zwei verschiedene Punkte von* $\mathrm{Spec}(B)$ *gibt es disjunkte offene Umgebungen der beiden Punkte. Insbesondere ist die Menge aller stetigen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf* $\mathrm{Spec}(B)$ *eine Banachunteralgebra von* $B(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$*, die wir wieder mit* $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$ *bezeichnen.*

Beweis Offenbar ist für alle $a, b \in B$ die Menge

$$\{\chi \in B' | \chi(ab) = \chi(a) \cdot \chi(b)\}$$

eine schwach∗abgeschlossene Teilmenge von B'. Genauso ist die Menge

$$\{\chi \in B' | \chi(\mathbb{1}) = 1\}$$

schwach∗abgeschlossen. Also ist $\mathrm{Spec}(B)$ eine schwach∗abgeschlossene Teilmenge von der abgeschlossenen Einheitskugel in B'. Damit ist $\mathrm{Spec}(B)$ schwach∗kompakt. Wenn χ und χ' zwei verschiedene Elemente von B' sind, dann gibt es ein $a \in B$ mit $\chi(a) \neq \chi'(a)$. Also gibt es zwei disjunkte offene Umgebungen U und U' von $\chi(a)$ und $\chi'(a)$ in $\mathbb{C}$. Dann sind die schwachen∗Umgebungen

$$\{\chi'' \in B' | \chi''(a) \in U\} \text{ und } \{\chi'' \in B' | \chi''(a) \in U'\}$$

von χ und χ' in B' disjunkt. Also ist B' bezüglich der schwachen∗Topologie ein Hausdorffraum. Indem wir den Beweis von Satz 1.32 (ii) die offenen Kugeln $B(x, \delta)$ durch entsprechende offene Umgebungen ersetzen, gilt er auch für den Raum aller beschränkten stetigen Funktionen von $\mathrm{Spec}(B)$ nach $\mathbb{C}$. Weil aber $\mathrm{Spec}(B)$ kompakt ist, sind wegen Satz 1.34 alle stetigen Funktionen beschränkt. Also ist $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$ ein Banachraum. Offenbar gilt für alle $f, g \in C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

Damit ist $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$ eine Banachalgebra. **q.e.d.**

Satz 5.19. *Sei B eine kommutative Algebra. Dann gibt es einen kanonischen Algebra-Homomorphismus*

$$\rho : B \to C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C}), b \mapsto \rho(b)$$

mit

$$\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(b).$$

Dieser Algebra-Homomorphismus ist stetig und $\|\rho\| = 1$. Für jedes $b \in B$ ist das Spektrum von b gleich dem Bild der Abbildung $\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}$. Und der Spektralradius

$$r(b) = \sup\{|z| \mid z \in \textit{Spektrum von } b\}$$

ist gleich

$$r(b) = \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{1/n} = \|\rho(b)\|.$$

Beweis: Sei $b \in B$. Dann enthalten die schwach∗offenen Mengen $\{\chi \in B' \mid \chi(b) \in U\}$ für jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$, nur Elemente, die b auf die offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ abbilden. Also ist für jedes $b \in B$, die Abbildung

$$\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(b)$$

stetig. Für jedes $\chi \in \mathrm{Spec}(B)$ folgt aus $\|\chi\| = 1$

$$|\chi(b)| \leq \|\chi\| \cdot \|b\| = \|b\|.$$

Also ist $\|\rho(b)\|_\infty$ beschränkt durch $\|b\|$. Damit gilt insbesondere $\|\rho\| \leq 1$. Offenbar ist $\rho(\mathbb{1})$ auf $\mathrm{Spec}(B)$ konstant gleich 1. Daraus folgt $\|\rho\| = 1$. Aufgrund der Definition des Spektralradiuses gilt

$$\|\rho(b)\| = \sup\{|\chi(b)| \mid \chi \in \mathrm{Spec}(B)\}.$$

Wenn ξ im Spektrum von b liegt, dann ist $(b - \xi\mathbb{1})$ nicht invertierbar. Also ist $\{(b - \xi\mathbb{1}) \cdot a \mid a \in B\}$ ein Ideal und wegen dem Zornschen Lemma in einem maximalen Ideal enthalten. Das entsprechende Element $\chi \in \mathrm{Spec}(B)$ erfüllt

$$\rho(b)(\chi) = \chi(b) = \chi(b) - \xi + \xi = \chi(b - \xi\mathbb{1}) + \xi = \xi.$$

Also ist ξ im Bild von $\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}$ enthalten. Umgekehrt ist für jedes Element ξ im Bild von $\rho(b) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{C}$ die Funktion $\rho(b) - \xi$ nicht invertierbar. Weil ρ angewandt auf einem inversen Element von $b - \xi\mathbb{1}$ ein Inverses von $\rho(b) - \xi$ wäre, ist also auch $b - \xi\mathbb{1}$ nicht invertierbar, und damit ξ im Spektrum enthalten. Also stimmt das Spektrum von b mit dem Bild $\rho[\mathrm{Spec}(B)]$ überein und es gilt $r(b) = \|\rho(b)\|_\infty$.

Wir müssen noch zeigen

$$r(b) = \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{1/n} = \|\rho(b)\|_\infty.$$

Die Resolvente ist holomorph (d.h. sie besitzt in einer Umgebung jedes regulären Elementes eine konvergente komplexe Taylorreihe) auf dem Gebiet $\{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| > r(b)\}$ und hat dort die Reihenentwicklung

$$(b - \xi\mathbb{1})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{\xi^{n+1}}.$$

Für alle $\chi \in B'$ ist also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(b^n)}{\xi^{n+1}}$ konvergent für alle ξ mit $|\xi| > r(b)$. Dann ist auch $\sup |\frac{\chi(b^n)}{\xi^{n+1}}| < \infty$ für alle ξ mit $|\xi| > r(b)$. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschranktheit folgt, dass auch

$$\frac{\|b^n\|}{\xi^{n+1}} \leq M_\xi$$

gilt für alle ξ mit $|\xi| > r(b)$. Also gilt $\limsup \|b^n\|^{1/n} \leq |\xi|$ für alle ξ mit $|\xi| > r(b)$

$$\limsup \|b^n\|^{1/n} \leq r(b).$$

Wenn ξ zum Spektrum von b gehört, dann ist $\pi(b) - \xi\mathbb{1}_B$ wegen dem Satz des inversen Operators und Lemma 5.7 entweder nicht surjektiv oder nicht injektiv. Aus

$$\begin{aligned} \pi(b^n) - \xi^n\mathbb{1}_B &= (\pi(b) - \xi\mathbb{1}_B)\,\pi(b^{n-1} + \xi b^{n-2} + \ldots + \xi^{n-1}\mathbb{1}) \\ &= \pi(b^{n-1} + \xi b^{n-2} + \ldots + \xi^{n-1}\mathbb{1})\,(\pi(b) - \xi\mathbb{1}_B) \end{aligned}$$

folgt, dass $\pi(b^n) - \xi^n\mathbb{1}_B$ entweder nicht surjektiv oder nicht injektiv ist. Wegen Lemma 5.7 ist ξ^n im Spektrum von b^n enthalten. Aus Satz 5.5 folgt

$$|\xi|^n \leq \|\pi(b)^n\| = \|b^n\| \Leftrightarrow |\xi| \leq \|b^n\|^{1/n}.$$

