Differentialgleichungen

Fundamente

SS 05

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen **5**

1.1 Einführung . . . 5
1.2 Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . 8
1.3 Lineare Differentialgleichungen . . . 9
1.4 Existenz und Eindeutigkeit . . . 22
1.5 Elementare Lösungsverfahren . . . 27

2 Partielle Differentialgleichungen **33**

2.1 Beispiele . . . 33
2.1.1 Lineare Differentialgleichungen . . . 33
2.1.2 Nichtlinear Differentialgleichungen . . . 35
2.1.3 Lineare Differentialgleichungssystems . . . 37
2.1.4 Nichtlinear Differentialgleichungssystems . . . 38
2.2 Transportgleichung . . . 39
2.2.1 Inhomogene Transportgleichung . . . 40
2.3 Das Lebesgueintegral auf dem $\mathbb{R}^d$ . . . 41
2.3.1 Stufenfunktionen . . . 41
2.3.2 Lebesgue–integrable Funktionen auf dem $\mathbb{R}^d$ . . . 44
2.3.3 Das Riemann– und das Lebesgueintegral . . . 49
2.3.4 Der Satz von Fubini . . . 51
2.3.5 Konvergenzsätze . . . 53
2.3.6 Messbare Mengen . . . 56
2.3.7 Jacobi's Transformation von Maßen . . . 59
2.3.8 Der Gaußsche Satz . . . 63

3 Laplacegleichung **65**

3.1 Fundamentallösungen . . . 65
3.2 Mittelwerteigenschaften harmonischer Funktionen . . . 68
3.3 Maximumprinzip . . . 69

3.4 Greensche Funktionen 70
3.5 Dirichlet's Prinzip 75

4 Wärmeleitungsgleichung **77**
4.1 Fundamentallösung 77
4.2 Inhomogenes Problem. 79
4.3 Mittelwerteigenschaft 81
4.4 Maximumprinzip 83
4.5 Wärmeleitungskern 85
4.6 Wärmeleitungskern von S^1 88
4.7 Wärmeleitungskern von $[-1,1]$ 89

5 Wellengleichung **91**
5.1 D'Alembert's Formel für $n = 1$ 91
5.2 Sphärische Mittelwerte in der Wellengleichung 94
5.3 Lösung für $n = 3$ 96
5.4 Lösung für $n = 2$ 97
5.5 Inhomogene Wellengleichung 99
5.6 Energiemethoden 101

Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Funktionen zu ihren Ableitungen in Beziehung setzen. In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst nur Funktionen, die nur von einer Variablen abhängen, so dass auch nur die Ableitungen nach dieser einen Variablen auftauchen. Historisch wurden solche Differentialgleichungen von Newton gleichzeitig mit der Entdeckung der Differentialrechnung eingeführt um die Bewegung von massiven Teilchen im Gravitationsfeld zu beschreiben. Im einfachsten Fall des Apfels nehmen die Newton'schen Gleichungen die Form an:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -mg.$$

In dieser Gleichung taucht zwar nur die zweite Ableitung der gesuchten Koordinatenfunktion von u des Apfels nach der Zeit auf, so dass wir deren Lösung aus der Differential– und Integralrechnung schon kennen:

$$u(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + u_0$$

Die Lösung können wir aus der Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren der rechten und linken Seite erhalten. Das Ziel unserer Untersuchung einer Differentialgleichung ist dabei möglichst alle Lösungen zu bestimmen und dann solche zusätzlichen Eigenschaften der Lösungen zu finden, die die Lösung eindeutig festlegen.

Definition 1.1. *Eine Lösung ist eine Funktion u, die so oft differenzierbar ist, dass alle in der Differentialgleichung vorkommenden Ableitungen exisitieren und die zusammen mit diesen Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

Die Funktion von $u(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + u_0$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\frac{du}{dt}(t) = -gt + v_0 \text{ und } \quad \frac{d^2u}{dt^2}(t) = -g.$$

Wenn $\tilde{u}(t)$ eine andere Lösung der Differentialgleichung $m\frac{d^2u}{dt^2} = -gm$ ist, dann verschwindet die zweite Ableitung von $u - \tilde{u}$. Also ist $\frac{du}{dt} - \frac{d\tilde{u}}{dt}$ konstant, und es gibt ein $\tilde{v}_0$ mit $\frac{du}{dt} - \frac{d\tilde{u}}{dt} = v_0 - \tilde{v}_0$. Die Ableitung von $u - \tilde{u} - (v_0 \tilde{v}_0) \cdot t$ verschwindet dann aber und es gibt ein $\tilde{u}_0$, so dass

$$\tilde{u}(t) = u(t) - (v_0 - \tilde{v}_0)t - (u_0 - \tilde{u}_0) = -\frac{gt^2}{2} + \tilde{v}_0 t + \tilde{u}_0.$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$u(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + u_0, \text{ wobei } u(0) = u_0 \text{ und } \frac{du}{dt}(0) = v_0$$

Damit haben wir in diesem einfachen Beispiel unser Ziel erreicht.

Zusammenfassung 1.2. *Die höchste vorkommende Ableitung der Differentialgleichung $m\frac{d^2u}{dt^2} = -gm$ ist die zweite Ableitung. Durch geeignetes zweimaliges Integrieren konnten wir die Differentialgleichung lösen. Dabei entstanden zwei Integrationskonstanten und die Lösungen waren dann eindeutig durch die Wahl dieser Integrationskonstanten bestimmt. Diese Integrationskonstanten konnten wir schließlich als die Werte der Lösung und ihrer ersten Ableitung zu dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ interpretieren. Deshalb ist der Lösungsraum dieser Differentialgleichung zweidimensional und wird parametrisiert durch $(u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0)) \in \mathbb{R}^2$. Zu jeder solchen Wahl eines Anfangszustandes (u_0, v_0) gibt es dann genau eine Lösung, die gegeben ist durch*

$$u(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + u_0.$$

Übungsaufgabe 1.3. *Zeige für ein beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$, dass es genau eine Lösung der Differentialgleichung $m\frac{d^2u}{dt^2} = -gm$ mit $u(t_0) = u_0$ und $\frac{du}{dt}(t_0) = v_0$ gibt.*

Definition 1.4. *Differentialgleichungen, in denen nur die Ableitungen nach einer Variablen auftauchen, heißen gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Typischerweise beschreiben solche Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung von veränderlichen Größen in der Natur. Diese Differentialgleichungen geben dann ein kausales Verhalten der veränderlichen Größen vor. Durch das Lösen der Differentialgleichung können wir dann aus der Kenntnis der veränderlichen Größen und genügend vieler Ableitungen von ihnen zu einem (Anfangs–)Zeitpunkt t_0 das Verhalten von ihnen sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit ausrechnen und damit ihr Verhalten in der Zukunft vorhersagen und auf ihr Verhalten in der Vergangenheit zurückschließen. Die Anzahl der Ableitungen, die wir zum Zeitpunkt t_0 kennen müssen, ist dann gegeben durch die Anzahl der Integrationskonstanten, also die Anzahl der Integrale, die wir benötigen, um die Gleichung zu lösen. Da wir uns typischerweise auch die Funktionswerte vorgeben, also die Nullte–Ableitung, sollten wir im Allgemeinen alle Ableitungen bis zu einer Ordnung niedriger als der höchsten vorkommenden Ableitung vorgeben.

Definition 1.5. *Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste vorkommende Ordnung aller auftauchenden Ableitungen einer Differentialgleichung.*

Definition 1.6. *(Anfangswertproblem) Die Suche nach einer Lösung u einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung n, die zu einem gegebenen Wert t_0 der Variablen t (nach der abgeleitet wird) zusammen mit den ersten $n-1$ Ableitungen die Werte*

$$u(t_0) = u_0, \frac{du}{dt}(t_0) = u_1, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t_0) = u_{n-1}$$

annimmt, heißt Anfangswertproblem.

Aufgrund unserer Vorüberlegungen erwarten wir, dass jedes solches Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat. Wir werden später auch Bedingungen angeben, unter denen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen solcher Anfangswertprobleme beweisen können. Es stellt sich aber heraus, dass mache dieser Anfangswertprobleme viele Lösungen besitzen und andere gar keine.

Beispiel 1.7. **(i)** *Das Anfangswertproblem $\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4u$ mit $u(0) = 0$ hat offenbar die Lösungen*

$$u(t) = \begin{cases} (t-b)^2 & \text{für } b < t \\ 0 & \text{für } -a \le t \le b \\ (t+a)^2 & \text{für } t < -a \end{cases}$$

Hier sind a und b zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen, die beide auch ∞ sein können.

(ii) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die keine Stammfunktion besitzt (z.B. die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen). Dann hat das Anfangswertproblem $\frac{du}{dt} = f$ mit $u(0) = 0$ keine Lösung.*

Die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen besitzt auf keinem offenen Intervall (a, b) eine Stammfunktion. Wenn nämlich F eine solche Stammfunktion *wäre, dann wäre $x \to F(x)$ monoton wachsend und $x \to F(x) - x$ monoton fallend. Wegen dem Mittelwertsatz muß aber für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ entweder gelten*

$$F(x_1) - F(x_2) = x_1 - x_2 \text{ oder } F(x_1) - F(x_2) = 0.$$

Im zweiten Fall folgt aus der Monotonie von F, dass F zwischen x_1 und x_2 konstant ist und im ersten Fall folgt aus der Monotonie von $x \mapsto F(x) - x$, dass diese Funktion zwischen x_1 und x_2 konstant ist. Also ist die Ableitung von F zwischen x_1 und x_2 entweder konstant gleich 0 oder konstant gleich 1. Damit ist F keine Stammfunktion der charakteristischen Funktion der rationalen Zahlen.

1.2 Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Bisher haben wir stillschwiegend angenommen, dass die Funktionen, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllen soll, eine reelle Funktion ist. In diesem Fall hat eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n die Form

$$f(t, u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(n)}(t)) = 0,$$

wobei

$$f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

eine reelle Funktion ist. Hierbei haben wir angenommen, dass nur die Werte einer reellen Funktion und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung n zu einem Zeitpunkt t mit einander in Beziehung gebracht werden. Wenn wir zusätzlich noch annhehmen, dass sich die Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung auflösen läßt, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

Wenn wir jetzt aber $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen u betrachten, dann nimmt sie die Form

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$$

an, mit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^m.$$

Solche Differentialgleichungen heißen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch.

Satz 1.8. *Jedes gewöhnliche Differentialgleichungssystem läßt sich durch Vergrößerung von m auf $m \cdot n$ in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung verwandeln.*

Beweis: Fassen wir die Funktionen $(u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$ zu der $\mathbb{R}^{n \cdot m}$-wertigen Funktion zusammen, so ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})$$

offenbar äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} = (u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}) = (\dot{u}, \ldots, u^{n-1}, f(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})).$$

Hierbei geht das entsprechende Anfangswertproblem

$$u(t_0) = u_0, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$$

über in

$$(u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)})(t_0) = (u_0, \ldots, u_{n-1}).$$

q.e.d.

Im Folgenden werden wir uns also bei der Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme erster Ordnung beschränken können.

Beispiel 1.9. *Die Differentialgleichung $m\frac{d^2u}{dt^2} = -gm$ ist äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

1.3 Lineare Differentialgleichungen

Definition 1.10. *Eine Differentialgleichung von der Form*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

heißt lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf einem (offenen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Hierbei ist u eine gesuchte Funktion von I mit Werten in einem Banachraum V (z.B. $\mathbb{R}^n$) und A eine Abbildung von I in die lineare stetigen Abbildungen von V auf V (also $\mathcal{L}(V)$). Im Fall von $V = \mathbb{R}^n$ können wir $\mathcal{L}(V)$ mit den $n \times n$ Matrizen $\mathbb{R}^{n \times n}$ identifizieren und V mit den Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $A(t)u(t)$ das Matrix–Produkt der

$n \times n$–Matrix $A(t)$ mit dem Spaltenvektor $u(t)$, also wieder ein Spaltenvektor in $\mathbb{R}^n$. Wenn $b(t) = 0$ heißt die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen. Wenn A nicht von t abhängt, also als Abbildung konstant ist, heißt die Differentialgleichung autonom, andernfalls nichtautonom.

Satz 1.11. *Die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wenn also u und $\tilde{u}$ Lösungen sind, dann sind auch $u+\tilde{u}$ und λu für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung. Die Menge aller Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bildet einen affinen Raum. Eine allgemeine Lösung ist die Summe einer speziellen Lösung und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen linearen Differentialgleichung.*

Beweis: Seien u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ bzw. $\dot{\tilde{u}}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t)$, dann erfüllt $u - \tilde{u}$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)(u(t)) - \tilde{u}(t)),$$

also die entsprechende homogene Differentialgleichung. Genauso gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t) - \tilde{u}(t)) = A(t)\lambda(u(t)) - \tilde{u}(t)).$$

Deshalb ist der Raum aller Lösungen eines homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ein Vektorraum und die allgemeine Lösung eines inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des entsprechenden Systems. **q.e.d.**

Einer der wichtigsten mathematischen Hilfsmittel um die Existenz und Eindeutigkeit von Differentialgleichungen zu beweisen ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 1.12. *(***Banachscher Fixpunktsatz***) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine Lipschitz–stetige Abbildung von X nach X mit Lipschitzkonstante L, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Aus der Lipschitz–Stetigkeit von f folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in X$:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq L^n d(x, y).$$

Hier bezeichnet f^n die n–fache Verknüpfung von f mit sich selber. Also folgt aus der

Dreiecksungleichung für alle $m > n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{l=n}^{m-1} d(f^{l+1}(x_0)), f^l(x_0)) \\ &\leq \sum_{l=n}^{m-1} L^l d(f(x_0), x_0) \\ &= (1 - L^{m-n}) \frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{L^n}{L-1} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Weil $0 < L < 1$ konvergiert $\frac{L^n}{1-L} d(f(x_0), x_0)$ gegen Null und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit konvergiert sie. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Also ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f. Wegen der Lipschitzstetigkeit von f ist der Abstand von zwei Fixpunkten kleiner oder gleich als L mal dem Abstand. Also ist $(1 - L)$ mal dem Abstand kleiner oder gleich Null. Dann ist aber wegen $L < 1$ der Abstand nicht positiv, also gleich Null und beide Fixpunkte stimmen überein. **q.e.d.**

Satz 1.13. *(Existenz und Eindeutigkeit des linearen Angangswertproblems). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (nicht notwendig beschränktes) Teilintervall von $\mathbb{R}$ und $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in die beschränkten stetigen linearen Abbildungen des Banachraumes V. Außerdem sei $b : I \to V$ stetig. Dann besitzt für jedes $u_0 \in V$ und jedes $t_0 \in I$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t)$ mit $u(t_0) = u_0$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $u : I \to V$.*

Bemerkung 1.14. *Jede Lösung der Differentialgleichung muß differenzierbar sein und damit auch stetig. Dann muß sie aber sogar stetig differenzierbar sein. Deshalb gibt es also auch nur genau eine Lösung.*

Beweis: Sei $[\alpha, \beta] \subset I$ ein kompaktes Teilintervall von I, das t_0 enthält. Weil A auch auf $[\alpha, \beta]$ stetig ist, ist A auf $[\alpha, \beta]$ beschränkt und $\|A\|_\infty = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|A(t)\| < \infty$. Wir nehmen zunächst an, dass $L = (\beta - \alpha)\|A\|_\infty$ kleiner ist als 1. Dann erfüllt die Abbildung

$$f : C([\alpha, \beta], V) \to C([\alpha, \beta], V), u \mapsto f(u) \text{ mit } f(u)(t) = \int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds + u_0$$

für alle $u, \tilde{u} \in C([\alpha, \beta], V)$ die Gleichung

$$(f(u) - f(\tilde{u}))(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)(u(s) - \tilde{u}(s))ds.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(\tilde{u}\|_\infty &\leq \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot \|A\|_\infty(\beta - \alpha) \\ &= \|u - \tilde{u}\|_\infty \cdot L. \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstante $L < 1$. Wegen dem Banachschen Fixpunktsatz hat diese Abbildung genau einen Fixpunkt $u \in C([\alpha, \beta], V)$ der dann für alle $t \in [\alpha, \beta]$

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} (A(s)u(s) + b(s))ds + u_0$$

erfüllt. Dann gilt aber wegen dem Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung:

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ und } u(t_0) = u_0.$$

Also ist u eine Lösung des Anfangswertproblems auf (α, β).

Wenn $\tilde{u}$ eine zweite Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)\tilde{u}(t) + b(t) \text{ und } u(t_0) = u_0 0$$

auf (α, β) ist, dann folgt wieder aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)\tilde{u}(s) + b(s))ds.$$

Daraus folgt dann, dass auch $\tilde{u}$ ein Fixpunkt von f ist und dass wegen dem Banachschen Fixpunktsatz $u = \tilde{u}$ gelten muß.

Wenn $(\beta - \alpha)\|A\|_\infty > 1$ wählen wir eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (α, β), so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Punkt t_n in der Vereinigung der abgeschlossenen Kugeln um $t_0, \ldots, t_{n-1}$ mit Radius $\frac{1}{2\|A\|_\infty}$ liegt. Dann folgt induktiv, dass die Anfangswertprobleme $\dot{u}_n(t) = A(t)u_n(t) + b(t)$ mit $u_n(t_n) = u_{n-1}(t_n)$ auf der Vereinigung aller abgeschlossenen Kugeln um $t_0, \ldots, t_n$ mit Radius $\frac{1}{2\|A\|_\infty}$ nur genau eine Lösung haben und mit der einzigen Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblemes übereinstimmen. Also hat das ursprüngliche Anfangswertproblem auf jedem offenen Teilintervall von I das t_0 enthält nur genau eine Lösung. Dann hat es auch auf I nur genau eine Lösung. **q.e.d.**

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt sofort:

Korollar 1.15. *Sei $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung und $b : I \to V$ auch. Dann induziert für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung $C(I, V), u \mapsto u(t_0)$ einen Isomorphismus des Lösungsraumes der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t)$ auf V und für jede Lösung $\tilde{u}$ der inhomogenen Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ induziert die Abbildung $C(I, V) \mapsto V, u \mapsto u(t_0) - \tilde{u}(t_0)$ einen Isomorphismus des affinen Lösungsraumes dieser Differentialgleichung nach V.* **q.e.d.**

Insbesondere haben also die Lösungsräume der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dieselbe Dimension wie der Vektorraum, in dem die Werte der gesuchten Funktion liegen. Insbesondere stimmt also für reelle gewöhnliche Differentialgleichungen n–ter Ordnung die Dimension des Lösungsraumes mit der Ordnung überein, wie wir das erwartet haben. Nachdem wir jetzt also für eine erste Klasse von Differentialgleichungen die Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblemes gezeigt haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wir diese Lösungen auch ausrechnen können.

Beispiel 1.16. *Wir stellen uns eine Insel vor, die von Störchen, Fröschen und Fliegen bewohnt wird. Dabei stellen wir uns die Nahrungskette so vor, dass die Störche $S(t)$ sich sowohl von den Fröschen als auch von den Fliegen ernähren, die Frösche $F(t)$ nur von den Fliegen und die Fliegen $f(t)$ von dem Aas der Frösche und Störche. Wir nehmen jetzt an, dass das Tierwachstum nur von der vorhandenen Nahrungsmenge gesteuert wird:*

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= F(t) + f(t) \quad -2S(t) \\ \dot{F}(t) &= -S(t) + f(t) \\ \dot{f}(t) &= S(t) + F(t) \quad -2f(t) \end{aligned}$$

Beispiel 1.17. *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige reelle Funktionen. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung, die wir jetzt bestimmen wollen. Dazu betrachten wir zunächst das entsprechende homogene Anfangswertproblem mit $b = 0$. Das können wir umformen zu

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{d}{dt}\ln(u(t)) = A(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

Also erhalten wir

$$\ln(u(t)) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds + \ln(u_0)$$

bzw.

$$u(t) = u_0 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$$

Das entsprechende inhomogene Anfangswertproblem hat dann die Lösung

$$u(t) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right) u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\int\limits_{s}^{t} A(r)dr\right) b(s)ds.$$

Es gilt nämlich dann $\dot{u}(t) =$

$$= A(t)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right) u_0 + \exp\left(\int\limits_{t}^{t} A(r)dr\right) b(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\int\limits_{s}^{t} A(r)dr\right) b(s)ds$$

$= A(t)\cdot u(t) + b(t)$ *und* $u(t_0) = u_0$.

Also löst die angegebene Funktion das Anfangswertproblem und ist dann wegen dem vorangehenden Satz die eindeutige Lösung.

Um den zweiten Summanden zu erklären bemerken wir, dass die Funktion $u_s(t) = \exp\left(\int\limits_{s}^{t} A(r)dr\right) b(s)$ das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = u_s(t)A(t)$ mit $u(s) = b(s)$ löst. Aufgrund der Linearität gilt dann aber

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds = u_t(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds = b(t) + A(t)\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds.$$

Also löst dann $\int\limits_{t_0}^{t} u_s(t)ds$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = A(b)u(t)b(t) \text{ mit } u(t_0) = 0.$$

Wir erhalten also die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems als die Summe des homogenen Anfangswertproblems mit dem Integral über alle Anfangswertprobleme des homogenen Problems, wobei wir als Anfangswerte jeweils den inhomogenen Term einsetzen. Dieses Verfahren wollen wir jetzt verallgemeinern.

Satz 1.18. *(Variation der Parameter) Sei* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall und* V *ein Banachraum. Dann ist die Abbildung*

$$C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V \to C([\alpha,\beta],V) \qquad (\alpha,\beta,t_0,u_0) \to u$$

auf die eindeutige Lösung u des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } \qquad u(t_0) = u_0$$

stetig. Die Einschränkung dieser Abbildung auf ein festes t_0 hängt holomorph von A, b und u_0 ab. Für jedes $(A, b) \in C([\alpha, \beta], \mathcal{L}(V)) \times C([\alpha, \beta], V)$ ist dann die entsprechende Einschränkung der Abbildung ein affiner Isomorphismus von $(t_0, u_0) \in [\alpha, \beta] \times V$ auf den Lösungsraum der Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir Ihn zunächst benutzen um die Lösung eines inhomogenen Anfangswertproblemes aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems abzuleiten.

Korollar 1.19. *Sei $A : I \to \mathcal{L}(V)$ eine stetige Abbildung auf einem offenen nicht notwendigerweise beschränktem Intervall und $b : I \to V$ auch. Dann setzt sich wegen der Variation der Parameter die eindeutige Lösung $u_s(t)$ des Anfangswertprobleme*

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \text{ mit } \qquad u(s) = b(s)$$

zu einer stetigen Abbildung $I \mapsto C(I, V) \quad s \mapsto u_s$ zusammen. Die eindeutige Lösung des inhomogenen Anfanswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t) \text{ mit } \qquad u(t_0) = u_0$$

ist dann die Summe des entsprechenden homogenen Anfansgwertproblems und des Integrals

$$\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds.$$

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz ist die Abbildung $s \to u_s(t)$ auf allen Teilintervallen $[\alpha, \beta] \subset I$ stetig von $[\alpha, \beta]$ nach $C([\alpha, \beta], V)$. Dann existiert offenbar für alle $t \in I$ das Integral $\int_{t_0}^{t} u_s(t)ds$. Aufgrund des Hauptsatzes der Differential– und Integralrechnung gilt dann

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} u_s(t)ds = u_t(t) + a(t) \int_{t_0}^{t} u_s(t)ds = b(t) + a(t) \int_{t_0}^{t} u_s(t)ds$$

und $u(t_0) = 0$. Deshalb löst diese Funktion dann tatsächlich das Anfangswertproblem. Wegen Satz 1.11 ist dann die eindeutige Lössung des entspechden inhomogenen Anfanswertproblems die Summe dieser Funktion und der eindeutigen Lösung des entsprechenden homogenen Anfanswertproblems. **q.e.d.**

Beweis von Satz 1.18: Offenbar ist die Abbildung

$$\begin{aligned} C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V \times C([\alpha,\beta],V) \quad &\to \quad C([\alpha,\beta],V) \\ (A,b,t_0,u_0,u) \mapsto f_{\alpha,\beta,t_0,u_0}(u) \text{ mit } f_{\alpha,\beta,t_0,u_0}(u)(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} &(A(s)u(s)+b(s))ds \end{aligned}$$

stetig und hängt für festes t_0 analytisch von A, b, u_0 und u ab. Für zwei Elemente $(A,b,t_0,u_0), (\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0,\tilde{u}_0) \in C([\alpha,\beta],\mathcal{L}(V)) \times C([\alpha,\beta],V) \times [\alpha,\beta] \times V$ ist die Differenz der beiden entsprechenden Abbildungen $f = f_{\alpha,\beta,t_0,u_0}$ und $\tilde{f} = f_{\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0\tilde{u}_0}$, die wir im Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Anfangswertprobleme benutzt haben, beschränkt durch

$$\begin{aligned} &\left\| f(u) - \tilde{f}(u) \right\|_\infty \\ &\quad = \left\| u_0 - \tilde{u}_0 + \int\limits_{t_0}^{\tilde{t}_0} A(s)u(s)ds + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \left(A(s) - \tilde{A}(s))u(s) + b(s) - \tilde{b}(s) \right) ds \right\|_\infty \\ &\quad \leq + \|u_0 - \tilde{u}_0\| + |\beta - \alpha| \left(\|u\|_\infty \left(\|A\|_\infty |t_0 - \tilde{t}_0| + \|A - \tilde{A}\|_\infty \right) + \|b - \tilde{b}\|_\infty \right). \end{aligned}$$

Wir wählen jetzt wieder das Intervall $[\alpha,\beta]$ klein genug, so dass alle $\tilde{f}$, die den Elementen $(\tilde{A},\tilde{b},\tilde{t}_0,\tilde{u}_0)$ in einer ϵ–Kugel von (A,b,t_0,u_0) entsprechen, Lipschitz–stetig sind mit Lipschitzkonstante $\tilde{L} \leq L_0 < 1$. Für $n > m \geq N \in \mathbb{N}$ können wir dann abschätzen

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f}^n(u) - \tilde{f}^m(u) \right\|_\infty &\leq \left\| \tilde{f}^m(\tilde{f}^{n-m}(u) - \tilde{f}^m(u) \right\|_\infty \\ &\leq \tilde{L}^m \left\| u + \sum_{l=1}^{n-m} \tilde{f}^l(u) - \tilde{f}^{l-1}(u) \right\| \\ &\leq \tilde{L}^N \left(\|u\| + \sum_{l=0}^{n-m-1} \tilde{L}^l \|\tilde{f}(u) - u\| \right) \\ &\leq \tilde{L}^N \left(\|u\| + \frac{\|\tilde{f}(u) - u\|}{1 - \tilde{L}} \right). \end{aligned}$$

Wir wählen jetzt die Startfunktion u identisch gleich Null. Weil auf der ϵ–Kugel um (A, b, t_0, u_0) die Lipschitzkonstant uniform durch $L_0 < 1$ beschränkt ist, konvergiert dann die Folge $\left(\tilde{f}^n(u)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Anfanswertproblems. Denn definiert der Grenzwert auch eine stetige Funktion, die für festes t_0 holomorph von A, b und u_0 abhängt.

