

Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Folien aller Vorlesungen

Peter Parczewski



1. Einführung

Wer redet da?

DR. PETER PARCZEWSKI

Institut für Mathematik
LS Wirtschaftsmathematik II
(Stochastische Numerik)

Hintergrund (Studium/Promotion):

- **Mathematik** (+ Physik + Biologie + Philosophie)

Lehre/Forschung:

- Funktionalanalysis + Monte Carlo Methoden + Klimamodelle

1. Mathematik und Schulmathematik
2. Sätze und Beweise

Mathematik im Studium ist Neuanfang!

Schulmathematik nützlich, aber nicht notwendig!
Rechnen wird vorausgesetzt.

Was eher wichtig wird:

- Denken und Knobeln mögen
- Zusammenhänge verstehen wollen
- Mathematische Sprache:
saubere Begriffe und Argumente!

Wiederholung Schulmathematik:

Nur falls Sie bei sich Defizite sehen, bitte lernen und üben!

- **(MINT BW) Online-Brückenkurs** [▶ Link: Online-Brückenkurs](#)
Schulstoff und noch etwas mehr. Sehr sauber und ausführlich.
Übungen und Tests integriert (Lösungen vorhanden).
- **Uni Mannheim VWL Wiederholungskurs:** [▶ Link: Skript](#)
Skript mit Beispielen, Übungen und Lösungen. Viele Begriffe werden in Ihrem Studium genauer eingeführt.

Hilfreicher: Die in Ihren Vorlesungen verwendete Literatur!

Sätze und Beweise

Satz

Für alle reellen $a, b \geq 0$ gilt die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Beweis.

Für $a, b \geq 0$ existieren $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0$. Für alle reellen x gilt stets $x^2 \geq 0$. Also ist auch $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Umformen ergibt

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$



Satz

Die Kreiszahl π ist irrational.

(Der Beweis ist hier zu lang!)

Typische und wichtigere Sätze im Studium sind Werkzeuge wie:

Satz (Monotone Konvergenz)

Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton steigend und nach oben beschränkt, dann ist sie auch konvergent.

Sätze und Beweise

- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage
d.h. entweder **wahr** oder **falsch** $\rightsquigarrow$ Aussagenlogik
- Der **Beweis** ist logische/schlüssige
Begründung/Argumentation aus Sätzen und Definitionen
- **Logisches Argument: Voraussetzungen/Prämissen** $\rightsquigarrow$
Konklusion
- Eine **Definition** erklärt einen Begriff oder Zusammenhang durch
bereits bekannte Begriffe und Zusammenhänge
- **Mathematik** ist demnach die Tätigkeit, aus Sätzen und
Beweisen, **neue** Sätze und **neue** Beweise zu erzeugen!

2. Aussagenlogik

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann (auch wenn dieser Wahrheitswert unbekannt ist).

Das sind (aussagenlogische) Aussagen :

- $4 > 49/8$
- Es existiert eine Lösung von $x^2 = 42$
- Es gibt unendlich viele Primzahlen

Keine Aussagen:

- Guten Tag!
- $3 + 2 <$
- 42

Für Aussagen A , B sind zusammengesetzte Aussagen:

- A gilt nicht (Nicht A).
- Es gelten A und B .
- Es gelten A oder B (oder beide!).
- Wenn A gilt, dann gilt auch B .
- A gilt genau dann, wenn B gilt.

Zusammengesetzte Aussagen (evtl. falsch):

- Mannheim liegt am Meer oder $4 < 7$.
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl und $\pi > 3$.
- Wenn $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 3 teilbar.
- 1777 ist genau dann eine Primzahl, wenn der Mars bewohnt ist.
- $\pi^7 > 1000$ oder $\pi^7 \leq 1000$.

- A gilt nicht (Nicht A): $\neg A$.
- Es gelten A und B : $A \wedge B$.
- Es gelten A oder B (oder beide!): $A \vee B$.
- Wenn A gilt, dann gilt auch B : $A \Rightarrow B$.
- A gilt genau dann, wenn B gilt: $A \Leftrightarrow B$ (**logische Äquivalenz**).

- x ist reelle Zahl $\Rightarrow (x^2 > 0 \vee x = 0)$.