Daraus folgt $\quad r(b) \leq \|b^n\|^{1/n} \quad$ und damit auch $\quad r(b) \leq \liminf \|b^n\|^{1/n}$. **q.e.d.**

Wir werden jetzt durch eine zusätzliche Struktur erreichen, dass der Algebra-Homomorphismus ρ ein Isomorphismus von Banachalgebren wird.

Definition 5.20. *Sei B eine kommutative Banachalgebra. Ein antilinearer Algebra Homomorphismus $\star : B \to B$ heisst $\star$–Involution, falls folgendes gilt:*

(i) $(\lambda\mathbb{1})^* = \bar{\lambda}\mathbb{1}$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$

(ii) $b^{**} = b$ *für alle* $b \in B$

(iii) $\|b^*b\| = \|b\|^2, \|b\| = \|b^*\|, \|b^2\| = \|b\|^2$ *für alle* $b \in B$.

Eine kommutative Banachalgebra mit $*$*–Involution heisst kommutative* C^**–Algebra.*

Bemerkung 5.21. *Die Bedingungen* $\|b\| = \|b^*\|$ *und* $\|b^2\| = \|b\|^2$ *folgen aus den übrigen Bedingungen: Aus*

$$\|b\|^2 = \|b^*b\| \leq \|b^*\|\|b\|$$

folgt

$$\|b\| \leq \|b^*\|$$

Mit $b^{**} = b$ *erhalten wir dann*

$$\|b^*\| \leq \|b^{**}\| = \|b\|.$$

Also folgt

$$\|b\| = \|b^*\|.$$

Ausserdem gilt

$$\|b\|^4 = \|b^*b\|^2 = \|b^*b(b^*b)^*\| = \|b^2(b^*)^2\| = \|b^2\|^2.$$

Daraus folgt

$$\|b^2\| = \|b\|^2.$$

Beispiel 5.22. *Sei* X *ein kompakter topologischer Raum und* $C(X, \mathbb{C})$ *die kommutative Banachalgebra der stetigen Funktionen von* X *nach* $\mathbb{C}$*. Dann ist*

$$* : C(X, \mathbb{C}) \to C(X, \mathbb{C}), f \to f^* = \bar{f}$$

eine $\star$*–Involution. Dadurch wird* $C(X, \mathbb{C})$ *zu einer kommutativen* C^**–Algebra.*

Satz 5.23. *(Satz von Gelfand–Neumark) Sei* B *eine kommutative* C^**–Algebra und* ρ *der kanonische Homomorphismus* $\rho : B \to C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$*. Dann gilt für alle* $b \in B$

$$\overline{\rho(b)} = \rho(b^*).$$

Und ρ *ist ein* C^**–Algebra Isomorphismus von* B *nach* $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$*.*

Beweis Wenn n eine Potenz von 2 ist, dann gilt

$$\|b\|^n = \|b^n\|.$$

Also ist

$$r(b) = \lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{1/n} = \|b\|.$$

Dann ist wegen Satz 5.19 ρ eine Isometrie und deshalb injektiv. Sei $\chi \in \mathrm{Spec}(B)$ und $\chi(b) = \alpha + \beta\imath$ und $\chi(b^*) = \gamma + \delta\imath$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Wenn $\beta + \delta \neq 0$, dann sei

$$c = \frac{b + b^* - (\alpha + \gamma)\mathbb{1}}{\beta + \delta}.$$

Offenbar gilt $c^* = c$ und $\chi(c) = \imath$. Dann gilt für jede reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi(c + \imath\lambda\mathbb{1}) = \imath(1 + \lambda).$$

Daraus folgt $\quad |1 + \lambda| \leq \|c + \imath\lambda\mathbb{1}\| \quad$ und

$$(1 + \lambda)^2 \leq \|c + \imath\lambda\mathbb{1}\|^2 = \|(c + \imath\lambda\mathbb{1})(c + \imath\lambda\mathbb{1})^*\| \leq \|c^2 + \lambda^2\mathbb{1}\| \leq \|c^2\| + \lambda^2.$$

Damit haben wir $1+2\lambda \leq \|c^2\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, was nicht möglich ist. Also gilt $\beta+\delta = 0$ Wenden wir das gleiche Argument auf $\imath b$ mit $(\imath b)^* = -\imath b^*$ an so erhalten wir $\alpha - \gamma = 0$ und damit $\quad \rho(b^*) = \overline{\rho(b)}$.

Weil ρ eine Isometrie ist, ist das Bild von ρ in $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$ eine C^*-Unteralgebra von $C(\mathrm{Spec}(B), \mathbb{C})$. Für alle $\chi_1 \neq \chi_2$ in $\mathrm{Spec}(B)$ gibt es offenbar ein $b \in B$ mit $\chi_1(b) \neq \chi_2(b)$. Wenn die Realteile von $\chi_1(b)$ und $\chi_2(b)$ verschieden sind, dann stimmen χ_1 und χ_2 auch auf $b + b^*$ nicht überein, und wenn die beiden Imaginärteile von $\chi_1(b)$ und $\chi_2(b)$ nicht übereinstimmen, dann stimmen χ_1 und χ_2 auch auf $\imath b - \imath b^*$ nicht überein. Also erfüllt die $\mathbb{R}$-Unteralgebra $\{\rho(b) | b \in B \text{ mit } b^* = b\}$ die Voraussetzungen des Satzes von Stone Weierstraß. Wir bemerken, dass der Beweis des Satzes von Stone–Weierstraß sich auf alle kompakten topologischen Räume überträgt, indem die offenen Kugeln von X durch beliebige offene Mengen ersetzt werden. Die Bedingung, dass die stetigen Funktionen die Punkte des kompakten topologischen Raumes trennt, hat zur Folge, dass der topologische Raum ein Hausdorffraum ist. Also enthält das Bild alle reellen stetigen Funktionen auf $\mathrm{Spec}(B)$. Weil $\rho(b^*) = \bar{\rho}(b)$ gilt, und jede komplexe stetige Funktion die Summe einer reellen stetigen Funktion und $\imath$ mal einer reellen stetigen Funktion ist, folgt, dass ρ surjektiv ist. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 5.24. *Sei X ein kompakter topologischer Raum und $C(X, \mathbb{C})$ die Banachalgebra aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$.*