Wenn die Liptschitzkonstante größer als 1 ist, dann überdecken wir das Intervall wieder durch genügend kleine Teilintervalle und stezten die Lösung entsprechen fort. **q.e.d.**

Damit haben wir jetzt die Berechnung der Lösung auf das Lösen des homogenen Anfangswertproblem zurückgeführt.

Satz 1.20. *(Exponentialfunktion) Die Potenzreihe* $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ *konvergiert für alle* $A \in \mathcal{L}(V)$*, wenn* V *ein Banachraum ist. Außerdem gilt*

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

Beweis: Wegen $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ folgt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Dann folgt die Behauptung aus den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$. **q.e.d.**

Korollar 1.21. *(Lösung des autonomen Anfangswertproblems) Das inhomogene Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = Au(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

wobei $b : I \to V$ *stetig ist und* $A \in \mathcal{L}(V)$ *besitzt die eindeutige Lösung*

$$u(t) = \exp(tA)u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)b(s)ds.$$

Beweis: Es genügt wegen der Variation der Parameter zu zeigen, dass das homogene Anfangswertproblem ($b = 0$) durch $u(t) = \exp(tA)u_0$ gelöst wird. Das folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Damit bleibt aber das Problem der Berechnung der Exponentialfunktion. Dazu benutzen wir die Diagonalisierung bzw. Jordannormalform von Matrizen.

Übungsaufgabe 1.22. (i) *Aus der Analysis wissen wir, dass das Anfangswertproblem der Differentialgleichung*

$$u^{(n)}(t) = 0 \text{ mit } u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \ldots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}$$

die Lösung

$$u(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{u_l t^l}{l!}$$

besitzt. Dieses Anfangswertproblem ist äquivalent zu den Anfangswertproblemen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Also folgt dann, dass gilt

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{t^l}{l!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^l$$

Zeige direkt diese Identität.

(ii) *Zeige, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt*

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp(t\lambda) \cdot \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

(iii) *Die Matrix A lasse sich durch die invertierbare Matrix B diagonalisieren:*

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1}$$

Zeige, dass dann gilt

$$\exp(tA) = B \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Beispiel 1.23. *Die Matrix*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

läßt sich diagonalisieren auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Beispiels der Störche, Frösche und Fliegen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ F(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) \\ F(0) \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.24. *(Fundamentallösung) Sei $A : I \to \mathcal{L}(v)$ eine stetige Funktion von einem Intervall in die stetigen linearen Abbildungen des Banachraumes V. Dann konvergiert die Reihe $F : I \to \mathcal{L}(V)$*

$$F(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} A(t_n) \int_{t_0}^{t_n} A(t_{n-1}) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt$$

gegen die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ mit } F(t_0) = \mathbb{1}.$$

Beweis: Wenn wir zunächst einmal annehmen, dass die Reihe für alle $t, t_0 \in I$ gleichmäßig konvergiert, dann folgt aus dem Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung

$$\dot{F}(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} A(t) \int_{t_0}^{t} A(t_{n-1}) \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-2}) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_{n-1} = A(t)F(t).$$

Für alle $t, t_0 \in I$ ist aber A auf (t, t_0) beschränkt durch $\|A\|_\infty$. Also folgt

$$\left\| \int_{t_0}^{t} A(t_n) \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_{n-1}) \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_1) dt_1 \dots dt_n \right\|$$
$$\leq \|A\|_\infty^n \left| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_{n-1}} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \dots dt_n \right| = \|A\|_\infty^n \cdot \frac{|t - t_0|^n}{n!}.$$

Dann konvergiert die Reihe aber wieder aus den gleichen Gründen wie die Potenzreihe der Exponentialfunktion. **q.e.d.**

Diese Lösung $F(t)$ heisst Fundamentallösung des Anfangswertproblems.

$$\dot{u}(t) = A(b)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u.$$

Offenbar ist dann $F(t)$ die lineare Abbildung, die jedem u_0 den entsprechenden Wert der Lösung an der Stelle t zuordnet. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der beiden Anfangswertprobleme

$$\dot{u}(t) = A(b)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u_0 \text{ und } \quad \dot{u}(t) = A(b)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_1) = u_1$$

ist die Fundamentallösung des ersten Anfanswertproblems an der Stelle t_1 als lineare Abbildung invers zu der Fundamentallösung des zweiten Anfanswertproblems an der Stelle t_0. Deshalb ist die Fundamentallösung eine einmal stetig differentzierbare Abbildung von I in die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V)$.

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \text{ mit } u(s) = b(s)$$

ist dann gegeben durch

$$u_s(t) = F(t)F^{-1}(s)b(s).$$

Wegen der Variation der Parameter ist dann die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = A(b)u(t) + b(t) \text{ mit } u(t_0) = u$$

gegeben durch

$$u(t) = F(t)u_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)F^{-1}(s)b(s)ds.$$

Deshalb genügt es zum Lösen einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung, die Fundamentallösung zu bestimmen. Wenn alle $A(t)$ miteinander kommutieren:

$$A(t)A(t') = A(t')A(t) \text{ für alle } t, t' \in I,$$

wie das im Fall $V = \mathbb{R}$ gilt, dann ist $F(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$, im Allgemeinen aber nicht. Im endlichdimensionalen Fall, wenn wir A durch $n \times n$ Matrizen darstellen können, ist allerdings folgende Beziehung sehr nützlich.

Satz 1.25. *(Spur und Determinante) Sei* $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *eine stetige Abbildung des offenen Intervalles* I *in die reellen* $n \times n$ *Matrizen. Dann gilt für die entsprechende Fundamentallösung* $F : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t) \text{ und } F(t_0) = \mathbb{1}, \frac{d}{dt}\det(F(t)) = \operatorname{Spur}(A(t))\det(f(t))\det(f(t_0)) = 1.$$

Insbesondere hat $\det(F(t))$ *auf* I *keine Nullstellen und* $F(t)$ *ist für alle* $t \in I$ *invertierbar.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ bei allen invertierbaren Matrizen A differenzierbar ist, und dass dort gilt

$$\frac{d}{dt}\det(A + tB)\mid_{t=0} = \det(A)\operatorname{Spur}(A^{-1}B).$$

Es gilt nämlich

$$\det(A + tB) = \det(A)\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B).$$

Offenbar ist $\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B)$ ein Polynom in t vom Grad n, und die Koeffizienten sind Polynome in den Koeffizienten von $A^{-1}B$. Weil aber die Unterdeterminanten von $\mathbb{1}$ genau dann nicht verschwinden, wenn die genausovielte Spalte wie Zeile gestrichen wird und dann die Unterdeterminanten gleich Eins sind, gilt

$$\det(\mathbb{1} + tA^{-1}B) = 1 + t\operatorname{Spur}(A^{-1}B) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt}\det(A + tB)\bigg|_{t=0} = \det(A)\operatorname{Spur}(A^{-1}B).$$

Wenden wir diese Formel auf $F(t)$ an, so erhalten wir mit der Kettenregel an den Stellen, an denen $F(t)$ invertierbar ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det(F(t)) &= \operatorname{Spur}(\dot{F}(t)F^{-1}(t))\det(F(t)) \\ &= \operatorname{Spur}(A(t))\det(F(t)).\end{aligned}$$

Dann folgt aus dem Beispiel, dass $\det(F(t))$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) = \operatorname{Spur}(A(t))u(t) \text{ mit } u(t_0) = 1$$

ist. Also gilt

$$\det(F(t)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur}(A(s))ds\right)$$

und F ist auf ganz I invertierbar. **q.e.d.**

1.4 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit auf nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen. Dabei müssen wir allerdings an die Nichtlinearität gewisse Einschränkungen machen.

Definition 1.26. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in dem metrischen Raum Y heißt lokal Lipschitz–stetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x').$$

Satz 1.27. *(Lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei I ein offenes Intervall und $U \subset V$ die offene Teilmenge eines Banachraumes V und $f : I \times U \to V$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(u_0, \delta)$ gilt*

$$\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\|.$$

Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es $\delta > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(u_0, \delta)}$ auch $\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\|$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : u \mapsto F(u) \text{ mit } F(u)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, u(s))ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(u_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], V)$. Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\,(\|f(u_0)\| + L\delta) \leq \delta$, dann bildet sie $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $u, \tilde{u} \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ gilt dann

$$\|F(u) - F(\tilde{u})\|_\infty \leq \epsilon L\|u - \tilde{u}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als

$$\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(u_0)\| + L\delta}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{\delta, \frac{1}{L}\right\}.$$

Dann definiert die Abbildung F eine Lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{u}(t) = f(t, u)$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ mit $u(t_0) = u_0$. Also löst u dieses Anfangswertproblem auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Wenn u umgekehrt auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ dieses Anfangswertproblem löst, dann ist die Ableitung von $F(u) - u$ gleich Null, und beide Funktionen $F(u)$ und u sind bei $t = t_0$ gleich u_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfanswertproblems auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Satz 1.28. *(Globale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal Lipschitz–stetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ ein maximales Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, auf dem das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u)$ mit $u(t_0) = u_0$ genau eine Lösung u enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass sowohl am linken Rand bei a als auch am rechten Rand bei b eine der folgenden Bedingungen gilt:*

(i) $a = -\infty$ *(bzw.* $b = \infty$*).*

(ii) $t \mapsto \|f(t, u(t))\|$ *ist für alle* $\epsilon > 0$ *auf* $(a, a + \epsilon)$ *(bzw.* $(b - \epsilon, b)$*) unbeschränkt.*

(iii) *für jede Folge* $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *die gegen* a *(bzw.* b*) konvergiert, exisitiert*

$$\lim_{n\to\infty} (t_n, u(t_n)) \text{ in } \mathbb{R} \times V,$$

liegt aber nicht in O*. D.h. die Lösung lässt sich stetig auf* $[a, b)$ *(bzw.* $(a, b]$*) forstsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in* O*.*

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass für jedes Intervall (a, b), das t_0 enthält, auf dem das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

eine Lösung $\tilde{u}$ besitzt, so das sich $\tilde{u}$ auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ stetig fortsetzen läßt und der Graph der Fortsetzung in O liegt, das neue Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(a) \lim_{t\to a+} \tilde{u}(t) \text{ bzw. } u(b) = \lim_{t\to b-} \tilde{u}(t)$$

wegen dem vorangehenden Satz eine Lösung in einer Umgebung von a bzw. b besitzt, die dann auf $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ mit $\tilde{u}$ übereinstimmt. Also existiert ein maximales Intervall (a, b), auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Wenn am rechten bzw. linken Rand die Bedingungen (i) und (ii) nicht erfüllt sind, dann ist die Lösung auf einer offenen Menge $(a, a + \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b)$ Lipschitz–stetig. Dann konvergiert aber für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert auch die Folge $((t_n, u(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \times V$. Der Grenzwert kann dann aber nicht in O liegen, weil sonst die Lösung eine Fortsetzung auf eine Umgebung von a bzw. b hätte. **q.e.d.**

Bemerkung 1.29. (i) *Wenn die Bedingung (ii) erfüllt ist, kann $t \mapsto f(t, u(t))$ nicht stetig auf $[a, a - \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Also kann dann entweder die Lösung u nicht stetig auf $[a, a - \epsilon)$ bzw. $(b - \epsilon, b]$ oder die Funktion f nicht stetig auf dem Abschluss des Graphen von u fortgesetzt werden. Also kann dann auch nicht das Intervall vergrößert werden als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit stetigem f.*

(ii) *Jede in u stetig differenzierbare Funktion f ist lokal Lipschitz–stetig in dem geforderten Sinne, weil für stetig differenzierbare Funktionen die Ableitungen lokal beschränkt sind und diese dann nach dem Schrankensatz lokal Lipschitz–stetig sind. Also ist die Existenz und Eindeutigkeit des lineare Anfansgwertproblems ein Spezialfall dieses Satzes.*

Wenn $\dim V < \infty$ kann man die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit (wir kennen schon ein Gegenbeispiel für die Eindeutigkeit), auf stetige Funktionen f verallgemeinern. Anstatt dem Banchschen Fixpunktsatz verwenden wir dann den Schauder'schen Fixpunktsatz.

Satz 1.30. *(Schauder'scher Fixpunktsatz) Sei F eine stetige lineare Abbildung von einer konvexen abgeschlossenen Teilmenge A eines Banachraumes auf sich selber. Wenn F alle beschränkten Teilmengen von A auf Teilmengen abbildet, deren Abschlüsse kompakt sind, dann hat F mindestens einen Fixpunkt.*

Wir werden diesen Satz nicht beweisen. In M. Berger: Nonlinearity and functional analysis, Academic Press 1977, ist auf Seite 90 ein Beweis angegeben. Um die Existenz auf stetige Funktionen f zu verallgemeinern, müssen wir noch die Kompaktheit des Integrals zeigen.

Satz 1.31. *(Kompaktheit des Integrals) Sei $[\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall und $t_0 \in [\alpha, \beta]$ und V ein endlichdimensionaler Banachraum. Dann ist die Abbildung*

$$C([\alpha, \beta], V) \to C([\alpha, \beta], V) \text{ mit } u \mapsto \left(t \mapsto \int_{t_0}^{t} u(s) ds \right)$$

ein kompakter Operator, d.h. die Abschlüsse der Bilder aller beschränkten Mengen sind kompakt.

Wir beweisen diesen Satz mit dem Satz von Arzela–Ascoli.

Satz 1.32. *(Arzela–Ascoli) Sei K ein kompakter metrischer Raum und V ein endlich dimensionaler Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K,V)$ besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn*

(i) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und*

(ii) *für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in K$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $x' \in B(x,\delta) \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n(x') \in B(f_n(x),\epsilon) \subset V$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig stetig ist auf K. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in K$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass aus $d(x,y) < \delta_y$ folgt $d(f(x),f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Kompaktheit von K hat die Überdeckung $\{B(y,\delta_y)|y \in K\}$ eine endliche Teilüberdeckung $K = B(y_1,\delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N,\delta_N)$. Für jeden Punkt in einer der Kugeln ist das Minimum der Abstände zu den Punkten im Komplement der Kugel eine stetige Funktion. Also gibt es für jeden Punkt $x \in K$ einen maximalen Radius $r_{max}(x)$, so dass $B(x,r_{max}(x))$ in einer der Kugeln $B(y_1,\delta_1),\ldots,B(y_N,\delta_N)$ enthalten ist und die Funktion r_{max} ist als Maximum von stetigen Funktionen wieder stetig. Sei δ das Minimum dieser Funktion, dann sind alle $x,x' \in K$ mit $d(x,x') < \delta$ in einer der Kugeln $B(y_1,\delta_1),\ldots,B(y_N,\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f_n(x),f_n(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig stetig. Sei jetzt $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, die dicht liegt. Wegen (i) ist dann für alle $m \in \mathbb{N}$ der Abschluss A_m der Menge der Folge $(f_n(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Teilmenge von V. Also kovergiert die zu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsprechende Folge in $A = A_1 \times A_2 \times \ldots$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $x,x' \in K$ mit $d(x,x') < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $d(f_n(x),f_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$. Die Überdeckung $(B(x_n,\frac{\epsilon}{3}))_{n\in\mathbb{N}}$ von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass alle $l,n > M$ an den Zentren der Kugeln der Teilüberdeckung $d(f_l(x_m),f_n(x_m)) < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen. Dann folgt für alle $x \in K$:

$$d(f_l(x),f_n(x)) \le d(f_l(x),f_l(x_m))+d(f_l(x_m),f_n(x_m)+d(f_n(x_m),f_n(x)) < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K,V)$ eine Cauchyfolge und konvergiert. **q.e.d.**

Beweis der Kompaktheit des Integrals. Wegen dem Schrankensatz ist die Funktion $t \mapsto \int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds$ Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante $\|u\|_\infty$. Also erfüllt das Bild jeder beschränkten Menge die Voraussetzungen von Arzela–Ascoli. Dann ist der Abschluss des Bildes einer beschränkten Menge folgenkompakt. **q.e.d.**

Satz 1.33. *(Lokale Existenz) Sei I ein offenes Intervall und $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraumes und f eine stetige Abbildung $f : I \times U \to V$. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$.

Beweis: Für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B(u_0, \delta)} \subset I \times U.$$

Auf dieser kompakten Menge ist dann f beschränkt durch $\|f\|_\infty < \infty$. Die Abbildung

$$C\left([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)}\right) \to C\left([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], V\right) \quad u \mapsto \left(t \mapsto u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds\right)$$

ist offenbar kompakt. Verkleinere also gegebenenfalls ϵ, so dass $\|f\|_\infty \cdot \epsilon \leq \delta$ ist. Dann bildet diese Abbildung den konvexen Raum $C\left([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0 . \delta)}\right)$ auf sich selber ab, und die Aussage folgt aus dem Schauderschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Wenn u_1 eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_1) = u_0$ auf $[t_1 - \epsilon, t_1]$ ist und u_2 auf $[t_1, t_1 + \epsilon]$. Dann ist

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{für } t \in [t_1 - \epsilon, t_1] \\ u_2(t) & \text{für } t \in [t_1, t_1 + \epsilon] \end{cases}$$

eine Lösung auf $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$. Also können wir Lösungen wieder nach links bzw. rechts fortsetzen. Dann erhalten wir genauso wie in der Globalen Existenz und Eindeutigkeit:

Satz 1.34. *(Globale Existenz) Sei V ein eindlichdimensionaler Banachraum und $O \subset \mathbb{R} \times V$ eine offene Teilmenge und $f : O \to V$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in O$ eine maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

auf einen offenen Teilintervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält. Die Lösung ist in dem Sinne maximal, dass sowohl am linken Rand als auch am rechten Rand einer der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(i) *$a = -\infty$ (bzw. $b = \infty$)*

(ii) *$t \to \|f(t, u(t))\|$ ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a, a + \epsilon)$ (bzw. $(b - \epsilon, b)$) unbeschränkt.*

(iii) *für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die gegen a (bzw. b) konvergiert, existiert $\lim_{n \to \infty} (t_n, u(t_n))$ in $\mathbb{R} \times V$, liegt aber nich in O.* **q.e.d.**

1.5 Elementare Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken, in denen die gesuchte Funktion eine reelle Funktion ist. Die Differentialgleichungen 1.ter Ordnung haben also die Form

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)).$$

Wenn es uns gelingt die Funktion f als ein Produkt zu schreiben

$$f(t, u) = \frac{g(t)}{h(u)}$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\dot{u}(t)h(u(t)) = g(t).$$

Wenn also H eine Stammfunktion von h ist und G eine Stammfunktion von G, dann muss also gelten

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = \frac{d}{dt}G(t).$$

Also folgt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = \frac{g(t)}{h(u(t))} \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

$$H(u(t)) - H(u_0) = G(t) - G(t_0).$$

Wenn wir jetzt noch annehmen, dass H eine Umkehrfunktion besitzt, was natürlich auf allen Intervallen gilt, auf denen h positiv bzw. negativ ist, dann erhalten wir also als Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) = H^{-1}(g(t) - g(t_0) + H(u_0)).$$

Satz 1.35. *(Trennung der Variablen) Seien g und h stetige Funktionen auf einem offenen Intervall I und h sei entweder positiv oder negativ. Dann sind sowohl g als auch h auf allen kompakten Teilintervallen von I Riemann–integrabel. Seien G und H Stammfunktionen von g bzw. h. Dann ist h entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, besitzt also eine Umkehrabbildung $H^{-1} : I' \to I$ von einem offenen Intervall I' auf I. Dann ist die eindeutige Lösung der Anfangswertprobleme*

$$\dot{u}(t) = \frac{g(t)}{h(u(t))} \textit{ mit } u(t_0) = u_0$$

gegeben durch

$$u(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(u_0)).$$

Diese Lösung ist nur definiert auf dem Intervall, auf dem

$$G(t) - G(t_0) + H(u_0) \in I'$$

gilt. **q.e.d.**

Wenn es uns gelingt eine Funktion $F(t, u)$ zu finden, so dass gilt

$$f(t, u) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t, u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(t, u)},$$

dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt}F(t, u(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, u) + \frac{du}{dt}(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t, u(t) = 0.$$

Also gilt dann für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t, u(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, u(t) = 0 \text{ mit } u(t_0) = u_0$$

$$F(t, u(t)) = F(t_0, u_0).$$

Wenn wir dann diese Gleichung nach $u(t)$ auflösen können, erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 1.36. *(Exakte Differentialgleichungen) Sei $(t, u) \mapsto F(t, u)$ zweimal differenzierbar. Dann gilt für alle Lösungen des Anfangswertproblems*

$$\dot{u}(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t, u(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, u(t) = 0 \textit{ mit } u(t_0) = u_0$$

$$F(t, u(t)) = F(t_0, u_0).$$

q.e.d.

Wenn nun zwei Funktionen $g(t, u)$ und $h(t, u)$ gegeben sind, so dass gilt

$$f(t, u) = -\frac{g(t, u)}{h(t, u)},$$

so gibt es nicht immer Funktion $F(t, u)$, so dass gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t} = g \text{ und } \frac{\partial F}{\partial u} = h.$$

Lemma 1.37. *(Stammfunktion) Seien g und h zwei differenzierbare Funktionen auf einem konvexen offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es auf Ω genau dann eine zweimal differenzierbare Funktion $F(t,u)$ mit*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) = g(t,u) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = h(t,u) \text{ wenn gilt } \frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = \frac{\partial g}{\partial u}(t,u).$$

Beweis: Sei $(t_0,u_0) \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion

$$F(t,u) = (t-t_0)\int_0^1 g(t_s,u_s)ds + (u-u_0)\int_0^1 h(t_s,u_s)ds,$$

mit $t_s = t_0+s(t-t_0)$ und $u_s = u_0+s(u-u_0)$. Weil die Funktionen g und h differenzierbar sind, sind sie stetig und damit auch integrierbar. Die Ableitungen von F sind dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) &= \int_0^1 g(t_s,u_s)ds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(t_s,u_s)sds + (u-u_0)\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_1}(t_s,u_s)sds \\
&= \int_0^1 g(t_s,u_s)ds + \int_0^1 \frac{dg}{ds}(t_s,u_s)sds \\
&= g(t,u) \\
\frac{\partial F}{\partial t}(t,u) &= \int_0^1 h(t_s,u_s)ds + (u-u_0)\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_2}(t_s,u_s)sds + (t-t_0)\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_2}(t_s,u_s)sds \\
&= \int_0^1 h(t_s,u_s)ds + \int_0^1 \frac{dh}{ds}(t_s,u_s)sds \\
&= h(t,u)
\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt $\frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = g(t,u)$ und $\frac{\partial F}{\partial u}(t,u) = h(t,u)$ gilt, dann folgt aus dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t}(t,u) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial u}(t,u) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,u).$$

q.e.d.

Wir können diese Aussage auf Vereinigungen von konvexen Gebieten verallgemeinern, solange nur die Vorschrift, in der wir F fortsetzen eindeutig ist. Das gilt für alle einfach zusammenhängenden Gebiete Ω, d.h. solche Gebiete, die für jede stetige Abbildung $p : S^1 \to \Omega$ eine Homotopie zu einer konstanten Abbildung besitzen, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $[0,1] \times S^1 \to \Omega$, die auf $\{0\} \times S^1$ gerade gleich p ist und für $\{1\} \times S^1$ eine konstante Abbildung. Anschaulich bedeutet das, dass jeder geschlossene Weg in Ω zu einem Punkt zusammengezogen werden kann.

