Funktionen - Lösungen

Aufgabe 1

(a) Geben Sie eine explizite Darstellung der folgenden Funktionen $y = f(x)$ an:

$$(i)\ 3x + 5y = 10, \qquad (ii)\ 4x^2 - 3y/2 + x = 9$$

(b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich in den reellen Zahlen:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{4-x^2}, \qquad g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

(c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und den Wertebereich:

$$f(x) = \sqrt{1-|x|}, \qquad g(x) = \left(\sqrt{x-|x|}\right)^{-1}$$

(d) Skizziere die Graphen der Funktionen:

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2 + \sin(x), \quad h(x) = 2\sin(x), \quad k(x) = -\cos(-x)$$

(e) Welche Symmetrien besitzen die Funktionen (bzw. deren Graphen) ?

$$f(x) = x^9 + 4x^7, \qquad g(x) = \pi|x|, \qquad h(x) = e^{-x}$$

(f) Bestimmen Sie Definitionsbereich, Wertebereich und Umkehrfunktion f^{-1} (falls vorhanden):

$$(1.)\ y = \frac{3}{2}\sqrt{2x+3}, \qquad (2.)\ y = 3^{x-2}, \qquad (3.)\ y = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

Lösung (a): (i) $f(x) = 2 - 3x/5$, (ii) $f(x) = \frac{8}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 6$, (b): f: $[1,2) \cup (2,\infty)$, g: $(-\infty,-2) \cup (1,\infty)$, (c): f: $D_f = [-1,1]$, $W_f = [0,1]$, g: nicht definiert, (d): selber!, (e): f: ungerade (Punktsymmetrie in $(0,0)$), g: gerade (symmetrisch bzgl. y-Achse), h: nix, (f): (1.) $D_f = [-3/2,\infty)$, $W_f = [0,\infty)$, $f^{-1}(y) = \frac{2}{9}y^2 - \frac{3}{2}$, (2.) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = (0,\infty)$, $f^{-1}(y) = 2 + \log_3(y)$, (3.) $D_f = (0,\infty)$, $W_f = [-4,1)$, $f^{-1}(y) = (\frac{4+y}{1-y})^2$.

Aufgabe 2

Modellieren Sie den Tagesgang der Temperatur durch eine Sinusfunktion. Um 16:00 Uhr ist die Temperatur mit $25°C$ am höchsten. Nachts um 4:00 Uhr ist es mit $3°C$ am kältesten. Schätzen Sie damit die Temperatur um 10:00 Uhr.

Lösung $14°C$.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Welche Aussagen sind wahr oder falsch? Begründen Sie mit den Eigenschaften oder einem Gegenbeispiel:

(a) Wenn $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 eine Extremalstelle von f.

(b) Wenn x_0 eine Extremalstelle von f, dann ist $f'(x_0) = 0$.

(c) Wenn $f'(x_0) < 0$, so ist der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ein Hochpunkt des Graphen von f.

Lösung (a): Falsch, kann Wendepunkt sein, Bsp. $f(x) = x^3$ in $x = 0$, (b) Falsch, Bsp. Betrag $f(x) = |x|$ in $x = 0$, (c) Falsch, Bsp. $f(x) = -x$.