(i) *Zeige, dass für alle $x \in X$, das Ideal $\mathfrak{a}_x = \{f \in C(X, \mathbb{C}) | f(x) = 0\}$ maximal ist.*

(ii) *Zeige, dass für alle $x \in X$ gilt $C(X, \mathbb{C})/\mathfrak{a}_x \simeq \mathbb{C}$.*

(iii) *Zeige, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$, das nicht in $\mathfrak{a}_x$ enthalten ist mit $x \in X$, ein Element $g \in C(X, \mathbb{C})$ enthält, so dass $g(x) \neq 0$ gilt.*

(iv) *Zeige, dass jedes Ideal in einem der Ideale $(\mathfrak{a}_x)_{x \in X}$ enthalten ist.*

(v) *Zeige, dass alle maximalen Ideale von $C(X, \mathbb{C})$ von der Form $\mathfrak{a}_x$ mit $x \in X$ sind.*

5.3 Spektralsatz

In diesem Abschnitt ordnen wir für einen normalen Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ eines Hilbertraumes H jeder stetigen $\mathbb{C}$ wertigen Funktion f auf dem Spektrum einen Operator $f(A)$ zu mit den daraus sich ergebenden Eigenschaften. Wenn das Spektrum diskret ist, entsprechen den Funktionen, die nur auf einem Eigenwert Eins sind und sonst gleich Null die Projektoren auf die entsprechenden Eigenräume. Damit können wir alle normalen Operatoren mit diskretem Spektrum, also insbesonder alle normalen Operatoren von endlichdimenionalen Hilberträumen diagonalisieren.

Satz 5.25. *Sei H ein Hilbertraum. Dann erfüllt die Abbildung*

$$* : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H), \quad A \mapsto A^*$$

die Bedingungen

(i) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ *für alle* $A \in \mathcal{L}(H)$

(ii) $A^{**} = A$ *für alle* $A \in \mathcal{L}(H)$

(iii) $\|A^* A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2, \|A\| = \|A^*\|$ *für alle* $A \in \mathcal{L}(H)$.

Beweis: Wegen Satz 4.20 gilt $(A^*A)^* = A^*A$. Also ist A^*A selbstadjungiert. Dann folgt aus Satz 4.25

$$\begin{aligned}\|A^*A\| &= \sup\{|\langle A^*Av, v\rangle| \mid v \in H \text{ mit } \|v\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Av, Av\rangle| = \|Av\|^2 \mid v \in H \text{ mit } \|v\| \leq 1\} = \|A\|^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\|A\|^2 = \|A^*A\| \leq \|A^*\| \cdot \|A\|$. Für $\|A\| \neq 0$ folgt daraus $\|A^*\| = \|A\|$. Für $A = 0$ ist die Aussage trivial. Aus $A^{**} = A$ folgt dann $\|AA^*\| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2$. **q.e.d.**

Definition 5.26. *Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator. Dann sei*

$$C^*(A) = \overline{\textit{Lineare Hülle}\{A^n(A^*)^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}}$$

der Abschluss der von A und A^* erzeugten Algebra in $\mathcal{L}(H)$.

Satz 5.27. *Für alle normalen $A \in \mathcal{L}(H)$ eines Hilbertraumes H ist $C^*(A)$ eine kommutative C^*–Algebra.*

Beweis: Weil A ein normaler Operator ist und wegen

$$[AB, CD] = A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B$$

kommutieren alle Elemente von Lineare Hülle$\{A^n(A^*)^m \mid n,m \in \mathbb{N}_0\}$ paarweise miteinander. Hier ist der Kommutator $[A,B]$ zeier Elemente A und B einer Algebra definiert durch $[A,B] = AB - BA$.

Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathcal{L}(H)$ mit Grenzwerten A und B, die $A_nB_m = B_mA_n$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$ erfüllen. Wegen

$$\|A_nB_m - AB\| \leq \|A_n - A\| \left(\sup_{m\in\mathbb{N})} \|B_m\|\right) + \|A\| \cdot \|B_m - B\|$$

konvergieren die Folge $(A_nB_m)_{n,m\in\mathbb{N}_0}$ und $(B_mA_n)_{n,m\in\mathbb{N}}$ im Grenzwert $n \to \infty$ und $m \to \infty$ gegen den gleichen Grenzwert $AB = BA$. Also kommutieren alle Elemente von $C^*(A)$ paarweise miteinander, und $C^*(A)$ ist eine kommutative Banach–Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$. Wegen $\|A^*\| = \|A\|$ konvergiert für jede konvergente Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(H)$ die Folge $(A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $(\lim_{n\to\infty} A)^*$. Dann ist $C^*(A)$ abgeschlossen unter der $*$–Invoution. Die Aussage folgt aus Satz 5.25 und Bemerkung 5.21. **q.e.d.**

Satz 5.28. *(Spektralsatz) Sei H ein komplexer Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator mit Spektrum* $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{C}$. *Dann existiert ein kanonischer isometrischer Isomorphismus $C^*(A) \simeq C(\mathrm{Spec}(A),\mathbb{C})$ von kommutativen C^*–Algebren.*

Unter diesem Isomorphismus wird A auf die identische Abbildung von $\mathrm{Spec}(A)$ *aufgefasst als Abbildung von* $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow \mathbb{C}$ *und A^* auf die Veknüpfung der komplexen Konjugation mit dieser identischen Abbildung abgebildet.*

Beweis: Sei $\mathrm{Spec}(A)$ das Spektrum von A als Element von $C^*(A)$ (vergl. Lemma 5.7) und ρ der kanonische Homomorphismus des Satzes von Gelfand–Neumark. Dann ist $\rho(A)$ eine stetige Abbildung von $\mathrm{Spec}(C^*(A))$ nach $\mathrm{Spec}(A)$. Wegen Satz 5.19 ist diese Abbildung surjektiv. Wir zeigen, dass sie auch injektiv ist. Seien $\chi_1,\chi_2 \in \mathrm{Spec}(C^*(A))$ zwei Elemente vom Spektrum von $C^*(A)$ mit $\rho(A)(\chi_1) = \rho(A)(\chi_2)$. Dann gilt

$$\rho(A^*)(\chi_1) = \overline{\rho(A)(\chi_1)} = \overline{\rho(A)(\chi_2)} = \rho(A^*)(\chi_2).$$

