# Mathematisches Präludium

## Ein Mathematik Vorkurs - Folien Teil 2

Peter Parczewski

# 5. Beweismethoden

# Direkter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man bei Voraussetzung von $A$ zeigt, dass $B$ gilt.

# Direkter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man bei Voraussetzung von $A$ zeigt, dass $B$ gilt.

**Satz.** Das Quadrat jeder geraden Zahl ist auch gerade.
(für alle $n \in \mathbb{N} : n \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \in 2\mathbb{N}$)

# Direkter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man bei Voraussetzung von $A$ zeigt, dass $B$ gilt.

**Satz.** Das Quadrat jeder geraden Zahl ist auch gerade.
(für alle $n \in \mathbb{N} : n \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \in 2\mathbb{N}$)

**Beweis.**

Angenommen $n \in 2\mathbb{N}$, so gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$. Dann ist aber $n^2 = (2m)^2 = 2(2m^2) \in 2\mathbb{N}$. □

# Beweis durch Kontraposition/indirekter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt zeigt.

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ |

# Beweis durch Kontraposition/indirekter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt zeigt.

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ |

**Satz.** Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. (für alle $n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$)

# Beweis durch Kontraposition/indirekter Beweis

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt zeigt.

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ |

**Satz.** Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. (für alle $n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$)

## Beweis.

Wir wollen also für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen: $n \notin 2\mathbb{N} \Rightarrow n^2 \notin 2\mathbb{N}$: Angenommen $n \notin 2\mathbb{N}$, so ist es ungerade und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist aber $n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1 \notin 2\mathbb{N}$. □

# Beweis durch Widerspruch

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man annimmt, dass diese Aussage falsch ist, d.h. es gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$, und zeigt, dass ein Widerspruch folgt.

| $A$ | $B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$ |

# Beweis durch Widerspruch

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man annimmt, dass diese Aussage falsch ist, d.h. es gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$, und zeigt, dass ein Widerspruch folgt.

| $A$ | $B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$ |

**Satz.** Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. (für alle $n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$)

# Beweis durch Widerspruch

Aussage $A \Rightarrow B$ wird bewiesen, indem man annimmt, dass diese Aussage falsch ist, d.h. es gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$, und zeigt, dass ein Widerspruch folgt.

| $A$ | $B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$ |

**Satz.** Hat eine natürliche Zahl ein gerades Quadrat, dann ist sie auch gerade. (für alle $n \in \mathbb{N} : n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$)

## Beweis.

Sei $\neg\left(n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}\right)$, d.h. $(n^2 \in 2\mathbb{N}) \wedge (n \notin 2\mathbb{N})$. Da $n$ ungerade, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist $n^2 = (2m-1)^2 \notin 2\mathbb{N}$, ein Widerspruch zur Annahme $n^2 \in 2\mathbb{N}$. □

# Beweis durch Widerspruch

**Satz.** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

# Beweis durch Widerspruch

**Satz.** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

## Beweis (Euklid, 300 v. Chr.)

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, nämlich $N \in \mathbb{N}$ viele. Sei ihr Produkt $p_1 \cdots p_N \in \mathbb{N}$ und $p_N$ ist die größte mögliche Primzahl. Da $p_1 \cdots p_N + 1 \in \mathbb{N}$, muß es entweder selbst Primzahl sein (größer als $p_N$ Widerspruch!) oder es hat eine Primfaktorzerlegung. Ein solcher Primteiler $p$ teilt aber $p_1 \cdots p_N$ und $p_1 \cdots p_N + 1$, so müßte stets $p = 1$ sein, was keine Primzahl ist, ein Widerspruch! □

# Beweis durch Widerspruch/Gegenbeispiel

Hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ für alle $b, c \in \mathbb{R}$ mindestens eine reelle Lösung?

# Beweis durch Widerspruch/Gegenbeispiel

Hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ für alle $b, c \in \mathbb{R}$ mindestens eine reelle Lösung?