Die Wahrheitswerte von zusammengesetzten Aussagen werden durch **Wahrheitstabellen** (Wahrheitstafeln) festgelegt bzw. definiert. Wir kürzen wahr (w) und falsch (f) ab:

A	$\neg A$	A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	f	w	f
f	w	f	f	f	f	w	w

$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**).
Beispiele:

- neue Aussagenoperation (NAND) $A|B :\Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$.
- $n \in \mathbb{N}$ ist teilbar durch $m \in \mathbb{N} :\Leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = mk$

Satz. Für jede Aussage A gilt:

- $A \vee \neg A$ ist immer wahr (**allgemeingültig bzw. Tautologie**)
- $A \wedge \neg A$ ist immer falsch (**Widerspruch**)

Beweis: (mittels Wahrheitstafel):

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \wedge \neg A$
w	f	w	f
f	w	w	f

Logische Äquivalenz von Aussagen mittels Wahrheitstafeln.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Also ist $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

3. Mengen

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die Elementbeziehung wird geschrieben als:

$x \in M$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M

Definition einer Menge oftmals mittels einer Aussage als Bedingung (**geschweiften Klammern!**):

$M := \{x : p(x)\}$ bzw. $M := \{x \mid p(x)\}$ (Menge der x , für die $p(x)$ gilt)

Ein **Prädikat** $p(x)$ wird durch Einsetzen von x zu einer Aussage.

Beispiel: $x > 3$.

Beispiele:

- Marsmonde = $\{\text{Phobos, Deimos}\}$
- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\{1, 2, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ (drei verschiedene Elemente!)

Relationen und Definitionen für Mengen:

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow \text{für alle } x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$A = B :\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

$$A \subsetneq B \ (A \subset B) :\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

$$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

A Teilmenge von B

Gleichheit (Mengen)

echte Teilmenge

Vereinigung

Durchschnitt

kartesisches Produkt

Komplement von B in A

Beispiele:

- $\{1, 2\} \cup \{0, 1, 5\} = \{0, 1, 2, 5\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{0, 1, 5\} = \{2\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (1, B), (2, B), (3, B)\}$

Menge von **k-Tupeln (Vektoren)**:

$$A_1 \times \cdots \times A_k := \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k\}$$

Beachte den Unterschied:

Menge $\{\dots\}$ Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!

Vektor $(\dots)$ Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!



$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$$

ist eine (!) Menge.



Aber

$$(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1) \neq (3, 2, 1)$$

sind drei verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Wichtige Zahlenmengen:

- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge $M : \emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ (Analysis!). Es gilt: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
- **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen :

$$\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$$

- **Intervalle**

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (\text{abgeschlossenes Intervall})$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad (\text{offenes Intervall})$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (\text{halboffene Intervalle})$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad (\text{halboffene Intervalle})$$

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$.
- Für jede Menge M gilt $M \neq \{M\}$.

Beispiele Potenzmenge:

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Die Potenzmenge der leeren Menge ist nichtleer!

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{1, \pi, \Omega\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{\Omega\}, \{1, \pi\}, \{1, \Omega\}, \{\pi, \Omega\}, \{1, \pi, \Omega\}\}.$$

4. Abbildungen

Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B ,

$$f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ eindeutig ein $f(a) \in B$ zu.

- Unter einer **Funktion** (Abbildung) $f : A \rightarrow B$ für Mengen A, B versteht man also eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *eindeutig* ein $b = f(a) \in B$ zuordnet: $a \mapsto b = f(a)$.
- Dabei ist b das **Bild** von a , bzw. a das **Urbild** von b .
- Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a) | a \in C\} \subseteq B$ das **Bild** von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a | f(a) \in D\} \subseteq A$ das **Urbild** von D .
- Die Menge $f(A)$ heißt **Wertebereich/-menge** und A **Definitionsbereich/-menge** von f .

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ jedes $b \in B$ hat **höchstens** ein Urbild

surjektiv $:\Leftrightarrow$ jedes $b \in B$ hat **mindestens** ein Urbild

bijektiv $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt $f^{-1} : B \rightarrow A$, $y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von f** .

