

Ungleichungen und symmetrische Summen

Mathe-AG Workshop 1 - Ausblick

Samuel Draper, Sanja Kannewurf, Peter Parczewski

9. Oktober 2026



Teil I Gleichungen und Ungleichungen

Im Workshop beschäftigen wir uns zuerst mit solchen Problemen:

Wieviele reelle Lösungen x, y mit $x + y = 3$ und $xy \geq 2$ gibt es?

Wieviele reelle Lösungen x, y hat das System von Gleichungen in Abhängigkeit von $a > 0$:

$$x + y = 3, \quad x|y| \geq 2, \quad x^2 + y^2 = a$$

Kubische Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad x^3 + px + q = 0.$$

Lösungsformeln und Bedingungen für die Anzahl der Lösungen?

Teil II Interessantere Ungleichungen

Wir studieren elementare Ungleichungen für positive reelle Zahlen a, b wie

$$\begin{array}{ll} 2ab \leq a^2 + b^2 & \sqrt{ab} \leq (a + b)/2 \\ \frac{2}{1/a + 1/b} \leq \sqrt{ab} & ab \leq \frac{a^4}{4} + \frac{3b^{3/4}}{4} \end{array}$$

Dabei begegnen wir arithmetischen und geometrischen Mitteln und Problemen wie:

Begründe mit Ungleichungen, dass für die gegebene Oberfläche 12 m^2 der Würfel mit der Kantenlänge $\sqrt{2} \text{ m}$ der Quader mit dem größten Volumen ist.

Teil III Ungleichungen und symmetrische Summen

Wir untersuchen symmetrische Summen, die gleich bleiben unter Vertauschung von zwei Variablen $x_i \leftrightarrow x_j$:

$$e_0(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

$$e_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$e_2(x_1, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n,$$

$$\vdots$$

und untersuchen Ungleichungen davon (u.a. von Newton und Maclaurin). Dies führt uns zu interessanten Problemen wie

Beweise für positive reelle Zahlen x, y, z :

$$(xyz)^{1/3} \leq \left(\frac{1}{3}(xy + xz + yz) \right)^{1/2} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$$