Es gibt auch Fälle, in denen die Differentialgleichung

$$\dot{u}(t)h(t,u(t)) + \dot{g}(t,u(t)) = 0$$

erst mit einer Funktion erweitert werden muß bevor sie exakt ist.

Beispiel 1.38.

$$2t\dot{u} + u(t) = 0$$

ist nicht exakt, weil

$$\frac{\partial u}{\partial u} = 1 \neq 2 = \frac{\partial 2t}{\partial t}.$$

Aber die Differentialgleichung

$$2tu(t)\dot{u}(t) + u^2(t)$$

ist exakt, weil gilt

$$\frac{\partial u^2}{\partial u} = 2u = \frac{\partial}{\partial t} 2ut.$$

Satz 1.39. *(Eulersche Multiplikator) Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit eine Funktion auf die Form gebracht werden kann*

$$\dot{u}(t)h(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0$$

mit

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,u) = \frac{\partial g}{\partial u}(t,u),$$

dann existiert (auf einfach zusammenhängenden) Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Funktion F, so dass die Differentialgleichung exakt ist

$$\frac{d}{dt}F(t,u(t)) = \dot{u}(t)\frac{\partial F}{\partial u}(t,u(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,u(t)) = 0.$$

Dann gilt für die Lösungen des entsprechenden Anfangswertproblems mit $u(t_0) = u_0$

$$F(t,u(t)) = F(t_0,u_0)$$

q.e.d.

Um eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{u}(t)h(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0$$

einen Eulerschen Multiplikator $M(t,u(t))$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial t}(t,u)h(t,u) + M(t,u)\frac{\partial h}{\partial t}(t,u) = \frac{\partial M}{\partial u}(t,u)g(t,u) + M(t,u)\frac{\partial g}{\partial u}(t,u)$$

lösen. Das ist eine partialle Differentialgleichung, die im Allgemeinen nicht leichter zu lösen ist als die ursprüngliche gewöhnliche Differentialgleichung. Aber in einigen Fällen können wir Lösungen erraten oder einfache Lösungen berechnen, die nur von t bzw. u abhängen.

Zum Abschluss wollen wir noch erwähnen, dass einige Differentialgleichungen durch eine Substitution in eine der Differentialgleichungen verwandelt werden können, die wir lösen können.

Beispiel 1.40. **(i)**

$$\dot{u}(t) = f(at + bu(t) + c) \textit{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Wenn $b = 0$ können wir die Differentialgleichung direkt integrieren. Wenn $b \neq 0$, dann führt die Substitution $v(t) = at + bu(t) + c$ auf die Differentialgleichung $\dot{v}(t) = a + bf(v(t))$ oder auch $\frac{\dot{v}(t)}{a+bf(v(t))} = 1$. Diese Differentialgleichung können wir mit der Methode der Trennung der Variablen lösen: Sei F eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{a+f(x)}$. Dann erfüllen die Lösungen des Anfanswertproblems

$$\dot{u}(t) = f(at + bu(t) + c) \textit{ mit } \qquad u(t_0) = u_0$$

die Gleichung

$$F(at + bu(t) + c) - F(at_0 + bu_0 + c) = t - t_0.$$

(ii) $\dot{u} = f\left(\frac{u(t)}{t}\right)$ *homogene Differentialgleichung. Die Substitution $v(t) = \frac{u(t)}{t}$ führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{v}(t) = \frac{f(v(t)) - v(t)}{t}.$$

Diese Differentialgleichung können wir wieder mit mit Hilfe der Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\dot{v}(t)}{f(v(t)) - v(t)} = \frac{1}{t}.$$

(iii)

$$\dot{u} = f\left(\frac{at + bu(t) + c}{\alpha t + \beta u(t) + \gamma}\right) \quad \textit{mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ *ist, dann ist entweder* $\alpha t + \beta u(t)$ *ein Vielfaches von* $at + bu(t)$ *oder umgekehrt. Deshalb haben wir dann ein Beispiel der Art in (i). Wenn diese Determinante* $\neq 0$ *ist, dann hat das lineare Gleichungssystem*

$$at + bu + c = 0$$

$$\alpha t + \beta u + \gamma = 0$$

genau eine Lösung (t_0, u_0)*. Dann können wir die Differentialgleichung umformen zu*

$$\frac{d}{dt}(u(t - t_0) - u_0) = f\left(\frac{a(t - t_0) + b(u(t - t_0) - u_0) + at_0 + bu_0 + c}{\alpha(t - t_0) + \beta(u(t - t_0) - u_0) + \alpha t_0 + \beta u_0 + \gamma}\right)$$

$$= f\left(\frac{a + b\frac{u(t-t_0)-u_0}{t-t_0}}{\alpha + \beta\frac{u(t-t_=)-u_0}{t-t_0=}}\right).$$

Also erhalten wir ein Beispiel von der Form (ii).

(iv) *Bernoulli Differentialgleichung:*

$$\dot{u}(t) + g(t)u(t) + h(t)u^{\alpha}(t) = 0 \quad \alpha \neq 1.$$

Die Substitution $v(t) = u^{1-\alpha}(t)$ *führt zu der Differentialgleichung*

$$\dot{v}(t) = (1 - \alpha)\dot{u}(t)u^{-\alpha}(t) = -(1 - \alpha)g(t)v(t) - (1 - \alpha)h(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die wir im letzten Abschnitt gelöst haben.

Kapitel 2

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung in den partiellen Ableitungen einer oder mehrerer gesuchter Funktionen, die von mindestens zwei Varibeln abhängen:

Definition 2.1. *Eine gegebenfalls vektorwertige Gleichung der Form*

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k. Hierbei ist F eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion. Die Ausdrücke $D^k u$ bezeichnen den Vektor aller k–ten partiellen Ableitungen der Funktion u. Eine Funktion u heißt Lösung der Differentialgleichung, wenn sie k mal differenzierbar ist und der obigen Gleichung genügt.

2.1 Beispiele

2.1.1 Lineare Differentialgleichungen

1. Lapalcegleichung.

$$-\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Lösungen der Laplacegleichung heissen harmonische Funktionen. Die Lapacegleichung ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die ensprechende inhomogene Gleichung heisst Poissongleichung:

$$-\triangle u = f.$$

Hierbei ist die Funktion f gegeben und die Funktion u gesucht.

2. Helmholtzgleichung.

$$-\triangle u - \lambda u = 0.$$

Hierbei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl und u die gesucht Funktion. Sie ist eine besonders einfache Form der Poissongleichung.

3. Lineare Transportgleichung.

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$$

Hierbei ist b eine gegebenes $\mathbb{R}^n$–wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet.

4. Liouvillegleichung.

$$\dot{u} + \nabla b \cdot u = 0.$$

Hier ist genau wie bei der Helmholtzgleichung b ein gegebenes $\mathbb{R}^n$–wertiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion auf diesem Gebiet. Diese beiden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung sind sehr ähnlich.

5. Wärmeleitungsgleichung.

$$\dot{u} - \triangle u = 0.$$

6. Schrödingergleichung.

$$\imath \dot{u} + \triangle u = 0.$$

Hierbei ist u eine gesuchte komplexe Funktion. Wir werden noch sehen, dass der Faktor $\imath$, durch den sich die Schrödingergleichung von der Wärmeleitungsgleichung unterscheidet, zu deutlichen Unterschieden dieser beiden Gleichungen führt.

7. Kolmogerovgleichung.

$$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie ist eine Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung.

8. Fokker–Planckgleichung.

$$\dot{u} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}(t,x) u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(t,x) u}{\partial x_i} = 0.$$

Die Fokker–Planckgleicung verhält sich zu der Kolmogorovgleichung wie die Liouvillegleichung zu der Transportgleichung.

9. Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0.$$

10. Allgemeine Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Sie verallgemeinert die Wellengleichung genauso wie der Kolmogorovgleichung die Wärmeleitungsgleichung verallgemeinert.

11. Airysche Differentialgleichung.

$$\dot{u} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

12. Balkengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

2.1.2 Nichtlinear Differentialgleichungen

1. Eikonalgleichung.

$$|\nabla u| = 1.$$

2. Nichlinear Poissongleichung.

$$-\triangle u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3. Minimalflächengleichung.

$$\nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$$

Die Graphen von Lösungen der Minimalflächengleichung sind sogneannte Minimalflächen. Das heisst dass sich die Fläche solcher Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ unter infinitesimalen Deformationen nicht ändert. Seifenhäute sind Beispiele solcher Minimalflächen.

4. Monge–Amperegleichung.

$$\det\left(\nabla\nabla^t u\right) = f.$$

Hier ist f eine gegebene Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und u die gesuchte Funktion. Dabei steht auf der linken Seite die Determinante der Matrix der zweiten Ableitungen von u.

5. Hamilton–Jacobigleichung.

$$\dot{u} + H(\nabla u, x) = 0.$$

Hierbei ist H eine gegebene Hamiltonfunktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, und u die gesuchte Funktion auf einem entsprechenden Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

6. Skalare Erhaltungsgleichung.

$$\dot{u} + \nabla \cdot F(u).$$

Hierbei ist F eine gegebne $\mathbb{R}^n$–wertige Funktion und u die gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Diese Differentialgleichung hat zur Folge, dass sich das Intgeral von u über ein gegebenes Teilgebiet von $\mathbb{R}^n$ so mit der Zeit ändert, wie das Integral von $F(u)$ über den Rand des Gebietes. Deshalb lässt sich $F(u)$ wie eine Flussdichte der Erhaltungsgröße u interpretieten.

7. Burgers Gleichung.

$$\dot{u} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Hier ist u eine gesuchte Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sie ist ein Beispiel für eine skalare Erhaltungsgleichung mit $F(u) = u^2/2$.

8. Reaktions–Diffusionsgleichung.

$$\dot{u} - \triangle u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

9. Poröse Mediengleichung.

$$\dot{u} - \triangle\left(u^\gamma\right) = 0.$$

Hier ist $\gamma \geq 1$ ein gegebener Exponent. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung eines idealen Gases in einem porösen Medium wie Sand.

10. Nichtlineare Wellengleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f(u).$$

Hier ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und u die gesuchte Funktion.

11. Korteweg–de–Vries–Gleichung.

$$4\dot{u} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt eine sogenannte Laxdarstellung, d.h. sie läßt sich schreiben als

$$\dot{L} = [A, L]$$

mit zwei gewöhnlichen Differentialoperatoren

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \qquad\qquad A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3u}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus entwickelte sich eine neues Verständnis von integrablen Sytemen.

2.1.3 Lineare Differentialgleichungssystems

1. Lineare Elastizität.

$$\mu\triangle u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0.$$

Hier sind $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ gegebene positive Konstanten und u die gesuchte $\mathbb{R}^n$–wertige Funktion.

2. Elstische Wellen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\triangle u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = 0.$$

3. Maxwellgleichungen.

$$\begin{aligned} \dot{E} - \nabla \times B &= -4\pi j & \qquad \dot{B} + \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \cdot E &= 4\pi\rho & \qquad \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned}$$

Hier sind die Laddungsverteilung ρ und die Stromverteilung j gegebene reelle bzw. $\mathbb{R}^3$–wertigen Funktionen auf der Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und das elektrische Feld E und das Magnetfeld B die gesuchten $\mathbb{R}^3$–wertige Funktionen. Die gegebenen Funktionen erfüllen außerdem einen Erhaltungssatz

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot j = 0,$$

weil j ja gerade die Ladungsflussdichte ist.

4. Cauchy–Riemanngleichung.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta \partial v \partial y \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Hier sind $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion auf (Teilgebieten) der komplexen Ebene $x + \imath y = z \in \mathbb{C}$.

2.1.4 Nichtlinear Differentialgleichungssystems

1. Eulergleichung.

$$\dot{u} + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot u = 0.$$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit und p der Druck.

2. Navier–Stokesgleichung.

$$\dot{u} + u \cdot \nabla u - \triangle u + \nabla p = 0 \qquad\qquad \nabla \cdot u = 0.$$

Hier ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit und p der Druck.

3. Einsteins Feldgleichungen.

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij}.$$

Hier ist der Energieimpulstensor einer gebenen Massenverteilung auf der Raumzeit und g_{ij} ist die entsprechende gesuchte Metrik auf der Raumzeit. Diese Metrik g_{ij} ist eine Lorentzmetrik auf der Raumzeit, d.h. eine symmetrische Bilineraform auf dem Tangentialraum der Raumzeit mit der Signatur $(1, 3)$. R_{ij} ist die dazugehörige Riccikrümmung und R die skalare Krümmung.

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{3} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\
R_{ij} &= \sum_{k=0}^{3} g^{kl} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} + \sum_{l=0}^{3} \left(\Gamma^k_{lk} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{lj} \Gamma^l_{ik} \right) \right) \\
\left(g^{ij} \right) &= \left(g_{ij} \right)^{-1} \text{ inverse Metrik} \\
R &= \sum_{i,j=0}^{3} g^{ij} R_{ij}.
\end{aligned}$$

5. Riccifluss.

$$\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$$

Diese Differentialgleichnung beschreibt auf einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit eine diffusionsartigen Fluss der Metrik. Man kann also erwarten, dass sich Inhomogenitäten und Isotropien der Metrik ausgleichen und dieser Fluss nach längeren Zeiten zu Metriken führt die sehr große Isometriegruppen haben. Aufgrund dieser Erwartung hat Hamilton vor rund 30 Jahren ein Programm entworfen um mit Hilfe dieses Flusses die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen. Diese besagt grob gesprochen, dass sich jede kompakte 3–Mannigfaltigkeit in Teile zerlegen läßt, auf denen eine Isometriegruppe transitiv wirkt. Hamilton versucht nun durch eine Kontrolle über das Langzeitverhalten des Ricciflusses, auf beliebigen kompakten 3–Mannigkaltigkeiten solche Metriken zu konstruieren. Seit rund einem Jahr sieht es so aus, dass der Mathematiker Perelman die letzten Hürden in diesem Programm überwunden hat. Das wäre ein großer Erfolg, für die Behandlung von geometrischen Fragen mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen.

2.2 Transportgleichung

Eine der einfachsten Differentialgleichungen ist die Transportgleichung:

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = 0.$$

Hier ist $b \in \mathbb{R}^n$ eine Vektor und $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gesuchte Funktion. $b \cdot \nabla u$ bezeichnet das Skalarprodukt des Vektors b mit dem Vektor der ersten partiellen Ableitungen von u nach x:

$$b \cdot \nabla u(x,t) = b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x,t) + \ldots + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n}(x,t).$$

Wir nehmen jetzt an, dass $u(x,t)$ eine glatte Lösung der Trasnportgleichung ist. Dann ist für jedes festes (x,t) die Funktion

$$z(s) = u(x + s \cdot b, t + s)$$

eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}$ derene erste Ableitung verschwindet:

$$\dot{z}(s) = b \nabla u(x + s \cdot b, t + s) + \dot{u}(x + s \cdot, t + s) = 0.$$

Entsprechend muß u auf allen parallelen Geraden in Richtung $(b,1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konstant sein, und es genügt die Werte von u auf allen diesen Geraden zu kennen.

Anfangswertproblem 2.2. *Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Transportgleichung (mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$) erfüllt, und für $t = 0$ gleich einer gegebenen Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist.*

Alle parallelen Geraden des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ in Richtung $(b, 1)$ schneiden die Hyperebene $\mathbb{R} \times \{0\}$ genau einmal:

$$(x + sb, t + s) \in \mathbb{R}^n \times \{0\} \iff s = -t$$

Also ist $u(x, t) = g(x - tb)$. Wenn $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $u(x, t) = g(x - tb)$ eine Lösung der Transportgleichung und damit auch die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Wenn aber $g \notin C^1(\mathbb{R}^n)$ dann existiert offensichtlich keine Lösung des Anfangswertproblems. Trotzdem ist $u(x, t) = g(x - tb)$ der einzige Kandidat für eine Lösung. Für eine sehr große Klasse von Funktionen ist dieses u aber eine schwache Lösung der Transportgleichung und sogar die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

2.2.1 Inhomogene Transportgleichung

Wir betrachten jetzt die entsprechende inhomogene Transportgleichung

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u = f.$$

Hier ist wieder $b \in \mathbb{R}^n$ ein gegebener Vektor, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion.

Anfangswertproblem 2.3. *Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die inhomogene Transportgleichung (mit gegebenem $b \in \mathbb{R}^n$) erfüllt, und für $t = 0$ gleich einer gegebenen Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist.*

Wieder erfüllt für jedes $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die Funktion $z(s) = u(x + sb, t + s)$ die Differentialgleichung

$$\dot{z}(s) = b \cdot \nabla u(x + sb, t + s) + \dot{u}(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) - g(x-bt) = z(0) - z(-t) &= \int_{-t}^{0} \dot{z}(s)ds \\ &= \int_{-t}^{0} f(x+sb, t+s)ds \\ &= \int_{0}^{t} f(x+(s-t)b, s)ds. \end{aligned}$$

Deshalb ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = g(x-bt) + \int_{0}^{t} f(x+(s-t)b, s)ds.$$

Wieder ist gegebenenfalls u die eindeutige *schwache* Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems.

Abschließend bemerken wir, dass wir die inhomogene und homogene Transportgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung übersetzt haben. Diese Methode der Charakteristik werden wir später weiterentwickeln.

2.3 Das Lebesgueintegral auf dem $\mathbb{R}^d$

2.3.1 Stufenfunktionen

Zunächst führen wir die Klasse der Mengen von Quader im $\mathbb{R}^d$ ein.

Definition 2.4. *Ein Quader ist ein n-faches kartesisches Produkt von Intervallen im $\mathbb{R}^d$*

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_d = \{x \in \mathbb{R}^d | x_1 \in I_1, \ldots, x_d \in I_d\}$$

wobei $I_1, \ldots, I_d$ Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Diese können den linken und rechten Rand enthalten, bzw. nicht enthalten.

Für jeden solchen Quader definieren wir das Volumen als das Produkt der Längen aller Intervalle $I_1, \ldots, I_d$. Wenn die Intervalle alle beschränkt sind, sind alle ihre Längen endlich und das Volumen des entsprechenden Quaders ist dann auch endlich. Das Volumen bezeichnen wir mit $\mu(Q)$.

Definition 2.5. *Eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^d$ heisst Nullmenge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge von Quadern mit endlichem Volumen $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d$ gibt, mit*

$$A \subset \bigcup_{n+1}^{\infty} Q_n \text{ und } \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \leq \epsilon.$$

Lemma 2.6. *Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge und $\epsilon > 0$. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ Q_n der Quader mit Zentrum x_n, dessen Kantenlängen alle gleich $\sqrt[d]{\epsilon \cdot 2^{-n}}$ sind. Dann überdeckt die Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^d$. Wegen der geometrischen Reihe gilt aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon \cdot 2^{-n} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \epsilon.$$

Also gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überdeckt, und deren Gesamtvolumen nicht größer als ϵ ist. **q.e.d.**

Lemma 2.7. *Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen. Dann besitzt für jedes $\epsilon > 0$ jede Menge A_n eine Überdeckung von Quadern, deren gesamtes Volumen nicht größer ist als $\epsilon \cdot 2^{-n}$. Die Vereinigung aller dieser Quader hat dann ein gesamtes Volumen von $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon$. Also gibt es eine Überdeckung von $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ von Quadern, deren gesamtes Volumen nicht größer ist als ϵ. **q.e.d.**

Definition 2.8. *Eine Stufenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von Quadern.*

Proposition 2.9. *Jede Stufenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten Quadern.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass je zwei Quader Q_1 und Q_2 im $\mathbb{R}^d$ eine disjunkte Vereinigung von höchstens 3^d-Quadern ist. Das folgt daraus, dass zwei Intervalle $\mathbb{R}$ entweder disjunkt sind, oder eine disjunkte Vereinigung von der Schnittmenge mit den relativen Komplementen der Schnittmenge in beiden Intervallen ist. Wenn wir das auf alle Faktoren $\mathbb{R}$ im kartesischen Produkt anwenden, lassen sich zwei Quader in eine disjunkte Vereinigung von höchstens 3^d-Quadern zerlegen. **q.e.d.**

Als nächstes definieren wir für jede charakteristische Funktion χ_Q eines Quaders das Integral

$$\int \chi_Q d\mu = \mu(Q).$$

Proposition 2.10. *Sei f eine Stufenfunktion und*

$$f = \sum_i c_i \chi_{Q_i} = \sum_j d_j \chi_{R_j}$$

zwei Zerlegungen in endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten Quadern. Dann ist

$$\int f d\mu = \sum_i c_i \mu(Q_i) = \sum_j d_j \mu(R_j).$$

Beweis: Im Fall $d = 1$ ist das Komplement eines beschränkten Intervalles die disjunkte Vereinigung von zwei Intervallen. Für jedes beschränkte Intervall wird damit $\mathbb{R}$ zu einer disjunktem Vereinigung von drei Intervallen. Wählen wir von den endlich vielen beschränkten Intervallen Q_i und R_j jeweils eine der drei entsprechenden Intervalle aus, so bilden die entsprechenden Schnittmengen eine disjunkte Vereinigung von $\mathbb{R}$. Die Teilmenge aller der Schnittmengen, die in der Vereinigung $(\cup_i Q_i) \cup (\cup_j R_j)$ enthalten sind, ergibt eine disjunkte Vereinigung dieser Menge. Wenden wir für $d > 1$ diese Zerlegung auf alle Faktoren des kartesischen Produktes $\mathbb{R}^{\times d}$ an, dann bilden die kartesichen Produkten $I_1 \times \ldots \times I_d$ von allen Kombinationen von Intervallen $I_1, \ldots, I_d$ aus dem kartesischen Produkt dieser Zerlegungen wieder eine disjunkte Vereinigung von $(\cup_i Q_i) \cup (\cup_j R_j)$. Weil die Stufenfunktion f einen eindeutigen Wert auf jedem Quader annimmt, erhalten wir eine eindeutige gemeinsame Zerlegung in eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen auf paarweise disjunkten Quadern. Dann genügt es wegen der Linearität die Behauptung für eine solche Zerlegung eines Quaders $I_1 \times \ldots \times I_d$ in ein kartesisches Produkt von Zerlegungen der Intervalle $I_1, \ldots, I_d$ in paareweise disjunkten Intervalle zu zeigen. Wegen dem Distributivgesetz folgt das aus dem Spezialfall mit $d = 1$. Dort folgt es daraus, dass die Gesamtlänge einer disjunkten Vereinigung von Intervallen gleich der Summe der Intervalllängen ist. **q.e.d.**

Wegen dieser Proposition definiert das Integral $f \mapsto \int f d\mu$ eine lineare Abbildung von dem Raum aller Stufenfunktionen nach $\mathbb{R}$.

Proposition 2.11. *Seien f und g zwei Stufenfunktionen mit $f \geq g$. Dann gilt*

$$\int f d\mu \geq \int g d\mu.$$

Beweis: Wir zerlegen die beiden Vereinigungen von Quadern der Stufenfunktion f und der Stufenfunktion g in eine gemeinsame disjunkte Vereinigung von Quadern. Auf jedem der Quader ist dann aber f größer oder gleich g. Deshalb gilt das dann auch für die entsprechenden Summen, die die Integrale berechnen. **q.e.d.**

2.3.2 Lebesgue–integrable Funktionen auf dem $\mathbb{R}^d$

Satz 2.12. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, deren Integrale $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind. Dann ist die Menge aller Punkte $\{x \in \mathbb{R} | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht $\}$ eine Nullmenge.*

Beweis: Sei $M > 0$ eine obere Schranke von $\left(\int (f_n - f_1) d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\int f_n d\mu \le M + \int f_1 d\mu \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist für alle $\epsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, die Menge

$$S_{n,\epsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d | f_n(x) \ge \frac{M}{\epsilon} + f_1(x) \right\}$$

eine monoton wachsende Folge von endlichen Vereinigungen von Quadraten. Aus der Konstruktion einer gemeinsamen Zerlegung in eine disjunkte Vereinigung von Quadern im Beweis von Proposition 2.9 folgt, dass das relative Komplement eines Quaders in einem anderen Quader wieder eine disjunkte Vereinigung von Quadern ist. Dann ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n.\epsilon} = S_{1,\epsilon} \cup (S_{2,\epsilon} \setminus S_{1,\epsilon}) \cup (S_{3,\epsilon} \setminus S_{2,\epsilon})$$

eine abzählbare Vereinigung von disjunkten Quadraten. Weil aber $f_n - f_1$ positive Funktionen sind, ist das Gesamtvolumen von $S_{n,\epsilon}$ nicht größer als

$$\int \chi_{S_{n,\epsilon}} d\mu \le \int \frac{\epsilon}{M}(f_n - f_1) d\mu = \frac{\epsilon}{M} \int (f_n - f_1) d\mu \le \epsilon.$$

Wegen der Monotonie ist dann auch das Gesamtvolumen der abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon}$ nicht größer als ϵ. Weil die kritische Menge gleich der Schnittmenge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht } \} = \bigcap_{\epsilon>0} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} \right)$$

ist, folgt, dass diese Menge S eine Nullmenge ist. **q.e.d.**

Wir bezeichnen nun die Komplemente von Nullmengen als fast überall. Also besagt der vorangehende Satz, dass jede monotonwachsende Folge von Stufenfunktionen fast überall konvergiert.