Es genügt ein Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen.
Seien $b = 0$ und $c = 1$, so ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
Das Quadrat einer reellen Zahl ist nichtnegativ.
Also gibt es hier keine reelle Lösung $x$ und die Aussage ist falsch.

# Beweis durch Widerspruch/Gegenbeispiel

Hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ für alle $b, c \in \mathbb{R}$ mindestens eine reelle Lösung?

Es genügt ein Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen.
Seien $b = 0$ und $c = 1$, so ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
Das Quadrat einer reellen Zahl ist nichtnegativ.
Also gibt es hier keine reelle Lösung $x$ und die Aussage ist falsch.

**Satz.** Es gibt $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ keine reelle Lösung besitzt.

# Beweis durch Widerspruch/Gegenbeispiel

Hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ für alle $b, c \in \mathbb{R}$ mindestens eine reelle Lösung?

Es genügt ein Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen.
Seien $b = 0$ und $c = 1$, so ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$
Das Quadrat einer reellen Zahl ist nichtnegativ.
Also gibt es hier keine reelle Lösung $x$ und die Aussage ist falsch.

**Satz.** Es gibt $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ keine reelle Lösung besitzt.

Beispielsweise für $b = 0$ und $c = -1$ bzw. $b = c = 0$ erhalten wir ebenso:

**Satz.** Es gibt jeweils $b, c \in \mathbb{R}$ so dass die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$

- genau zwei reelle Lösungen besitzt
- genau eine reelle Lösung besitzt.

# 6. Induktion und Abzählen

# Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen. Wenn zugleich gelten:

1. Es gilt $A(1)$ (**Induktionsanfang**)
2. für alle $n \geq 1$ : $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (**Induktionsschritt**)

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

# Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen. Wenn zugleich gelten:

1. Es gilt $A(1)$ (**Induktionsanfang**)
2. für alle $n \geq 1$ : $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (**Induktionsschritt**)

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang kann auch ein festes $N > 1$ sein.

Für jede natürliche Zahl $n$ gilt $3^n \geq n$ (für alle $n \in \mathbb{N} : 3^n \geq n$)

## Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen. Wenn zugleich gelten:

1. Es gilt $A(1)$ (**Induktionsanfang**)
2. für alle $n \geq 1$ : $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (**Induktionsschritt**)

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang kann auch ein festes $N > 1$ sein.

Für jede natürliche Zahl $n$ gilt $3^n \geq n$ (für alle $n \in \mathbb{N} : 3^n \geq n$)

## Beweis durch Induktion.

Für $n = 1$ ist klar $3^1 = 3 \geq 1$. (Das war der Induktionsanfang).
Angenommen, die Aussage ist bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d.h. es gilt die **Induktionsvoraussetzung** $3^n \geq n$. Dann ist für $n+1$:

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \geq n \cdot 3 = n + 2n \geq n + 1$$

(Das war der Induktionsschritt). □

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Betrachten wir die ersten Anordnungen:

$$1 \qquad 12|21 \qquad 123|132|213|231|312|321$$

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Betrachten wir die ersten Anordnungen:

$$1 \qquad 12|21 \qquad 123|132|213|231|312|321$$

## Beweis durch Induktion.

Für 1 gibt es nur die Anordnung 1. (Induktionsanfang). Angenommen, die Aussage ist bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d.h. es gilt die **Induktionsvoraussetzung** $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Die weitere Zahl $(n+1)$ können wir bei den Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n, n+1$ an einer der Positionen 1 bis $n+1$ stellen. Steht sie an der ersten Position, gibt es nach Voraussetzung genau $A(n)$ Anordnungen. Steht sie an der zweiten Position ebenso, usw. Also ist

$$A(n+1) = A(n) \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1).$$

(Das war der Induktionsschritt). □

# Abzählen

Abkürzungen:

**Summe** $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$

# Abzählen

Abkürzungen:

**Summe** $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, **Produkt** $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$.

# Abzählen

Abkürzungen:

**Summe** $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, **Produkt** $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$.

