Funktionen

Eine **Abbildung oder Funktion** zwischen zwei Mengen A und B,$f : A \to B$, $a \mapsto f(a)$ordnet jedem Element $a \in A$ **eindeutig** ein $f(a) = b \in B$ zu (f *von* A *nach* B). Dabei ist b das Bild von a, bzw. a das Urbild von b. Für $C \subseteq A$ heißt $f(C) = \{f(a) | a \in C\} \subseteq B$ das Bild von C und für $D \subseteq B$ heißt $f^{-1}(D) := \{a | f(a) \in D\} \subseteq A$ das Urbild von D (d.h. die Menge aller Urbilder von Elementen in D). Die Menge $f(A)$ heißt Wertebereich und A Definitionsbereich von f.

Aufgabe 1

(a) Geben Sie eine explizite Darstellung der folgenden Funktionen $y = f(x)$ an:

$$(i)\ 3x + 5y = 10, \qquad (ii)\ 4x^2 - 3y/2 + x = 9$$

(b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich in den reellen Zahlen:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{4-x^2}, \qquad g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

(c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und den Wertebereich:

$$f(x) = \sqrt{1-|x|}, \qquad g(x) = \left(\sqrt{x-|x|}\right)^{-1}$$

(d) Skizziere die Graphen der Funktionen:

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2 + \sin(x), \quad h(x) = 2\sin(x), \quad k(x) = -\cos(-x)$$

(e) Welche Symmetrien besitzen die Funktionen (bzw. deren Graphen) ?

$$f(x) = x^9 + 4x^7, \qquad g(x) = \pi|x|, \qquad h(x) = e^{-x}$$

(f) Bestimmen Sie Definitionsbereich, Wertebereich und Umkehrfunktion f^{-1} (falls vorhanden):

$$(1.)\ y = \frac{3}{2}\sqrt{2x+3}, \qquad (2.)\ y = 3^{x-2}, \qquad (3.)\ y = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

Aufgabe 2

Modellieren Sie den Tagesgang der Temperatur durch eine Sinusfunktion. Um 16:00 Uhr ist die Temperatur mit $25°C$ am höchsten. Nachts um 4:00 Uhr ist es mit $3°C$ am kältesten. Schätzen Sie damit die Temperatur um 10:00 Uhr.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Welche Aussagen sind wahr oder falsch? Begründen Sie mit den Eigenschaften oder einem Gegenbeispiel:

(a) Wenn $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 eine Extremalstelle von f.

(b) Wenn x_0 eine Extremalstelle von f, dann ist $f'(x_0) = 0$.

(c) Wenn $f'(x_0) < 0$, so ist der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ein Hochpunkt des Graphen von f.