- $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{\text{gerade, ungerade}\}$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)
Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion mit Inverse $f^{-1}(x) = (x - c)/m$
- **Polynome** $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
(für $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$)

- **rationale Funktionen** $p(x)/q(x)$ (für Polynome p, q), z.B. Hyperbelfunktion $1/x$
- Die **Wurzelfunktion**
 $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist eine Bijektion.
 Die Inverse ist die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$.
- **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), e^x = \exp(x)$
 ($e \approx 2.718$ Eulersche Zahl) und die Umkehrfunktion:
 (natürliche) **Logarithmusfunktion** $\ln(x)$
- **Indikatorfunktion** für eine Menge $M \subseteq A$:

$$\mathbb{1}_M : A \rightarrow \{0, 1\}, \mathbb{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$$
- **Aufrunden und Abrunden** sind die Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}, \quad \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : x \geq z\}.$$

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ jedes $b \in B$ hat **höchstens** ein Urbild

surjektiv $:\Leftrightarrow$ jedes $b \in B$ hat **mindestens** ein Urbild

bijektiv $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist surjektiv aber nicht injektiv
- $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv
- $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist bijektiv
- Anzahl Elemente: $|\cdot| : \{M \subset \mathbb{Z} : M \text{ endlich}\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist nur surjektiv
- Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, f(x) = e^x$ ist bijektiv

5. Beweismethoden

Direkter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man bei Voraussetzung von A zeigt, dass B gilt.

Satz. Das Quadrat jeder geraden Zahl ist auch gerade.
(für alle $n \in \mathbb{N} : n \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \in 2\mathbb{N}$)

Beweis.

Angenommen $n \in 2\mathbb{N}$, so gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$. Dann ist aber $n^2 = (2m)^2 = 2(2m^2) \in 2\mathbb{N}$. □

Beweis durch Kontraposition

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt zeigt.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Satz. Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. (für alle $n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$)

Beweis.

Wir wollen also für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen: $n \notin 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \notin 2\mathbb{N}$:
Angenommen $n \notin 2\mathbb{N}$, d.h. ungerade und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist
$$n^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1 \notin 2\mathbb{N}.$$



Beweis durch Widerspruch

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man annimmt, dass diese Aussage falsch ist, d.h. es gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$, und zeigt, dass ein Widerspruch folgt.

A	B	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
w	w	f	f
w	f	w	w
f	w	f	f
f	f	f	f

Satz. Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. (für alle $n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$)

Beweis.

Sei $\neg(n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N})$, d.h. $(n^2 \in 2\mathbb{N}) \wedge (n \notin 2\mathbb{N})$. Da n ungerade, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist $n^2 = (2m - 1)^2 \notin 2\mathbb{N}$, ein Widerspruch zur Annahme $n^2 \in 2\mathbb{N}$. □

Beweis durch Widerspruch

Satz. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis (Euklid, 300 v. Chr.)

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, nämlich $N \in \mathbb{N}$ viele. Sei ihr Produkt $p_1 \cdots p_N \in \mathbb{N}$ und p_N ist die größte mögliche Primzahl. Da $p_1 \cdots p_N + 1 \in \mathbb{N}$, muß es entweder selbst Primzahl sein (größer als p_N Widerspruch!) oder es hat eine Primfaktorzerlegung. Ein solcher Primteiler p teilt aber $p_1 \cdots p_N$ und $p_1 \cdots p_N + 1$, so müßte stets $p = 1$ sein, was keine Primzahl ist, ein Widerspruch! $\square$

Beweis durch Widerspruch/Gegenbeispiel

Hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ für alle $b, c \in \mathbb{R}$ mindestens eine reelle Lösung?

Es genügt ein Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen.

Seien $b = 0$ und $c = 1$, so ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

Das Quadrat einer reellen Zahl ist nichtnegativ.

Also gibt es hier keine reelle Lösung x und die Aussage ist falsch.

Satz. Es gibt $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ keine reelle Lösung besitzt.

Beispielsweise für $b = 0$ und $c = -1$ bzw. $b = c = 0$ erhalten wir ebenso:

Satz. Es gibt jeweils $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$

- genau zwei reelle Lösungen besitzt
- genau eine reelle Lösung besitzt.

6. Induktion und Abzählen

Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen. Wenn zugleich gelten:

1 Es gilt $A(1)$ (**Induktionsanfang**)

2 für alle $n \geq 1$: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (**Induktionsschritt**)

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang kann auch ein festes $N > 1$ sein.

Für jede natürliche Zahl n gilt $3^n \geq n$ (für alle $n \in \mathbb{N} : 3^n \geq n$)

Beweis durch Induktion.