- Für eine endliche Menge $M$ bezeichnet $|M|$ die **Anzahl der Elemente.**

# Abzählen

Abkürzungen:

**Summe** $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, **Produkt** $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$.

- Für eine endliche Menge $M$ bezeichnet $|M|$ die **Anzahl der Elemente.**
- **Summenregel:** Für disjunkte Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|\cup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|$

# Abzählen

Abkürzungen:

**Summe** $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, **Produkt** $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$.

- Für eine endliche Menge $M$ bezeichnet $|M|$ die **Anzahl der Elemente.**
- **Summenregel:** Für disjunkte Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|\cup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|$
- **Produktregel:** Für beliebige Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n| = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$

# Abzählen

Abkürzungen:

**Summe** $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, **Produkt** $\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$.

- Für eine endliche Menge $M$ bezeichnet $|M|$ die **Anzahl der Elemente.**
- **Summenregel:** Für disjunkte Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|\cup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|$
- **Produktregel:** Für beliebige Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n| = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$
- **Bijektionsregel:** Existiert für endliche Mengen $A$ und $B$ eine Bijektion, so ist $|A| = |B|$

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Sei $A(n)$ die Anzahl aller Anordnungen der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

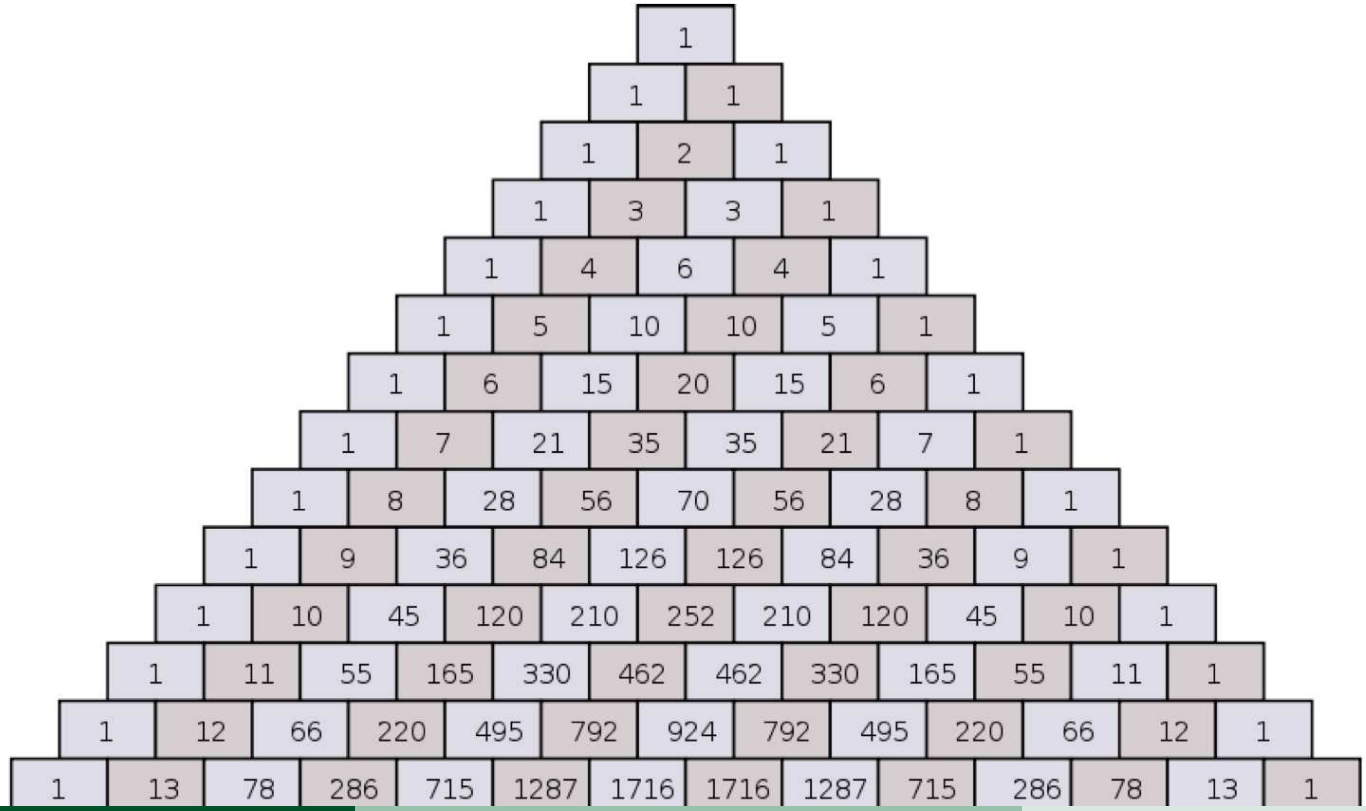
$$A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

