

Übungen Funktionen

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow f(A) = B$

bijektiv $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt $f^{-1} : B \rightarrow A$, $y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von f** .

Aufgabe 1

Untersuche die Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 3 + (-2)^n$
- (b) $f : \{M \subseteq \mathbb{N} : M \neq \emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}, f(M) = \min(M) + 1$
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (**Aufrunden**)
- (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ (**Abrunden**)

Aufgabe 2

Konstruiere jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel:

- (a) Eine surjektive Funktion $f : \{0, 1, 2, \dots, 9\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 9\}$
- (b) Eine injektive Funktion $f : \{1, 2, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 9\}$
- (c) Eine surjektive Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$
- (d) Eine injektive Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- (e) Eine bijektive Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$
- (f) Eine injektive Funktion $f : (0, 1) \rightarrow [0, 3]$
- (g) Eine surjektive Funktion $f : (0, 1) \rightarrow [0, 3]$
- (h) Eine bijektive Funktion $f : (0, 1) \rightarrow [0, 3]$
- (i) Eine bijektive Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$