Also gilt für alle $B \in$ Lineare Hülle$\{A^n(A^*)^m \mid n,m \in \mathbb{N}_0\}$ auch $\rho(B)(\chi_1) = \rho(B)(\chi_2)$. Wegen der Stetigkeit gilt dies auch für alle Elemente von $C^*(A)$. Daraus folgt $\chi_1 = \chi_2$. Damit haben wir gezeigt, dass $\rho(A)$ eine bijektive Abbildung von $\mathrm{Spec}(C^*(A))$ nach $\mathrm{Spec}(A)$ ist. Weil $\mathrm{Spec}(C^*(A))$ ein kompakter topologischer Raum ist, ist wegen Korollar 1.21 $\rho(A)$ sogar ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus der kommutativen C^*–Algebren $C(\mathrm{Spec}(C^*(A),\mathbb{C}) \simeq C(\mathrm{Spec}(A),\mathbb{C})$. Offenbar entspricht dabei $\rho(A)$ der identischen Abbildung von $\mathrm{Spec}(A)$ und $\rho(A^*)$ der komplex–konjugierten davon. Wegen dem Satz von Gelfand–Neumark ist $C^*(A)$ kanonisch isomorph zu $C(\mathrm{Spec}(C^*(A)),\mathbb{C})$, wobei A und A^* auf $\rho(A)$ und $\overline{\rho(A)}$ abgebildet werden.

Wir zeigen zuletzt, dass das Spektrum von A als Element von $\mathcal{L}(H)$ mit dem Spektrum von A als Element von $C^*(A)$ übereinstimmt. Offenbar gehört $A - \xi\mathbb{1}$ für alle $\xi \in \mathbb{C}$ zu $C^*(A)$. Wenn $A - \xi\mathbb{1}$ als Element von $C^*(A)$ invertierbar ist, dann auch als Element von $\mathcal{L}(H)$. Also enthält des Spektrum von A als Element von $C^*(A)$ das Spektrum von A als Element von $\mathcal{L}(H)$. Wenn $A - \xi\mathbb{1}$ in $\mathcal{L}(H)$ invertierbar ist, aber nicht in $C^*(A)$, dann sei $B = (A - \xi\mathbb{1})^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, $c > \|B\|$ und

$$f : \mathrm{Spec}(A) \to \mathbb{R}, \qquad\qquad z \mapsto \min\left\{\frac{1}{|z-\xi|}, c\right\}$$

Wegen $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ gibt es einen entsprechenden Operator $f(A) \in C^*(A)$ mit

$$\|(A - \xi\mathbb{1})f(A)\| = \sup\{|(z-\xi)f(z)| \mid z \in \mathrm{Spec}(A)\} \le 1 \qquad \text{und } \|f(A)\| = c.$$

Daraus folgt $c = \|f(A)\| \le \|B(A - \xi\mathbb{1}_H)f(A)\| \le \|B\| \cdot \|(A - \xi\mathbb{1})f(A)\| \le \|B\|$ im Widerspruch zu $c \ge \|B\|$. Also gibt es kein solches $\xi \in \mathrm{Spec}(A)$ und die beiden Spektren von A stimmen überein. **q.e.d.**

Korollar 5.29. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator eines komplexen Hilbertraumes H. Dann stimmt das Spektrum von A als Element der kommutativen C^*–Algebra (vergl. Lemma 5.7) mit dem Spektrum von A als Element von $\mathcal{L}(H)$ überein.* **q.e.d.**

Definition 5.30. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator eines komplexen Hilbertraumes H. Dann gibt es für jede Funktion $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ eine Operator in $C^*(A) \subset \mathcal{L}(H)$, der der Funktion f entspricht. Diesen Operator bezeichnen wir mit $f(A)$.*

Übungsaufgabe 5.31. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator auf einem komplexen Hilbertraum H.*

(i) *Zeige, dass für alle $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ das Spektrum von $f(A)$ gleich dem Bild der Abbildung f ist.*

(ii) *Zeige, dass für alle injektiven $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ auch $C^*(f(A)) = C^*(A)$ gilt.*

(iii) *Zeige, dass für alle $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ die kommutative C^*–Algebra $C^*(f(A))$ in $C^*(A)$ enthalten ist. Gebe die entsprechende Unteralgebra von $C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ an.*

Definition 5.32. *Ein Element $x \in X$ von einem topologischen Raum X heisst isoliert, wenn es eine Umgebung $U \subset X$ von x gibt, so dass $X \cap U = \{x\}$ gilt.*

Korollar 5.33. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator eines komplexen Hilbertraumes H. Dann ist jedes isolierte Element ξ des Spektrums von A ein Eigenwert von A und* *es gibt einen orthogonalen Projektor $P_\xi \in C^*(A)$ auf den entsprechenden Eigenraum von A, d.h. es gilt:*

$$P_\xi = P_\xi^* = P_\xi^2 \qquad\qquad P_\xi A = AP_\xi = \xi P_\xi$$

und $A - \xi\mathbb{1}$ ist auf dem orthogonalen Komplement von dem Eigenraum invertierbar.

Beweis: Für jedes isolierte Element $\xi \in \mathrm{Spec}(A)$ des Spektrums eines normalen Operators $A \in \mathcal{L}(H)$ ist die Funktion

$$f : \mathrm{Spec}(A) \to \mathbb{R} \qquad\qquad z \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } z = \xi \\ 0 & \text{falls } z \neq \xi \end{cases}$$

eine stetige reelle Funktion auf dem Spektrum, die $f^2 = f$ und $\mathbb{1}_{\mathrm{Spec}(A)} f = \xi f$ erfüllt. Also ist P_ξ ein orthogonaler Projektor in $C^*(A)$, der $P_\xi A = AP_\xi = \xi P_\xi$ erfüllt. Ausserdem ist $\mathbb{1}_{\mathrm{Spec}(A)} - \xi$ auf der kompakten Menge $Spec(A) \setminus \{\xi\}$ invertierbar. Sei also $g \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ mit

$$g : \mathrm{Spec}(A) \to \mathbb{C} \qquad\qquad z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z-\xi} & \text{falls } z \neq \xi \\ 0 & \text{falls } z = \xi. \end{cases}$$

Dann gilt offenbar

$$g(A)(A - \xi\mathbb{1}_H)(\mathbb{1}_H - P_\xi) = (A - \xi\mathbb{1}_H)g(A)(\mathbb{1}_H - P_\xi) = \mathbb{1}_H - P_\xi.$$

Also ist $A - \xi\mathbb{1}_H$ auf dem Bild von $\mathbb{1}_H - P_\xi$, das das orthogonale Komplement von dem Bild von P_ξ ist, invertierbar. **q.e.d.**