## Beweis durch Abzählen.

Wir zählen die Anzahl der Umordnungen von $1, 2, \ldots, n$. Für das erste Element 1 haben wir $n$ Plätze. Für das zweite Element 2 haben wir anschließend nur noch $n-1$ Plätze. Usw: Für das $k$-te Element haben $n-k+1$ Plätze. Also erhalten wir als Anzahl der Umordnungen $A(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ □

$$\begin{cases} (a+b)^1 = a+b \\ (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3 \\ \vdots \end{cases}$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$



## Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ := Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ := Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$

## Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ := Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $a^k$ enthalten

## Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ := Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $a^k$ enthalten
3. $a^k$ nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten

## Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ := Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $a^k$ enthalten
3. $a^k$ nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten
4. Koeffizient von $a^k b^{n-k}$: wähle aus $n$ Klammern $(a+b)$ jeweils genau $k$ mal $a$

## Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ := Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $a^k$ enthalten
3. $a^k$ nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten
4. Koeffizient von $a^k b^{n-k}$: wähle aus $n$ Klammern $(a+b)$ jeweils genau $k$ mal $a$
5. Das ist gerade die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ := Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $a^k$ enthalten
3. $a^k$ nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten
4. Koeffizient von $a^k b^{n-k}$: wähle aus $n$ Klammern $(a+b)$ jeweils genau $k$ mal $a$
5. Das ist gerade die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$
6. also: Produkt $(a+b)^n$ ist Summe über alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ : $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

## Binomialsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ := Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$

## Beweis.

1. Produkt auf linker Seite: $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$
2. Also darin für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $a^k$ enthalten
3. $a^k$ nur im Produkt $a^k b^{n-k}$ enthalten
4. Koeffizient von $a^k b^{n-k}$: wähle aus $n$ Klammern $(a+b)$ jeweils genau $k$ mal $a$
5. Das ist gerade die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen von $1, \ldots, n$
6. also: Produkt $(a+b)^n$ ist Summe über alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ : $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
7. Damit folgt $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

□

## Geometrische Summe

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1-x^{n+1}$$

2. Insbesondere ist für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

## Geometrische Summe

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1-x^{n+1}$$

2. Insbesondere ist für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

## Beweis.

- Ausmultiplizieren ergibt 1.

  (da alle $x^k$, $k = 1, \ldots, n$ mit $+$ und $-$ vorkommen)

- 2. folgt direkt aus 1. durch Division mit $1-x \neq 0$ □

## Geometrische Summe

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right) = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1-x^{n+1}$$

2. Insbesondere ist für alle $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

## Beweis.

- Ausmultiplizieren ergibt 1.

