Mathematisches Präludium

Ein Mathematik Vorkurs - Folien Teil 1

Peter Parczewski

1. Einführung

Wer redet da?

Dr. Peter Parczewski

Universität Mannheim
Institut für Mathematik
LS Wirtschaftsmathematik II
(Stochastische Numerik)

Studium/Promotion:

- **Mathematik** (+ Physik + Biologie + Philosophie)

Lehre/Forschung:

- Funktionalanalysis + (Numerische) Stochastik + Klimamodelle

Vorkurs Elemente

- Mi - Fr (27.08-29.08)
- Vorlesungen
- Übungen
- Quizze

Einführung

1. Mathematik und Schulmathematik
2. Sätze und Beweise

Mathematik - Uni

Wiederholung Schulmathematik:

- **(MINT BW) Online-Brückenkurs** ▸ Link: Online-Brückenkurs
  Schulstoff und noch etwas mehr. Sehr sauber und ausführlich. Übungen integriert (Lösungen vorhanden). Abschlusstests.
- **Uni Mannheim VWL Wiederholungskurs**: ▸ Link: Skript
  Skript mit Beispielen, Übungen und Lösungen. Viele Begriffe werden in Ihrem Studium viel genauer eingeführt.
- Übungen (später im Vorkurs)

Hilfreicher: Die in Ihren Vorlesungen verwendete Literatur!

Mathematik im Studium ist Neuanfang!

- Schulmathematik nützlich, aber nicht notwendig!

Was eher wichtig wird:

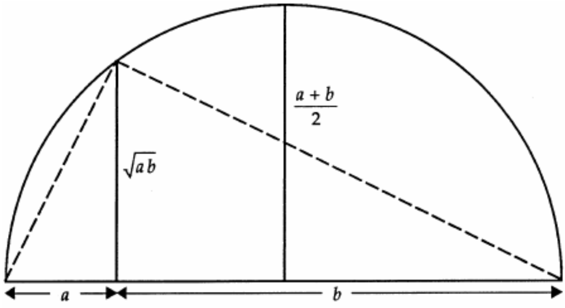
- Denken und Knobeln mögen
- Zusammenhänge verstehen wollen
- Mathematische Sprache (saubere Begriffe und Argumente!) erlernen wollen

Mathematik an der Uni - Beispiel

Für welche reellen Zahlen gilt $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$? Und wann gilt Gleichheit?

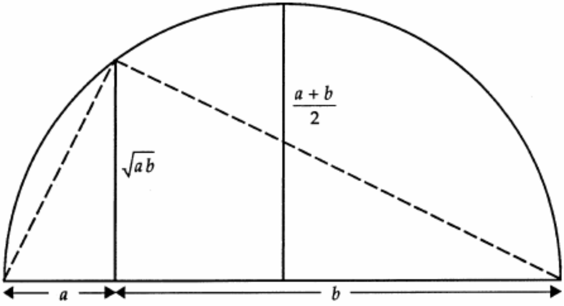
Mathematik an der Uni - Beispiel

Für welche reellen Zahlen gilt $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$? Und wann gilt Gleichheit?



Mathematik an der Uni - Beispiel

Für welche reellen Zahlen gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$?   Und wann gilt Gleichheit?



Verallgemeinerung: Für alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gilt

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

AM-GM-Ungleichung (**A**rithmetischen und **G**eometrischen **M**ittel)

Sätze und Beweise

Satz

Für alle reellen $a, b \geq 0$ gilt die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Sätze und Beweise

Satz

Für alle reellen $a, b \geq 0$ gilt die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Beweis.

Da $x^2 \geq 0$ für alle reellen x, ist für alle $a, b \geq 0$: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.
Nach Umformen ist $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.
Also folgt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. $\square$

Sätze und Beweise

Satz

Für alle reellen $a, b \geq 0$ gilt die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Beweis.

Da $x^2 \geq 0$ für alle reellen x, ist für alle $a, b \geq 0$: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.
Nach Umformen ist $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.
Also folgt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. $\square$

Satz

Die Kreiszahl π ist irrational.

Sätze und Beweise

Satz

Für alle reellen $a, b \geq 0$ gilt die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Beweis.

Da $x^2 \geq 0$ für alle reellen x, ist für alle $a, b \geq 0$: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.
Nach Umformen ist $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.
Also folgt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. □

Satz

Die Kreiszahl π ist irrational.