Korollar 5.34. *Auf einem endlichdimensionalen komplexen Hilbertraum H ist jeder normale Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ diagonalisierbar. D.h. es gibt eine orthogonale Zerlegung $H = \bigoplus_{\xi \in \mathrm{Spec}(A)} H_\xi$ in eine direkte Summe von Hilberträumen, so dass die Einschränkung von A auf H_ξ gleich $\xi\mathbb{1}_{H_\xi}$ ist für alle $\xi \in \mathrm{Spec}(A)$.*

Beweis: Wir können die Operatoren von $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ mit den $\mathbb{C}$–wertigen $n \times n$–Matrizen identifizieren. Dann ist das Spektrum von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ gegeben durch die Menge der Nullstellen von $z \mapsto \det(z\mathbb{1} - A)$. Also ist das Spektrum endlich, und alle Elemente des Spektrums isoliert. Wir nummerieren die Elemente in willkürlicher Reihenfolge und wenden das vorangehende Korollar sukzessive auf die Operatoren im orthogonalen Komplement der schon diagonalisierten Eigenräume an. **q.e.d.**

Korollar 5.35. **(i)** *Ein normaler Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum ist genau dann selbstadjungiert, wenn* $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *gilt.*

(ii) *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator auf einem komplexen Hilbertraum H. Dann besteht der Abschluss der reellen Linearen Hülle Lineare Hülle$_{\mathbb{R}}\{A^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ aus allen selbstadjungierten Elementen von $C^*(A)$. Diese Algebra ist offenbar isomorph zu $C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{R})$. Für $f, g \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{R})$ ist*

$$f(A) \leq g(A) \qquad \text{äquivalent zu} \qquad f(z) \leq g(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathrm{Spec}(A).$$

(iii) *Ein selbstadjungierter Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum ist genau dann nicht negativ (positiv), wenn es einen selbstadjungierten (injektiven) Operator $B \in \mathcal{L}(H)$ gibt, mit $A = B^2$.*

(iv) *Ein normaler Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum ist genau dann unitär, wenn dass Spektrum von U in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ enthalten ist.*

(v) *(Polarzerlegung) Für jeden normalen invertierbaren Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum H gibt es einen unitären Operator U und einen positiven selbsadjungierten Operator B, so dass gilt $A = BU = UB$.*

Beweis (i): Weil jeder Operator mit sich selber kommutiert, ist jeder selbstadjungierte Operator auch normal. Für einen normalen Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ ist wegen dem Spektralsatz die Bedingung $A = A^*$ äquivalent zu $\bar{\mathbb{1}}_{\mathrm{Spec}(A)} = \mathbb{1}_{|Spec(A)}$, was seinerseits äquivalent dazu ist, dass das Spektrum reell ist.
(ii) und (iii): Die reelle Lineare Hülle$_{\mathbb{R}}\{A^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ besteht aus allen selbstadjungierten Elementen von Lineare Hülle$_{\mathbb{C}}\{A^n(A^*)^m \mid n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Wegen dem Spektralsatz ist die Einschränkung auf diese reelle Banachunteralgebra von $C^*(A)$ ein Isomorphismus auf die reelle Banachalgebra $C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{R})$. Wegen der Linearität ist dieser Isomorphismus genau dann monoton, wenn alle nicht negativen Elemente von $C^*(A)$ mit den nicht negativen Funktionen von $C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{R})$ identifiziert werden. Weil für alle $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ das Spektrum von $f(A)$ gleich dem Bild von f ist, entsprechen die nicht negativen Elemente von $C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{R})$ genau den Elementen von $C^*(A)$, deren Spektrum in $\mathbb{R}^+$ enthalten ist. Jetzt zeigen wir, dass die beiden Bedingungen von (iii) äquivalent dazu sind, dass das Spektrum von A in $\mathbb{R}_0^+$ enthalten ist. Weil die Funktion $\sqrt{\cdot}\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig ist, folgt aus $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_0^+$, dass $B = \sqrt{A}$ definiert ist und gilt $A = B^2 = B^*B$. Dann ist A offenbar nicht negativ bzw. positiv, wenn $B = \sqrt{A}$ injektiv ist. Wenn $\lambda < 0$ zum Spektrum von A gehört, dann gibt es ein $f \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$, dessen Träger in $(\infty, -\epsilon]$ enthalten ist mit $\epsilon > 0$. Dann gilt für alle $v \in H$ mit $f(A)v \neq 0$ auch $\langle Af(A)v, f(A)v\rangle < \epsilon\langle f(A)v, f(A)v\rangle < 0$. Also gilt nicht $A \geq 0$.
(iv): Weil jeder invertierbare Operator mit seinem inversen kommutiert, ist jeder untitäre Operator auch normal. Für einen normalen Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ ist wegen dem Spektralsatz die Bedingung $U^{-1} = U^*$ äquivalent zu $\bar{\mathbb{1}}_{\mathrm{Spec}(A)} = \mathbb{1}^{-1}_{|Spec(A)}$, was seinerseits äquivalent dazu ist, dass das Spektrum in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ enthalten ist.

(v): Für jeden invertierbaren Operator ist Null nicht im Spektrum. Auf $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ sind folgende Funktionen stetig:

$$f : z \mapsto \frac{z}{|z|}, \qquad \text{und } g : z \mapsto |z|.$$

Die entsprechenden Operatoren $U = f(A)$ und $B = g(A)$ in $C^*(A)$ erfüllen offenbar $A = UB = BU$. **q.e.d.**

5.4 Spektralmaß

In diesem Abschnitt benutzen wir den Spektralsatz um etwas ähnliches, wie eine Diagonalisierung von normalen Operatoren bei nicht isolierten Elementen des Spektrum zu erhalten. Aus dem Spektralsatz und Korollar 5.35 folgt

Korollar 5.36. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator auf einem komplexen Hilbertraum H. Dann definiert*

$$C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{R}) \to \{B \in C^*(A) \mid B^* = B\}, \quad f \mapsto f(A)$$

einen stetigen monotone Banachalgebraisomorphismus. **q.e.d.**

Wir wollen diese Abbildung als die Integration der Funktionen f mit einem Operator wertigen Maß interpretieren, d.h. wir suchen ein Maß μ_A auf der σ–Algebra der Borelmengen von $\mathbb{C}$ mit Werten in den positiven Operatoren in $C^*(A)$, so dass gilt

$$\int f d\mu_A = f(A) \quad \text{für alle } f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{R}).$$