  (da alle $x^k$, $k = 1, \ldots, n$ mit $+$ und $-$ vorkommen)

- 2. folgt direkt aus 1. durch Division mit $1-x \neq 0$ □

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{100}} = \frac{1-(1/2)^{101}}{1-1/2} = 2-2^{-100}$$

# 7. Beweisverfahren und Aufgaben lösen

# Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)

# Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)

# Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)
- **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

# Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)
- **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- **Beweis durch vollständige Induktion**

# Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)
- **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- **Beweis durch vollständige Induktion**
- **Beweis durch Abzählen/Kombinatorik**: Man zählt die Objekte unterschiedlich ab, dies ergibt eine Gleichheit

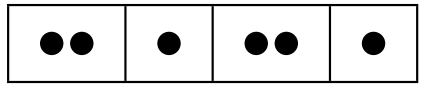
# Beweisverfahren

- **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$): Man zeigt, dass die Schlussfolgerung aus den Annahmen folgt (unter Verwendung von Definitionen, bereits bewiesenen Sätzen, Lemmata, Ungleichungen, etc)
- **Beweis durch Widerspruch**: Man zeigt, dass die Negation der Behauptung zu einem Widerspruch führt. Also muß dann die Behauptung selbst wahr sein! (Negierte Behauptung: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$)
- **Beweis durch Kontraposition**: Man beweist die logisch äquivalente Behauptung: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
- **Beweis durch vollständige Induktion**
- **Beweis durch Abzählen/Kombinatorik**: Man zählt die Objekte unterschiedlich ab, dies ergibt eine Gleichheit
- **Beweis durch Fallunterscheidung, Schubfachpinzip, ...**

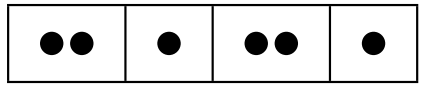
- Von 3 zufällig gezogenen Schuhen sind entweder mindestens zwei linke oder zwei rechte dabei

- Von 3 zufällig gezogenen Schuhen sind entweder mindestens zwei linke oder zwei rechte dabei
- Von 25 Studierenden haben mindestens drei im gleichen Monat Geburtstag

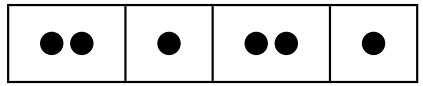
- Von 3 zufällig gezogenen Schuhen sind entweder mindestens zwei linke oder zwei rechte dabei
- Von 25 Studierenden haben mindestens drei im gleichen Monat Geburtstag
- Werden 6 Elemente auf 4 Fächer verteilt, so gibt es stets ein Fach mit 2 Elementen:



- Von 3 zufällig gezogenen Schuhen sind entweder mindestens zwei linke oder zwei rechte dabei
- Von 25 Studierenden haben mindestens drei im gleichen Monat Geburtstag
- Werden 6 Elemente auf 4 Fächer verteilt, so gibt es stets ein Fach mit 2 Elementen:



- Von 3 zufällig gezogenen Schuhen sind entweder mindestens zwei linke oder zwei rechte dabei
- Von 25 Studierenden haben mindestens drei im gleichen Monat Geburtstag
- Werden 6 Elemente auf 4 Fächer verteilt, so gibt es stets ein Fach mit 2 Elementen:



## Schubfachprinzip

Werden $n > k$ Elemente auf $k$ Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit 2 Elementen.

Werden $n > 2k$ Elemente auf $k$ Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit 3 Elementen.

Usw. ...

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

## Allgemeines Schubfachprinzip

Werden $n$ Elemente auf $k$ Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit $\lceil n/k \rceil$ Elementen.

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

## Allgemeines Schubfachprinzip

Werden $n$ Elemente auf $k$ Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit $\lceil n/k \rceil$ Elementen.

Beobachtung: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ : $\lceil n/k \rceil < n/k + 1$

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

## Allgemeines Schubfachprinzip

Werden $n$ Elemente auf $k$ Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit $\lceil n/k \rceil$ Elementen.

Beobachtung: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ : $\lceil n/k \rceil < n/k + 1$

## Beweis.

Angenommen, in jedem Fach sind höchstens $\lceil n/k \rceil - 1$ Elemente, so sind insgesamt erst nur $k \cdot (\lceil n/k \rceil - 1) < k \cdot (n/k + 1 - 1) = n$ Elemente verteilt, ein Widerspruch! □

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

## Allgemeines Schubfachprinzip

Werden $n$ Elemente auf $k$ Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit $\lceil n/k \rceil$ Elementen.