Für $n = 1$ ist klar $3^1 = 3 \geq 1$. (Das war der Induktionsanfang).

Angenommen, die Aussage ist bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d.h. es gilt die **Induktionsvoraussetzung** $3^n \geq n$. Dann ist für $n+1$:

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \geq n \cdot 3 = n + 2n \geq n + 1$$

(Das war der Induktionsschritt). □

Die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \dots, n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist
 $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Betrachten wir die ersten Anordnungen:

1 12|21 123|132|213|231|312|321

Beweis durch Induktion.

Für 1 gibt es nur die Anordnung 1. (Induktionsanfang).

Angenommen, die Aussage ist bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d.h. es gilt die **Induktionsvoraussetzung** $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Die weitere Zahl $(n+1)$ können wir bei den Anordnungen der Zahlen $1, \dots, n, n+1$ an einer der Positionen 1 bis $n+1$ stellen. Steht sie an der ersten Position, gibt es nach Voraussetzung genau $A(n)$ Anordnungen. Steht sie an der zweiten Position ebenso, usw. Also ist

$$A(n+1) = A(n) \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1).$$

(Das war der Induktionsschritt).



Abzählen

Abkürzungen:

Summe $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

- Für eine endliche Menge M bezeichnet $|M|$ die **Anzahl der Elemente**.
- **Summenregel:** Für disjunkte Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist $|\cup_{i=1}^n M_i| = \sum_{i=1}^n |M_i|$
- **Produktregel:** Für beliebige Mengen $M_1, \dots, M_n$ ist $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n| = \prod_{i=1}^n |M_i|$
- **Bijektionsregel:** Existiert für endliche Mengen A und B eine Bijektion, so ist $|A| = |B|$

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \dots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Beweis durch Abzählen.

Wir zählen die Anzahl der Umordnungen von $1, 2, \dots, n$. Für das erste Element 1 haben wir n Plätze. Für das zweite Element 2 haben wir anschließend nur noch $n-1$ Plätze. Usw: Für das k -te Element haben $n-k+1$ Plätze. Also erhalten wir als Anzahl der Umordnungen $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ □

Binomialsatz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt offenbar

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$

$$\vdots = \quad \quad \quad \vdots$$

$$(a + b)^n = a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k} :=$ Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $1, \dots, n$

Beweis.

- ➊ Produkt auf linker Seite: $(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)$
- ➋ Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$: a^k enthalten
- ➌ a^k nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten
- ➍ Koeffizient von $a^k b^{n-k}$: wähle aus n Klammern $(a + b)$ jeweils genau k mal a
- ➎ Das ist gerade die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $1, \dots, n$
- ➏ also: Produkt $(a + b)^n$ ist Summe über alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$: $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Geometrische Summe

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = (1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1-x^{n+1}$$

2. Insbesondere ist für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Beweis.

• Ausmultiplizieren ergibt 1.

(da alle x^k , $k = 1, \dots, n$ mit $+$ und $-$ vorkommen)

• 2. folgt direkt aus 1. durch Division mit $1-x \neq 0$



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{100}} = \frac{1 - (1/2)^{101}}{1 - 1/2} = 2 - 2^{-100}$$

7. Beweisverfahren und Aufgaben lösen

Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung:
 $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)
- **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- **Beweis durch vollständige Induktion**
- **Beweis durch Abzählen/Kombinatorik**: Man zählt die Objekte unterschiedlich ab, dies ergibt eine Gleichheit
- **Beweis durch Fallunterscheidung, Schubfachprinzip, ...**

- Von 3 zufällig gezogenen Schuhen sind entweder mindestens zwei linke oder zwei rechte dabei
- Von 25 Studierenden haben mindestens drei im gleichen Monat Geburtstag
- Werden 6 Elemente auf 4 Fächer verteilt, so gibt es stets ein Fach mit 2 Elementen:



Schubfachprinzip

Werden $n > k$ Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit 2 Elementen.

Werden $n > 2k$ Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit 3 Elementen.

Usw. ...

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

Allgemeines Schubfachprinzip

Werden n Elemente auf k Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit $\lceil n/k \rceil$ Elementen.

Beobachtung: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$: $\lceil n/k \rceil < n/k + 1$

Beweis.

