

Gleichungen und Ungleichungen

Für den **Betrag**, definiert durch eine Fallunterscheidung,

$$x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

und alle $x \in \mathbb{R}$ folgen durch Fallunterscheidung nach ≥ 0 / < 0 direkt die Eigenschaften:

- $|-x| = |x| \geq 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

Wichtige Ungleichungen: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten:

- Für $c > 0$ und $a > b \geq 0$ ist $ac > bc$
 - Für $c < 0$ und $a > b \geq 0$ ist $ac < bc \leq 0$
 - $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow |ab| \leq (a^2 + b^2)/2$
-

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in den reellen Zahlen (d.h. die Menge der $x \in \mathbb{R}$):

(a) $|x - 3| = 10$

(e) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 0$

(b) $|x + 2| \leq 5$

(f) $\sqrt{\frac{4-x}{x+2}} = 1$

(c) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

(d) $(x - 1)^2(x + 2) = 4(x + 2)$

(g) $|x + 1| = |x - 1| + 1$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit:

(a) $2^{6x-2} = 4^{2x+3}$

(d) $(\ln(x))^x = 1$

(b) $3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$

(e) $\frac{1}{1-x} \leq 1$

(c) $\ln(x) - \ln(x^2) = 5$

Aufgabe 3

Begründen Sie nur mit Kopfrechnen:

(a) Die Zahl $\left(\frac{98}{43}\right)^3$ liegt zwischen 8 und 27.

(b) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt $\sqrt{75}$?