Satz 2.13. *Für jede Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass A in der Menge enthalten ist, auf der die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.*

Beweis: Sei A eine Nullmenge. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung von A mit abzählbar vielen Quadern, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als 2^{-n}. Sei nun $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Vereinigung aller dieser Quader. Dann gehört jeder Punkt von A zu unendlich vielen Quadern. Also definiert die Reihe $(\sum \chi_{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotonwachsende Folge von Stufenfunktionen, die auf A nicht konvergiert. Die Integrale $(\sum \int \chi_{Q_n} d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt durch $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1$. **q.e.d.**

Für jede monotonwachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$, können wir jetzt den Grenzwert fast überall definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{wenn}(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt ist} \\ 0, & \text{wenn } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ nicht beschränkt ist.} \end{cases}$$

Dann wollen wir $\int f d\mu$ als den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ definieren. Damit diese Definition aber konsitent nur von der fast überall definierten Funktion f abhängt, benötigen wir noch die folgenden Lemmata.

Lemma 2.14. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von nicht negativen Stufenfunktionen, die fast überall gegen Null konvergieren. Dann ist $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis: Offenbar gibt es einen kompakten Quader Q_0 außerhalb dessen f_1 verschwindet. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_n. Wegen $0 \leq f_n \leq f_1$ ist A_n eine Nullmenge in Q_0. Dann ist auch $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge. Sei B die Nullmenge aller Punkte, an denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es dann eine Überdeckung $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$ durch Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als ϵ. Indem wir die Kanten aller Quader um den Faktor $(1 + \epsilon')$ vergrößern, dabei aber den Mittelpunkt fixieren, und alle Quader vom Volumen Null weglassen, erhalten wir auch eine solche Überdeckung $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$ durch offene Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als ϵ. Für jeden Punkt $x \in Q_0 \setminus (A \cup B)$ gibt es auch ein N, so dass $f_N(x) \leq \epsilon$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt für alle $n \geq N$ auch $f_n(x) \leq \epsilon$. Weil alle f_N bei den Punkten von $Q_0 \setminus (A \cup B)$ lokal konstant sind, gibt es eine offene Überdeckung von offenen Quadern $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von $Q_0 \setminus (A \cup B)$, und eine Folge $(N_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass auf R_m für $n \geq N_m$ gilt $f_n \leq \epsilon$. Dann bilden $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zusammen mit $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Q_0. Weil Q_0 kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Wenn n größer ist als die entsprechenden endlich vielen N_m's können wir $\int f_n d\mu$ abschätzen durch

$$\int f_n d\mu \leq \epsilon(\max\{f_1(x)|x \in Q_0\} + \mu(Q_0)).$$

Auf den Quadern $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}} f$ schätzen wir f ab durch $\max\{f_1(x)|x \in Q_0\}$ und auf den offenen Quadern $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ durch ϵ. Also konvergiert $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null. **q.e.d.**

Lemma 2.15. *Seien f und g fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn fast überall gilt $f \geq g$, dann gilt auch*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Beweis: Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ erfüllen die Funktionen

$$((g_m - f_n)^+)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}(g_m - f_n + |g_m - f_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

die Voraussetzungen von dem vorangehenden Lemma. Deshalb konvergieren die entsprechenden Integrale gegen Null. Weil aber

$$g_m - f_n \leq (g_m - f_n)^+$$

gilt, folgt aus Proposition 2.11 und Lemma 2.14

$$\int g_m d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq= 0.$$

Dann gilt aber auch

$$\lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

q.e.d.

Aus Lemma 2.15 folgt, dass wir das Integral auf die Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen konsistent fortsetzen können. Seien nämlich $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsenden Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwerte fast überall übereinstimmen, dann können wir Lemma 2.15 sowohl auf diese Folge, als auch auf die vertrauschten Folgen anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Definition 2.16. *Sei $L^1(\mathbb{R}^d)$ die Menge der Äquivalenzklassen von fast überall definierten Funktionen f, für die es monoton wachsende Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen $\left(\int g_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int h_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass fast überall gilt*

$$f = \lim_{n\to\infty} g_n - \lim_{n\to\infty} h_n.$$

Hierbei werden zwei Funktionen miteinander identifiziert, wenn sie fast überall miteinander übereinstimmen.

Satz 2.17. *(Eigenschaften der Lebesgue-integrablen Funktionen)*

(i) *$L^1(\mathbb{R}^d)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und das Integral über Stufenfunktionen induziert eine lineare Abbildung*

$$\int : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, f \to \int f d\mu$$

(ii) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ fast überall nicht negativ ist, dann gilt auch*

$$\int f d\mu \geq 0.$$

(iii) *Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist auch $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

Beweis:

(i) Seien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn die Grenzwerte

$$g(x) - h(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) - \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

fast überall mit den Grenzwerten von

$$\tilde{g}(x) - \tilde{h}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) - \lim_{n\to\infty} \tilde{h}_n(x)$$

übereinstimmen, dann stimmen auch die Funktionen $g(x)+\tilde{h}(x)$ und $\tilde{g}(x)+h(x)$ fast überall überein und sind fast überall auch die Grenzwerte von

$$(g_n + \tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bzw. } (\tilde{g}_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dann folgt aus Lemma 2.15

$$\int(g+\tilde{h})d\mu=\int gd\mu+\int\tilde{h}d\mu=\int\tilde{g}d\mu+\int hd\mu=\int(\tilde{g}+h)d\mu.$$

Daraus folgt wegen der Linearität des Integrals

$$\int(g-h)d\mu=\int gd\mu-\int hd\mu=\int\tilde{g}d\mu-\int\tilde{h}d\mu=\int(\tilde{g}-\tilde{h})d\mu.$$

Deshalb definiert $\int$ eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$. Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für Folgen und der Linearität des Integrals auf Stufenfunktionen.

(ii) Wenn $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen sind, so dass fast überall $\lim\limits_{n\to\infty} g_n - \lim\limits_{n\to\infty} h_n$ nicht negativ ist, dann ist auch fast überall $g=\lim\limits_{n\to\infty} g_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$. Aus Lemma 2.15 folgt dann $\int gd\mu \geq \int hd\mu$ bzw. $\int(g-h)d\mu \geq 0$.

(iii) Sowohl die Minima als auch die Maxima von zwei monoton wachsenden Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen sind wieder monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn f fast überall die Differenz $g-h$ der Grenzwerte der monoton wachsenden Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen ist, dann ist $|f|$ fast überall die Differenz $\tilde{g}-\tilde{h}$ der Grenzwerte der monoton wachsenden Folgen $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}-(\max\{g_n,h_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\min\{g_n,h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Deshalb ist $|f|\in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wegen (ii) folgt dann aus

$$-|f|\leq f\leq|f| \text{ auch } -\int|f|d\mu\leq\int fd\mu\leq\int|f|d\mu \text{ bzw. } \left|\int fd\mu\right|\leq\int|f|d\mu.$$

q.e.d.

Satz 2.18. *Eine beschränkte Funktion, die außerhalb einer beschränkten Menge verschwindet und deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bildet, gehört zu $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis: Wir wählen einen Quader $Q\subset\mathbb{R}^d$, außerhalb dessen die Funktion verschwindet. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ teilen wir jede der d-Kanten des Quaders in 2^n gleichlange Abschnitte. Dadurch wird der Quader jeweils eine disjunkte Vereinigung von $2^{d\cdot n}$ Quadern. Dann sei f_n die Stufenfunktion, die auf jedem der 2^{dn} Quader gleich dem Infimum der entsprechenden Funktionswerte von f ist. Offenbar ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, deren Integrale durch $\|f\|_\infty\cdot\mu(Q)$ beschränkt sind. An allen Punkten $x_0\in\mathbb{R}^d$, an denen f stetig ist, gibt es für jedes $\epsilon>0$ ein $\delta>0$, so dass aus $x \in B(x_0, \delta)$ folgt $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$. Dann gibt es aber auch ein $N \in \mathbb{N}$, so dass der Durchmesser von Q kleiner ist als $2^N \delta$. Für alle $n \geq N$, ist dann der Teilquader der 2^{dn} Teilquader von Q, der x_0 enthält, in $B(x_0, \delta)$ enthalten. Deshalb gilt dann

$$f(x_0) - \epsilon < f_n(x_0) \leq f(x_0).$$

Also konvergiert $(f_n(x_0))$ gegen $f(x_0)$. Weil aber die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann fast überall gegen f. **q.e.d.**

2.3.3 Das Riemann– und das Lebesgueintegral

In diesem Abschnitt wollen wir für $d = 1$ das Riemannintegral mit dem Lebesgueintegral in Beziehung setzen. Zunächst wollen wir die Riemann–integrablen Funktionen charakterisieren.

Satz 2.19. *(Lebesgue-Kriterium) Eine beschränkte Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ ist genau dann Riemann–integrabel, wenn ihre Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. Insbesondere sind alle Riemann–integrablen Funktionen auch Lebesgue–integrabel und die beiden Integrale stimmen überein.*

Beweis: Wir zerlegen für alle $n \in \mathbb{N}$ das Intervall $[a, b]$ in die Vereinigung der Intervalle $[a, b] = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ mit

$$I_1 = \left[a, a + \frac{b-a}{n}\right], I_2 = \left(a + \frac{b-a}{n}\right] \ldots I_n = \left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b\right]$$

Für jede Funktion $f \in B_{\mathbb{R}}([a, b])$ seien

$$f_n(x) = \inf\{f(y) \mid y \in I_k \text{ mit } x \in I_k\} \quad F_n(x) = \sup\{f(y) \mid y \in I_k \text{ mit } x \in I_k\}$$

Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wegen dem Riemann-Kriterium konvergiert $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ genau dann gegen $\lim\limits_{n\to\infty} \int F_n d\mu$, wenn $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Wenn die Menge aller $\{x \in [a, b] \mid \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) > \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}$ eine Nullmenge ist, folgt aus Lemma 2.15 $\lim\limits_{n\to\infty} \int F_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. Umgekehrt folgt aus dieser Gleicheit, dass für alle $\epsilon > 0$ die Gesamtvolumen der Mengen

$$S_{n,\epsilon} = \{x \in [a, b] \mid F_n(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$$

im Grenzwert $n \to \infty$ nach Null konvergieren. Also ist dann die Schnittmenge

$$S_\epsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} = \left\{x \in [a, b] \mid \lim_{n\to\infty} F_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq \epsilon\right\}$$

aller dieser Mengen eine Nullmenge. Dann ist aber auch die Menge

$$\{x \in [a,b] \mid \lim_{n\to\infty} F_n(x) > \lim_{n\to\infty} f_n(x)\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_{\frac{1}{m}}$$

eine Nullmenge. Deshalb ist f genau dann Riemann–integrabel, wenn die Menge $\{x \in [a,b] \mid \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) > \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}$ eine Nullmenge ist.

Wenn f bei x stetig ist, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass alle $x' \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$ auch $|f(x') - f(x)| < \epsilon/2$ erfüllen. Dann gilt für $n > (b-a)/\delta$

$$|F_n(x) - f_n(x)| \le |F_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \le \epsilon.$$

Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Wenn umgekehrt f bei x nicht ststig ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ gilt

$$\sup\{f(x') \mid x' \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]\} - \inf\{f(x') \mid x' \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]\} \ge \epsilon.$$

Wenn x außerdem nicht in $\{a + t(b-a) \mid t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ enthalten ist, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ge \epsilon$, weil dann für alle $n \in \mathbb{N}$ das Teilintervall der obigen Zerlegungen, das x entält, eine Umgebung von x ist. Weil aber die Menge $\{a + t(b-a) \mid t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ abzählbar und damit eine Nullmenge ist, ist dann die Menge $\{x \in [a,b] \mid \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) > \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}$ genau dann eine Nullmenge, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist. **q.e.d.**

Beispiel 2.20. *Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller rationalen Zahlen in $(0,1)$. Dann ist für $0 < \epsilon < 1$ das Komplement der Teilmenge*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left((r_n - 2^{-(n+1)}\epsilon, r_n + 2^{-(n+1)}\epsilon) \cap [0,1]\right)$$

von $[0,1]$ keine Nullmenge, weil alle offenen Intervalle

$$I_n = \left(r_n - 2^{-(n+1)}\epsilon, r_n + 2^{-(n+1)}\epsilon\right) \cap [0,1]$$

höchstens das Maß $\epsilon 2^{-n}$ haben und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon < 1$. Also ist die Folge

$$\left(\prod_{k=1}^{n} (1 - \chi_{I_k})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton fallende Folge von Stufenfunktionen, die gegen eine Lebesgue–integrable Funktion konvergiert. Weil die rationalen Zahlen dicht in $[0,1]$ *liegen, ist diese Funktion an allen Punkten im Komplement der offenen Menge* $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ *unstetig. Also ist der Grenzwert von* $\left(\prod_{k=1}^{n}(1-\chi_{I_k})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Lebesgue–integrable Funktion, die nicht Riemann–integrabel ist. Diese offene Menge ist also ein Beispiel für eine offene Menge, deren Rand positives Lebesguemaß hat, also eine charakteristische Funktion mit nicht verschwindendem Lebesgueintegral.*

2.3.4 Der Satz von Fubini

Für jeden Quader Q in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ und jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \chi_Q(x,y)$ eine Stufenfunktion auf $\mathbb{R}$. Wenn wir die Funktion integrieren erhalten wir eine Stufenfunktion auf dem $\mathbb{R}^d$:

$$\int \chi_Q(x,y)d\mu(y) = \begin{cases} \text{Länge der Kante in der Dimension } d+1 \text{ von } Q, \\ \text{wenn es ein } y \in \mathbb{R} \text{ gibt mit } (x,y) \in Q. \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Also ist

$$\int \left(\int \chi_Q(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \mu(Q).$$

Wegen der Linearität des Integrals definiert die Abbildung $\int d\mu(y)$ also eine lineare Abbildung von den Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$. Und für jede Stufenfunktion f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\int f(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass diese Abbildung eine Abbildung

$$\int d\mu(y) : L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}^d)$$

induziert, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ gilt

$$\int \left(\int f(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Wenn $f \geq g$ zwei Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ sind, dann erfüllten für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die entsprechenden Stufenfunktionen $f_x : y \to f(x,y)$ bzw. $g_x : y \to g(x,y)$ auch $f_x \geq g_x$. Wegen Proposition 2.11 gilt für die Integrale auch

$$\int f(x,y)d\mu(y) \geq \int g(x,y)d\mu(y).$$

Also definiert $\int d\mu(y)$ eine lineare monotone Abbildung von den Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$. Damit diese Abbildungen eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$ induziert, müssen zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Stufenfunktionen, die fast überall übereinstimmen, auch auf zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Stufenfunktionen abgebildet werden, die fast überall übereinstimmen.

Lemma 2.21. *Sei $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ eine Nullmenge. Dann ist fast überall in $x \in \mathbb{R}^d$, die Menge $S_x = \{y \in \mathbb{R} | (x,y) \in S\}$ eine Nullmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis: Wegen Satz 2.13 gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$von Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ mit beschränkten Integralen, die auf S divergiert. Dann sind auch die entsprechenden Integrale $(\int f_n d\mu(y))_{n\in\mathbb{N}}$ über $\mathbb{R}$ monoton wachsende Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen auf $\mathbb{R}^d$. Wegen Satz 2.12 konvergieren die entsprechenden Integrale dann fast überall auf $x \in \mathbb{R}^d$. Für alle $x \in \mathbb{R}^d$, für die die Integrale konvergieren, sind die entsprechenden Einschränkungen auf $\{x\} \times \mathbb{R}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}$. Wegen Satz 2.12 sind also für alle $x \in \mathbb{R}^d$, so dass die Integrale über $\mathbb{R}$ konvergieren, die Mengen S_x Nullmengen. **q.e.d.**

Proposition 2.22. *Die Integration über $\mathbb{R}$ induziert eine monotone Abbildung $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ gilt*

$$\int \left(\int f(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Beweis: Weil die Integration über $\mathbb{R}$ eine monotone lineare Abbildung von den Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die Stufenfunktionen auf $\mathbb{R}^d$ definiert und wegen Lemma 2.21, induziert sie eine Abbildung von den Äquivalenzklassen von den Grenzwerten von monoton wachsenden Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ in die entsprechenden Äquivalenzklassen auf $\mathbb{R}^d$. Wegen der Konstruktion des Lebesgueintegrals induziert sie also auch eine Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ nach $L^1(\mathbb{R}^d)$. Weil für alle Stufenfunktionen f auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ gilt

$$\int \left(\int f(x,y)d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

gilt das auch für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$. **q.e.d.**

Die Argumente zeigen die analoge Aussage auch für die vertauschten Faktoren $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Wenn wir die mehrfach anwenden erhalten wir also

Korollar 2.23. *(Satz von Fubini) Für alle Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'})$ gilt*

$$\int \left(\int f(x,y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

q.e.d.

Mit dem Satz von Fubini und dem Lebesguekriterium können wir jetzt auch Integrale auf dem $\mathbb{R}^d$ ausrechnen. Als erstes können wir für fast alle $(x_2, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^d$ das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1$ ausrechnen. Dabei können wir die Methoden der eindimensionalen Integration, wie wir sie bei dem Riemannintegral kennen, benutzen. Dann integrieren wir genauso über $dx_2, \ldots, dx_d$ bis wir schließlich haben

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_d.$$

Wir können die Reihenfolge dieser eindimensionalen Integrale aber auch beliebig permutieren.

2.3.5 Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt werden wir drei Aussagen darüber beweisen, wann Grenzwertbildungen mit der Integration vertauschen. Als erstes werden wir die Konvergenz von monotonen Folgen mit beschränkten Integralen beweisen.

Satz 2.24. *(Satz der Monotonen Konvergenz von Beppo Levi) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion f in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränkten Integralen. Durch Übergang zu $(\pm f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir annehmen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen mit beschränkten Integralen ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seinen $(\tilde{g}_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$

und $(\tilde{h}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass fast überall gilt

$$f_n = \lim_{m\to\infty} \tilde{g}_{nm} - \lim_{m\to\infty} \tilde{h}_{nm}.$$

Die entsprechenden Folgen der Integrale $(\int \tilde{g}_{nm} d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\int \tilde{h}_{nm} d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $M(n) \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $m, m' \geq M(n)$ gilt

$$\left| \int \tilde{h}_{nm} d\mu - \int \tilde{h}_{n,m'} d\mu \right| \leq 2^n.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien h_{nm} und g_{nm} induktiv definiert durch

$$h_{nm} = \begin{cases} h_{n-1m} & \text{für } m < M(n) \\ \tilde{h}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m} & \text{für } m \geq M(n) \end{cases} \quad \text{und} \quad g_{nm} = \tilde{g}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m}$$

mit $h_{0m} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Weil für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(\tilde{h}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, bestehen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folgen $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ nur aus nicht negativen Funktionen. Weil auch die Folgen $(\tilde{g}_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sind, sind für alle $n \in \mathbb{N}$ auch die Folgen $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(h_{nm})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Aufgrund der Wahl von $M(n)$ sind die Integrale $(\int h_{nm} d\mu - \int h_{n-1m} d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch 2^{-n}. Also sind alle Integrale $(\int h_{nm} d\mu)_{n,m\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch 1. Dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ auch die Integrale $\int g_{nm} d\mu)_{n,m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $g_n = \lim_{m\to\infty} g_{nm}$ und $h_n = \lim_{m\to\infty} h_{nm}$ und

$$\tilde{g}_m = \max\{g_{1m}, \ldots, g_{mm}\} \text{ und } \tilde{h}_m = \max\{h_{1m}, \ldots, h_{mm}\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ auch fast überall $f_n = g_n - h_n$. Außerdem ist die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall monoton wachsend und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch. Offenbar sind $(\tilde{g}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit beschränkten Integralen. Seien $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ die entsprechenden Grenzwerte. Für $n \leq m$ gilt

$$g_{nm} \leq \tilde{g}_m \text{ und } h_{nm} \leq \tilde{h}_m.$$

Also gilt für die entsprechenden Grenzwerte $m \to \infty$ fast überall

$$g_n \leq \tilde{g} \text{ und } h_n \leq \tilde{h}.$$

Weil aber $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall monoton wachsende Folgen sind, gilt auch fast überall

$$\tilde{g}_m \leq \max\{g_1, \ldots, g_m\} \leq g_m \text{ und } \qquad \tilde{h}_m \leq \max\{h_1, \ldots, h_m\} \leq h_m.$$

Also gilt auch fast überall $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$ bzw. $f = \tilde{g} - \tilde{h} = g - h$. Dann folgt aus Lemma 2.15

$$\int f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \left(\tilde{g}_m - \tilde{h}_m\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (g_n - h_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

q.e.d.

Korollar 2.25. *(Norm $\|\cdot\|_1$) Auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ definiert $\|\cdot\| : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_1 = \int |f| d\mu$ eine Norm.*

Beweis: Die Dreiecksungleichung und die Eigenschaft

$$\|\lambda f\|_1 = \int |\lambda| \cdot |f| d\mu = |\lambda| \cdot \int |f| d\mu = |\lambda| \|f\|_1$$

folgt aus der Monotonie und der Linearität des Lebesgueintegrals. Zu zeigen bleibt noch, dass aus $\|f\|_1 = 0$ folgt $f = 0$ fast überall. Sei also $\int |f| d\mu = 0$. Dann konvergiert wegen dem Satz der monotonen Konvergenz die Folge $(n|f|)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall. Also gilt auch fast überall $|f| = 0$. **q.e.d.**

Korollar 2.26. *(Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass fast überall gilt $|f_n| \le k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergiert, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\int f d\mu$.*

Beweis: Seien $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$g_{nm} = \min\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\} \text{ und } h_{nm} = \max\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind wegen den Eigenschaften des Lebesgueintegrals $(g_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Folgen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit durch $\int k d\mu$ beschränkten Integralen, und $(h_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Funktionen mit durch $\int k d\mu$ beschränkten Integralen. Also konvergieren diese Folgen gegen Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

$$g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\} \text{ und } h_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$$

sind monotone Folgen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit beschränktern Integralen. Also konvergieren fast überall $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f. Dann gilt aber auch

$$\int g_n d\mu \le \int f_n d\mu \le \int h_n d\mu \text{ und } \qquad \int f d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \le \int f d\mu.$$

q.e.d.

Korollar 2.27. *(Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^d)$, Satz von Riesz-Fischer) $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist mit $\|\cdot\|_1$ ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(f_n)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_m})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_1 \leq 2^{-m}$. Die Reihe $\left(\sum\limits_{m=1}^{n} \left|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt dann die Voraussetzungen des Satzes über die Monotone Konvergenz. Also konvergiert sie fast überall gegen eine Funktion $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann konvergiert aber auch die Folge $(f_{n_m} - f_{n_1})_{m\in\mathbb{N}}$ fast überall und erfüllt mit $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ die Voraussetzungen von Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz. Dann konvergiert auch die Teilfolge gegen einen Grenzwert $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, konvergiert $(\|f_n - f\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null, und damit auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f. **q.e.d.**

2.3.6 Messbare Mengen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wann wir eine Lebesgue–integrable Funktion über eine Teilmenge integrieren können. Das führt dann zu einer allgemeineren Definition vom Volumen von sogenannten messbaren Mengen. Dieses Volumen heisst Maß.