Angenommen, in jedem Fach sind höchstens $\lceil n/k \rceil - 1$ Elemente, so sind insgesamt erst nur $k \cdot (\lceil n/k \rceil - 1) < k \cdot (n/k + 1 - 1) = n$ Elemente verteilt, ein Widerspruch! □

Schubfachprinzip

- Bei einer Feier mit 30 Leuten sind mindestens $\lceil 30/7 \rceil = 5$, die am gleichen Wochentag Geburtstag haben
- In einer Gruppe von 100 Studenten sind mindestens $\lceil 100/30 \rceil = 4$, die bei 30 Fragen gleich viele korrekt beantworten

Aufgaben lösen - ein Plan

- 1 Was ist die Aussage? Einfache Beispiele und/oder Skizzen!
- 2 Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
- 3 Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
- 4 Welche Zusammenhänge siehst du?
- 5 Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
- 6 Führe Bezeichnungen ein!
- 7 Ergeben einfache Beispiele/Gegenbeispiele Beweisideen?
- 8 Vereinfache: Spezialfall/Fallunterscheidung?
- 9 Abstrahiere: Verallgemeinerung?
- 10 Studiere verwandte Probleme und Theorien!
- 11 Variiere die Aussagen und Aufgaben!
- 12 Untersuche und rekonstruiere ähnliche Probleme!

8. Beispiele/Ausblicke

Unendlichkeiten

Mengen wie

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$$

haben nicht endlich viele Elemente

d.h. sind nicht endlich (bzw. unendlich)

(Verschiedene *Arten* von Unendlichkeit $\rightsquigarrow$ Studium + Ausblicke später)

Eine wichtige Unterscheidung:

- Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann **beliebig groß** sein
Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist aber immer noch endlich
- Die Menge $\mathbb{N}$ ist **unendlich**
- Studium (v.a. Analysis) $\rightsquigarrow$ n geht gegen Unendlich $\rightsquigarrow$
Konvergenz

Endlich und Unendlich

Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ existieren.

Ansonsten heißt die Menge **unendlich**.

Eine unendliche Menge A heißt **abzählbar unendlich**, falls es eine Bijektion $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.

Ansonsten heißt die Menge **überabzählbar**.

Die Mengen X und Y heißen

gleichmächtig ($X \sim Y$)

$:\Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Fkt. $f : X \rightarrow Y$

Mächtigkeiten

Die Menge M heißt:

- **endlich** : $\Leftrightarrow$ es existiert $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Fkt.
 $f : M \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$
- **abzählbar** : $\Leftrightarrow M \sim \mathbb{N}$
- **höchstens abzählbar** : $\Leftrightarrow M$ ist endlich oder abzählbar
- **überabzählbar** : $\Leftrightarrow M$ ist nicht abzählbar

Die **Mächtigkeit** $|M|$ einer Menge M ist die Anzahl der Elemente (sofern M endlich), ansonsten nur Vergleichbarkeit (z.B. $|M| \geq |\mathbb{N}|$)

- Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind abzählbar unendlich
- Jede Menge, die eine unendliche Menge als Teilmenge enthält, ist unendlich
- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich ($\rightsquigarrow$ **Analysis**)

Satz (Cantor, 1890)

Für jede Menge M gilt: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{N : N \subset M\}$ ist mächtiger als M , d.h. $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis.

- Für endliche Mengen M ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} > |M|$ ($\rightsquigarrow$ **LA, Ana**).
- Sei M nun unendlich.
- Da $M \sim \{\{x\} : x \in M\} \subset \mathcal{P}(M)$, ist also M bereits gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$, d.h. es gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.
- Angenommen, $M \sim \mathcal{P}(M)$, so existiert Bijektion $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$.
- Wir betrachten die Menge $A := \{x \in M : x \notin f(x)\}$.
- Weil $A \subset M$, ist also $A \in \mathcal{P}(M)$ und es existiert somit wegen der Bijektion ein eindeutiges Urbild $a \in M$ mit $f(a) = A$.
- Für dieses Element ist nun aber nach Definition von A :
 $a \in A \Leftrightarrow a \notin f(a) \Leftrightarrow a \notin A$ - ein Widerspruch!
- Also sind M und $\mathcal{P}(M)$ nicht gleichmächtig!



Aus dem Satz von Cantor und der Existenz der Potenzmenge folgt u.a.

Satz

Es gibt beliebig viele verschiedene unendliche Mächtigkeiten.