Das Maß einer Borelmenge ist dann das Integral über die charakteristische Funktion der Borelmenge. Also müssen wir das Integral ausdehnen auf solche charakteristische Funktionen, die im Allgemeinen natürlich nicht stetig sind. Jede charakteristische Funktion χ_X einer Menge $X \subset \mathrm{Spec}(A)$ erfüllt

$$\chi_X^2 = \chi_X \qquad \bar{\chi}_X = \chi_X.$$

Der entsprechende Operator $\chi_X(A)$ sollte also eine orthogonale Projektion sein. Wir werden also eine σ–additive Abbildung μ_A konstruieren von den Borelmengen von $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{C}$ in die orthogonalen Projektoren. Weil die abgeschlossenen bzw. offenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{C}$ mit den Schnitten von den abgeschlossenen bzw. offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Spec}(A)$ übereinstimmen, bestehen die Borelmengen von

Spec(A) genau aus allen Borelmengen von $\mathbb{C}$, die in Spec(A) enthalten sind. Weil jede Borelmenge von $\mathbb{C}$ also eine disjunkte Vereinigung einer Borelmenge von Spec(A) und einer Borelmenge im Komplement von Spec(A) ist, können wir das Spektralmaß auch auf alle Borelmengen von $\mathbb{C}$ fortsetzen, indem wir es auf den Borelmengen im Komplement von Spec(A) als Null definieren.

Dazu benötigen wir noch eine Vorbereitung.

Definition 5.37. *Auf dem Raum der stetigen linearen Operatoren eines Hilbertraumes gibt es neben der Normtopologie noch die starke und die schwache Topologie. Die stark–offenen Mengen werden von allen Mengen der Form*

$$\{A \in \mathcal{L}(H) \mid Av \in U\} \text{ mit } v \in H \text{ und } U \subset H \text{ offen}$$

erzeugt, und die schwach offenen Mengen von allen Mengen der Form

$$\{A \in \mathcal{L}(H) \mid \langle Av, w\rangle \in U\} \text{ mit } v, w \in H \text{ und } U \subset \mathbb{K} \text{ offen.}$$

Eine Folge $(A_n)_{n\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann stark (bzw. schwach), wenn für alle $v \in H$ die Folgen $(A_n v)_{n\in\mathbb{N}}$ in H (bzw. für alle $v, w \in H$ die Folgen $\langle A_n v, w\rangle$ in $\mathbb{K}$) konvergieren. Offenbar ist jede Norm konvergente Folge in $\mathcal{L}(H)$ auch stark konvergent, und jede stark konvergente Folge auch schwach konvergent. Entsprechend sind die schwach abgeschlossenen (bzw. offenen) Mengen eine Teilmenge der stark abgeschlossenen (bzw. offenen) Mengen und diese eine Teilmege der abgeschlossenen (bzw. offenen) Mengen (bezüglich der Normtopologie).

Wir haben gesehen, dass die kommutativen abgeschlossenen C^*–Unteralgebren von $\mathcal{L}(H)$ isomorph sind zu den C^*–Algebren der stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdroffraum. Im Allgemeinen sind aber die charkteristischen Funktionen, also solche Funktionen, die nur die Werte Null und Eins annehmen nicht stetig. Die orhtogonalen Projektoren entsprechen aber genau solchen charakteristischen Funktionen. Deshalb liegt es nahe, die C^*–Algebren zu vergrößern, so dass sie auch genügend viele orthogonale Projektoren enthalten. Glücklicherweise, kann man jede abgeschlossene C^*–Unteralgbra von $\mathcal{L}(H)$ zu einer schwach abgeschlossenen C^*–Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$ erweitern. Diese werden von–Neumann–Algebren oder W^*–Algebren genannt.

Definition 5.38. *Für eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ sei die Kommutante $\mathcal{A}'$ gleich*

$$\mathcal{A}' = \{B \in \mathcal{L}(H) \mid [B, A] = 0 \text{ für alle } A \in \mathcal{A}\}.$$

Lemma 5.39. *Für zwei Teilmengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von $\mathcal{L}(H)$ gilt folgendes:*

(i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}' \subset \mathcal{A}'$.

(ii) *$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{(2n)}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{(2n-1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *Wenn $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist unter der $*$–Involution, dann auch $\mathcal{A}'$.*

(iv) *$\mathcal{A}'$ ist eine schwach abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$.*

Beweis:(i) ist klar.
(ii): Aufgrund der Definition gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$, und für $\mathcal{A}'$ auch $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}'''$. Durch Anwenden von (i) folgt $\mathcal{A}''' \subset \mathcal{A}'$. Indem wir das auf die Algebren $\mathcal{A}^{(n)}$ anwenden erhalten wir (ii).
(iii): Aus Satz 4.20 folgt $[B^*, A] = -([B, A^*])^*$, und daraus (iii).
(iv): Offenbar ist $\mathcal{A}'$ ein Unterraum und wegen $[BC, A] = B[C, A] + [B, A]C$ auch eine Algbera. Wenn eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}'$ schwach gegen B konvergiert, dann gilt

$$\langle [B, A]v, w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle B_n(Av), w\rangle - \lim_{n\to\infty} \langle B_n v, A^* w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle [B_n, A]v, w\rangle = 0$$

für alle $v, w \in H$ und alle $A \in \mathcal{A}$. Also liegt $B \in \mathcal{A}'$. **q.e.d.**

Satz 5.40. *(Der Doppelkommutanten Satz von Neuman) Für eine C^*–Algebra (abgeschlossen in der Normtopologie und unter der Multiplikation und der $*$–Involution) $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ mit Eins ist folgendes äquivalent:*

(i) *$\mathcal{A}$ ist gleich der Doppelkommutanten $\mathcal{A}''$.*

(ii) *$\mathcal{A}$ ist schwach abgeschlossen.*

(iii) *$\mathcal{A}$ ist stark abgeschlossen.*

Beweis: Aufgrund (iv) im vorangehenden Lemma folgt (ii) aus (i). Aus der Definition der schwachen und der starken Topologie folgt (iii) aus (ii). Um aus (iii) wieder (i) zu folgern genügt es folgendes zu beweisen:

$$\text{Für alle } A \in \mathcal{A}'' \text{ und } v_1, \ldots, v_n \in H \text{ und } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } B \in \mathcal{A} \text{ mit}$$
$$\|(A - B)v_i\| \leq \epsilon \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Wir zeigen diese Aussage zuerst für $n = 1$. Sei $\overline{\mathcal{A}v_1}$ der Abschluss der Menge $\mathcal{A}v_1 = \{Cv_1 \in H \mid C \in \mathcal{A}\}$ und P die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathcal{A}v_1}$. Offenbar läßt $\mathcal{A}$ $\overline{\mathcal{A}v_1}$ invariant. Dann gilt $PCP = CP$ für alle $C \in \mathcal{A}$. Weil $\mathcal{A}$ unter der $*$–Involution invariant ist gilt auch $PC^*P = C^*P$. Weil $P = P^*$ ergibt die adjungierte dieser Gleichung mit der ersten zusammen $PC = CP$, also $P \in \mathcal{A}'$. Wegen dem vorangehenden Lemma folgt $AP = PA$, und deshalb auch $A\overline{\mathcal{A}v_1} \subset \overline{\mathcal{A}v_1}$. Wegen $\mathbb{1}_H \in \mathcal{A}$ liegt $v_1 \in \overline{\mathcal{A}v_1}$. Dann folgt die Aussage aus der Definition von $\overline{\mathcal{A}v_1}$.