Definition 2.28. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heisst messbar, wenn für jede nicht negative Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ das Produkt $f \cdot \chi_A$ mit der charakteristischen Funktion von A Lebesgueintegrabel ist.*

Für messbare Mengen A bilden die Produkte von Lebesgue–integrablen Funktionen mit der charakteristsichen Funktion χ_A von A den Teilraum von $L^1(\mathbb{R}^d)$ aller Lebesgue–intebrablen Funktionen, die außerhalb von A verschwinden. Als diesen Teilraum definieren wird den Raum $L^1(A)$ aller Lebesgue–integrablen Funktionen auf A

Definition 2.29. *Für messbare Teilmengen A von $\mathbb{R}^d$ sei $L^1(A) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ der Teilraum aller Lebesgue–integrablen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$, die ausserhalb von A verschwinden.*

Satz 2.30. **(i)** *Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.*

(ii) *Die abzählbare Schnittmenge von messbaren Mengen ist messbar.*

(iii) *Jede offene Menge ist messbar.*

Beweis: **(i)** Weil die charakteristische Funktion des Komplements gerade 1 minus der charakteritischen Funktion ist, folgt (i) daraus, dass $L^1(\mathbb{R}^d)$ ein Vektorraum ist.
(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Mengen und f eine nicht negative Funktion in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Folge $\left(f \prod\limits_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$

mit beschränkten Integralen. Wegen dem Satz der Monotenen Konvergenz konvergiert sie in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Der Grenzwert stimmt fast überall mit $f\chi_A$ überein, wobei $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
(iii) Jeder Quader ist messbar, weil die Multiplikation einer Stufenfunktion mit der charakteristischen Funktion eines Quaders eine Stufenfunktion ergibt. Die Menge aller offenen Quader mit rationalen Zentren und rationalen Kantenlängen ist abzählbar. Jeder Quader ist offenbar messbar. Weil aber jede offene Menge U gleich der Vereinigung aller der offenen Quader ist, deren Zentren und Kantenlängen in $\mathbb{Q}^d$ liegen, und die in U liegen, folgt (iii) aus (i) und (ii) und den de Morganschen Regeln. **q.e.d.**

Definition 2.31. *(Zerlegung der Eins) Eine Zerlegung der Eins bezüglich einer offenen Überdeckung, ist eine abzählbare Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von glatten Funktionen $f_n : \mathbb{R}^d \to [0,1]$, so dass*

(i) *für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ auf einer Umgebung von x nur endlich viele f_n ungleich Null sind.*

(ii) *Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = 1$.*

(iii) *Jedes f_n außerhalb eines Elementes der offenen Überdeckung verschwindet.*

Satz 2.32. *(Existenz der Zerlegung der Eins) Jede offene Überdeckung des $\mathbb{R}^d$ besitzt eine Zerlegung der Eins.*

Beweis: Weil der $\mathbb{R}^d$ eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen ist, besitzt jede Überdeckung auch eine abzählbare Teilüberdeckung $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $0 < a < b < \infty$ und $f_{a,b} : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto f_{a,b}(x)$ mit

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |x| \leq a \\ \exp\left(\frac{1}{x^2-b^2}\exp\left(\frac{-1}{x^2-a^2}\right)\right) & \text{für } a < |x| < b \\ 0 & \text{für } b \leq |x| \end{cases}$$

Dann ist $f_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sei $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Elemente von $\mathbb{Z}^d$. Dann ist die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = f_{\sqrt{d},d}(\|x - l_n\|) \prod_{m=1}^{n-1} (1 - f_{\sqrt{d},d}(\|x - l_m\|))$$

eine Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $(B(l_n,1))_{n\in\mathbb{N}}$. Denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_1(x) + \ldots + f_n(x) + (1 - f_{\sqrt{d},d}(x - l_1) \cdots (1 - f_{\sqrt{d},d}(x - l_n) = 1.$$

Weil die Abschlüsse $\overline{B(l_n, 1)}$ kompakt sind, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilüberckung von $\overline{B(l_n, 1)}$. Für jeden Punkt x von $\overline{B(l_n, 1)}$ gibt es ein $r(x) > 0$, so dass $B(x, r(x))$ in einer der entsprechenden endlich vielen offenen Mengen enthalten ist. Die offene Überdeckung $\{B(x, r(x)/2)|x \in \overline{B(l_n, 1)}\}$ von $\overline{B(l_n, 1)}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung $\{B(x_i, r_i/2)|i \in I_n\}$. Wir statten die Indexmengen I_n mit einer totalen Ordnung aus, indem wir den Elementen eine Reihenfolge geben. Die Funktionen

$$f_{n,i} = f_n(x) f_{r_{i/2}, r_i}(\|x - x_i\|) \prod_{j<i, j \in I_n} (1 - f_{r_{j/2}, r_j}(\|x - x_j\|))$$

bilden also eine Zerlegung der Eins. Zuletzt kann man jeweils solche Funktionen zu einer Funktion f_n aufsummieren, die außerhalb der Menge U_n verschwinden. **q.e.d.**

Lemma 2.33. **(i)** *Die Multiplikation mit einer beschränkten stetigen Funktion f definiert eine stetige lineare Abbildung $L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$, deren Norm beschränkt ist durch $\|f\|_\infty$.*

(ii) *Sei Φ eine bijektive Abbildung von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ auf eine offene Menge O. Wenn Φ Lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante L, dann induziert die Abbildung $f \mapsto f \circ \Phi^{-1}$ eine lineare Abbildung $L^1(U) \to L^1(O)$, deren Norm beschränkt ist durch L^d.*

(iii) *Sei Φ eine bijektive Abbildung von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ auf eine offene Menge O. Wenn für alle $x \in U$ und ein $0 < \epsilon < 1$ gilt $\|\Phi(x) - x\| \leq \epsilon \|x\|$, dann gilt für alle $f \in L^1(U)$*

$$((1-\epsilon)^d - 1)\|f\|_1 \leq \int_O f \circ \Phi^{-1} d\mu - \int_U f d\mu \leq ((1+\epsilon)^d - 1)\|f\|_1.$$

Beweis: **(i)** Wegen Satz 2.18 ist die Multiplikation einer Stufenfunktion g mit einer stetigen Funktion f eine Lebesgue- integrable Funktion. Wenn f beschränkt ist, gilt $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\| - 1$. Weil die Stufenfunktionen dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegen, kann man dann die Abbildung $g \mapsto f \cdot g$ zu einer linearen Abbildung $L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen, deren Norm beschränkt ist durch $\|f\|_\infty$.
(ii) Weil die Schnittmenge eines offenen Quaders in $\mathbb{R}^d$ mit U als offene Menge eine abzählbare Vereinigung von Quadern ist (siehe Beweis von Satz 2.30 (iii)), ist sie wegen Proposition 2.9 auch eine abzählbare disjunkte Vereinigung von Quadern in U. Also liegen die Stufenfunktionen in $L^1(U)$ dicht. Das Bild $\Phi[Q]$ eines Quaders in U liegt innerhalb des Quaders, dessen Zentrum das Bild des Zentrums von Q ist, und dessen Kantenlängen L mal der Kantenlängen von Q sind. Dieser Quader hat das Volumen

$L^d \cdot \mu(Q)$. Wegen Satz 2.30 ist dieses Bild messbar. Für jede Stufenfunktion $f \in L^1(U)$ ist dann $f \circ \Phi^{-1}$ Lebesgue–integrabel und es gilt

$$\|f \circ \Phi^{-1}\|_1 \leq L^d \|f\|_1.$$

Wieder läßt sich die Abbildung $f \mapsto f \circ \Phi^{-1}$ zu einer linearen Abbildung $L^1(U) \to L^1(O)$ fortsetzen, deren Norm beschränkt ist durch L^d.
(iii) Wenn für alle $x \in U$ gilt $\|\Phi(x) - x\| \leq \epsilon \|x\|$, dann ist das Bild $\Phi[Q]$ eines Quaders in U enthalten in dem Quader, dessen Zentrum das Bild des Zentrums von Q ist, und dessen Kantenlängen $(1+\epsilon)$ mal der Kantenlängen von Q sind. Umgekehrt enthält $\Phi[Q]$ den Quader, dessen Zentrum das Bild des Zentrums von Q ist, und dessen Kantenlängen $(1-\epsilon)$ mal der Kantenlängen von Q sind. Also gilt auch

$$\left| \int \chi_{\Phi[Q]} d\mu - \int \chi_Q d\mu \right| \leq \mu(Q) \max\{1 - (1-\epsilon)^d, (1+\epsilon)^d - 1\} \leq \big((1+\epsilon)^d - 1\big)\, \mu(Q).$$

Wegen der Linearität und der Dreieckungleichung folgt die Behauptung für alle Stufenfunktionen f, und weil diese dicht liegen für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. **q.e.d.**

2.3.7 Jacobi's Transformation von Maßen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich die Integration unter Koordinatentransformationen verhält. Danach werden wir die Integration über den Rand definieren.

Satz 2.34. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ eine invertierbare lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ auf sich selber. Dann definiert die Abbildung*

$$\pi(A) : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d), f \mapsto \pi(A)f \ \mathit{mit}\ (\pi(A)f)(x) = f(A^{-1}x)$$

eine stetige lineare Abbildung. Für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int \pi(A) f d\mu = |\det(A)| \int f d\mu.$$

Beweis: Wegen Lemma 2.33 (ii) ist die Abbildung

$$\pi(A) : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d), f \mapsto \pi(A)f$$

beschränkt durch $\|A\|^d$. Alle Quader mit rationalen Kanten sind disjunkte Vereinigungen von Quadern mit gleichen Kantenlängen. Weil die charakteristischen Funktionen von Quadern mit rationalen Kantenlängen dicht liegen in den charakteristischen

Funktionen von allen Quadern, liegen die Stufenfunktionen von Quadern mit gleichen Kantenlängen dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Für alle diese Funktionen f gilt aber

$$\int f \circ A^{-1} d\mu = \alpha(A) \int f d\mu \text{ mit } \alpha(A) = \int \chi_{A[[0,1]^d]} d\mu.$$

Also gilt das für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wenn A und B zwei invertierbare Elemente in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ sind, dann gilt $\pi(A \cdot B) = \pi(A) \cdot \pi(B)$. Also gilt auch $\alpha(A \cdot B) = \alpha(A)\alpha(B)$. Für diagonale Matrizen A gilt offenbar $\alpha(A) = |\det(A)|$. Also gilt das auch für diagonalisierbare Matrizen A. Aufgrund der Jordanschen Normalform, ist jede Matrix A mit paarweise verscheidenen Eigenwerten diagonalisierbar. Weil die Diskriminante des charakteristischen Polynoms einer Matrix A ein Polynom in den Einträgen von A ist, liegt die Teilmenge aller Matrizen, deren Diskrimante nicht verschwindet, dicht in allen Matrizen. Also liegen die diagonalisierbaren Matrizen dicht in allen invertierbaren Matrizen. Wegen Lemma 2.33 (iii) ist α stetig. Für alle A gilt dann $\alpha(A) = |\det(A)|$. **q.e.d.**

Satz 2.35. *(Jacobische Transformationsformel) Sei $\Phi : U \to O$ eine stetig differenzierbarere bijektive Abbildung von der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ auf die offene Menge $O \subset \mathbb{R}^d$. Wenn $\frac{d\Phi}{dx}$ auf U in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ invertierbar ist, dann ist die Abbildung $f \to \left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|(f \circ \Phi)$ eine Isometrie von $L^1(O)$ nach $L^1(U)$, d.h. für $f \in L^1(O)$ gilt*

$$\int \left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right| (f \circ \Phi) d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis: Weil $\frac{d\Phi}{dx}$ auf U in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ invertierbar ist, ist auch Φ^{-1} stetig differenzierbar. Wir überdecken U und O durch offene Mengen, auf denen $\|\frac{d\Phi}{dx}\|$ und $\|\frac{d\Phi^{-1}}{dx}\|$ beschränkt sind. Mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins genügt es die Aussage für solche U und O zu zeigen, auf denen $\|\frac{d\Phi}{dx}\|$ und $\|\frac{d\Phi^{-1}}{dx}\|$ beschränkt sind. Dann folgt aus Lemma 2.33 (i) und (ii), dass die Abbildung $f \mapsto \left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|(f \circ \Phi)$ eine lineare Abbildung $L^1(U)$ nach $L^1(O)$ induziert. Für jedes $\epsilon > 0$ können wir dann U und O durch offene Mengen überdecken, auf denen $\|\frac{d\Phi}{dx} - A\| \le \epsilon$ mit $A = \frac{d\Phi}{dx}(x_0)$ und einem geeigneten $x_0 \in U$. Dann folgt aus Lemma 2.33 (iii) und Satz 2.34, dass auf diesen kleinen Mengen O mit $f \in L^1(O)$ gilt

$$\int |\det(A)|(f \circ \Phi) d\mu - \int f d\mu| \le \|A\| \left((1 + \|A_1\|\epsilon)^d - 1\right) \|f\|_1.$$

Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ folgt dann $\displaystyle\int \left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right| (f \circ \Phi) d\mu = \int f d\mu.$ **q.e.d.**

Die Mengen, die wir im Gauß'schen Satz betrachten wollen, sollen einen zweimal differenzierbaren Rand haben.

Definition 2.36. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ hat einen k–mal (stetig) differenzierbaren Rand $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \Omega^c$, wenn es für jeden Punkt $x \in \overline{\Omega}$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ und eine bijektive, k–mal (stetig) differenzierbare Abbildung $\Phi : U \to O \subset \mathbb{R}^d$ mit k–mal (stetig) differenzierbarer Umkehrabbildung gibt, so dass $\Phi(x) = 0$ und*

$$\begin{aligned} \Phi[\Omega \cap U] &= O \cap \{x \in \mathbb{R}^d | x_d > 0\} \\ \Phi[\Omega^c \cap U] &= O \cap \{x \in \mathbb{R}^d | x_d \leq 0\} \\ \Phi[\partial\Omega \cap U] &= O \cap \{x \in \mathbb{R}^d | x_d = 0\} \end{aligned}$$

Ein Vektor y gehört also genau dann im Punkt $x \in \partial\Omega$ zum Tangentialraum an den Rand, wenn gilt

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} y \cdot e_d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \cdot \left(\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)^t e_d = 0$$

Deshalb ist der äußere Normalvektor $N(x)$ im Punkt x gegeben durch

$$N(x) = -\left\| \left(\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)^t e_d \right\|^{-1} \left(\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)^t e_d.$$

Unter stetig differenzierbaren Abbildungen Φ mit stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen transformieren sich der Tangentialraum an den Rand durch die Jacobimatrix und der Normalenvektor durch die transponierte der Jacobimatrix.

Beispiel 2.37. (i) *Sei f eine einmal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^d$, deren Gradient ∇f keine gemeinsamen Nullstellen mit f hat. Dann hat die Menge $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < 0\}$ einen stetig differenzierbaren Rand. Der Rand $\partial\Omega$ ist die Hyperfläche, auf der f verschwindet, die wegen dem Satz der impliziten Funktion lokal das Bild einer stetig differenzierbaren Abbildung von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{d-1}$ nach $\mathbb{R}^d$ ist. Auf dem Rand $\partial\Omega$ ist ∇f ein Vektor, der orthogonal auf dem Tangentialraum an den Rand steht, und nach außen zeigt. Deshalb ist $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ die äußere Normale.*

(ii) *Die Bälle $B(y, r)$ im $\mathbb{R}^d$ werden beschrieben durch die Menge $B(y, r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x - y)^2 - r^2 < 0\}$. Die Funktion $f(x) = (x - y)^2 - r^2$ ist offenbar unendlich oft differenzierbar, und der Gradient $\nabla f(x) = 2(x - y)$ hat nur eine Nulsstelle bei $x = y$. Also haben die Bälle $B(y, r)$ einen unendlich oft differenzierbaren Rand.*

Lemma 2.38. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit stetig differenzierbarem Rand und $\Phi : U \to O \subset \mathbb{R}^d$ eine einmal stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen*

Umgebung U von $x \in \partial\Omega$ mit einmal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Wenn f eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$ ist, die ausserhalb von U verschwindet, dann ist das Lebesgueintegral

$$\int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]} \left(\left\| \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^t e_d \right\| \cdot \left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|^{-1} f \right) \circ \Phi^{-1} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}$$

unabhängig von der Wahl von Φ. Hierbei ist $e_d = (0,\ldots,0,1)$.

Beweis: Seien Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei solche stetig differenzierbare Abbildungen von der offenen Teilmenge U nach O bzw. $\tilde{O}$. Dann ist $\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1}$ eine stetig differenzierbare Abbildung von O nach $\tilde{O}$. Im Folgenden seien $y = \Phi(x)$ die entsprechenden Koordinaten in O. Dann ist die letzte Komponente der Koordinaten von Φ bzw. $\tilde{\Phi}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ identisch gleich Null. Also verschwinden auf dem Rand $\partial\Omega$ alle Einträge der letzten Zeile bis auf das letzte $\left(\frac{d(\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})}{dy}\right)^{-1}_{dd}$ von der Matrix $\frac{d(\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})}{dy}$. Außerdem sind die Determinanten dieser Matrizen jeweils gleich dem Produkt dieser Einträge mit den Unterdeterminanten der entsprechenden $(d-1)\times(d-1)$ Matrizen, in denen jeweils die letzte Zeile und die letzte Spalte getrichen wurde. Also sind folgende Vektoren gleich:

$$\begin{aligned} e_d &= \left(\frac{d(\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})}{dy}\right)^{-1}_{dd} \left(\frac{d(\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})}{dy}\right)^t e_d \\ \left(\frac{d\tilde{\Phi}}{dx}\right)^t e_d &= \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^t \left(\frac{d(\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})}{dy}\right)^t e_d = \left(\frac{d(\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})}{dy}\right)^{-1}_{dd} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^t e_d. \end{aligned}$$

Weil e_d in beide Mengen $\Phi[\Omega\cap U]$ und $\tilde{\Phi}[\Omega\cap U]$ hineinzeigt, ist der letzte Eintrag der letzten Zeile der Jacobimatrix $\frac{d(\tilde{\Phi}\circ\Phi^{-1})}{dx}$ positiv. Dann ergibt Satz 2.35

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\tilde{\Phi}[\partial\Omega\cap U]} \left(\left\| \left(\frac{d\tilde{\Phi}}{dx}\right)^t e_d \right\| \cdot \left|\det\left(\frac{d\tilde{\Phi}}{dx}\right)\right|^{-1} f \right) \circ \tilde{\Phi}^{-1} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} = \\ &\qquad = \int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]} \left\| \left(\frac{d\Phi^{-1}}{dx}\right)^t e_d \right\|^{-1} \left|\det\left(\frac{d\Phi^{-1}}{dx}\right)\right| (f\circ\Phi^{-1}) d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}. \qquad \textbf{q.e.d.} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Lemma's definieren wir das Integral einer Funktion auf $\partial\Omega$.

Definition 2.39. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge mit stetig differenzierbarem Rand, und f eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$. Dann definieren wir das Integral $\int_{\partial\Omega} f d\sigma$ indem wir den Rand $\partial\Omega$ lokal auf Teilmengen von $\{0\}\times\mathbb{R}^{d-1}$ abbilden und dann das Integral mit Hilfe einer Zerlegung der Eins und dem vorangehenden Lemma auswerten.*

2.3.8 Der Gaußsche Satz

Satz 2.40. *(Gauß'scher Satz oder Divergenzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet mit zweimal differenzierbarem Rand und f eine auf $\overline{\Omega}$ stetige $\mathbb{R}^d$-wertige Funktion, die auf Ω stetig differenzierbar ist, und deren partielle Ableitungen auf Ω Lebesgue–integrabel sind. Dann gilt:*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma$$

Hierbei ist N die äußere Normale auf dem Rand $\partial\Omega$.

Beweis: Offenbar sind die linke und die rechte Seite der Gleichung linear in f. Deshalb können wir mit Hilfe einer Zerlegung der Eins die Funktion f in eine Summe von Funktionen mit Trägern in kleinen offenen Mengen zerlegen. Außerdem können wir f in eine Summe $f = \sum\limits_{i=1} e_i f_i$ mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_d$ von $\mathbb{R}^d$ zerlegen. Zunächst möchten wir solche f betrachten, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω verschwinden. Für jedes $i = 1, \ldots, d$ gibt es dann ein Intervall I_i, so dass f_i außerhalb der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i \in I_i\}$ verschwindet. Wegen dem Hauptsatz verschwindet dann für jedes $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ das Integral $\int_{I_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_d) dx_i$ über das Intervall I_i. Wegen dem Satz von Fubini folgt dann $\int_\Omega \nabla \cdot e_i f_i d\mu = 0$ Also erfüllen alle Funktionen mit kompaktem Träger in Ω den Gaußschen Satz.

Zuletzt betrachten wir Funktionen f die außerhalb einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ eines Randpunktes verschwinden, wie sie in Definition 2.36 beschrieben ist. Es existiert also eine zweimal differenzierbare Abbildung $\Phi : U \to O \subset \mathbb{R}^d$ mit zweimal differenzierbarer Umkehrabbildung, so dass Φ den Teil $U \cap \partial\Omega$ vom Rand in U auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ abbildet. Wir definieren $\tilde{f}(y) = \left(\left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|^{-1} \left(\frac{d\Phi}{dx} f\right)\right) \circ \Phi^{-1}(y)$, wobei wir punktweise die Ableitung $\frac{d\Phi}{dx}$ auf den Vektor f wirken lassen. Dann folgt aus der Definition 2.39

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma &= \int_{\Phi[\partial\Omega \cap U]} \left(\left\| \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^t e_d \right\| \left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|^{-1} f \cdot N \right) \circ \Phi^{-1} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} \\
&= -\int_{\Phi[\partial\Omega \cap U]} \left(\left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|^{-1} f \cdot \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^t e_d \right) \circ \Phi^{-1} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} \\
&= -\int_{\Phi[\partial\Omega \cap U]} \tilde{f} \cdot e_d d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}} = \int_{\Phi[\partial\Omega \cap U]} \tilde{f} \cdot \tilde{N} d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die äußere Normalen $N(x) = -\| \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^t e_d\|^{-1} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^t e_d$ und $\tilde{N} = -e_d$ eingesetzt. Wenn wir f durch $\tilde{f}$ ausdrücken und die Jacobische Transformationsformel benutzen, erhalten wir

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int\limits_{\Phi[\Omega\cap U]} \left(\left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|^{-1}\left(\nabla_x \cdot \left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^{-1}\tilde{f}\circ\Phi\right)\right)\circ\Phi^{-1}d\mu$$

Im Folgenden bezeichnen wir mit y die Koordinaten auf O und mit J die Jacobimatrix $J_{ij} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$. Mit den Rechenregeln für Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla_x \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^{-1}\tilde{f}\circ\Phi &= \sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial J^{-1}_{ij}}{\partial x_i}\tilde{f}_j\circ\Phi + \sum_{i,j,k=1}^{d} J^{-1}_{ij}J_{ki}\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y_k}\circ\Phi \\ &= -\sum_{i,j,k,l=1}^{d} J^{-1}_{ij}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_i}J^{-1}_{kl}\tilde{f}_l\circ\Phi + (\nabla_y\cdot\tilde{f})\circ\Phi.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 1.25 erhalten wir

$$\left(\nabla_x\left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|\right)\cdot\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^{-1}\tilde{f}\circ\Phi = \left|\det\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)\right|\sum_{i,j,k,l=1}^{d} J^{-1}_{ij}\frac{\partial J_{ji}}{\partial x_k}J^{-1}_{kl}\tilde{f}_l\circ\Phi.$$

Wegen dem Satz von Schwarz gilt

$$\frac{\partial J_{ji}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k\partial x_i} = \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i\partial x_k} = \frac{\partial J_{jk}}{\partial x_i}, \text{ und damit auch } \int\limits_{\Omega}\nabla\cdot f d\mu = \int\limits_{\Phi[\Omega\cap U]}\nabla_y\cdot\tilde{f}d\mu.$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Gaußsche Satz für Funktionen f, die außerhalb einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ verschwinden, wie sie in Definitiopn 2.36 beschrieben ist, genau dann gilt, wenn er für die entsprechenden Funktionen $\tilde{f}$ gilt:

$$\int\limits_{\Phi[\Omega\cap U]}\nabla_y\cdot\tilde{f}d\mu = \int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]}\tilde{f}\cdot\tilde{N}d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}.$$

Für die Funktionen $\tilde{f}$ gilt für alle $i = 1,\ldots,d-1$ wieder $\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\tilde{f}_i}{\partial x_i}d\mu = 0$. Für $i = d$ benutzen wir den Satz von Fubini und den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung und erhalten

$$\int\limits_{\Phi[\Omega\cap U]}\frac{\partial\tilde{f}_d}{\partial y_d}d\mu = -\int\limits_{\Phi[\partial\Omega\cap U]}\tilde{f}_d d\mu_{\mathbb{R}^{d-1}}.$$

Daraus folgt der Gauß'sche Satz. **q.e.d.**

Kapitel 3

Laplacegleichung

Eine der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen ist die Laplacegleichung

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Die entsprechende inhomogene Differentialgleichung heißt Poissongleichung:

$$-\triangle u = f.$$

Beide Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine gesuchte Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sie tauchen in der Physik auf und beschreiben z. B. das elektrische Feld im Vakuum oder mit einer Ladungsverteilung f.

3.1 Fundamentallösungen

Die Lapalcegleichung ist invariant unter allen Rotationen und Translationen des eukidischen Raumes $\mathbb{R}^n$. Deshalb bietet es sich an zunächst nach kugelsymmetrischen Lösungen zu suchen, also Lösungen, die nur von der Länge $r = |x| = \sqrt{x \cdot x}$ des Ortsvektors abhängen. Für eine solche Funktion $u(x) = v(r) = v(\sqrt{x \cdot x})$ ergibt die Kettenregel:

$$\nabla_x u(x) = v\left(\sqrt{x \cdot x}\right) \nabla_x r = v'\left(\sqrt{x \cdot x}\right) \frac{2x}{2r}.$$

Also geht die Laplacegleichung über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\triangle_x u(x) = \nabla_x \cdot \nabla_x u = v''(r)\frac{x^2}{r^2} + v'(r)\frac{n}{r} - v'(r)\frac{x^2}{r^2 r} = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung können wir folgendermaßen lösen:

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r} \Rightarrow \ln(v'(r)) = (1-n)\ln(r) + C \Rightarrow v(r) = \begin{cases} C'\ln(r) + C'' & \text{für } n = 2 \\ \frac{C'}{r^{n-2}} + C'' & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Definition 3.1. *Sei $\Phi(x)$ folgende Lösung der Lapalcegleichung:*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x| & \textit{für } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n|x|^{n-2}} & \textit{für } n \geq 3. \end{cases}$$

Hier bezeichnet ω_n das Volumen des Einheitsballes im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Die Wahl der Konstanten werden wir später erläutern. Diese Fundamentallösung hat bei $x = 0$ eine Singularität. Als Distribution ist $-\triangle\Phi(x) = \delta(x)$:

Satz 3.2. *Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)d^ny = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)d^ny$$

zweimal differennzierbar und erfüllt die Poissongleichung $-\triangle u = f$.