Beobachtung: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ : $\lceil n/k \rceil < n/k + 1$

## Beweis.

Angenommen, in jedem Fach sind höchstens $\lceil n/k \rceil - 1$ Elemente, so sind insgesamt erst nur $k \cdot (\lceil n/k \rceil - 1) < k \cdot (n/k + 1 - 1) = n$ Elemente verteilt, ein Widerspruch! □

- Bei einer Feier mit 30 Leuten sind mindestens $\lceil 30/7 \rceil = 5$, die am gleichen Wochentag Geburtstag haben

Kleinste größere ganze Zahl: $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : x \leq z\}$ (obere **Gauß-Klammer**).

## Allgemeines Schubfachprinzip

Werden $n$ Elemente auf $k$ Fächer verteilt, so gibt es mindestens ein Fach mit $\lceil n/k \rceil$ Elementen.

Beobachtung: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ : $\lceil n/k \rceil < n/k + 1$

## Beweis.

Angenommen, in jedem Fach sind höchstens $\lceil n/k \rceil - 1$ Elemente, so sind insgesamt erst nur $k \cdot (\lceil n/k \rceil - 1) < k \cdot (n/k + 1 - 1) = n$ Elemente verteilt, ein Widerspruch! □

- Bei einer Feier mit 30 Leuten sind mindestens $\lceil 30/7 \rceil = 5$, die am gleichen Wochentag Geburtstag haben
- In einer Gruppe von 100 Studenten sind mindestens $\lceil 100/30 \rceil = 4$, die bei 30 Fragen gleich viele korrekt beantworten

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
6. Führe Bezeichnungen ein!

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
6. Führe Bezeichnungen ein!
7. Ergeben einfache Beispiele/Gegenbeispiele Beweisideen?

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
6. Führe Bezeichnungen ein!
7. Ergeben einfache Beispiele/Gegenbeispiele Beweisideen?
8. Vereinfache: Spezialfall/Fallunterscheidung?

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
6. Führe Bezeichnungen ein!
7. Ergeben einfache Beispiele/Gegenbeispiele Beweisideen?
8. Vereinfache: Spezialfall/Fallunterscheidung?
9. Abstrahiere: Verallgemeinerung?

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
6. Führe Bezeichnungen ein!
7. Ergeben einfache Beispiele/Gegenbeispiele Beweisideen?
8. Vereinfache: Spezialfall/Fallunterscheidung?
9. Abstrahiere: Verallgemeinerung?
10. Studiere verwandte Probleme und Theorien!

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
6. Führe Bezeichnungen ein!
7. Ergeben einfache Beispiele/Gegenbeispiele Beweisideen?
8. Vereinfache: Spezialfall/Fallunterscheidung?
9. Abstrahiere: Verallgemeinerung?
10. Studiere verwandte Probleme und Theorien!
11. Variiere die Aussagen und Aufgaben!

# Aufgaben lösen - ein Plan

1. Was ist die Aussage? Mache einfache Beispiele und/oder Skizzen!
2. Betrachte die verwendeten Begriffe und Definitionen genauer!
3. Welche Zusammenhänge gibt es in diesem Umfeld?
4. Welche Zusammenhänge siehst du?
5. Welche Zusammenhänge hättest du gerne?
6. Führe Bezeichnungen ein!
7. Ergeben einfache Beispiele/Gegenbeispiele Beweisideen?
8. Vereinfache: Spezialfall/Fallunterscheidung?
9. Abstrahiere: Verallgemeinerung?
10. Studiere verwandte Probleme und Theorien!
11. Variiere die Aussagen und Aufgaben!
12. Untersuche und rekonstruiere ähnliche Probleme!