Der Beweis ist hier zu lang.
Die Idee: Angenommen $\pi = \frac{m}{n}$ für natürliche Zahlen $m, n \ \ldots \rightsquigarrow$ Widerspruch!

Typische Sätze im Studium werden auch mal länger sein:

Satz (Monotone Konvergenz)

Es gelten die folgenden Äquivalenzen für eine monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$*:*

- *Die monoton steigende Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *ist:*
  nach oben beschränkt $\iff$ *konvergent mit* $a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- *Die monoton fallende Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *ist:*
  nach unten beschränkt $\iff$ *konvergent mit* $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Sätze und Beweise

- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage

Sätze und Beweise

- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage

  d.h. entweder **wahr** oder **falsch** $\rightsquigarrow$ Logik

Sätze und Beweise

- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage

  d.h. entweder **wahr** oder **falsch** $\rightsquigarrow$ Logik

- Der **Beweis** ist logische/schlüssige **Begründung** aus Sätzen und Definitionen

Sätze und Beweise

- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage

  d.h. entweder **wahr** oder **falsch** $\rightsquigarrow$ Logik

- Der **Beweis** ist logische/schlüssige **Begründung** aus Sätzen und Definitionen

- Eine **Definition** erklärt einen Begriff oder Zusammenhang durch bereits bekannte Begriffe und Zusammenhänge (z.B. ist $\sqrt{2}$ die eindeutige positive reelle Zahl, die die Gleichung $x^2 = 2$ löst)

Sätze und Beweise

- Der **mathematische Satz** ist eine Aussage

  d.h. entweder **wahr** oder **falsch** $\rightsquigarrow$ Logik

- Der **Beweis** ist logische/schlüssige **Begründung** aus Sätzen und Definitionen

- Eine **Definition** erklärt einen Begriff oder Zusammenhang durch bereits bekannte Begriffe und Zusammenhänge
  (z.B. ist $\sqrt{2}$ die eindeutige positive reelle Zahl, die die Gleichung $x^2 = 2$ löst)

- **Mathematik** ist demnach die Tätigkeit, aus Sätzen und Beweisen, **neue** Sätze und **neue** Beweise zu erzeugen!

2. Aussagen

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann (auch wenn dieser Wahrheitswert unbekannt ist).

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann (auch wenn dieser Wahrheitswert unbekannt ist).

Das sind (aussagenlogische) Aussagen :

- $4 > 49/8$
- Es existiert eine Lösung von $x^2 = 42$
- Es gibt unendlich viele Primzahlen

Keine Aussagen:

- Guten Tag!
- $3 + 2 <$
- 42

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem ein Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**, eindeutig zugeordnet werden kann (auch wenn dieser Wahrheitswert unbekannt ist).

Das sind (aussagenlogische) Aussagen :

- $4 > 49/8$
- Es existiert eine Lösung von $x^2 = 42$
- Es gibt unendlich viele Primzahlen

Keine Aussagen:

- Guten Tag!
- $3 + 2 <$
- 42

Für Aussagen A, B sind zusammengesetzte Aussagen:

$\neg A$	Nicht A (A gilt nicht)
$A \wedge B$	A und B gelten gleichzeitig
$A \vee B$	Es gilt A oder B (oder beide!)
$A \Rightarrow B$	Aus A folgt B (Wenn A, dann B)
	(A ist **hinreichend** für B bzw. B ist **notwendig** für A)
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt (**logisch äquivalent**)

Die Wahrheitswerte von zusammengesetzten Aussagen werden durch **Wahrheitstabellen** (Wahrheitstafeln) festgelegt bzw. definiert.
Wir kürzen wahr (w) und falsch (f) ab:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Die Wahrheitswerte von zusammengesetzten Aussagen werden durch **Wahrheitstabellen** (Wahrheitstafeln) festgelegt bzw. definiert.
Wir kürzen wahr (w) und falsch (f) ab:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

$:=$ bzw. $:\Leftrightarrow$ Linke Seite wird **definiert** durch/als (**Definition**).
Beispiele:

- neue Aussagenoperation $A|B :\Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$.
- $n \in \mathbb{N}$ ist teilbar durch $m \in \mathbb{N}$ $:\Leftrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = mk$

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^7 < 2^{12}$

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^7 < 2^{12}$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 7 teilbar