Beweis: Die Gleichheit der beiden Integrale in der Definition von $u(x)$ ergibt sich aus der Substitution $y \to x - y$. Weil f aber zweimal differenzierbar ist und kompakten Träger hat, ist auch das zweite Integral nach x differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)dy.$$

Insbesonder ist $\triangle u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\triangle_x f(x-y)d^ny$. Wir zerlegen jetzt dieses Integral in ein Integral nahe bei der Singulartät von Φ und ein Integral außerhalb der Singularität:

$$\begin{aligned} \triangle u(x) = \int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y)\triangle_x f(x-y)d^ny \qquad & + \int_{\mathbb{R}\setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y)\triangle_x f(x-y)d^ny \\ = I_\epsilon \qquad & + J_\epsilon. \end{aligned}$$

Hierbei lassen wir ϵ gegen Null gehen. Das erste Integral konvergiert aber in diesem Grenzwert gegen Null:

$$|I_\epsilon| \leq C\|\triangle_x f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\epsilon)} |\Phi(y)|d^ny \leq \begin{cases} C\epsilon^2|\ln\epsilon| & (n = 2) \\ C\epsilon^2 & (n \geq 3). \end{cases}$$

Eine partielle Integration ergibt für das zweite Integral:

$$\begin{aligned} J_\epsilon &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y)\triangle_y f(x-y)d^ny \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} \nabla_y\Phi(y)\cdot\nabla_y f(x-y)d^ny \quad + \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \Phi(y)\nabla_y f(x-y)\cdot Nd\sigma(y) \\ &= K_\epsilon \quad\quad +L_\epsilon. \end{aligned}$$

Hier ist N die äußere Nromale und $d\sigma$ das Maß auf dem Rand von $B(0,\epsilon)$. Der zweite Ausdruck konvergiert wieder gegen Null:

$$|L_\epsilon| \le |\nabla f|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} |\Phi(y)|d\sigma(y) \le \begin{cases} C\epsilon|\ln\epsilon| & (n=2) \\ C\epsilon & (n\ge 3). \end{cases}$$

Durch nochmaliges partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} K_\epsilon &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)} \triangle_y\Phi(y)f(x-y)d^ny - \int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \nabla_y\Phi(y)f(x-y)\cdot Nd\sigma(y) \\ &= -\int\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \nabla_y\Phi(y)f(x-y)\cdot Nd\sigma(y), \end{aligned}$$

weil für $y \neq 0$ ϕ harmonisch ist. Nun ist aber der Gradient $\nabla\Phi(y) = -\frac{1}{n\omega_n}\frac{y}{|y|^n}$, und der zum Ursprung zeigende Normalenvektor gleich $-\frac{y}{|y|}$. Wenn σ_n das Volumen der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, dann berechnet sich das Volumen ω_n des Einheistballes durch

$$\omega_n = \int\limits_0^1 \sigma_n r^{n-1}dr = \frac{\alpha_n}{n}.$$

Weil $n\omega_n\epsilon^{n-1}$ das Volumen von $\partial B(0,\epsilon)$ ist, ist K_ϵ der Mittelwert von $-f$ auf $\partial B(x,\epsilon)$. Weil f stetig ist, konvergiert dieser Mittelwert im Grenzwert $\epsilon \to 0$ gegen $-f(x)$. **q.e.d.**

Wir haben insbesondere gezeigt, dass im Sinne von Distributionen gilt $-\triangle\Phi(x) = \delta(x)$. Hieraus erklärt sich die Wahl der Konstanten bei der Definition von Φ. Die Faltung einer Funktion f mit Φ ist auch definiert, wenn f nur stetig ist, oder sogar nur lokal integrabel ist. Im Allgemeinen ist die einer stetigen Verteilung f entsprechende Lösung der Poissongleichung nicht zweimal stetig differenzierbar. Aber es genügt, dass f Lipschitz–stetig ist, damit die Aussage des Satzes gültig bleibt. Diese Lösung der

Poissongleichung ist sogar für alle Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wohl definiert, und auch eine schwache Lösung der Poissongleichung. Weil die Poissongleichung eine inhomogene lineare Differentialgleichung ist, ist jede Lösung nur bestimmt bis auf Addition einer Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung, also einer harmonischen Funktion.

3.2 Mittelwerteigenschaften harmonischer Funktionen

Für eine harmonische Funktion u auf einem Gebiet, das einen Ball $B(x,r)$ vom Radius r enthält, ist der Mittelwert von u auf dem Rand $\partial B(x,r)$ des Balles gerade gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Weil das für beliebige Radien gilt und der Mittelwert von u auf dem Ball $B(x,r)$ gerade gleich einem gewichtetem Mittelwert aller Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r')$ mit $0 \leq r' \leq r$ ist, ist dann auch der Mittelwert auf dem Ball $B(x,r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Dieser Sachverhalt führt zu aufschlussreichen Folgerungen.

Mittelwerteigenschaft 3.3. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonischen Funktion auf einem offenen Gebiet Ω, das den Ball $B(x,r)$ enthält. Dann sind die Mittelwerte von u auf dem Ball $B(x,r)$ und dessen Rand gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x. Sind umgekehrt die Mittelwerte einer zweimal differenzierbaren Funktion $u \in C^2(\Omega)$ auf allen Bällen $B(x,r)$, die in Ω enthalten sind, oder auf Rändern dieser Bälle gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten, dann ist u auf Ω harmonsich.*

Beweis: Sei $\Phi(r)$ definiert als der Mittelwert von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r) \subset \Omega$:

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(x+rz) d\sigma(z).$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Phi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z d\sigma(z) \\
&= \frac{1}{r^{n-1} n\omega_n} \int\limits_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot N d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{r^{n-1} \omega_n} \int\limits_{B(x,r)} \triangle u(y) d^n y.
\end{aligned}$$

Wenn jetzt u harmonisch ist, dann folgt dass Φ konstant ist solange $B(x,r)$ in Ω liegt. Wegen der Stetigkeit von u konvergiert $\Phi(r)$ im Grenzwert $\lim r \to 0$ gegen $u(x)$. Also sind die Mittelwerte von u auf den Rändern der Bälle in Ω gerade gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunkten. Es gilt aber

$$\frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} u(y)d^ny = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r \frac{1}{s^{n-1}n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,s)} s^{n-1}u(y)d\sigma(y)ds = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)ds.$$

Deshalb folgt aus der Konstanz von Φ, dass auch der Mittelwert von u auf $B(x,r)$ gleich dem Wert von u am Mittelpunkt x ist.

Wenn aber umkegehrt die Mittelwerte von u auf allen Bällen $B(x,r)$ in Ω gleich den Werten von u an den entsprechenden Mittelpunlkten sind, dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{r^n}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)ds.$$

Deshalb verschwindet die Ableitung der rechten Seite nach r:

$$-\frac{n^2}{r^{n+1}}\int\limits_0^r s^{n-1}\Phi(s)ds + \frac{n}{r^n}r^{n-1}\Phi(r) = -\frac{n}{r}u(x) + \frac{n}{r}\Phi(r) = 0.$$

Daraus folgt aber, dass auch die Mittelwerte $\Phi(r)$ von u auf den Rändern der Bälle $B(x,r)$ gleich den Werten von u an den Mittelpunkten sind. Weil u zweimal differenzierbar ist, ist nach unser obigen Formel Φ differenzierbar. Wenn aber die Ableitungen $\Phi'(r)$ verschwinden, müssen die Integrale von $\triangle u$ über alle Bälle in Ω verschwinden. Daraus folgt dann, dass u harmonisch ist. **q.e.d.**

3.3 Maximumprinzip

Wenn eine harmonsiche Funktion u auf einem offen zusammenhängendem Gebiet Ω ihr Supremum (oder Infimum) in einem Punkt $x \in \Omega$ annimmt, dann gibt es sicherlich einen Ball $B(x,r) \subset \Omega$. Dann folgt aber aus der Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{r^n\omega_n}\int\limits_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|d^ny = 0.$$

Also muss u auf $B(x,r)$ konstant sein. Insbesondere ist die Teilmenge von Ω, auf der u gleich $u(x)$ ist offen und abgeschlossen. Weil aber Ω zusammenhängend ist, muss dann diese Teilmenge ganz Ω sein. Damit fogt aus der Mittelwerteigenschaft ein

Starkes Maximumprinzip 3.4. *Sei u eine harmonische Funktion auf dem offenen und zusammenhängenden Gebiet Ω. Nimmt u das Supremum (oder Infimum) auf Ω an, dann ist u konstsnt.* **q.e.d.**

Aus dem Starken Maximumprinzip fogt aber sofort ein

Schwaches Maximumprinzip 3.5. *Sei $u \in C(\bar{\Omega})$ eine auf dem Abschluss eines beschränkten offenen Gebietes Ω setige Funktion, die auf Ω harmonisch ist. Dann nimmt u sein Maximum (und Minimum) auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω an.*

Beweis: Weil f stetig ist, nimmt sie ihr Maximum und Minimum auf der kompakten Menge Ω an. Wenn diese Extremwerte nicht auf dem Rand liegen, dann ist f aufgrund des Starken Maximumprinzips konstant. **q.e.d.**

3.4 Greensche Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, durch welche Vorgaben eine harmonische Funktion auf einem offenen zusammenhängendem Gebiet Ω eindeutig bestimmt ist. Es bietet sich an die Werte von u oder einiger ihrere partiellen Ableitungen auf dem Rand $\partial\Omega$ festzulegen.

Setzten wir in den Gaußschen Satz das Vektorfeld $v(x)\nabla u(x)$ ein so erhalten wir die

Erste Greensche Formel 3.6. *Seien u und v zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf $\bar{\Omega}$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} v(y)\triangle u(y)d^n y + \int\limits_{\Omega} \nabla v(y) \cdot \nabla u(y)d^n y = \int\limits_{\partial\Omega} v(z)\nabla u(z) \cdot N d\sigma(z).$$

q.e.d.

Vertauschen wir in der Ersten Greenschen Formel die Rollen von u und v und subtrahieren das Ergebnis von der ursprünglichen Formel, so erhalten wir die

Zweite Greensche Formel 3.7. *Seien u und v zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf $\bar{\Omega}$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} \left(v(y)\triangle u(y) - u(y)\triangle v(y)\right) d^n y = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(z)\nabla u(z) - u(z)\nabla v(z)\right) \cdot N d\sigma(z).$$

q.e.d.

Wir wenden die Zweite Greensche Formel auf die Fundamentallösung $\Phi(x-y)$ an. Diese Fundamentallösung ist aber für $x \neq y$ harmonisch. Im Beweis von Satz 3.2 haben wir gesehen, dass folgendes gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \triangle_y \Phi(x-y) d^n y = \int\limits_{B(y,\epsilon)} f(y) \triangle_x \Phi(x-y) d^n y = -f(x).$$

Deshalb folgt der

Greensche Darstellungssatz 3.8. *Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine zweimal differenzierbare Funktion auf dem offenden Gebiet Ω. Dann gilt für $x \in \Omega$:*

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega} \Phi(x-y) \triangle u(y) d^n y + \int\limits_{\partial\Omega} (\Phi(x-z) \nabla_z u(z) - u(z) \nabla_z \Phi(x-z)) \cdot N d\sigma(z).$$

Deshalb ist auf Ω jede Lösung u der Poissongleichung $-\triangle u = f$ durch die Werte von u und die normal Ableitung non u auf dem Rand $\partial\Omega$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt stellt sich dann die Frage für welche solche Daten auch eine Lösung existiert. Aus dem schwachen Maximumprinzip folgt sofort, dass für eine Wahl von f und eine Wahl von Werten von u auf dem Rand $\partial\Omega$ höchstens eine Lösung existiert, weil die Differenz zweier solcher Lösungen harmonisch ist und auf dem Rand verschwindet. Deshalb erscheint es naheliegend folgendes Randwertproblem zu formulieren:

Dirichletproblem 3.9. *Auf einem offenen zusammenhängendem Gebiet Ω ist eine Lösung der Poissongleichung $-\triangle u = f$ gesucht, die auf dem Rand die Werte $u|_{\partial\Omega} = g$ annimmt. Hierbei ist f eine gegebene Funktion auf Ω und g eine gegebene Funktion auf $\partial\Omega$.*

Dieses Randwertproblem läßt sich mit einer entsprechenden Greenschen Funktion lösen:

Greensche Funktion 3.10. *Eine Funktion $G_\Omega : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für das Gebiet Ω, wenn folgendes gilt:*

(i) *$G_\Omega(x, y) = 0$ für $y \in \partial\Omega$.*

(ii) *$G_\Omega(x, y) - \Phi(x-y)$ ist für alle $x \in \Omega$ eine harmonsiche Funktion auf $y \in \Omega$*

Dann gilt wegen dem Zweiten Greenschen Satz für die Funktion $v(y) = G_\Omega(x, y) - \Phi(x-y)$:

$$\begin{aligned} &-\int\limits_{\Omega} \Phi(x-y) \triangle u(y) d^n y + \int\limits_{\partial\Omega} (\Phi(x-z) \nabla_x u(z) - u(z) \nabla_z \Phi(x-z)) \cdot N d\sigma(z) \\ &\qquad = -\int\limits_{\Omega} G_\Omega(x, y) \triangle u(y) d^n y - \int\limits_{\partial\Omega} u(z) \nabla_z G_\Omega(x, z) \cdot N d\sigma(z). \end{aligned}$$

Also ergibt der Greensche Darstellungssatz:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_\Omega(x,y)\triangle_y u(y) d^n y - \int\limits_{\partial\Omega} u(z)\nabla_z G_\Omega(x,z) \cdot N d\sigma(z).$$

Umgekehrt seien $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Ist dann

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_\Omega(x,y) f(y) d^n y - \int\limits_{\partial\Omega} g(z)\nabla_z G_\Omega(x,z) \cdot N d\sigma(z)$$

eine Lösung des Diricheletproblems? Die Antwort ist im Wesentlichen ja. Wir benötigen aber wieder Regularitätseigenschaften der Funktionen f und g. Damit reduziert sich das Dirichletproblem auf die Bestimmung der Greenschen Funktion.

Offenbar ist die Differenz $G_\Omega(x,y) - \Phi(x-y)$ eine harmonische Funktion auf $x \in \Omega$, die auf dem Rand gerade gleich $-\Phi(x-y)$ ist. Deshalb genügt es für die Bestimmung der Greenschen Funktion, das Dirchletproblem für die Funktionen $f = 0$ und $g(x) = \Phi(x-y)$ zu lösen.

Satz 3.11. *(Symmetrie der Greenschen Funktion) Sei G_Ω die Greensche Funktion des Gebietes Ω. Dann gilt $G_\Omega(x,y) = G_\Omega(y,x)$ für alle $x \neq y \in \Omega$.*

Beweis: Für $x \neq y \in \Omega$ sei $\epsilon > 0$ so klein, dass die beiden Bälle $B(x,\epsilon)$ und $B(y,\epsilon)$ disjunkt sind und in Ω liegen. Die Zweite Greensche Formel auf dem Gebiet $\Omega \setminus (B(x,\epsilon) \cup B(y,\epsilon))$ mit den Funktionen $u(z) = G(x,z)$ und $v(z) = G(y,z)$ ergibt

$$\int\limits_{\partial B(x,\epsilon)} (G(y,z)\nabla_z G(x,z) - G(x,z)\nabla_z G(y,z)) \cdot N d\sigma(z)$$
$$= \int\limits_{\partial B(y,\epsilon)} (G(x,z)\nabla_z G(y,z) - G(y,z)\nabla_z G(x,z)) \cdot N d\sigma(z).$$

Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ konvergieren die beiden zweiten Summenden genau wie L_ϵ im Beweis von Satz 3.2 gegen Null. Die beiden ersten Summenden konvergieren in diesem Grenzwert $\epsilon \to 0$ genau wir die Umformumg von K_ϵ zu einem Randintegral im Beweis von Satz 3.2 gegen $G(y,x)$ bzw. $G(x,y)$. **q.e.d.**

Wir wollen uns zunächst auf den Fall $\Omega = B(0,1)$ beschränken, auf den sich offensichtlich alle Bälle zurückführen lassen. Dabei benutzen wir Inversionen an der Einheitssphähre $\partial B(0,1)$: Die Abbildung $x \mapsto \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$ spiegelt das Innere vom Einheitsball auf das Äußere, wobei die Einheitssphähre festgehalten wird. Das Dirichletproblem für den Einheitskreis mit den Funktion $f = 0$ und $g(x) = \Phi(x-y)$ wird durch die Inversion der Singularität bei $y = x$ am Einheitskreis gelöst:

Greensche Funktion vom Einheitsball 3.12. *Die Greensche Funktion vom Einheitsball $B(0,1)$ ist gegeben durch*

$$G_{B(0,1)}(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(|x|(\tilde{x}-y)) = \begin{cases} \Phi(x-y) - |x|^{2-n}\Phi(\tilde{x}-y) & \text{für } n > 2 \\ \Phi(x-y) - \Phi(\tilde{x}-y) - \Phi(x) & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Beweis: Für $|y| = 1$ gilt nämlich $|x|^2|\tilde{x}-y|^2 = 1 - 2y \cdot x + x^2 = |x-y|^2$. Deshalb stimmt auf dem Rand $y \in \partial B(0,1)$ die Funktion $\Phi(|y|(x-\tilde{y})$ tatsächlich mit der Funktion $\Phi(x-y)$ überein. **q.e.d.**

Satz 3.13. *Sei $f \in C^2(\bar{B}(0,1))$ und $g \in C(\partial B(0,1))$. Dann ist*

$$u(x) = \int\limits_{B(0,1)} G_{B(0,1)}(x,y)f(y)d^n y - \int\limits_{\partial B(0,1)} g(z)\nabla_z G_{B(0,1)}(x,z) \cdot N d\sigma(z)$$

die eindeutige Lösung des entsprechenden Diricheletproblems.

Beweis: Wegen $|x|^2|\tilde{x}-y|^2 = 1 - 2x \cdot y + x^2y^2 = |y|^2|\tilde{y}-x|^2$ gilt $G_{B(0,1)}(x,y) = G_{B(0,1)}(y,x)$. Weil die beiden gegebenen Funktionen f und g getrennt in die beiden Summanden eingehen, genügt es die beiden Fälle $g = 0$ und $f = 0$ getrennt zu betrachten. Die Argumente des Satzes 3.2 zeigen auch, dass im Fall $g = 0$ die angegebene Funktion auf $B(0,1)$ die Poissongleichung löst und sich zweimal stetig differenzierbar auf $\bar{B}(0,1)$ fortsetzten läßt. Weil $G_{B(0,1)}(x,y)$ auf dem Rand $x \in \partial B(0,1)$ verschwindet, erfüllt die angegebene Lösung des Dirichletproblems auch die geforderte Randbedingung auf $\partial B(0,1)$.

Im Fall $f = 0$ zeigen wir zunächst, dass die vermeintliche Lösung des Dirichletproblems sich zweimal stetig differenzierbar auf $\bar{B}(0,1)$ forstsetzten läßt. Dazu rechnen wir den entsprechenden Integralkern für $|y| = 1$ und $n > 2$ explizit aus (Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, dass das Ergebnis auch für $n = 2$ richtig ist):

$$\begin{aligned}
K(x,y) &= -\nabla_y G_{B(0,1)}(x,y) \cdot \frac{y}{|y|} = -\nabla_y G_{B(0,1)}(y,x)\frac{y}{|y|} \\
&= -\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{y}{|y|}\nabla_y\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{1}{|y|^{n-2}\,|\tilde{y}-x|^{n-2}}\right) \\
&= \frac{1}{n\omega_n}\frac{y}{|y|}\left(\frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{y}{|y|^n\,|\tilde{y}-x|^{n-2}} - \frac{(\tilde{y}-x)\left(\frac{1}{|y|^2} - 2\frac{y^2}{|y|^4}\right)}{|y|^{n-2}\,|\tilde{y}-x|^n}\right) \\
&= \frac{1}{n\omega_n}\frac{1 - xy - (x^2 - 2xy + 1) + (1 - xy)}{|x-y|^n} \\
&= \frac{1 - |x|^2}{n\omega_n|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere, dass der Intgeralkern für $|x| < 1$ positiv ist. Setzen wir die harmonische Funktion $u = 1$ in den Greenschen Darstellungssatz ein, so sehen wir, dass das Integral von dem Integralkern über $\partial B(0, 1)$ gleich 1 ist. Weil aber andererseits dieser Integralkern für festes $y \in \partial B(0, 1)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ stetig ist und auf $\partial B(0, 1) \setminus \{y\}$ verschwindet, konvergiert für festes $y \in \partial B(0, 1)$ die Folge von Funktionen $K(\lambda x, y)$ auf $\partial B(0, 1)$ im Grenzwert $\lambda \uparrow 1$ als Distribution gegen die δ–Distribution. Daraus folgt dann, dass für stetiges g die vermeintliche Lösung tatsächlich auf dem Rand mit g übereinstimmt. **q.e.d.**

Aufgrund des Transformationsverhaltens des Laplaceoperators unter der Transformation $x \mapsto r(x - z)$, ist dann die Greensche Funktion für den Ball $B(z, r)$ gegeben durch

$$G_{B(z,r)}(x, y) = r^{2-n} G_{B(0,1)}((x - z)/r, (y - z)/r).$$

Daraus ergibt sich, dass jede harmonische Funktion u auf $B(z, r)$, die sich stetig auf $\partial B(z, r)$ fortsetzten läßt, folgendes gilt:

$$u(x) = \frac{r^2 - |x - z|^2}{nr\omega_n} \int\limits_{\partial B(z,r)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y) = \frac{1 - \frac{|x-z|^2}{r^2}}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{u(z + ry)}{|x/r - z/r - y|^n} d\sigma(y).$$

Also sind insbesondere alle Werte von u in $B(z, r)$ allein durch die Werte von u auf $\partial B(z, r)$ bestimmt. Durch Ableiten nach x erhalten wir ähnliche Formeln für die Werte der Ableitungen von u. Diese Formel impliziert auch die Mittelwerteigenschaft. Schließlich zeigt sie sogar, dass jede harmonische Funktion analytisch ist, weil der Integralkern als Funktion von x analytisch ist.

Korollar 3.14. *Jede auf einem offenen Gebiet harmonische Funktion ist analytisch.* **q.e.d.**

Korollar 3.15. *Sei u eine harmonische Funktion auf einem Gebiet $\Omega \supset B(x, r)$. Dann gibt es eine Konstante $C(n, k)$, die nur von der Dimension n und der Ordnung k abhängt, so dass alle partiellen k–ten Ableitungen von u an der Stelle x beschränkt sind durch*

$$\left| \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right| \leq \frac{C(n, k)}{r^k} \|u\|_{L^\infty(\partial B(0,r))}.$$

Beweis: Die Ungleichung folgt sofort aus der Poissonschen Darstellungsformel. **q.e.d.**

Satz von Liouville 3.16. *Eine auf $\mathbb{R}^n$ beschränkte harmonische Funktion ist konstant.*

Beweis: Weil u beschränkt ist, sind die Normen $\|u\|_{L^\infty(\partial B(x,r))}$ beschränkt. Dann folgt aus der Poissonschen Darstellungsformel, dass die ersten partiellen Ableitungen von u durch ein Vielfaches von $1/r$ beschränkt sind. Aus dem Grenzwert $r \to \infty$ folgt, dass alle ersten partiellen Ableitungen von u verschwinden und u konstant ist. **q.e.d.**

Lemma 3.17. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, das 0 enthält, und u sei eine harmonische beschränkte Funktion auf $\Omega \setminus \{0\}$. Dann läßt sich u harmonisch auf Ω fortsetzten.*

Beweis: Wir wählen einen kleinen Kreis $B(0,r) \subset \Omega$. Dann gibt es wegen Satz 3.13 eine eindeutige Lösung $\tilde{u}$ zu dem Dirichletproblem mit den Randwerten von u auf $\partial B(0,r)$. Wir betrachten jetzt die Familie von harmonischen Funktionen $u_\epsilon(x) = \tilde{u}(x) - u(x) + \epsilon G_{B(0,r)}(x,0)$ auf $B(0,r) \setminus \{0\}$. Aufgrund der Konstruktion verschwinden diese Funktionen auf dem Rand $\partial B(0,r)$. Wir behaupten jetzt, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Funktion u_ϵ nicht negativ ist auf $B(0,r) \setminus \{0\}$. Wegen der Beschränktheit von u und der Unbeschränktheit von $G_{B(0,r)}(\cdot, 0)$ hätte andernfalls diese harmonische Funktion auf $B(0,r) \setminus \{0\}$ ein negatives Minimum im Innerern, was dem Starken Maximumprinzip wiederpricht. Ananlog gilt für negative ϵ, dass u_ϵ nicht positiv ist, weil andernfalls diese harmonsiche Funktion ein positives Maximum im Inneren von $B(0,r) \setminus \{0\}$ hätte. Dann muss aber $u_0 = \tilde{u} - u$ identische verschwinden. Also ist $\tilde{u}$ eine harmonische Fortsetzung von u auf $B(0,r)$. **q.e.d.**

3.5 Dirichlet's Prinzip

Es gibt noch eine andere Methode um das Dirichletproblem zu lösen. Die Lösung läßt sich nämlich eindeutig dadurch charakterisieren, dass sie das Minimum eines Energiefunktionales ist.