# 8. Beispiele/Ausblicke

# Fibonacci-Zahlen

Definition Fibonacci-Zahlen:

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Also sind die ersten Fibonacci-Zahlen:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Das ist eine **rekursive** Folge.
Kann man die $n$-te Zahl direkt angeben?
Ja! - Explizite Formel:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

# Fibonacci-Zahlen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

## Beweisidee.

- Die Rekursion $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ basiert auf zwei Werten.
- Seien also die ersten beiden $(1, 0)$ und $(0, 1)$ (linear unabhängig)
- Alle anderen Startwerte kann man daraus linear erhalten: $(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$
- Also ist der Raum aller rekursiven Folgen mit der Vorschrift $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ zweidimensional ($\rightsquigarrow$ **Lineare Algebra**)
- Wir machen den Ansatz $F_n = c^n$
- aus $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ folgt $c^n = c^{n-1} + c^{n-2}$ bzw. $c^2 = c + 1$
- Diese Gleichung hat die zwei Lösungen $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- Man sieht direkt, dass $(1, \varphi)$ und $(1, \bar{\varphi})$ linear unabhängig sind
- Also $F_n$ als Linearkombination von $\varphi^n$ und $\bar{\varphi}^n$ schreiben: Nachrechnen $\rightsquigarrow$ Explizite Formel

## Unendlichkeiten

Mengen wie

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ 2\mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^n$$

haben nicht endlich viele Elemente

d.h. sind nicht endlich (bzw. unendlich)

(Verschiedene *Arten* von Unendlichkeit $\rightsquigarrow$ Studium + Ausblicke später)

Eine wichtige Unterscheidung:

- Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann **beliebig groß** sein

  Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist aber immer noch endlich

- Die Menge $\mathbb{N}$ ist **unendlich**

- Studium (v.a. Analysis) $\rightsquigarrow$ $n$ geht gegen Unendlich $\rightsquigarrow$ **Konvergenz**

# Mächtigkeiten

Die Mengen $X$ und $Y$ heißen

**gleichmächtig** $(X \sim Y)$ $:\Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Fkt. $f : X \to Y$

Die Menge $M$ heißt:

- **endlich** $:\Leftrightarrow$ es existiert $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Fkt. $f : M \to \{1, 2, \ldots, n\}$
- **abzählbar** $:\Leftrightarrow M \sim \mathbb{N}$
- **höchstens abzählbar** $:\Leftrightarrow M$ ist endlich oder abzählbar
- **überabzählbar** $:\Leftrightarrow M$ ist nicht abzählbar

Die **Mächtigkeit** $|M|$ einer Menge $M$ ist die Anzahl der Elemente (sofern $M$ endlich), ansonsten nur Vergleichbarkeit (z.B. $|M| \geq |\mathbb{N}|$)

- Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind abzählbar unendlich
- Jede Menge, die eine unendliche Menge als Teilmenge enthält, ist unendlich

## Satz (Cantor, 1890)

*Für jede Menge $M$ gilt: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{N : N \subset M\}$ ist mächtiger als $M$, d.h. $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.*

## Beweis.

- Für endliche Mengen $M$ ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} > |M|$ ($\rightsquigarrow$ **LA, Ana**).
- Sei $M$ nun unendlich.
- Da $M \sim \{\{x\} : x \in M\} \subset \mathcal{P}(M)$, ist also $M$ bereits gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$, d.h. es gilt $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.
- Angenommen, $M \sim \mathcal{P}(M)$, so existiert eine Bijektion $f : M \to \mathcal{P}(M)$.
- Wir betrachten die Menge $A := \{x \in M : x \notin f(x)\}$.
- Weil $A \subset M$, ist also $A \in \mathcal{P}(M)$ und es existiert somit wegen der Bijektion ein eindeutiges Urbild $a \in M$ mit $f(a) = A$.
- Für dieses Element ist nun aber nach Definition von $A$: $a \in A \Leftrightarrow a \in f(a) \Leftrightarrow a \notin A$ - ein Widerspruch!
- Also sind $M$ und $\mathcal{P}(M)$ nicht gleichmächtig! □