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^7 < 2^{12}$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 7 teilbar
- Dieser Satz ist falsch

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^7 < 2^{12}$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 7 teilbar
- Dieser Satz ist falsch

  $\rightsquigarrow$ (Paradoxien, mathematische/philosophische Logik)

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^7 < 2^{12}$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 7 teilbar
- Dieser Satz ist falsch

  $\rightsquigarrow$ (Paradoxien, mathematische/philosophische Logik)
- 309 ist genau dann eine Primzahl, wenn der Mars bewohnt ist

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^7 < 2^{12}$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 7 teilbar
- Dieser Satz ist falsch

  $\rightsquigarrow$ (Paradoxien, mathematische/philosophische Logik)
- 309 ist genau dann eine Primzahl, wenn der Mars bewohnt ist
- $\pi^7 > 1000$ oder $\pi^7 \leq 1000$

Was ist eine Aussage?

- Mannheim liegt am Meer
- $4 < 7$
- Grüßgottle!
- $2^{2202} - 1$ ist eine Primzahl
- Mannheim liegt am Meer und $\pi^7 < 2^{12}$
- Wenn n durch 9 teilbar ist, dann ist es auch durch 7 teilbar
- Dieser Satz ist falsch

  $\rightsquigarrow$ (Paradoxien, mathematische/philosophische Logik)
- 309 ist genau dann eine Primzahl, wenn der Mars bewohnt ist
- $\pi^7 > 1000$ oder $\pi^7 \leq 1000$
- Peter P. spricht Französisch und Peter P. spricht nicht Französisch

Satz. Für jede Aussage A gilt:

- $A \vee \neg A$ ist immer wahr (**allgemeingültig bzw. Tautologie**)
- $A \wedge \neg A$ ist immer falsch (**Widerspruch**)

Satz. Für jede Aussage A gilt:

- $A \vee \neg A$ ist immer wahr (**allgemeingültig bzw. Tautologie**)
- $A \wedge \neg A$ ist immer falsch (**Widerspruch**)

Logische Äquivalenz von Aussagen mittels Wahrheitstafeln.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Also ist $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Wahrheitswerte weiterer zusammengesetzter Aussagen erfolgen analog iterativ.

A	B	C	$A \vee B$	$A \Rightarrow C$	$(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	f	w	f
f	f	f	f	w	f

3. Mengen

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die Elementbeziehung wird geschrieben als:

$x \in M$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die Elementbeziehung wird geschrieben als:

$x \in M$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M

Definition einer Menge oftmals mittels einer Aussage als Bedingung (**geschweiften Klammern!**):

$M := \{x : p(x)\}$ bzw. $M := \{x \mid p(x)\}$ (Menge der x, für die $p(x)$ gilt)

Ein **Prädikat** $p(x)$ wird durch Einsetzen von x zu einer Aussage. Beispiel: $x > 3$.

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, genannt **Elemente**. Die Elementbeziehung wird geschrieben als:

$x \in M$ x ist Element der Menge M

$x \notin M$ x ist nicht Element der Menge M

Definition einer Menge oftmals mittels einer Aussage als Bedingung (**geschweiften Klammern!**):

$M := \{x : p(x)\}$ bzw. $M := \{x \mid p(x)\}$ (Menge der x, für die $p(x)$ gilt)

Ein **Prädikat** $p(x)$ wird durch Einsetzen von x zu einer Aussage. Beispiel: $x > 3$.

Beispiele:

- Marsmonde $=$ {Phobos, Deimos}
- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\{1, 2, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ (drei verschiedene Elemente!)
- $\{\pi, \text{Olaf Scholz}, \{1, 3, 2\}\}$ (Elemente sind beliebig!)

Relationen und Definitionen für Mengen:

$A \subseteq B :\Leftrightarrow$ für alle $x : x \in A \Rightarrow x \in B$	A **Teilmenge** von B
$A = B :\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$	**Gleichheit (für Mengen!)**
$A \subset B \; (A \subsetneqq B) :\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$	A **echte Teilmenge** von B
$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	**Vereinigung**
$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	**Durchschnitt**
$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	**kartesisches Produkt**
$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	**Komplement** von B in A

Relationen und Definitionen für Mengen:

$A \subseteq B :\Leftrightarrow$ für alle $x : x \in A \Rightarrow x \in B$	A **Teilmenge** von B
$A = B :\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$	**Gleichheit (für Mengen!)**
$A \subset B \; (A \subsetneqq B) :\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$	A **echte Teilmenge** von B
$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	**Vereinigung**
$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	**Durchschnitt**
$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$	**kartesisches Produkt**
$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	**Komplement** von B in A

Beispiele:

- $\{1, 2\} \cup \{0, 1, 5\} = \{0, 1, 2, 5\}$
- $\{1, 2\} \cap \{0, 1, 5\} = \{1\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{0, 1, 5\} = \{2\}$
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (1, B), (2, B), (3, B)\}$

Menge von **k-Tupeln**:
$A_1 \times \cdots \times A_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\}$

Menge von **k-Tupeln**:
$A_1 \times \cdots \times A_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\}$

Beachte den Unterschied:

Menge	$\{\ldots\}$	Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
Tupel/Vektor	$(\ldots)$	Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!

Menge von **k-Tupeln**:

$A_1 \times \cdots \times A_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\}$

Beachte den Unterschied:

Menge	$\{\ldots\}$	Reihenfolge irrelevant, Elemente verschieden!
Tupel/Vektor	$(\ldots)$	Reihenfolge relevant! Elemente evtl. identisch!

- $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$ ist eine (!) Menge
- $(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1) \neq (3, 2, 1)$ sind drei verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Wichtige Zahlenmengen:

- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge $M \ : \ \emptyset \subseteq M$)

Wichtige Zahlenmengen:

- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge $M : \emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$

Wichtige Zahlenmengen:

- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge M : $\emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Wichtige Zahlenmengen:

- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge $M \ : \ \emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Wichtige Zahlenmengen:

- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge M : $\emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ (Analysis!). Es gilt: $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$

Wichtige Zahlenmengen:

- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge M : $\emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ (Analysis!). Es gilt: $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$
- **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen : $\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$

Wichtige Zahlenmengen:

- **Leere Menge** $\emptyset := \{\}$ (Es gilt für jede Menge $M\ :\ \emptyset \subseteq M$)
- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Rationale Zahlen** (Brüche) $\mathbb{Q} := \{z/n : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ (Analysis!). Es gilt: $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$
- **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen : $\mathcal{P}(M) := \{U : U \subseteq M\}$
- **Intervalle**

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(offenes Intervall)} \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, && \text{(halboffene Intervalle)} \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{(halboffene Intervalle)}
\end{aligned}
$$

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
- Für jede Menge M gilt: $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$
- $\emptyset \neq \{0\}$

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
- Für jede Menge M gilt: $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$
- $\emptyset \neq \{0\}$

- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
- Für jede Menge M gilt: $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$
- $\emptyset \neq \{0\}$

- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Die Potenzmenge der leeren Menge ist nichtleer!

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
- Für jede Menge M gilt: $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$
- $\emptyset \neq \{0\}$

- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Die Potenzmenge der leeren Menge ist nichtleer!
- $\mathcal{P}(\{1,\pi,\Omega\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{\Omega\}, \{1,\pi\}, \{1,\Omega\}, \{\pi,\Omega\}, \{1,\pi,\Omega\}\}$

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
- Für jede Menge M gilt: $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$
- $\emptyset \neq \{0\}$

- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Die Potenzmenge der leeren Menge ist nichtleer!
- $\mathcal{P}(\{1,\pi,\Omega\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{\Omega\}, \{1,\pi\}, \{1,\Omega\}, \{\pi,\Omega\}, \{1,\pi,\Omega\}\}$

Satz.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
- Für jede Menge M gilt: $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$
- $\emptyset \neq \{0\}$

- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Die Potenzmenge der leeren Menge ist nichtleer!
- $\mathcal{P}(\{1,\pi,\Omega\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{\Omega\}, \{1,\pi\}, \{1,\Omega\}, \{\pi,\Omega\}, \{1,\pi,\Omega\}\}$

Die naive Definition der Menge führte zu Widersprüchen!
($\rightsquigarrow$ Grundlagenkrise der Mathematik)
Ist das eine Menge?

$$R := \{x \text{ Menge} : x \notin x\} \quad \text{(Russell 1903)}$$

4. Abbildungen

Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B,

$$f : A \to B,\ a \mapsto f(a)$$

ordnet jedem Element $a \in A$ eindeutig ein $f(a) \in B$ zu.