Dirichlet's Prinzip 3.18. *Für alle stetigen Funktionen f auf Ω und g auf $\partial\Omega$ ist die Lösung des Dirichletproblems:*

$$-\triangle u = f \qquad \textit{auf} \qquad \Omega \quad \textit{und} \quad u \mid_{\partial\Omega} = g$$

ein Minimum des Funktionals

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) - uf \right) d^n x.$$

auf der Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die sich auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen lassen und auf $\partial\Omega$ gleich g sind.

Beweis. Sei u eine Lösung des Dirichletproblems und w eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf Ω, die sich stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen läßt und $w \mid_{\partial\Omega} = g$ erfüllt. Dann gilt

$$0 = \int_\Omega (-\triangle u - f)(u - w) d^n x.$$

Weil $u - w$ auf $\partial\Omega$ verschwindet, ergibt eine partielle Integration dann

$$0 = \int_\Omega [(\nabla u) \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)] d^n x$$

Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned}\int_\Omega [(\nabla u) \cdot (\nabla u) - fu] d^n x &= \int_\Omega [(\nabla u) \cdot (\nabla w) - fw] d^n x \leq \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) d^n x + \int_\Omega [\frac{1}{2} (\nabla w) \cdot (\nabla w) - fw)] d^n x\end{aligned}$$

Hier haben wir die Cauchy Schwarz'sche Ungleichung benutzt:

$$\int_\Omega (\nabla u) \cdot (\nabla w) d^n x \leq \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla u) \cdot (\nabla u) d^n x + \int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla w) \cdot (\nabla w) d^n x.$$

Dann ergibt sich also $I(u) \leq I(w)$. Sei nun umgekehrt u ein Minimum von $I(u)$, dann gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen v auf Ω, die auf $\partial\Omega$ verschwinden:

$$\frac{d}{dt} I(u + tv) \mid_{t=0} = 0$$

$$I(u + tv) = I(u) + t \int_\Omega [(\nabla u) \cdot (\nabla v) - fv] d^n x + \frac{t^2}{2} \int_\Omega (\nabla v) \cdot (\nabla v) d^n x.$$

Also gilt wegen partieller Integration auch:

$$0 = \int_\Omega [(\nabla u) \cdot (\nabla v) - fv] d^n x = \int_\Omega (-\triangle u - f) v d^n x.$$

Weil das aber für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen v auf $\bar{\Omega}$ gilt, die auf $\partial\Omega$ verschwinden, folgt dann $-\triangle u = f$ auf Ω. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir noch erwähnen, dass die Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen Dirichletproblems auch aus dem Funktional folgt. Die Differenz zweier Lösungen ist nämlich harmonisch und verschwindet auf dem Rand. Für diese Wahl $f = 0$ und $g = 0$ ist das Funktional aber offensichtlich nicht negativ, und genau dann Null, wenn u konstant ist, also wegen der Randbedingung verschwindet. Mit Hilfe des Dirichletprinzips läßt sich sogar für eine große Klasse von Funktionen f und g zeigen, dass das entsprechende Funktional nur genau einen Extremwert hat, der immer ein Minimum ist, und die Lösung des Dirichletproblem ergibt.

Kapitel 4

Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \triangle u = 0$$

und die entsprechende inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \triangle u = f.$$

Gesucht wird dabei eine Funktion u auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und für die inhomogenen Gleichung ist f eine gegebene Funktion auf demselben Gebiet. Typischerweise hat jede Aussage über harmonsiche Funktionen ein Analogon für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Diese Wärmeleitungsgleichung beschreibt Diffusionsprozesse, das heißt die zeitliche Entwicklung solcher räumlich variierender Größen wie Wärme, chemische Konzentration usw.. Dabei ist die Flussdichte gerade proportional zu dem negativen Gradienten, weil der Fluss von der höheren Konzentration zu der niedrigeren zeigt. Damit erhalten wir aus der skalaren Erhaltungsgleichung die Wärmeleitungsgleichung.

4.1 Fundamentallösung

Weil die Wärmeleitungsgleichung linear ist und bzgl. der Zeit nur erste Ableitungen enthält und bzgl. des Raumes nur zweite Ableitungen, ist für jede Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u(x,t)$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ eine Lösung. Dieses sogenannte Skalenverhalten legt nahe, nach Lösungen zu suchen, die nur von $\frac{|x|^2}{t}$ abhängen.

Wir wollen aber den folgenden Ansatz machen:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+.$$

Hier sind α, β Konstanten und $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gesuchte Funktion. Dieser Ansatz läßt sich durch das Skalenverhalten $u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ rechtfertigen. Mit $\lambda t = 1$ erhalten wir $v(y) = u(y,1)$. Mit diesem Ansatz geht die Wärmeleitungsgleichung über in

$$\alpha \cdot t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \triangle v(y) = 0$$

Hier ist $y = \frac{x}{t^\beta}$. Damit diese Gleichung nicht von t abhängt, setzen wir $\beta = \frac{1}{2}$. Dann reduziert sie sich zu

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \triangle v = 0.$$

Wir nehmen jetzt wieder an, dass v nur von $\mid y \mid$ abhängt, machen also jetzt den Ansatz $u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} w\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$. Dann erhalten wir:

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0$$

Hier ist $r = \frac{|x|}{\sqrt{t}}$. Wenn wir $\alpha = \frac{n}{2}$ setzen können wir die Gleichung einmal integrieren:

$$\left(r^{n-1} w'\right)' + \frac{1}{2}\left(r^n w\right)' = 0 \qquad\qquad r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a.$$

Wenn w und w' im Unendlichen verschwinden gilt $a = 0$.

$$w' = -\frac{1}{2} r w. \quad w = b \cdot e^{\frac{-r^2}{4}}.$$

Wieder wählen wir die Integrationskonstanten a und b so, dass sich eine Fundamentallösung ergibt.

Definition 4.1. *Die Funktion*

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \textit{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Lemma 4.2. *Für alle $t > 0$ gilt* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) d^n x = 1.$

Beweis: $$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} d^n x = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} d^n x = \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = 1.$$ **q.e.d.**

Die Fundamentallösung ist also eine Art Mollifier auf dem $\mathbb{R}$, so dass wir erwarten können, dass die Faltung mit $\Phi(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ wie die Identität wirkt.

Satz 4.3. *Sei h eine beschränkte stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und*

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)h(y)d^ny. \qquad \text{Dann ist}$$

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$

(ii) $\dot{u} - \triangle u = 0$ *auf* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} u(x,t) = h(x)$

Beweis: Weil $\Phi(x,t)$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ undendlich of differenzierbar ist, und wegen dem vorangehenden Lemma und der Beschränktheit von h, ist $u(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ wohl definiert und stetig. Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß auch alle partiellen Ableitungen von Φ für alle $t \in \mathbb{R}^+$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen, also integrierbar sind. Dann ist aber auch u unendlich oft differenzierbar. Wegen der Stetigkeit von h gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\mid h(x) - h(y) \mid < \epsilon$ für alle $\mid x - y \mid < \delta$ gilt. Dann gibt es aber auch ein $T > 0$, so dass für alle $t < T$ $\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \Phi(y,t)d^ny < \epsilon$ gilt. Dann erhalten wir aber für alle $t < T$: $\mid u(x,t) - h(x) \mid \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(h(y)-h(x))d^ny \\
&\leq \int\limits_{B(x,\delta)} \Phi(x-y,t) \mid h(y)-h(x) \mid d^ny + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\delta)} \Phi(x-y,t)(h(y)-h(x))d^ny \\
&\leq \epsilon + 2\epsilon \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mid h(x) \mid .
\end{aligned}$$

Also konvergiert $u(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ punktweise gegen $h(x)$. Die Behauptung (ii) folgt, weil $\Phi(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ löst. **q.e.d.**

Als Distributionen (und sogar als Maß) konvergiert $\Phi(x,t)$ im Grenzwert $t \to 0$ also gegen die Dirac'sche δ-Funktion. Wir erkennen an dieser Lösung des Anfangswertproblems, dass sich Störungen mit unendlicher Geschwindikeit ausbreiten.

4.2 Inhomogenes Problem.

Im letzten Abschnitt hatten wir eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \quad \text{und} \quad u(x,0) = h(x)$$

konstruiert. Duhamel's Prinzip ist ein Verfahren, um aus der Lösung des homogenen Anfangswertproblems eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu gewinnen. Sei $u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y dt$. Dann haben wir formal:

$$\begin{aligned}
\dot{u} - \triangle u &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,0) f(y,s) d^n y \\
&+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\dot{\Phi}(x-y,t-s) - \triangle_x \Phi(x-y,t-s)\Big) f(y,s) d^n y dt \\
&= f(y,s).
\end{aligned}$$

Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems 4.4. . *Sei f eine zweimal stetig und beschränkt differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Dann ist*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds$$

eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = f \ \textit{auf}\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \ \textit{und} \qquad\qquad \lim_{t\to 0} u(x,t) = 0.$$

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, dass

$$v(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y$$

auf $\mathbb{R}^n \times (s,\infty)$ das Anfangswertproblem $\dot{v} - \triangle v = 0$ mit $\lim\limits_{t\to s} v(x,t) = f(x,t)$ erfüllt. Also ist v auf $\mathbb{R}^n \times [s,\infty)$ stetig. Sei $u_\epsilon(x,t) = \int\limits_0^{t-\epsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) d^n y ds$. Dann gilt

$$\dot{u}_\epsilon(x,t) - \triangle u_\epsilon(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y,\epsilon) f(y,t-\epsilon) d^n y$$

Also gilt $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \dot{u}_\epsilon - \triangle u_\epsilon = f$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Andererseits gilt aber

$$u_\epsilon(x,t) = \int\limits_\epsilon^t \Phi(y,s) f(x-y,t-s) d^n y ds.$$

dann folgt aber aufgrund der Voraussetzungen an f, dass auch gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \dot{u}_\epsilon(x,t) - \triangle u_\epsilon(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \triangle\right) \lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \triangle\right) u(x,t).$$

Aufgrund der Stetigkeit von v gilt aber $u(x,0) = 0$. **q.e.d.**

Zusammen ergeben die beiden letzten Aussagen eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = f \qquad u(x,0) = h(x)$$

$$u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y,t)h(y)d^n y \qquad + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)d^n y ds.$$

4.3 Mittelwerteigenschaft

Die Fundamentallösung $\Phi(x,t)$ kann wieder dazu bentutzt werden, um die Werte von $u(x,t)$ als Mittelwert auf einen "Ball" zu berechnen. Allerdings müssen wir den Ball an die neue Gleichung anpassen.

Definition 4.5. *Für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und alle $r > 0$ sei*

$$E(x,t,r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{(4\pi)^{n/2}(t-s)^{n/2}}{r^n} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \left(\frac{r^2}{4(t-s)}\right)^{n/2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\mid x-y \mid^2}{4(t-s)}) \leq \frac{n}{2}(2\ln(r) - \ln(4(t-s)) - \ln(\pi)) \\
&\Leftrightarrow \quad \mid x-y \mid^2 \leq 2(t-s)n(2\ln(r) - \ln(t-s) - \ln(4\pi))
\end{aligned}$$

Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung 4.6. *Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $(x,t) \in \Omega$ und $r > 0$ mit $E(x,t,r) \subset \Omega$*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(x,t,r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} d^n y ds.$$

Beweis: Aufgrund der Translationsinvarianz können wir $(x,t) = (0,0)$ annehmen. Jetzt definieren wir

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \frac{1}{r^n} \int\limits_{E(0,0,r)} u(y,s) \frac{\mid y \mid^2}{s^2} d^n y ds = \\ &= \int\limits_{E(0,0,1)} u(ry, r^2 s) \frac{\mid y \mid^2}{s^2} d^n y ds.\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \int\limits_{E(0,0,1)} \left(\frac{|y|^2}{s^2} y \cdot \nabla u + 2r\dot{u} \frac{y^2}{s} \right) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} \frac{|y|^2}{s^2} y \cdot \nabla u d^n y ds + \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} 2\dot{u} \frac{\mid y \mid^2}{s} d^n y ds\end{aligned}$$

Sei jetzt $\psi = -\frac{n}{2} \ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \ln r$. Dann verschwindet ψ auf dem Rand von $E(0,0,r)$, weil $\Phi(y,-s) = r^{-n}$ gilt auf $\partial E(0,0,r)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} 2\dot{u} \frac{\mid y \mid^2}{s} d^n y ds &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} 4\dot{u} y \cdot \nabla \psi d^n y ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} (4n\dot{u}\psi + 4\psi y \cdot \nabla \dot{u}) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} (-4n\dot{u}\psi + 4\dot{\psi} y \cdot \nabla u) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} \left(-4n\dot{u}\psi + 4 \left(-\frac{n}{2s} - \frac{\mid y \mid^2}{4s^2} \right) y \nabla u \right) d^n y ds\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} \left(-4n \triangle u \psi - \frac{2n}{s} y \cdot \nabla u \right) d^n y ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{E(0,0,r)} \left(4n \nabla u \cdot \nabla \psi - \frac{2n}{s} y \cdot \nabla u \right) d^n y ds = 0.\end{aligned}$$

Also ist ϕ konstant. Weil aber u stetig ist und

$$\frac{1}{r^n} \int\limits_{E(0,0,r)} \frac{|\ y\ |^2}{s^2} d^n y ds = \int\limits_{E(0,0,1)} \frac{|\ y\ |^2}{s^2} d^n y ds = 4$$

gilt, folgt $\lim\limits_{r \mapsto 0} \phi(r) = 4u(0,0)$. **q.e.d.**

4.4 Maximumprinzip

Für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir als den parabolischen Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$. Der parabolische Rand $\partial\Omega_T$ von Ω_T ist dann definiert als $\bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$. Er besteht also aus $\partial\Omega \times (0,T] \cup \Omega \times 0$ und erhhält keine inneren Punkte von Ω zur Zeit $t = T$.

Starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung 4.7. *Sei Ω zusammenhängend Sei u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_t$ fortsetzen läßt. Wenn es einen Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ gibt, an dem u das Maximum annimmt, dann ist u konstant auf Ω_T.*

Beweis: Sei (x_0, t_0) ein Punkt von Ω_T, an dem u das Maximum annimmt. Dann gibt es ein r, so dass $E(x_0, t_0, r) \subset \Omega_T$ liegt. Aufgrund der Mittelwerteigenschaften muss u dann auf $E(x_0, t_0, r)$ konstant sein. Also ist das Menge, auf der u gleich $u(x_0, t_0)$ ist, abgeschlosen und offen. Weil aber Ω_T zusammenhängend ist, ist es ganz Ω_T. **q.e.d.**

Schwaches Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung 4.8. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Sei u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_t$ fortsetzen läßt. Dann nimmt u das Maximum auf dem parabolischen Rand an.* **q.e.d.**

Daraus läßt sich wieder die Eindeutigkeit von bestimmten Randwertproblemen folgern:

Eindeutigkeit des Randwertproblems 4.9. *Sei Ω ein beschränktes zusammenhängendes offenes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Dann existiert höchstens eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung auf Ω_T, die sich stetig auf $\bar{\Omega}_T$ fortsetzen läßt und auf $\partial\Omega_T$ gleich einer gegebenen Funktion g ist.*

Beweis: Wir wenden das Maximumprinzip auf die Differenz zweier Lösungen an. **q.e.d.**

Wir wollen jetzt auch die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems auf dem $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ zeigen. Dazu müssen wir, wie bei dem Poissonproblem, ein Abfallverhalten im Unendlichen fordern.

Maximumprinzip für das Chauchyproblem 4.10. *Sei h eine beschränkte stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und u eine Lösung auf $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ des Anfangwertproblems*

$$u_t - \triangle u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,T) \qquad u(x,0) = h(x) \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{0\},$$

die das Wachstumsverhalten $\quad u(t,x) \leq Ae^{a|x|^2} \quad$ *auf* $\quad \mathbb{R}^n \times [0,T]$
mit Konstanten $A, a > 0$ hat, dann gilt $\quad \sup\limits_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} h.$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $4aT < 1$ gilt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $4a(T + \epsilon) < 1$. Offensichtlich ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mu > 0$ die Funktion $v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}}$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, T+\epsilon)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Also können wir das Starke Maximumprinzip auf alle Gebiete der Form $\Omega_T = B(y,r) \times (0,T]$ anwenden. Aufgrund der Voraussetzung an u ist sowohl u als auch h durch $Ae^{a|x|^2}$ beschränkt. Weil aber $\frac{1}{4(T+\epsilon-t)} > a$ gilt für $t > 0$, gibt es ein $R > 0$, so dass für alle $r > R$ auf $\partial\Omega_T = B(y,r) \times \{0\} \cup \partial B(y,r) \times (0,T]$ gilt $v(x,t) \leq \sup\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dann folgt aber aus dem Schwachen Maximumprinzip $v(x,t) \leq \sup\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$. Weil aber $\mu > 0$ beliebig war gilt das auch für $\mu = 0$. Wenn $4aT \geq 1$ gilt zerlegen wir das Zeitintervall $[0,T]$ in solche Teilintervalle, für die $4aT_i \geq 1$ gilt. **q.e.d.**

Eindeutigkeit des Anfangswertproblems 4.11. *Sei $h \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Dann gibt es höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{u} - \triangle u = f \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,T) \qquad u = h \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

die folgenden Wachstumsverhalten hat:

$$| u(x,t) | \leq \quad Ae^{a|x|^2} \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

Beweis: Wir wenden das Maximumprinzip für das Chauchyproblem auf die Differenzen zweier Lösungen an. **q.e.d.**

Ähnlich wie bei der Laplacegleichung läßt sich die Eindeutigkeit des Randwertproblemes 4.9 und des Anfangswertrpoblemes 4.11 auch mit Hife einer Monotonie eines Energiefunktionals zeigen. Sei

$$e(t) = \int\limits_{\Omega} u^2(x,t) d^n x.$$

Wenn u die homogene Wärmeleitungsgleichung erfüllt und am Rand von Ω verschwindet, dann ist diese Funkional in Abhängigkeit von t monoton fallend:

$$\dot{e}(t) = 2\int\limits_{\Omega} u(x,t)\dot{u}(x,t) d^n x = 2\int\limits_{\Omega} u(x,t)\triangle u(x,t) d^n x = -2\int\limits_{\Omega} (\nabla u)^2(x,t) d^n x \leq 0.$$

Wenn also $u(x,t)$ für $t = 0$ verschwindet, muss u identisch verschwinden. Allerdings gilt dieses Argument nur für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, die mit ihren ersten Ableitungen quadratintegrabel sind.

4.5 Wärmeleitungskern

In Analogie zu der Greenschen Funktion der Lapacegleichung definieren wir für offene Gebiete Ω einen Wärmeleitungskern H_Ω.

Definition 4.12. *Sei Ω ein offenens Gebiet im $\mathbb{R}^n$, Dann heisst $H_\Omega : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ Wärmeleitungskern von Ω, wenn H_Ω folgende Eigenschaften hat.*

(i) *$H_\Omega(x,y,t) = 0$ für $y \in \partial\Omega$.*

(ii) *$H_\Omega(x,y,t) - \Phi(x-y,t)$ setzt sich stetig auf $(x,y,t) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+$ zu einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung fort, die auf $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \{0\}$ verschwindet.*

Lemma 4.13. *Sei Ω ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und u und v zwei relle Funktionen mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega u(x,t)(\dot{v}(x,T-t) + \triangle v(x,T-t))d^n x dt \\
+ &\int_0^T \int_\Omega (\dot{u}(x,t) - \triangle u(x,t))v(x,T-t)d^n x dt = \\
&\int_0^T \int_{\partial\Omega} (u(y,t)\nabla_y v(y,T-t) - \nabla_y u(y,t)v(y,T-t))N(y)d\sigma(y)dt \\
+ &\int_\Omega (u(x,T)v(x,0) - u(x,0)v(x,T))d^n x.
\end{aligned}$$

Beweis: Eine partielle Integration bzgl. t von den beiden zeitlichen Ableitungen ergibt als die Randterme die Integrale über Ω und der Gaußsche Satz ergibt für die zweiten räumlichen Ableitungen die Integrale über $\partial\Omega$ **q.e.d.**

Setzen wir $H_\Omega(x,y,t)$ ein und benutzen die entsprechenden Eigenschaften, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (\dot{u}(y,t) - \triangle u(y,t)) H_\Omega(x,y,T-t) d^n y dt = \\
&= \int_0 \int_{\partial\Omega} u(z,t) \nabla_z H_\Omega(x,z,T-t) N(z) d\sigma(z) dt \\
&+ \ u(x,T) - \int_\Omega u(y,0) H_\Omega(x,y,T) d^n y \\
\Rightarrow u(x,T) &= \int_0^T \int_\Omega (\dot{u}(y,t) - \triangle u(y,t)) H_\Omega(x,y,T-t) d^n y dt \\
&- \int_0^T \int_{\partial\Omega} u(z,t) \nabla_z H_\Omega(x,z,T-t) N(z) d\sigma(z) dt \\
&+ \int_\Omega u(y,0) H(x,y,T) d^n y.
\end{aligned}$$

Lösung des Anfangswert und Randwertproblemes 4.14. *Seien f eine Funktion auf $\Omega \times (0,T)$, g eine Funktion auf $\partial\Omega \times [0,T]$ und h eine Funktion auf Ω mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften, so dass alle auftauchenden Integrale absolut konvergieren. Dann ist*

$$\begin{aligned}
u(x,T) &= \int_0^T \int_\Omega f(y,t) H_\Omega(x,y,T-t) d^n y dt \\
&- \int_0^T \int_{\partial\Omega} g(z,t) \nabla_z H_\Omega(x,z,T-t) N(z) d\sigma(z) dt \\
&+ \int_\Omega h(y) H(x,y,T) d^n y
\end{aligned}$$

die eindeutige Lösung des Anfangs- und Randwertproblemes.

$$\dot{u} - \triangle_u = f \ \mathit{auf}\, \Omega \times (O,T) \qquad u = g \ \mathit{auf}\, \partial\Omega \times [0,T] \qquad u(x,t) = h(x) \ \mathit{auf}\, \Omega$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass der Wärmeleitungskern symmetrisch ist.

Lemma 4.15. *Für alle $T > 0$ und $x, y \in \bar{\Omega}$ gilt $H_\Omega(x, y, T) = H_\Omega(y, x, T)$.*

Beweis: Setze die Funktionen $u(z, t) = H_\omega(x, z, t)$ und $v(z, t) = H_\Omega(t, z, t)$ in Lemma 4.13 ein. Dann erhalten wir wegen der Eigenschaft (ii) und Satz 4.3 (iii)

$$0 = \int_\Omega (H_\Omega(x, z, T)H(y, z, 0) - H_\Omega(x, z, 0)H(y, z, T))d^n z = H_\Omega(x, y, T) - H_\Omega(y, x, T).$$

q.e.d.

Dann folgt aus der Definiton des Wärmeleitungskernes die Aussage für $f = 0$ und $g = 0$.

Als nächstes wollen wir diese Aussage auf das inhomogene Anfangswertproblem verallgemeinern:

$$u(x, T) = \int_0^T \int_\Omega H_\Omega(x, y, T - t)f(y, s)d^n y ds$$

ist eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblemes.

$$\dot{u} - \triangle u = f \text{ auf } \Omega \times (0, T) \qquad u(x, 0) = 0 \text{ auf } \Omega \qquad u(x, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T].$$

Wir haben bereits gezeigt, dass $$v(x, T) = \int_\Omega H_\Omega(x, y, T - t)f(y, t)d^n y$$

das Anfangswertproblem

$$\dot{v} - \triangle v = 0 \text{ auf } \Omega \times (t, \infty) \quad v(x, t) = \text{ auf } f(x, t)\Omega \quad v(x, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0, \infty]$$

löst. Wenn jetzt f solche Regularitätseigenschaften hat, dass die entsprechende Funktion sich stetig auf $\bar{\Omega} \times [0, T]$ fortsetzen lassen, dann erfüllt u das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(x, t) - \triangle u(x, t) = f \text{ auf } \Omega \times (0, T) \quad u(x, 0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T].$$

Zuletzt betrachten wir auch inhomogene Randwertprobleme. Gesucht ist eine Lösung des Randwertproblems

$$\dot{u}(x, t) - \triangle u(x, t) = 0 \text{ auf } \Omega \times (0, T) \quad u(x, 0) = 0 \text{ auf } \Omega \quad u(x, t) = g \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T].$$

Für eine beliebige Funktion g auf $\partial\Omega \times [0, T]$ mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften, setzen wir zunächst g auf $\Omega \times [0, T]$ fort. Von dieser Fortsetzung $\tilde{u}$ ziehen wir die Lösung zu $f = \dot{\tilde{u}} - \triangle\tilde{u}$ und $h(x) = \tilde{u}(x, 0)$ ab und erhalten dann eine Lösung des gewünschten Randwertproblemes. **q.e.d.**

Die erforderlichen Regularitätseigenschaften hängen von der Greenschen Funktion und damit von dem Gebiet Ω ab. Bevor wir aber diese Aussagen über Anfangswert– und Randwertprobleme auf bestimmte Gebiete anwenden, wollen wir noch zeigen dass für alle beschränkten Gebiete aus dem Maximumprinzip folgt, dass die entsprechenden Wärmeleitungskerne positive sind. Offensichtlich ist der freie Wärmeleitungskern $\Phi(x-y,t)$ auf dem Gebiet $\mathbb{R}^n$ positiv. Für alle Gebiete Ω ist aber für festes $x \in \Omega$ der entsprechenden Wärmeleitungskern $H_\Omega(x,y,t)$ die Differenz von $\Phi(x-y,t)$ minus der eindeutigen Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\Omega \times [0,T]$, die auf $\Omega \times \{t=0\}$ verschwindet und auf $\partial\Omega \times [0,T]$ mit $\Phi(x-y,t)$ übereinstimmt. Für sehr kleine ϵ ist also diese Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\Omega \times \{t=\epsilon\}$ und auf $\partial\Omega \times [0,T]$ kleiner oder gleich $\Phi(x-y,t)$. Dann folgt aber aus dem Maximumprinzip, dass der Wärmeleitungskern positiv ist.