Für den Fall sei $\tilde{H}$ die n–fache direkte Summe von n Kopien von H. Dann können wir $\mathcal{A}$ mit der Algebra der diagonalen $n \times n$–Matrizen der Form $\tilde{\mathcal{A}} = \{C\mathbb{1}_{\tilde{H}} \in \mathcal{L}(\tilde{H}) \mid$

$C \in \mathcal{A}\}$ identifizieren. Außerdem besteht $\tilde{\mathcal{A}}'$ aus allen $n \times n$–Matrizen, deren Einträge in $\mathcal{A}'$ liegen. Schließlich besteht $\tilde{\mathcal{A}}''$ aus allen diagonalen $n \times n$–Matrizen der Form $C\mathbb{1}_{\tilde{H}}$ mit $C \in \mathcal{A}''$, und wir können auch $\tilde{\mathcal{A}}''$ mit $\mathcal{A}''$ identifizeiren. Die Aussage mit $n = 1$ für die Algebren $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{A}}''$ auf $\tilde{H}$ entspricht genau der ursprünglichen Aussage. **q.e.d.**

Definition 5.41. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator auf dem komplexen Hilbertraum H. Dann sei $W^*(A) = C^*(A)''$ die Doppelkommutante von $C^*(A)$ in $\mathcal{L}(H)$.*

Wegen Lemma 5.39 folgt aus $C^*(A) \subset C^*(A)'$ auch $C^*(A)'' \subset C^*(A)' = C^*(A)'''$. Deshalb ist auch $W^*(A)$ eine kommutative C^*–Algebra.

Satz 5.42. *Sei H ein komplexer Hilbertraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge von selbstadjungierten Operatoren in $\mathcal{L}(H)$, d.h. es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$ und $A_{n+1} - A_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen eindeutig definierten selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(H)$, so dass die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark gegen A konvergiert.*

Beweis: Für alle $v \in H$ ist die Folge $(\langle A_n v, v\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen der Selbstadjungiertheit der Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reell und wegen der Monotonie dieser Folge monoton wachsend. Wegen Satz 4.25 ist die Folge beschränkt. Aus dem Monotonie Prinzip folgt, dass alle diese Folgen konvergieren. Offenbar gilt für alle selbstadjungierten Operatoren $B \in \mathcal{L}(H)$und alle $v, w \in H$:

$$\begin{aligned}\langle Bv, w\rangle &= \frac{1}{4}\left(\langle B(v+w), v+w\rangle - \langle B(v-w), v-w\rangle\right)\\ &\quad + \frac{\imath}{4}\left(\langle B(v+\imath w), v+\imath w\rangle - \langle B(v-\imath w), v-\imath w\rangle\right).\end{aligned}$$

Also konvergieren für alle $v, w \in H$ die Folgen $(\langle A_n v, w\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen der Stetigkeit der Addition und der Multiplikation definieren die Grenzwerte eine hermitesche Form auf H, die für alle $v, w \in H$ punktweise durch $\|v\| \cdot \|w\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$ beschränkt ist. Insbesondere sind für alle $w \in H$ die Abbildungen $v \mapsto \lim_{n\to\infty}\langle A_n v, w\rangle$ lineare stetige Abbildungen in H'. Aus Satz 4.9 folgt, dass diese hermitesche Form eine lineare Abbildung A von H nach H definiert mit

$$\langle Av, w\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A_n v, w\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle v, A_n w\rangle = \langle v, Aw\rangle \text{ für alle } v, w \in H.$$

Dann folgt aus dem Satz von Hellinger–Toeplitz, dass $A \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator ist. Für jedes feste $v \in H$ und alle $w \in H$ konvergiert die Folge $(\langle A_n v, w\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\langle Av, w\rangle$. Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Wegen Satz 4.25 gilt $0 \leq A_n \leq C\mathbb{1}_H$ mit $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$. Wegen Korollar 4.31 folgt dann

$$\begin{aligned}\langle (A_n - A_m)v, (A_n - A_m)v\rangle^2 &\leq \langle (A_n - A_m)v, v\rangle\langle (A_n - A_m)^2 v, (A_n - A_m)v\rangle\\ &\leq 8C^3\|v\|^2\langle (A_n - A_m)v, v\rangle.\end{aligned}$$

Wegen der Monotonie und der Beschränktheit gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt $0 \leq \langle (A_n - A_m)v, v\rangle \leq \frac{\epsilon^4}{8C^3}\|v\|^2$ und damit auch

$$\|A_n v - A_m v\|^4 \leq \epsilon^4 \|v\|^4 \quad \Leftrightarrow \quad \|A_n v - A_m v\| \leq \epsilon \|v\|.$$

Also konvergiert $(A_n v)_{n\in\mathbb{N}}$ in H für alle $v \in H$ gegen Av. **q.e.d.**

Lemma 5.43. *Für jede kompakte Teilmenge $X \subset \mathbb{C}$ gibt es eine stetige reelle Funktion $f_X \in C_b(\mathbb{C}, [0,1])$ mit kompakten Träger, die nur Werte in $[0,1]$ annimmt, und deren Urbild $f^{-1}[\{1\}]$ gleich X ist.*

Beweis: Zunächst definieren wir die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+, \quad z \mapsto g(z) = \inf\{|z - x| \mid x \in X\}$$

Weil der Abstand zweier Punkte auf dem kartesischen Produkt aller Paare von Punkte stetig ist, ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ die die Abbildung $z \mapsto |z - x|$ stetig. Wegen Korollar 1.21 nimmt diese Funktion dann auf jeder kompakten Menge das Infimum an, d.h. es gibt ein $x_z \in X$ mit $|z - x_z| = \inf\{|z - x| \mid x \in X\}$. Aus der Dreieckungleichung folgt für alle $z' \in B(z, \epsilon)$ auch $g(z') \leq |z' - x_z| \leq |z' - z| + |z - x_z| \leq g(z) + \epsilon$ und damit auch $g(z) \leq g(z') + \epsilon$. Also ist die Funktion g stetig und nimmt nur Werte in $\mathbb{R}_0^+$ an. Schließlich definieren wir

$$f_X : \mathbb{C} \to [0,1], \quad z \mapsto f_X(z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{g(z)}{g(z)-1}\right) & \text{für } 0 \leq g(z) < 1 \\ 0 & \text{für } g(z) \geq 1. \end{cases}$$