- Unter einer **Funktion** (Abbildung) $f : A \to B$ für Mengen A, B versteht man also eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *eindeutig* ein $b = f(a) \in B$ zuordnet: $a \mapsto b = f(a)$.
- Dabei ist b das **Bild** von a, bzw. a das **Urbild** von b.
- Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a) | a \in C\} \subseteq B$ das **Bild** von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) = \{a | f(a) \in D\} \subseteq A$ das **Urbild** von D.
- Die Menge $f(A)$ heißt **Wertebereich/-menge** und A **Definitionsbereich/-menge** von f.

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in A : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(A) = B$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv (f heißt dann **Bijektion**)

Für eine Bijektion $f : A \to B$ heißt $f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ die **Umkehrfunktion/Inverse von** f.

- $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{gerade, ungerade\}$

- $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{gerade, ungerade\}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ (Summe)

- $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{gerade, ungerade\}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)
  Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion mit Inverse $f^{-1}(x) = (x - c)/m$

- $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{gerade, ungerade\}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)
  Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion mit Inverse $f^{-1}(x) = (x - c)/m$
- **Polynome** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ (für $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$)

- $f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{gerade, ungerade\}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)
  Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion mit Inverse $f^{-1}(x) = (x - c)/m$
- **Polynome** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ (für $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$)
- **rationale Funktionen** $p(x)/q(x)$ (für Polynome p, q), z.B. Hyperbelfunktion $1/x$

- $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{gerade, ungerade\}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)
  Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion mit Inverse $f^{-1}(x) = (x - c)/m$
- **Polynome** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ (für $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$)
- **rationale Funktionen** $p(x)/q(x)$ (für Polynome p, q), z.B. Hyperbelfunktion $1/x$
- Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist eine Bijektion. Die Inverse ist die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$.

- $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{gerade, ungerade\}$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$ (Summe)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ (lineare Funktion, $m, c \in \mathbb{R}$ fest)
  Für $m \neq 0$ ist es eine Bijektion mit Inverse $f^{-1}(x) = (x - c)/m$
- **Polynome** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ (für $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$)
- **rationale Funktionen** $p(x)/q(x)$ (für Polynome p, q), z.B. Hyperbelfunktion $1/x$
- Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist eine Bijektion. Die Inverse ist die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$.
- **Indikatorfunktion** für eine Menge $M \subseteq A$:
  $\mathbb{1}_M : A \to \{0, 1\},\ \mathbb{1}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$

Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{1, 2, \dots, n\}$ existieren.

Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren.

Ansonsten heißt die Menge **unendlich**.

Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren.

Ansonsten heißt die Menge **unendlich**.

Eine unendliche Menge A heißt **abzählbar unendlich**, falls es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.

Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren.

Ansonsten heißt die Menge **unendlich**.

Eine unendliche Menge A heißt **abzählbar unendlich**, falls es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.

Ansonsten heißt die Menge **überabzählbar**.

Eine Menge A heißt **endlich**, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren.

Ansonsten heißt die Menge **unendlich**.

Eine unendliche Menge A heißt **abzählbar unendlich**, falls es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.

Ansonsten heißt die Menge **überabzählbar**.

Hilfreiches Tool für Visualisierung von Funktionen und Berechnungen z.B. `www.desmos.com`.

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von** f

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von** f

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von f**

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von** f

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist surjektiv aber nicht injektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von f**

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist surjektiv aber nicht injektiv
- $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von f**

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist surjektiv aber nicht injektiv
- $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv
- $f : [0, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist bijektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von** f

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist surjektiv aber nicht injektiv
- $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv
- $f : [0, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist bijektiv
- Anzahl Elemente: $|\cdot| : \{M \subset \mathbb{Z} : M \text{ endlich}\} \to \mathbb{N}_0$ ist nur surjektiv

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

injektiv $:\Leftrightarrow$ für alle $x, z \in X : (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z)$

surjektiv $:\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$

bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x := f^{-1}(y)$ **Umkehrfunktion von** f

Beispiele:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ ist bijektiv
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist surjektiv aber nicht injektiv
- $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv
- $f : [0, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \cos(x)$ ist bijektiv
- Anzahl Elemente: $|\cdot| : \{M \subset \mathbb{Z} : M \text{ endlich}\} \to \mathbb{N}_0$ ist nur surjektiv
- Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, f(x) = e^x$ ist bijektiv