Potenzen und Logarithmen - Lösungen

Potenzen: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\quad a^m \cdot b^m = (ab)^m$, $\quad (a^m)^n = a^{mn}$, $\quad (c^m)/(c^n) = c^{m-n}$, $\quad (a^m)/(c^m) = (a/c)^m$

Ebenso für Exponenten in $\mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{R}$) (sofern dann $a, b, c > 0$). Für $m, n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ ist daher z.B. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{1/m} \cdot a^{1/n} = a^{1/m+1/n} = a^{(m+n)/(mn)} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

Logarithmen: Seien $a, b > 0$, $b \neq 1$ ist: $x = \log_b(a) \Leftrightarrow x$ löst eindeutig $b^x = a$.
Natürlicher Logarithmus ln zur Basis e (Analysis).
Umrechnungen: $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$, $a^b = e^{\ln(a)b}$ Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$: $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$, $\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$, $\log_b(x^z) = z\log_b(x)$, $\quad 1 = \log_x(y) \cdot \log_y(x)$

Aufgabe 1

Vereinfache soweit wie möglich und bestimme für welche $x, y \in \mathbb{R}$ der Term wohldefiniert ist:

(a) $\dfrac{(12^2)^4 \cdot (8^4)^3}{(4^4)^6}$

(b) $\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{8}}}$

(c) $\dfrac{(2x^2y^3)^4}{(4x^3y^4)^2}$

(d) $(x^{-2}y^3)^4 x^{3^2}$

(e) $\dfrac{x+1}{x^2-x} - \dfrac{x-1}{x^2+x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2-1}$

(f) $\dfrac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{1 + \frac{x+1}{x-1}}$

(g) $\sqrt{x^3y^2} \cdot \sqrt[4]{x^9} \cdot \sqrt[3]{y^2}$

(h) $\dfrac{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^4-y^4}}$

Lösung (a): $3^8 \cdot 2^4$, (b): $2^{11/8} = \sqrt[8]{2^{11}}$, (c): x^2y^4 für alle $x, y \in \mathbb{R}$, (d): xy^{12} für alle $x, y \in \mathbb{R}$, (e): x^{-1} für $x \neq 0$, (f): x^{-1} für alle $x \neq 0$, (g): $\sqrt[4]{x^15}\sqrt{y^5}$ für alle $x, y \geq 0$, (h): $\sqrt{x-y}^{-1}$ für $x + y, x - y > 0$.

Aufgabe 2

(a) Welche der beiden Zahlen $a = (10^{10})^{10}$ und $b = 10^{10^{10}}$ hat mehr Stellen? Wieviele Stellen hat die kleinere?
(b) Schreibe $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ mit einem rationalen Nenner?
(c) Entscheide, ob die Zahl positiv, null oder negativ ist: $\ln\left(\log_3(\sqrt[4]{81})\right)$.
(d) Vereinfache die Terme soweit wie möglich: $\log_2(1/8)$, $\quad \ln(e \cdot \sqrt[3]{e})$, $\quad 81^{\frac{1}{2} \cdot \log_3(7)}$
(e) Bestimme jeweils alle $x \in \mathbb{R}$: $\log_{1/2}(x) = -3$.
(f) Bestimme jeweils alle $x \in \mathbb{R}$: $\log_x(16) = -5$.

Lösung (a): a hat 100 Stellen, b hat 10^{10} Stellen, (b): $2 - \sqrt{3}$, (c): $= 0$, (d): -3; $4/3$; 49, (e): $x = 8$, (f): $x = 16^{-1/5}$.