

## Gleichungen und Ungleichungen - Lösungen

Für den **Betrag**, definiert durch eine Fallunterscheidung,

$$x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

und alle  $x \in \mathbb{R}$  folgen durch Fallunterscheidung nach  $\geq 0$  /  $< 0$  direkt die Eigenschaften:

- $|-x| = |x| \geq 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

*Wichtige Ungleichungen:* Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gelten:

- Für  $c > 0$  und  $a > b \geq 0$  ist  $ac > bc$
  - Für  $c < 0$  und  $a > b \geq 0$  ist  $ac < bc \leq 0$
  - $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow |ab| \leq (a^2 + b^2)/2$
- 

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in den reellen Zahlen (d.h. die Menge der  $x \in \mathbb{R}$ ):

- (a)  $|x - 3| = 10$
- (b)  $|x + 2| \leq 5$
- (c)  $x^3 + x^2 - 2x = 0$
- (d)  $(x - 1)^2(x + 2) = 4(x + 2)$
- (e)  $\sqrt{x} + \sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2} = 0$
- (f)  $\sqrt{\frac{4-x}{x+2}} = 1$
- (g)  $|x + 1| = |x - 1| + 1$

**Lösung** (a):  $\{13, -7\}$ , (b):  $[-7, 3]$ , (c):  $\{-2, 0, 1\}$ , (d):  $\{-2, -1, 3\}$ , (e):  $\emptyset$ , (f):  $\{1\}$ , (g):  $\{1/2\}$ .

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  mit:

- (a)  $2^{6x-2} = 4^{2x+3}$
- (b)  $3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$
- (c)  $\ln(x) - \ln(x^2) = 5$
- (d)  $(\ln(x))^x = 1$
- (e)  $\frac{1}{1-x} \leq 1$

**Lösung** (a):  $\{4\}$ , (b)  $\{0, \ln(2/3)\}$ , (c):  $\{e^{-5}\}$ , (d):  $x = e$ , (e):  $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ .

### Aufgabe 3

Begründen Sie nur mit Kopfrechnen:

- (a) Die Zahl  $\left(\frac{98}{43}\right)^3$  liegt zwischen 8 und 27.
- (b) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt  $\sqrt{75}$ ?

**Lösung** (a)  $2 \leq \frac{98}{43} \leq 3$ , (b): Wegen  $64 < 75 < 81$  ist  $8 < \sqrt{75} < 9$ .