4.6 Wärmeleitungskern von S^1

Wir identifizieren den Kreis S^1 mit dem Quotientenraum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Die Eigenfunktion von $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sind gegeben durch $\psi_k = e^{2\pi ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenwerten $4\pi^2k^2$. Diese Eigenfunktionen bilden offenbar eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Deshalb besitzt der Wärmeleitungskern von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ den Integralkern:

$$\begin{aligned}H_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x,y,t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx}e^{-2\pi iky}e^{-\frac{\pi^2k^2}{t}} = \Theta(x-y,4\pi it) \text{ mit}\\ \Theta(x,\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx}e^{\pi i\tau k^2}.\end{aligned}$$

Hier ist $\Theta(x,\tau)$ Jacobi's Thetafunktion. Die Summe konvergiert auf dem Gebiet $(x,\tau) \in \mathbb{C} \times \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\}$ gegen eine holomorphe Funktion, weil dann $e^{\pi ik^2}$ mit $|k|^2$ exponentiall abfällt. Sie ist im wesentlichen charakerisiert durch die Eigenschaften

$$\Theta(x+1,\tau) = \Theta(x,\tau) \qquad \Theta(x+\tau,\tau) = \Theta(x,\tau)e^{-\pi i\tau}e^{-2\pi ix}$$

$$\Theta(x,\tau) = 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{1}{2} + \tau/2 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau.$$

Die erste und dritte Eigenschaften folgen sofort aus der Definition als unendliche Reihe. Für die zweite Eigenschaft berechnen wir

$$\begin{aligned}\Theta(x+\tau,\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ik(x+\tau)}e^{\pi ik^2\tau} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx}e^{\pi i(k+1)^2\tau}e^{-\pi i\tau}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(k+1)x}e^{\pi i(k+1)^2\tau}e^{-2\pi ix}e^{-\pi i\tau}\\ &= \Theta(x,\tau)e^{-2\pi ix}e^{-\pi i\tau}\end{aligned}$$

4.7 Wärmeleitungskern von $[-1,1]$

Die Abbildung $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ bildet das Intervall $[-1,1]$ auf das Intervall $[0,1]$ ab. Also sind die Eigenfunktionen von $-\frac{d^2}{dx^2}$ auf $[-1,1]$ mit Dirichletrandbedingungen gegeben durch

$$\psi_k = \sin\left(\pi k\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \qquad k \in \mathbb{N}$$

Diese Funktionen bilden wieder eine Orthonormalbasis

$$\int_{-1}^{1} \sin\left(\pi k\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \sin\left(\pi k'\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos\left(\pi(k-k')\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos\left(\pi(k+k')\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) dx = \delta_{k,k'}$$

Also ist der Wärmeleitungskern gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{[-1,1]}(x,y,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-\pi^2k^2t}{4}} \sin\left(\pi k\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\sin\left(\pi k\left(\frac{y+1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-\pi^2k^2t}{4}} \left(\cos\left(\pi k\frac{x-y}{2}\right) - \cos(\left(\pi k\frac{x+y}{2}+1\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\Theta\left(\frac{x-y}{4}, \frac{\pi i t}{4}\right) - \frac{1}{4}\Theta\left(\frac{x+y}{4}+\frac{1}{2}, \frac{\pi i t}{4}\right). \end{aligned}$$

Damit ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \text{ auf } \quad (0,1) \qquad\qquad u(x,0) = h(x) \text{ auf } \quad [0,1]$$

gegeben durch $$u(x,t) = \int_{-1}^{1} H_{[-1,1]}(x,y,t)h(y)dy.$$

Der Wärmeleitungskern eines kartesischen Produktes läßt sich einfach aus den beiden entsprechenden Wärmeleitungskernen berechnen:

Lemma 4.16. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene zusammenhängende Gebiete mit den entsprechenden Wärmeleitungskernen H_Ω und $H_{\Omega'}$. Dann ist der Wärmeleitungskern des kartesischen Produktes gegeben durch*

$$H_{\Omega\times\Omega'}((x,x'),(y,y'),t) = H_\Omega(x,y,t)H_{\Omega'}(x',y',t) \quad (x,x'),(y,y') \in \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}' \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis: Offensichtlich ist der Laplaceoperator des kartesischen Produktes einfach die Summe der beiden entsprechenden Laplaceoperatoren. Dann folgt aber sofort, dass auf allen Funktionen auf $\Omega \times \Omega'$, die sich als ein Produkt von zwei Funktionen auf Ω und Ω' schreiben lassen, dass das Produkt der entsprechenden Wärmeleitungekserne erstens das Anfangswertproblem löst und außerdem die richtigen Randbedingungen hat. Wegen dem Satz von Bolzano Weierstraß liegen aber für kompakte $\bar{\Omega}$ und $\bar{\Omega}'$ die Summen aller Funktionen auf $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}'$ dicht in allen stetigen Funktionen. Damit folgt das Lemma für kompakte Gebiete $\bar{\Omega}$ und $\bar{\Omega}'$. Für nicht kompakte Gebiete hat das Produkt aber auch die richtigen Eigenschaften auf allen Funktionen mit kompaktem Träger. Diese sind aber wiederum dicht in den stetigen Funktionen. **q.e.d.**

Damit haben wir also die Wärmeleitungekerne von allen Tori $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ und allen Quadern $[-1,1]^n$ berechnet. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} - \triangle u = 0 \text{ auf } [-1,1]^n \quad u(x,0) = h(x) \text{ auf } [-1,1]^n \quad u(x,t) = 0 \quad \text{ auf } \partial[-1,1]^n \times [0,T]$$

ist also gegeben durch
$$u(x,t) = \int\limits_{[-1,1]^n} \Pi_{i=1}^n H_{[-1,1]}(x_i, y_i, t) h(y) d^n y.$$

Korollar 4.17. *Sei $u(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem Gebiet $[-r,r]^h \times [0,T]$. Dann gilt*

$$u(x,T) = \int\limits_0^T \int\limits_{\partial[-r,r]^n} u(z,t) \nabla_z H_{[-r,r]^n}(x,z,t) N(z) d\sigma(z) dt + \int\limits_{[-r,r]^n} u(y,0) H_{[-r,r]^n}(x,y,t) d^n y.$$

q.e.d.

Es gilt aber
$$H_{[-r,r]^n}(x,y,t) = \frac{1}{r^n} \prod_{i=1}^n H[-1,1]\left(x_i/r, y_i/r, t/r^2\right).$$
Weil aber dieser Wärmeleitungskern analytisch ist, folgt sofort

Korollar 4.18. *Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf einem offenen Gebiet in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dann ist u analytisch.* **q.e.d.**

Kapitel 5

Wellengleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir die homogene und inhomogene Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f$ auf Teilgebieten von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Es ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Matrix der zweiten Ableitung hat aber im Gegensatz zur Laplacegleichung die Signatur $(1, n)$, ist also weder positiv noch negativ definit. Solche Differentialgleichungen werden hyperbolisch genannt. Ihr Lösungsverhalten unterscheidet sich deutlich von dem Lösungsverhalten von elliptischen Gleichungen. Sie beschreiben in der Physik solche Effekte, die sich nur mit endlicher Geschwindigkeit in Raum und Zeit ausbreiten, wie z.B. elektromagnetische Wellen und Gravitationswellen.

5.1 D'Alembert's Formel für $n = 1$

Wir wollen zunächst das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{auf} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x).$$

lösen, wobei g und h gegebene Funktionen sind. Weil wir diese Differentialgleichung als ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem von vektorwertigen Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit auffassen können, ist aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zu erwarten, dass jedes solches Anfangswertproblem genau eine Lösung besitzt.

Im eindimensionalen Fall faktorisiert der Wellenoperator (oder auch d'Alembertoperator)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Sei also

$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

Dann erfüllt v die lineare Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Das ist eine Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten, die die eindeutige Lösung

$$v(x,t) = a(x-t) \quad \text{mit} \quad a(x) = v(x,0)$$

besitzt. Also erfüllt $u(x,t)$ die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = a(x-t).$$

Diese inhomogene Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds \quad + \quad b(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy \quad + \quad b(x+t). \end{aligned}$$

mit $b(x) = u(x,0)$. Die Anfangsbedingungen $u(x,0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$ ergeben also $b(x) = g(x)$ und

$$a(x) = v(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = h(x) - g'(x).$$

Setzen wir das in unsere Lösungen ein, so erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y))\, dy + g(x+t)$$

Also ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Also können wir aus der Lösung der homogenen und inhomogenen Transportgleichung die d'Alembertsche Formel bestimmen:

d'Alembertsche Formel 5.1. *Sei g eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und h eine einmal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ und eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad &auf \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = g(x) \qquad &und \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x). \end{aligned}$$

An der d'Alembertschen Formel können wir erkennen, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung für $n = 1$ sich schreiben lässt als

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t).$$

Umgekehrt ist auch jede Funktion dieser Form eine Lösung der Wellengleichung. Das liegt daran, dass der Wellenoperator faktorisiert in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

deren Lösungen gerade allgemeine Funktionen $F(x+t)$ und $G(x-t)$ sind.

Außerdem sind die Lösungen des Anfangswertproblems genau dann k-mal stetig differenzierbar, wenn g k-mal stetig differenzierbar ist und h $(k-1)$-mal. Die Regularität dieses Anfangswertproblems verbessert sich also nicht mit zunehmender Zeit, im Gegensatz zu der Wärmeleitungsgleichung. An der d'Alembertschen Formel folgt aber mit Hilfe einer Spiegelung auch die Lösung folgendes Anfangswertproblems: Gesucht ist die Lösung u der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ auf $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, die $u(x,0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \quad x \in \mathbb{R}_0^+$ erfüllt und $u(0,t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$. Wir können u, g und h als ungerade Funktionen auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ausdehnen durch:

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{für } x \geq 0 \\ -u(-x,t) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -h(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Dann löst $\tilde{u}(x,t)$ genau dann das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{g}(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0) = \tilde{h}(x)$$

wenn u das obige Anfangswertproblem löst. Weil die Funktionen $\tilde{u}$, $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ ungerade sind bezüglich x, verschwindet für $x < t$ das erste Integral auf der rechten Seite von

$$\int\limits_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy = \int\limits_{x-t}^{t-x} \tilde{h}(y)dy + \int\limits_{t-x}^{t+x} \tilde{h}(y)dy.$$

Also ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy \right) & \text{für } 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{2}\left(g(t+x) - g(t-x) + \int\limits_{t-x}^{t+x} h(y)dy \right) & \text{für } 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Zu beachten ist hierbei, dass auf den Rand bei $x = 0$ zulaufende Wellen am Rand refelktiert werden und wieder zurücklaufen.

5.2 Sphärische Mittelwerte in der Wellengleichung

Wir werden jetzt sehen, dass die sphärischen Mittelwerte der Wellengleichung eine Differentialgleichung erüllen, die wir später lösen wollen und daraus die allgemeine Lösung folgenden Anfangswertproblems ableiten wollen: Gesucht ist die Lösung u der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0$ auf $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, die $u(x,0) = g(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = h(x)$ erfüllt. Sei also für alle $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, r > 0$

$$U(x,r,t) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y,t)d\sigma(y) = \fint\limits_{\partial B(x,r)} u(y,t)d\sigma(y).$$

Hier bezeichnet das Symbol $⨍$ den Mittelwert auf dem Gebiet Ω, also das Integral über das Gebiet Ω geteilt durch das Volumen von Ω. Analog definieren wir

$$\begin{aligned} G(x,t) &= ⨍_{\partial B(x,r)} g(y)d\sigma(y) \quad \text{und} \\ H(x,t) &= ⨍_{\partial B(x,r)} h(y)d\sigma(y). \end{aligned}$$

Lemma 5.2. *Wenn $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_o^+)$ eine m-mal stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t} - \triangle u = 0 && \textit{auf} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ && \textit{mit} \\ &u(x,0) = g(x) && \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) && \textit{ist,} \end{aligned}$$

dann ist für festes $x \in \mathbb{R}^n$ das sphärische Mittel $U(x,r,t)$ eine m-mal differenzierbare Funktion auf $(r,t) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, die folgendes Anfangswertproblem der Euler-Poisson-Darbouxgleichung löst:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t) - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) - \frac{n-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) = 0 \quad \textit{auf} \quad (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$U(x,r,0) = G(x,r) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,r,0) = H(x,r)$$

Beweis: Es gilt:

$$U(x,r,t) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(r \cdot y + x, t) d\sigma(y).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla_x u(r \cdot y + x, t) \cdot y d\sigma(y) \\ &= \frac{r}{n\omega_n} \int_{B(0,1)} \triangle_x u(ry + x, t) d^n y \\ &= \frac{r}{n} ⨍_{B(x,t)} \triangle u(y,t) d^n y. \end{aligned}$$

Also gilt insbesondere $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t)=0$.
Analog gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{B(x,r)}\triangle u(y,t)d^n y \\
&= \frac{1-n}{n\omega_n r^n}\int\limits_{B(x,r)}\triangle u(y,t)d^n y + \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{\partial B(x,r)}\triangle u(y,t)d\sigma(y). \\
&= \left(\frac{1}{n}-1\right)\fint\limits_{B(x,r)}\triangle u(y,t)d^n y + \fint\limits_{\partial B(x,r)}\triangle u(y,t)d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Deshalb ist $\lim\limits_{r\to 0}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t)=\frac{1}{n}\triangle u(x,t)$. Analog lässt sich auch zeigen, dass sich die höheren Ableitungen stetig auf $r\to 0$ fortsetzen lassen. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{B(x,t)}\triangle u(y,t)d^n y \\
&= \frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{\partial B(x,t)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y,t)d\sigma(y) \\
&= r^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t).
\end{aligned}$$

Dann folgt aber
$$r^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=(n-1)r^{n-2}\frac{\partial U}{\partial r}+r^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$
q.e.d.

5.3 Lösung für $n = 3$

Es wird sich herausstellen, dass die Wellengleichung für ungerade Dimensionen sich durch die sphärischen Mittel auf die eindimensionale Wellengleichung zurückführen lassen, aber nicht für gerade Dimensionen. Deshalb wollen wir als nächstes die dreidimensionale Wellengleichung lösen.

In diesem Fall müssen wir das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}=0 \quad \text{auf} \quad (r,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$$

$$U=G \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial t}=H \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^+\times\{t=0\}.$$

lösen. Die Transformation $\tilde{U} = rU$ überführt es in das Anfangswertproblem
$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} = 0$ auf $(r,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \tilde{G} = rG \qquad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \tilde{H} = rH \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{auf} \quad \{r = 0\} \times \mathbb{R}_0^+. \end{aligned}$$

Dieses Anfangswertproblem haben wir aber schon gelöst. Die Lösung ist für $0 \leq r \leq t$.

$$\tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{G}(x, r+t) - \tilde{G}(x, t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(x,y)dy$$

Wegen der Stetigkeit von $u(x,t)$ gilt aber

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} U(x,r,t) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{r}.$$

Also erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{G}(x,t+r) - \tilde{G}(x,t-r)}{r}\right) && + \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)dy \\ &= \tilde{G}'(x,t) && + \tilde{H}(x,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} g(y)d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)d\sigma(y) \\ &= \fint_{\partial B(x,t)} (th(y) + g(y))\, d\sigma(y) && + t \fint_{\partial B(x,t)} \nabla_y g(y)\cdot(y-x)d\sigma(y) \end{aligned}$$

Das ist die sogenannte Kirchhoff'sche Formel für das Anfangswertproblem der Wellengleichung in drei Dimensionen.

5.4 Lösung für $n = 2$

Für $n = 2$ lässt sich die Euler-Poisson-Darbouxgleichung nicht in die eindimensionale Wellengleichung überführen. Stattdessen wollen wir das Anfangswertproblem der Wellengleichung für $n = 2$ als ein Anfangswertproblem der Wellengleichung für $n = 3$

auffassen, wobei die Anfangsdaten dann nur von den Koordinaten x_1 und x_2 und nicht von der Koordinate x_3 abhängen: Sei also $\bar{u}(x,t)$ auf $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(x,t)}{\partial t^2} - \triangle \bar{u}(x,t) = 0 \quad \text{auf} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$$

und $\bar{u}(x,0) = g(\bar{x})$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x,0) = h(\bar{x})$ wobei $\bar{x} = (x_1, x_2)$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Der Mittelwert über $\partial B(x,r)$ einer Funktion f, die nur von $\bar{x}$ abhängt, hängt auch nur von $\bar{x}$ ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \fint_{\partial B(x,r)} f(y) d\sigma(y) = \frac{\partial}{\partial x_3} \fint_{\partial B(0,r)} f(x+y) d\sigma(y) = \fint_{\partial B(0,r)} \frac{\partial f(x+y)}{\partial x_3} d\sigma(y) = 0.$$

Also ist $\bar{u}(x,t)$ von der Form $u(\bar{x},t)$ und diese Funktion $u(\bar{x},t)$ ist die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems für $n = 2$. Diese Funktion wollen wir jetzt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) \\ &= \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(\bar{x},t)} g(y) \sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} d^2 y \end{aligned}$$

Hier ist $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - (y - \bar{x})^2}$ als Funktion auf dem zweidimensionalen Ball $B(\bar{x},t)$ die Länge der Koordinate x_3, so dass (y, x_3) auf dem Rand des Balles $B\left((\bar{x},0),t\right)$ liegen.

$$\sqrt{1 + (\nabla_y \gamma(y))^2} = \sqrt{\frac{t^2 - (y-\bar{x})^2 + (y-\bar{x})^2}{t^2 - (y-\bar{x})^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (y-x)^2}}$$

Also haben wir

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y-\bar{x}^2}} d^2 y = \frac{t}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - (y-\bar{x})^2}} d^2 y.$$

Dann erhalten wir für $u(\bar{x},t)$ für alle $(\bar{x},t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
u(\bar{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t} t \fint_{\partial B(x,t)} g(\bar{y}) d\sigma(y) & &+ t \fint_{\partial B(x,t)} h(\bar{y}) d\sigma(y) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{t^2}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}} d^2y & &+ \frac{t^2}{2} \int_{B(\bar{x},t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x}^2}} d^2y \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{2} \fint_{B(0,1)} \frac{g(\bar{x}+tz)}{\sqrt{1-z^2}} d^2z & &+ \frac{t^2}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}} d^2y \\
&= \frac{t}{2} \fint_{B(\bar{x},t)} \frac{g(y)+th(y)+\nabla_y g(y)(y-x)}{\sqrt{t^2-(y-\bar{x})^2}} d^2y.
\end{aligned}$$

Dies ist Poisson's Formel für die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in zwei Dimensionen. Diese Methode, die Lösung des Anfangswertproblems einer niedrigeren Dimension dadurch zu erhalten, dass wir dieses Anfangswertproblem in ein Anfangswertproblem eines höherdimensionalen Raumes verwandeln und dann zeigen, dass die entsprechende Lösung sich in die gesuchte Lösung zurückverwandeln lässt, wird Methode des Abstieges genannt. An dieser Formel können wir aber sofort ablesen, dass sich die Lösung in zwei Dimensionen mit allen Geschwindigkeiten kleiner als 1 ausbreiten, während sie sich in einer und drei Dimensionen nur mit der Geschwindigkeit 1 ausbreiten. Dies legt nahe, dass wir die Lösung in einer Dimension nicht durch die Methode des Abstiegs aus der Lösung in zwei Dimensionen erhalten können. Woran liegt das ? (Übungsaufgabe)

5.5 Inhomogene Wellengleichung

Wieder können wir die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f \qquad &\text{auf} \qquad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\
u(x,0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad &\text{für} \qquad x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

mit Hilfe von Duhamel's Prinzip aus der Lösung des homogenen Wellengleichung erhalten: Sei für alle $s \in \mathbb{R}^+$ $u(x,t,s)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u &= 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\
u(x,s,s) &= 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,s,s) = f(x,s) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Dann ist $u(x,t) = \int\limits_0^t u(x,t,s)ds$ eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit

$$u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,s)ds\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,s)ds \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t,s)ds \\
&= f(x,t) + \int\limits_0^t \triangle u(x,t,s)ds \\
&= f(x,t) + \triangle u(x,t).
\end{aligned}$$

Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f \qquad & \text{auf} \qquad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\
u(x,0) = g(x) \qquad & \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)
\end{aligned}$$

ist dann die Summe von obiger Lösung der inhomogenen Wellengleichung und der Lösung des entsprechenden homogenen Anfangswertproblems. Die Wellengleichung ist offensichtlich invariant unter der Zeitspiegelung $t \to -t$. Deshalb lassen sich aus unseren Formeln für die Lösung des Anfangswertproblems auch solche für das "Endwertproblem"

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f \qquad & \text{auf} \qquad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^- \\
u(x,0) = g(x) \qquad & \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

gewinnen. Wir können also nicht nur von der Gegenwart aus in die Zukunft rechnen, sondern auch zurück in die Vergangenheit. Die erste Lösung wird avancierte Lösung und die zweite retardierte Lösung genannt. Beide Lösungen zusammen ergeben eine Lösung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die nur durch $u(x,0)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ festgelegt sind.

5.6 Energiemethoden

Hyperbolische Gleichungen erfüllen kein Maximumprinzip. Damit nämlich eine Lösung einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Inneren kein Maximum haben kann, darf die Matrix der Ableitungen zweiter Ordnung nicht negativ definiert werden können. Dies wird aber nur durch eine elliptische Differentialgleichung ausgeschlossen. Allerding lassen sich die Energiemethoden auch auf Hyperbolische Differentialgleichungen übertragen und damit die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems zeigen:

Eindeutigkeit der Lösungen der Wellengleichung 5.3. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet. Dann besitzt folgendes Anfangswertproblem der Wellengleichung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u &= f & &\textit{auf}\quad \Omega \times (0,T] \\ u(x,t) &= g & \textit{auf}\quad \Omega \times \{t=0\} \quad \textit{und}\quad &\textit{auf}\quad \partial\Omega \times [0,T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= h & &\textit{auf}\quad \Omega \times \{t=0\} \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung.

Beweis Die Differenz zweier Lösungen muss das analoge homogene Anfangswertproblem lösen mit $f = 0, g = 0$ und $h = 0$. Von einer solchen Lösung definieren wir die Energie

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d^n x.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u(x,t)) \nabla u(x,t) \right) d^n x \\ &= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \triangle u(x,t) \right) d^n x = 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir einmal partiell integriert (den Gauß'schen Satz angewendet). Aufgrund der Anfangsbedingungen erfüllt aber $e(0) = 0$. Also ist $e(t) = 0$ für alle $t > 0$. Dann folgt aber $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und $\nabla u(x,t) = 0$. Also ist u konstant. Dann folgt wieder wegen den Anfangsbedingungen $u = 0$ auf $\Omega \times \mathbb{R}^+$. **q.e.d.**

Zuletzt noch ein einfacher Beweis, dass sich Störungen nur mit Geschwindigkeiten kleiner als 1 ausbreiten

Satz 5.4. *Wenn* $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ *auf* $B(x_0, t_0)$ *bei* $t = 0$. *Dann ist* $u = 0$ *auf dem Kegel* $\{(x,t) \mid |x - x_0| \leq t_0 - t, t > 0\}$.

Beweis Sei

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d^n x$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u(x,t)) \nabla u(x,t) \right) d^n x \\
&- \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) d\sigma(x) \\
&= \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \triangle u(x,t) \right) d^n x \\
&+ \int\limits_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \nabla u(x,t) N(x) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + (\nabla u(x,t))^2 \right) \right) d\sigma(x) \\
&= \int\limits_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \nabla u \right) N - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla u)^2 \right) d\sigma(x)
\end{aligned}$$

Jetzt gilt aber

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) (\nabla u) \cdot N \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla u)^2$$

weil der Normalenvektor n Länge eins hat und mit $a = \nabla u$ und $b = N \frac{\partial u}{\partial t}$ gilt

$$a \cdot b \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2.$$

Also gilt $\dot{e}(t) \leq 0$ und $e(t)$ ist monoton fallend. Dann folgt aus $e(0) = 0$, dass $e(t) = 0$ für $t \in [0, t_0]$. **q.e.d.**

Analog folgt aus $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ auf $B(x_0, t_0)$ für $t = 0$, dann dass $u = 0$ ist auf $\{(x,t) \mid |x - x_0| < t_0 + t, t < 0\}$.