Diese Funktion hat offenbar die gewünschten Eigenschaften. **q.e.d.**

Definition 5.44. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator. Dann definieren wir für jede abgeschlossene Menge $X \subset \mathrm{Spec}(A)$ das entsprechende Spektralmaß durch*

$$\mu_A(X) = \text{starker} \lim_{n\to\infty} f_X^n(A) \;\textit{mit}\; f_X \in C(\mathrm{Spec}(A), [0,1]) \;\textit{und}\; f^{-1}[\{1\}] = X.$$

Danach setzten wir es so auf alle Borelmengen von $\mathrm{Spec}(A)$ fort, dass

(i) *Für eine abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ von Borelmengen von $\mathrm{Spec}(A)$ gilt*

$$\mu_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \text{starker} \lim_{n\to\infty} \mu_A\left(X_1 \cup \ldots \cup X_n\right).$$

(ii) *Für das Komplement $\mathrm{Spec}(A) \setminus X$ einer Borelmenge X von $\mathrm{Spec}(A)$ gilt*

$$\mu_A\left(\mathrm{Spec}(A) \setminus X\right) = \mathbb{1}_H - \mu_A\left(X\right).$$

Satz 5.45. *Für jeden normalen Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum H definiert μ_A eine positive monotone σ–additive Abbildung von den Borelmengen von* $\mathrm{Spec}(A)$ *in die orthogonalen Projektoren von $W^*(A)$ mit $\mu_A(\mathrm{Spec}(A)) = \mathbb{1}_H$. Dabei ist für jede Borelmenge X von* $\mathrm{Spec}(A)$ *das Spektrum der Einschränkung von A auf das Bild des Projektors $\mu_A(X)$ in $\bar{X}$ enthalten. Insbesondere ist $\mu_A(X)$ höchstens dann nicht Null, wenn X und* $\mathrm{Spec}(A)$ *nicht disjunkt sind.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass für jede abgeschlossenen Menge $X \subset \mathrm{Spec}(A)$ der Operator $\mu_A(X)$ ein orthogonaler Projektor ist, der mit A vertauscht. Aus $0 \leq f_X \leq 1$ folgt wegen Korollar 5.36 $0 \leq f_X(A) \leq \mathbb{1}$. Also ist die Folge $(f_X^n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende beschränkte Folge in $\mathcal{L}(H)$ und konvergiert wegen Satz 5.42 gegen einen selbstadjungierten Operator. Aus $f_X^n(A) = (f_X(A))^n$ folgt, dass für den Grenzwert $\mu_A(X)$ gilt $f_X^n(A)\mu_A(X) = \mu_A(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\mu_A^2(X) = \mu_A(X)$. Aus $Af_X^n(A) = f_X^n(A)A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $A\mu_A(X) = \mu_A(X)A$. hermitesch konvergent Weil $W^*(A)$ eine stark abgeschlossene kommutative C^*–Algebra mit Eins ist, folgt aus Satz 5.42, dass μ_A eine eindeutige Fortsetzung auf alle Borelmengen von $\mathrm{Spec}(A)$ besitzt, die die Bedingung (i) und (ii) aus der vorangehenden Definition erfüllt. Diese Abbildung ist offenbar σ–additiv.

Sei X eine Borelmenge von $\mathrm{Spec}(A)$. Weil $\mu_A(X)$ mit allen Elementen von $W^*(A)$ kommutiert, lassen alle Elemente von $W^*(A)$ sowohl das Bild dieser orthogonalen Projektion als auch deren orthogonales Komplement invariant. Also ist das Spektrum von der Einschränkung von A auf das Bild der orthogonalen Projektion $\mu_A(X)$ in dem Spektrum von A enthalten. Wenn $\xi \in \mathrm{Spec}(A) \setminus \bar{X}$, dann ist die Einschränkung der Funktion $z \mapsto |z - \xi|$ auf die Menge $\bar{X}$ stetig und nimmt dort wegen Korollar 1.21 ein positives Minimum an. Also besitzt die Einschränkung der Funktion $z \mapsto z - \xi$ auf die Menge $\bar{X}$ ein beschränktes Inverses in $C(\bar{X}, \mathbb{C})$. Wegen Lemma 5.43 gibt es dann eine Funktion $g \in C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C}) \subset C_b(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, die $g(z) = \frac{1}{z-\xi}$ für alle $z \in \overline{X \cap \mathrm{Spec}(A)}$ erfüllt. Dann ist $\mu_A(X)g(A) \in W^*(A)$ ein inverser Operator von der Einschränkung $\mu_A(X)A$ von A auf das Bild von $\mu_A(X)$. Also gehört ξ nicht zum Spektrum von der Einschränkung von A auf das orthogonalem Komplement vom Bild von $\mu_A(X)$.**q.e.d.**

Die Menge aller orthogonalen Projektoren in $W^*(A)$ bildet die σ–Algebra der messbaren Mengen des Spektrums von A. Mithilfe der Maßtheorie kann die Abbildung von $C(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{C})$ nach $C^*(A)$ zu einer Abbildung von allen messbaren $\mathbb{C}$–wertigen Funktionen auf dem Spektrum von A (bezüglich des Spektralmaßes) nach $W^*(A)$ fortgesetzt werden. Dadurch wird allen messbaren Funktionen f auf $\mathrm{Spec}(A)$ ein Operator $f(A) \in W^*(A)$ zugeordnet.

Offenbar ist ein Element des Spektrums genau dann ein Eigenwert, wenn das Spektralmaß auf diesem Punkt nicht verschwindet. Der der charakteristischen Funktion des Punktes entsprechende Projektor projeziert dann auf den entsprechenden Eigenraum.

Definition 5.46. *(Spektralschar) Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator auf einem komplexen Hilbertraum. Dann heißt folgende Abbildung Spektralschar:*

$$E : \mathbb{R} \to W^*(A), \lambda \mapsto E_\lambda = \mu_A((-\infty, \lambda])$$

Für einen selbstadjungierte Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ ist das Spektrum in $[-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$ enthalten. Deshalb gilt $E_\lambda = 0$ für alle $\lambda < -\|A\|$ und $E_\lambda = \mathbb{1}_H$ für alle $\lambda \geq \|A\|$. Außerdem ist die Spektralschar eine monotone Abbildung von $\mathbb{R}$ in die orthogonalen Projektoren in $W^*(A)$. Das Spektralmaß entspricht gerade dem Stielchesintegral über diese monotone Funktion.